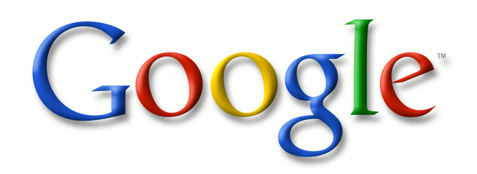
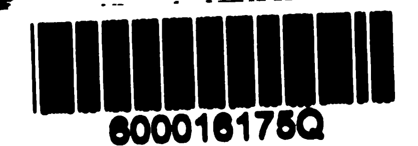
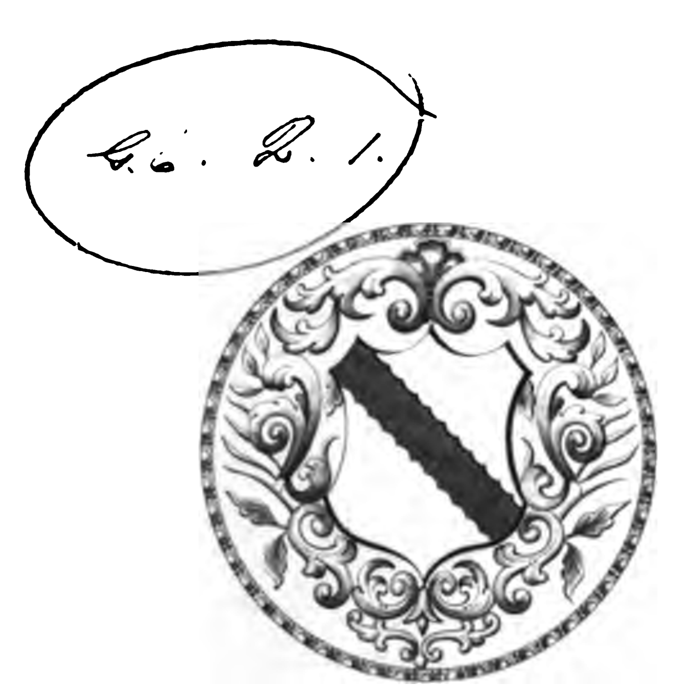
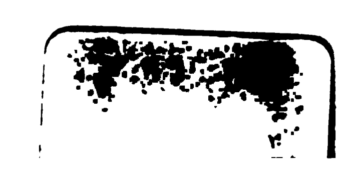


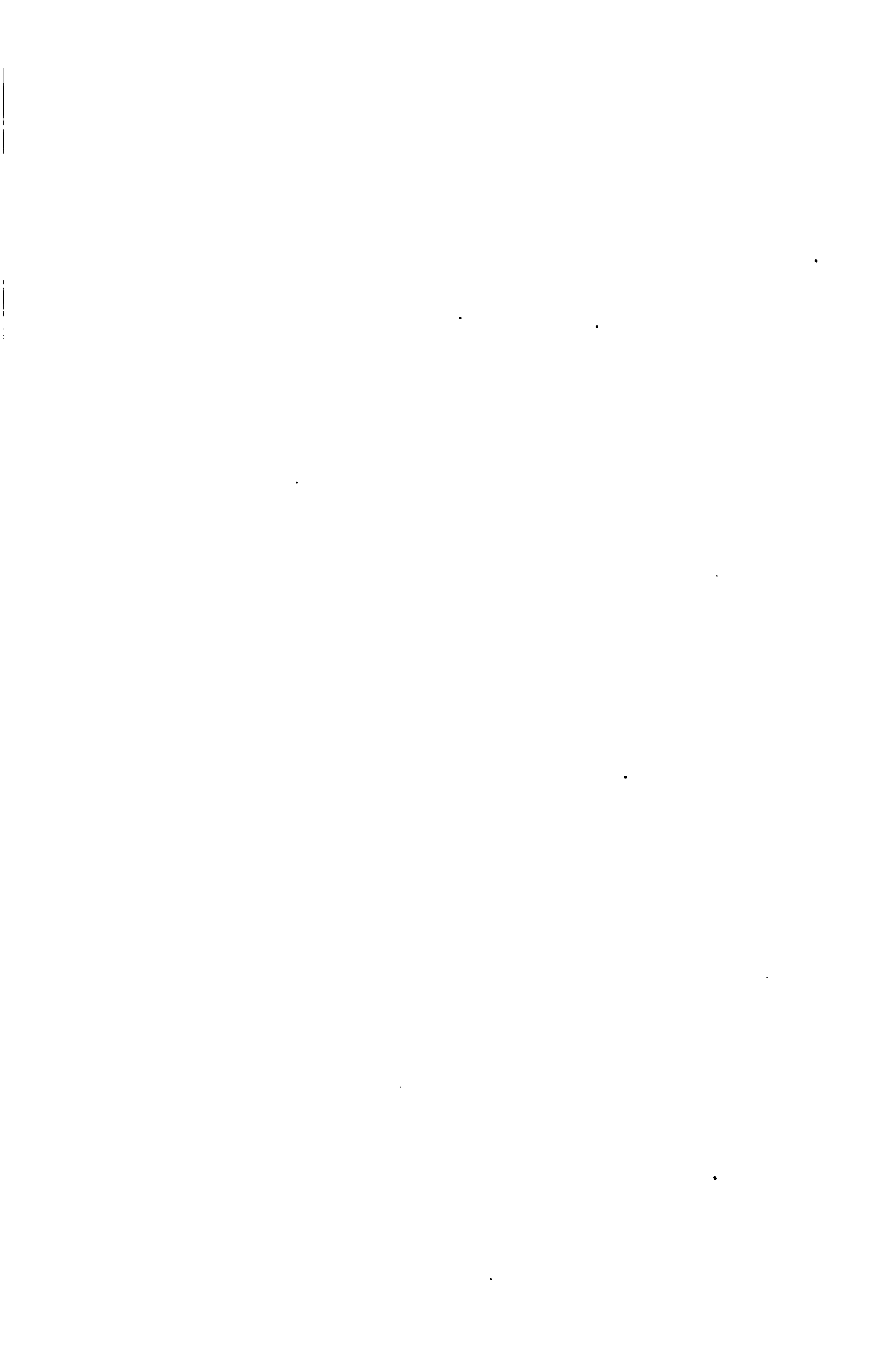














THEORIE

DER

BEWEGUNG UND DER KRÄFTE.

EIN LEHRBUCH

DER

THEORETISCHEN MECHANIK,

MIT BESONDERER RÜCKSICHT

AUF DIE BEDÜRFNISSE TECHNISCHER HOCHSCHULEN

BEARBEITET VON

Dr. WILHELM SCHELL,

PROFESSOR AM POLYTECHNICUM ZU CARLSRUHE.

„Geometrica geometrice"

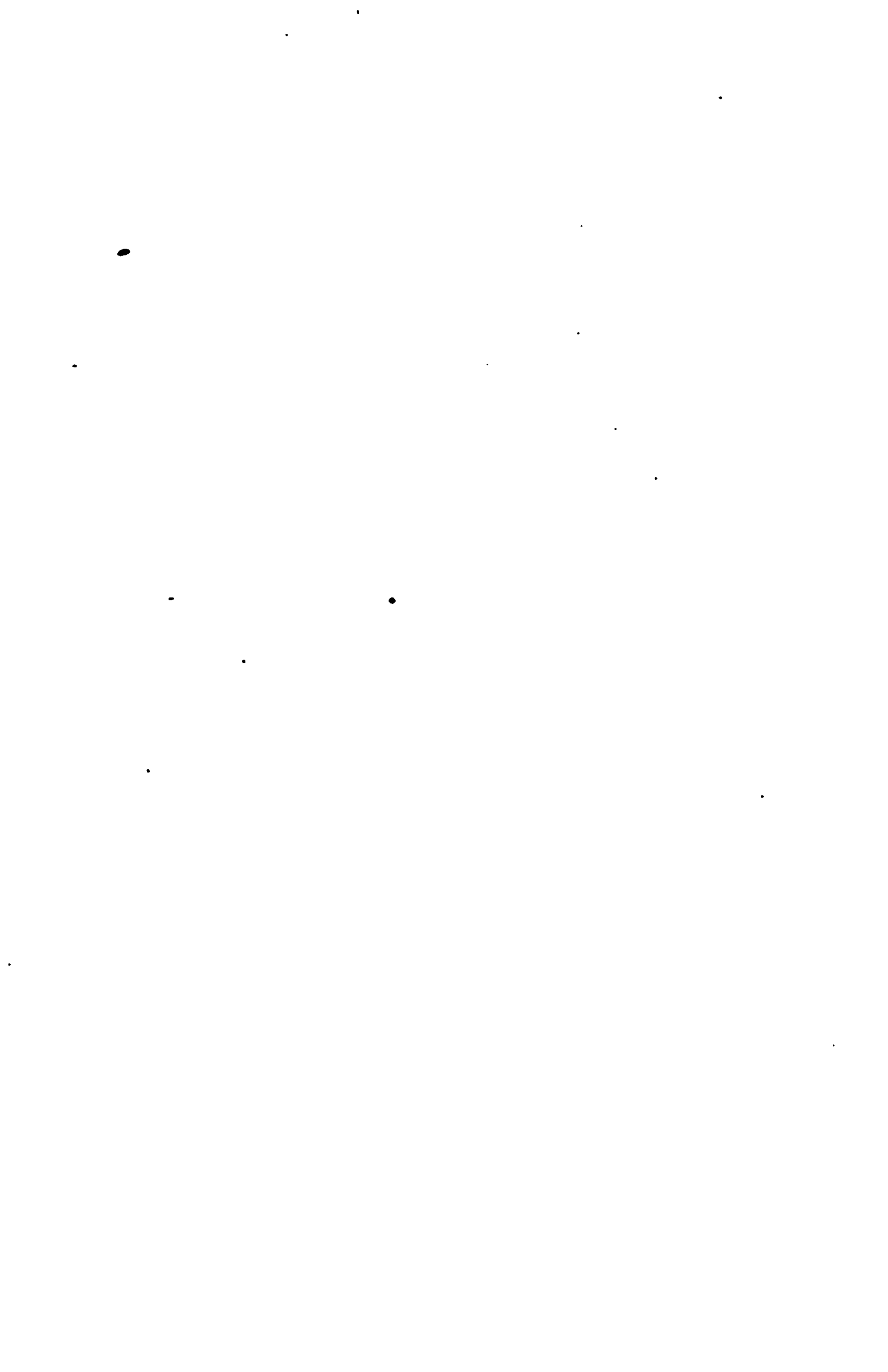
MIT VIELEN IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1870.



VORWORT.

Das vorliegende Elementarbuch der Mechanik schliesst sich hinsichtlich des Lehrganges den besseren vorhandenen Werken im Allgemeinen an, geht aber im Einzelnen einen beträchtlichen Schritt weiter. Voran steht die Geometrie der Bewegung, eine Lehre, welche darauf abzielt, zu zeigen, dass die reine Bewegungstheorie, insofern sie von den Begriffen, welche die Energie der Bewegung ausdrücken, absieht, mit der Theorie der geometrischen Verwandtschaften im Grunde identisch ist. Durch das Voranstellen dieser Lehre tritt der geometrische Charakter der Mechanik mit der wünschenswerthen Deutlichkeit hervor. Der folgende Theil entwickelt den Begriff der Geschwindigkeit, der dritte den der Beschleunigung der ersten und zweiten Ordnung und gibt die nöthigen Andeutungen bezüglich der Beschleunigung höherer Ordnungen. Endlich der letzte Theil behandelt den aus der Uebereinanderlagerung der Systeme entspringenden Begriff der Masse, der Geschwindigkeit und der Beschleunigungen in zusammengesetzten Systemen. Er führt den herkömmlichen Namen der Theorie der Kräfte, wenn auch von den „unbekannten Ursachen der Bewegung“ darin ebensowenig etwas gelehrt wird, als in anderen Lehrbüchern, sondern nur von Grössen mv, $m\varphi$, u. s. w., welche im Grunde nichts weiter als Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zusammengesetzter Punkte sind. Von Kräften, als solchen, lehrt keine Mechanik etwas, ebensowenig als von der Ruhe.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass der hier adoptirte Lehrgang dem heutigen Entwickelungsgange der Wissenschaft besser entspricht, als viele andere. Auch hat er die gewaltige Autorität Jacobi's

für sich, der bereits bei seiner Doctorpromotion am 13. August 1825 als fünfte These den Satz vertheidigte:

"Theoria mechanices analytica causam agnoscere nullam potest, quidni, sicuti differentialia prima velocitatis nomine, secunda virium insignimus, simile quid ad altiora quoque differentialia adhibeatur; de quibus theoremata proponi possint prorsus analoga iis, quae de vi et de velocitate circumferuntur".

Die wissenschaftlichen Vortheile dieses Lehrganges bestehen hauptsächlich 1. in dem scharf ausgeprägten synthetischen Aufbau der Wissenschaft überhaupt, 2. in dem engeren Anschlusse an die analoge Aufstufung der Differentialrechnung und wenn man will an die Lehre von der geometrischen Differentiation, Hamilton's Quaternions u. s. w., 3. in der breiteren Anlage des Grundplanes der Wissenschaft, in welchen sich sehr ungezwungen weitere Lehren einfügen lassen, 4. in der klaren Stellung, welche die sogenannten Principe der Mechanik für die verschiedenen Ordnungen erlangen, 5. in dem Wegfallen verschiedener Axiome und Principien rein physicalischen Inhaltes, endlich 6. in der Vermeidung der unlogischen Spaltung der mechanischen Wissenschaft in die Lehre vom Gleichgewichte und der Bewegung (gibt es doch auch ein Gleichgewicht der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen aller Ordnungen). Hiezu kommen aber noch einige nicht unwesentliche pädagogische Vortheile, welche bestehen: 1. in der grösseren Durchsichtigkeit des Studienplanes, 2. in der nützlichen Wiederholung gewisser Algorithmen auf den verschiedenen Stufen des Lehrganges, 3. in der Anregung zur Aufsuchung von Analogien zwischen den einzelnen Zweigen der Mechanik und 4. in der Vermeidung gewisser misslicher Verwechslungen bei dem Studirenden, wie zwischen Gleichgewicht und Ruhe, zwischen den mechanischen Begriffen und den Voraussetzungen der physicalischen Wissenschaften, zwischen den Gedanken des Mathematikers und ihrer Projection auf die Aussenwelt.

Das Buch ist geschrieben für solche Studirende, welche eine gute Grundlage für künftige technische Studien suchen, welche aber bereits irgend einen einleitenden Cursus der Mechanik und einen ersten Cursus der Differential- und Integralrechnung absolvirt haben und die nothwendigsten geometrischen Kenntnisse besitzen. Es soll ihnen die mechanische Wissenschaft in einer consequenten, systematisch geordneten Darstellung vorführen; es soll sie in den Stand setzen, die

neueren Erscheinungen der Literatur mit Nutzen zu studiren, ihnen einige Uebung verschaffen, ein mechanisches Problem einzukleiden und zu lösen, sowie endlich sie zu dem Studium der Quellen, der Literaturkenntniss und der Geschichte der Wissenschaft anleiten.

Mit Rücksicht auf den geringen Grad von Vorkenntnissen, welche das Buch voraussetzt, mussten verschiedene Theorien, die ein Handbuch zu geben verpflichtet ist, hier beiseite gelassen werden. Dahin gehört die vollständige Reduction von Problemen, welche von elliptischen Functionen abhängen, die feineren Untersuchungen der Potentialtheorie, eine ausgeführte Theorie der elastischen Systeme, die Bewegung von Systemen in flüssigen Medien, eine allgemeine Theorie der relativen Bewegung, Störungstheorie, die ausführliche Theorie des Jacobi'schen letzten Multiplicators, der Hamilton'schen Quaternions in ihrer Anwendung auf Mechanik, der Plücker'schen neuen Methoden u. s. w. Dagegen wurde vieles andere im Einzelnen sorgfältiger ausgearbeitet, als wohl sonst zu geschehen pflegt. Dahin gehört der ganze erste Theil, die Geometrie der Bewegung, insbesondere die geometrische Theorie der relativen Bewegung, die Reduction von Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräften für ihre Centralaxen, die Beschleunigung zweiter und höherer Ordnung, die Theorie der Krümmung der Bahnen der Punkte des unveränderlichen Systems, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, die Theorie des Trägheitsmomentes, die Theorie der Momentankräfte u. s. w.

Die Darstellungsweise wird man, wie ich hoffe, klar finden. Es ist natürlich, dass sie zu Anfang des Buches ausführlicher und breiter sein muss, als in späteren Parthien, denn der Studirende wird durch das Buch selbst allmählig auf eine höhere Stufe mathematischer Bildung gehoben. Von Ueberschwänglichkeiten beim Begriff der lebendigen Kraft wird man nichts finden; der theoretischen Mechanik ziemt eine Nüchternheit, die in der Physik bei weitem noch nicht allgemein ist. Dass von einem Principe der Trägheit im Buche nicht die Rede sein konnte und dasselbe nicht vermisst wird, wird man begreiflich finden.

Der kundige Leser wird die Eigenthümlichkeit des Buches weniger im Grossen und Ganzen als in einer Menge kleiner Züge bemerken, welche darauf abzielen, den Studirenden die ersten Schritte geschickt machen zu lehren, ihn allmählig auf ein gewisses wissenschaftliches

Niveau zu erheben, ihm von da den gesicherten Besitz der Wissenschaft zu zeigen, ihn zur eigenen Thätigkeit anzuspornen und ihm das Gefühl hoher Achtung vor den Werken der grossen Meister mit in seinen technischen Beruf zu geben, in welchem die erhebende Idealität des mathematischen Gedankens für unsere Zeit immer mehr Bedürfniss wird.

Carlsruhe, den 21. October 1870.

Schell.

Es wird gebeten, vor dem Gebrauche des Buches die Verbesserungen und Zusätze zu berücksichtigen, welche am Schlusse angefügt sind..

Inhalt.

III. Capitel. Bewegung eines unveränderlichen Systems parallel einer Ebene. (S. 27—55.)

IV. Capitel. Aequivalenz der Rotationen um Axen, welche sich in demselben Punkte schneiden. Rotation eines unveränderlichen Systems um einen Punkt. (S. 55—65.)

V. Capitel. Aequivalenz von Translationen und Rotationen um gekreuzte Axen mit der Schraubenbewegung. Die allgemeinste Art der Bewegung eines unveränderlichen Systems. (S. 66—87.)

VI. Capitel. Relative Bewegung eines unveränderlichen Systems. (S. 87—100.)

Zweiter Theil.

Die Geschwindigkeit der Bewegung. (S. 101—182.)

I. Capitel. Die Geschwindigkeit eines Punktes. Projectionen der Geschwindigkeit auf Axen und Ebenen. (S. 101—113.)

II. Capitel. Aequivalenz der Geschwindigkeiten eines Punktes. Parallelogramm und Parallelepiped der Geschwindigkeiten. Construction der Tangenten von Roberval. (S. 113—122).

III. Capitel. Aequivalenz der Translationsgeschwindigkeiten und der Winkelgeschwindigkeiten um parallele Axen. Geschwindigkeiten im unveränderlichen System, welches sich parallel einer Ebene bewegt. (S. 122—138.)

Dritter Theil.

Die Beschleunigung der Bewegung. (S. 183—485.)

I. Capitel. Die Beschleunigung der Bewegung eines Punktes. Projectionen und Componenten der Beschleunigung. Arbeit der Beschleunigung. Sectorenbeschleunigung. (S. 183—215.)

II. Capitel. Probleme der geradlinigen Bewegung eines Punktes. (S. 215—234.)

III. Capitel. Probleme der krummlinigen Bewegung eines Punktes. (S. 234—306.)

Vierter Theil.

Theorie der Kräfte. (S. 486—966.)

IV. Capitel. Aequivalenz ebener Kräftesysteme am unveränderlichen Punktsystem. (S. 541—550.)

V. Capitel. Aequivalenz räumlicher Kräftesysteme am unveränderlichen Punktsystem (S. 551—576.)

VI. Capitel. Mittelpunkt der Kräfte, Gleichgewichtsaxen und Sicherheit des Gleichgewichts am unveränderlichen System. (S. 576—594.)

VII. Capitel. Bedingungen des Gleichgewichts eines Kräftesystems, welches an einem beliebigen unveränderlichen oder veränderlichen Punktsystem angreift. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. (S. 594—630.)

VIII. Capitel. Gleichgewicht von Kräften an einigen veränderlichen Systemen. (S. 630—657.)

IX. Capitel. Reduction der Attractions- und Repulsionskräfte von Massen, Agentien etc. Theorie des Potentials. (S. 657—717.)

X. Capitel. Reduction der Widerstände von Flächen und Curven. (S. 717—726.)

XV. Capitel. Die Bewegungsgleichungen eines beliebigen veränderlichen Systems. D'Alembert's Princip. Das Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges. Verwandtschaft der Bewegungen. Newtons Satz über die Aehnlichkeit der Bewegungen. (S. 861—885.)

XVI. Capitel. Die Principe der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes, der Flächen, der lebendigen Kraft, und der kleinsten Wirkung für das veränderliche System. (S. 885—914.)



Einleitung.

§. 1. Mechanik ist die Wissenschaft der Bewegung und ihrer Ursachen; ihre Untersuchungen betreffen daher: 1. das Bewegliche, 2. die Beschaffenheit der Bewegung und 3. das, was die Bewegung hervorruft.

§. 2. Das Bewegliche ist ein materielles Gebilde. Das einfachste materielle Gebilde ist der materielle Punkt; er ist ein geometrischer Punkt mit Materie behaftet. Aus materiellen Punkten ist das materielle Punktsystem, auch kurzweg System genannt, gebildet; es ist entweder ein Aggregat materieller Punkte, welche durch Zwischenräume getrennt, nach bestimmten Gesetzen im Raume geordnet sind, oder eine continuirlich zusammenhängende Folge materieller Punkte, oder eine Verbindung von Aggregaten und continuirlichen Folgen materieller Punkte. Die Systeme der ersten Art sind: 1. die materielle Punktreihe, eine Reihe gesonderter materieller Punkte längs einer Linie vertheilt; 2. das Netz, eine Verbindung getrennt neben einander liegender Punktreihen und 3. das körperliche System, welches in ähnlicher Weise aus einer Verbindung von Netzen gebildet ist. Die Systeme der zweiten Art sind: 1. die materielle Linie, eine continuirliche Folge materieller Punkte längs einer geometrischen Linie, 2. die materielle Fläche, eine geometrische Fläche, continuirlich mit materiellen Punkten bedeckt und unzählig viele materielle Linien enthaltend und 3. der materielle Körper, ein geometrischer Körper, continuirlich mit materiellen Punkten erfüllt und unzählige materielle Flächen und Linien enthaltend. Die Systeme der zweiten Art können aus den ihnen entsprechenden der ersten Art durch einen Grenzenübergang abgeleitet werden, nämlich die materielle Linie aus der materiellen Punktreihe durch eine ohne Ende fortzusetzende Einschaltung von Punkten zwischen die vorhandenen, die materielle Fläche aus dem Netze in gleicher Weise durch Einschaltung von Punktreihen, welche selbst in dem Prozess des Ueberganges in materielle Linien begriffen sind, und der materielle Körper aus dem körperlichen System durch Einschaltung von Netzen, welche sich fort-

während materiellen Flächen nähern. Zu den Systemen der dritten Art gehören: 1. die Faserreihe, eine geordnete Folge materieller, durch Zwischenräume gesonderter Linien, 2. das Fasersystem, gebildet aus einer Folge von Faserreihen, welche durch Zwischenräume von einander getrennt sind, 3. das einfache Gewebe, eine Verbindung zweier Faserreihen, welche so liegen, dass jede Faserlinie der einen Reihe alle Faserlinien der andern Reihe schneidet, 4. das zusammengesetzte (körperliche) Gewebe, eine Verbindung mehrerer einfacher Gewebe, welche durch ein System von Faserreihen durchsetzt werden, 5. die Schalenreihe, eine Folge materieller Flächen, durch Zwischenräume von einander getrennt, 6. das Fachsystem, bestehend aus zwei oder drei Schalenreihen, welche sich wechselseitig durchschneiden, 7. die einfache Stabreihe und 8. das Stabsystem, in ähnlicher Weise, wie die Faserreihe und das Fasersystem aus materiellen Linien besteht, aus stabförmigen materiellen Körpern gebildet, 9. das einfache Stabgitter und 10. das Stabgittersystem, welche beiden letzteren Systeme dem einfachen und zusammengesetzten Gewebe analog sind.

Den hier aufgeführten materiellen Gebilden legt die Mechanik weitere Eigenschaften bei, welche die Beständigkeit oder Veränderlichkeit der Verbindung und Gruppirung ihrer Elemente, nämlich ihrer Punkte, Linien, Fasern etc. unter einander betreffen. Ein System heisst unveränderlich, wenn während der Bewegung seine Punkte ihre gegenseitige Lage nicht ändern, veränderlich in jedem andern Falle. Unter die unveränderlichen Systeme gehört das starre System, unter die veränderlichen das biegsame, das elastische, das tropfbarflüssige und das elastischflüssige System.

In vielen Untersuchungen der Mechanik kann von der materiellen Beschaffenheit der beweglichen Gebilde abgesehen werden; dann werden dieselben rein geometrische Gebilde, denen ausser der Beweglichkeit auch noch die eben genannten Eigenschaften der Biegsamkeit, Elasticität etc. verbleiben können. Im Uebrigen muss bemerkt werden, dass die Gebilde der Mechanik, wie sie hier aufgefasst werden, nur gedachte Dinge sind, wie die geometrischen und dass bei der Anwendung der Mechanik auf Vorgänge der physischen Welt in jedem einzelnen Falle sorgfältig zu prüfen ist, mit welcher Berechtigung und mit welchem Grade der Annäherung an die Wirklichkeit man einen physischen Körper als ein materielles System der einen oder andern Art ansehen darf.

§. 3. Hinsichtlich der Beschaffenheit der Bewegung hat man zweierlei zu unterscheiden: 1. den geometrischen Vorgang der Bewegung und 2. die Energie, mit welcher die Bewegung erfolgt.

Es sei im Raume eine continuirliche Folge von Gebilden derselben Art (Punkte, Flächen, körperliche Systeme etc.) gegeben; ein anderes

Gebilde, welches je nach Beschaffenheit der in der Folge enthaltenen Gebilde unveränderlich oder veränderlich sei, falle der Reihe nach mit jenen zusammen. Dies letztere Gebilde heisst alsdann ein in Bewegung begriffenes und sein Durchgang durch die Folge der Gebilde seine Bewegung im Raume. Das dauernde Zusammenfallen des Gebildes mit ein und demselben Gebilde heisst die Ruhe desselben in jenem.

Es sei in einem in Bewegung begriffenen Systeme eine continuirliche Folge von Gebilden derselben Art (veränderlich oder unveränderlich) und im Raume ein einzelnes Gebilde dieser Art gegeben, mit welchem der Reihe nach die Gebilde der Folge zusammenfallen. Der Durchgang der Gebilde der Folge durch jenes einzelne Gebilde heisst die Bewegung des Systems in diesem letzteren. Je nachdem die Gebilde der Folge congruent und unveränderlich oder veränderlich und verschieden sind, wird das einzelne Gebilde unveränderlich oder veränderlich sein.

Die beiden genannten Arten der Bewegung stehen einander in gewissem Sinn dual gegenüber. Sie können an dem Mechanismus der Drehbank leicht versinnlicht werden. Befestigt man das Werkzeug an der Axe und hält das zu bearbeitende Material fest, so durchläuft die Schärfe desselben (als bewegliches System) eine continuirliche Folge ihr congruenter Gebilde im Material, befestigt man aber das Material an der Axe und hält das Werkzeug fest, so durchläuft eine Reihe der Schärfe des Werkzeugs congruenter Gebilde die Schärfe.

Die Bewegung eines Systems wird aus der Bewegung seiner Punkte erkannt. Daher beginnt das Studium der Mechanik in allen seinen einzelnen Theilen mit dem Studium der Bewegung des Punktes.

Die Bewegung eines Systems kann je nach der Beschaffenheit desselben sehr mannigfaltig sein; auch ist zur Bewegung des Systems nicht durchaus erforderlich, dass alle seine Punkte in Bewegung sind, vielmehr kann der Fall eintreten, dass ein Punkt des Systems, oder eine Punktreihe oder überhaupt eine Parthie des Systems ruht, während die übrigen sich bewegen. Bei der Rotation eines unveränderlichen Systems um eine Axe z. B. ruhen alle Punkte des Systems, welche auf dieser Axe liegen, bei der Rotation desselben um einen Punkt ruht dieser allein, bei der Bewegung eines flüssigen Systems können die tiefer im Innern gelegenen Theile desselben ruhen, während die Punkte der Oberfläche eine vielleicht sehr heftige Wellenbewegung erleiden.

Wenn nicht sämmtliche Punkte eines Systems zugleich in Bewegung sind, sondern dieselben nach Beschaffenheit des Systems einzeln oder parthienweise nach und nach von der Bewegung ergriffen werden, so betrachtet man diese Fortpflanzung des Bewegungsphänomens selbst, wenn auch nur uneigentlich, als eine Bewegung, indem man den Inbe-

griff aller gänzlich in Bewegung begriffenen Punkte (den Erschütterungsraum) als ein ideales, im Systeme bewegliches Spezialsystem ansieht. Während aber die oben bezeichneten Bewegungen nothwendig dem Raume nach als continuirlich gedacht werden müssen und ein Uebergang in eine folgende Lage ohne Durchlaufen von Zwischenlagen als undenkbar ausgeschlossen ist, kann in dem vorliegenden Falle sehr wohl eine Discontinuität dem Raume nach stattfinden. Die Bewegung kann plötzlich mit einer Lage des Erschütterungsraumes an einer Stelle des Systems aufhören und an einer andern Stelle auftreten, ohne dass der Erschütterungsraum continuirlich an jene Stelle gelangt.

Die Bewegung eines Punktes oder Systems ist Ortsveränderung desselben in Bezug auf ein anderes System. Ruht dieses letztere, so pflegt man die Bewegung eines Punkts oder Systems in ihm dessen absolute Bewegung zu nennen, ist es selbst in Bewegung begriffen, so heisst sie die relative Bewegung desselben in Bezug auf dies System. In Bezug auf einen Beobachter, welcher dem beweglichen Systeme angehört, auf welches eine andere Bewegung bezogen wird, oder welcher wenigstens an der Beweguzg derselben Theil nimmt, wird die relative Bewegung auch die scheinbare Bewegung genannt. In ähnlicher Weise unterscheidet man absolute und relative (scheinbare) Ruhe. Ein Punkt kann in absoluter Ruhe und relativer Bewegung, sowie umgekehrt in absoluter Bewegung und relativer Ruhe sich befinden, wenn seine Bewegung zugleich auf ein ruhendes und ein in Bewegung begriffenes System bezogen wird.

Um die innere Natur einer Bewegung, oder die Energie, mit welcher sie erfolgt, zu beurtheilen, vergleicht man sie mit einer andern, ihrer inneren Natur nach bereits vollkommen erkannten Bewegung. Am geeignetsten hierzu ist die einfachste aller Bewegungen, die unterschiedslos immer in derselben Weise erfolgende gleichförmige Bewegung. Eine solche ist z. B. die Rotationsbewegung der Erde um ihre Axe. Sieht man bei der gleichförmigen Bewegung von allem ab, was das Bewegliche und die geometrische Beschaffenheit der Bewegung betrifft, so bleibt blos die Vorstellung der continuirlichen, stets in derselben Weise erfolgenden Ortsveränderung, d. h. die Vorstellung der Dauer übrig; sieht man aber auch noch von dem Begrenztsein der Dauer ab, so erlangt man die Vorstellung der unbegränzten Dauer ohne Anfang und Ende, die Vorstellung der Zeit. Es ist nicht unrichtig, die Zeit als die allgemeinste, aller speziellen Merkmale entkleidete Vorstellung der Bewegung zu bezeichnen; insofern können alle andern Bewegungen mit ihr verglichen, auf sie bezogen und durch sie gemessen werden. In ähnlicher Weise, wie man von einem speziellen Raume durch Tilgung seiner speziellen Eigenschaften der Gestalt und Grösse zu der Vorstellung des unendlichen Raumes gelangt, in welchem alle besonderen räumlichen

Dinge enthalten sind, gelangt man auch von der speziellen begränzten Dauer zur Vorstellung der unendlichen Zeit, in welcher alle besonderen Bewegungen erfolgen. Wie man den Raum überhaupt durch einen bestimmten, übrigens beliebigen Raum misst, so misst man die Zeit durch eine bestimmte, im Uebrigen ebenfalls beliebig wählbare Dauer einer gleichförmigen Bewegung. Man wählt hierzu die Dauer der Rotation der Erde, nennt den vollen Umlauf derselben einen Tag und theilt ihn in der üblichen Weise in Stunden, Minuten und Sekunden ein. Durch das Messen einer Bewegung mit der Zeit ergeben sich die Begriffe der Geschwindigkeit und der Beschleunigung, welche die Art und Weise bestimmen, wie die Bewegung im Laufe der Zeit sich ändert.

§. 4. Jede Ursache der Bewegung heisst eine Kraft. Die Art, wie Kräfte auf einen Punkt oder ein System wirken, bestimmt die Natur der Bewegung des Punktes oder des Systems. Unter den verschiedenen Arten der gleichzeitigen Einwirkung mehrerer Kräfte verdient eine besonders hervorgehoben zu werden. Es kann nämlich der Fall eintreten, dass die Kräfte ihre Wirkungen gegenseitig tilgen, so dass keine Bewegung erfolgt, wenn der Punkt oder das System, worauf sie wirken, in Ruhe war oder eine Bewegung, welche bereits vorhanden war, durch sie nicht geändert wird. Man nennt diesen Fall der gegenseitigen Vernichtung der Kraftwirkungen das Gleichgewicht der Kräfte an dem Punkte oder dem Systeme, auch wohl, wenngleich weniger passend, das Gleichgewicht des Punktes oder des Systems.

§. 5. Die Lehre von der Bewegung, insoweit sie sich nicht bis zu den Kräften erhebt, welche die Ursachen der Bewegung sind, sondern blos die Natur der Bewegung ohne Rücksickt auf deren Ursachen erforscht, wird Phoronomie oder Kinematik genannt. Die Lehre von den Kräften und ihren Wirkungen hiess früher sehr richtig Dynamik und der spezielle Theil derselben, welcher vom Gleichgewichte der Kräfte handelt: Statik. Die Ausbildung der Kinematik ist das Werk der Neuzeit und theilte man vordem die gesammte Mechanik in Statik und Dynamik ein, indem man die wenigen kinematischen Untersuchungen, welche man aufzuführen pflegte, der Dynamik zuwies. So kam es, dass das Wort „Dynamik" allmählig die Bedeutung von „Bewegungslehre" erhielt und die mechanische Wissenschaft in zwei Theile getrennt wurde, die sich logisch nicht gegenüberstehen, nämlich in die Lehre vom Gleichgewicht und die Lehre von der Bewegung. Wir werden dieser Eintheilung nicht folgen, sondern unsere Wissenschaft in vier Hauptabtheilungen behandeln, welche die Titel führen:

I. die Geometrie der Bewegung,
II. die Geschwindigkeit,
III. die Beschleunigung,
IV. die Kräfte.

Die erste, zweite und dritte Abtheilung zusammen bilden die Kinematik, die vierte für sich allein die Dynamik und enthält als spezielle Unterabtheilung die Statik. In allen Abtheilungen werden wir immer die Lehren, welche die Bewegung des Punktes betreffen, denen voranstellen, welche die Bewegung des Systems behandeln.

Hinsichtlich der Methode werden wir uns der Mittel bedienen, welche die höhere Analysis und die analytische Geometrie gewähren und insofern unsere Wissenschaft als „analytische Mechanik" behandeln, doch schliessen wir die synthetische Betrachtung nicht aus, legen vielmehr auf sie einen sehr hohen Werth. Beide Methoden, die analytische und die synthetische sind vereint allein im Stande, der Mechanik die Schärfe und die Klarheit zu verleihen, welche heutzutage alle mathematischen Wissenschaften auszeichnen sollen.

Erster Theil.

Die Geometrie der Bewegung.

---

1. Capitel.

Allgemeine Erörterungen. — Die einfachen Bewegungen eines unveränderlichen Systems.

§ 1. Die Geometrie der Bewegung betrachtet die Bewegung unabhängig von der Zeit, den Kräften und der materiellen Beschaffenheit des beweglichen Punktes oder Systems als eine blosse Aenderung des Ortes und untersucht die Art und Weise, in welcher dieselbe erfolgen kann.

Die continuirliche Folge aller Lagen, welche ein Punkt während seiner Bewegung einnimmt, bildet seine Bahn; sie ist geradlinig oder krumm. Im ersten Falle nennt man sie zugleich die Richtung der Bewegung und unterscheidet in ihr einen doppelten Sinn, je nachdem der beschreibende Punkt sich nach der einen oder der andern Seite hin bewegt. Ist die Bahn eine Curve, sei es eine ebene oder eine doppelt gekrümmte, so versteht man unter der Richtung der Bewegung in einem bestimmten unkte der Bahn die Tangente in diesem Punkte. Da nämlich im Berührungspunkte der Tangente zwei aufeinanderfolgende Curvenpunkte zusammenfallen, so gibt sie die Richtung an, welche von dem einen zum anderen hinführt. Die Richtung der Bewegung ändert sich fortwährend bei der krummlinigen Bewegung, sie bleibt immer dieselbe bei der geradlinigen. Eine deutliche Vorstellung von der Erzeugung einer Curve durch Bewegung eines Punktes wird allein durch einen Grenzenübergang erreicht, welcher vom Vieleck durch fortgesetzte Einschaltung von Ecken zur Curve hinführt.

Bei der Bewegung eines Systems beschreiben dessen einzelne Punkte Linien; die Bewegung des Systems ist bekannt, sobald dies mit der Bewegung seiner Punkte der Fall ist. In vielen Fällen ergibt sich aber aus der Natur des geometrischen Zusammenhanges der Punkte des Sy-

stems unter einander die Bewegung aller Punkte, sobald die Bewegung einer gewissen Anzahl von Punkten gefunden ist.

Je zwei Lagen eines in Bewegung begriffenen unveränderlichen Systems bilden zwei unter einander congruente Systeme; zwei Lagen eines veränderlichen Systems bilden zwei Systeme, welche zwar nicht congruent sind, wohl aber unter Umständen in einer anderen geometrischen Verwandtschaft stehen können; sie können z. B. ähnlich oder allgemein projectivisch sein, sodass die Punkte des beweglichen Systems, welche in gerader Linie liegen, während der Bewegung fortwährend in gerader Linie bleiben, etc. In allen Fällen heissen die beiden Lagen, welche derselbe bewegliche Punkt in beiden Systemen bei der Bewegung nach einander einnimmt, homologe Punkte derselben. Hiemit ist von selbst klar, was homologe Linien, Flächen und Räume der beiden Systeme sind; es sind solche, welche blos homologe Punkte enthalten.

Die Geometrie der Bewegung veränderlicher Systeme ist noch nicht ausgebildet, dagegen ist die der unveränderlichen bis zu einem gewissen Gerade sorgfältig untersucht und darf man hoffen, dass sich ihr die Theorie für einige bestimmte Gattungen veränderlicher Systeme anschliessen werde, so z. B. die Theorie der Bewegung eines Systems, welches während der Bewegung sich fortwährend ähnlich bleibt. Für das Studium solcher Parthien der Mechanik wird die Kenntniss der neueren synthetischen Geometrie unerlässlich sein, denn sie ist ihrem Grundgedanken nach eine Theorie der Verwandtschaft der Systeme.

§. 2. In Betreff des Ueberganges eines unveränderlichen Systems aus einer ersten Lage in eine beliebige zweite ist folgender Satz von Wichtigkeit:

Ein unveränderliches System Σ ist aus einer ersten Lage Σ' in eine zweite Σ'' gelangt, sobald irgend drei, nicht in gerader Linie liegende Punkte A, B, C von Σ aus den Lagen A', B', C', welche sie in Σ' einnehmen, in die homologen Lagen A'', B'', C'' in Σ'' gelangt sind und dabei die homologen Seiten der Dreiecksflächen von ABC und $A''B''C''$ aufeinanderfallen.

Die Ebene $A\,B\,C$ theilt das System Σ in zwei Theile P, Q, welche diesseits und jenseits von ihr liegen; diesen Theilen entsprechen in Σ' und Σ'' congruente homologe Theile P', Q'; P'', Q''; diejenigen Flächen der Dreiecke $A\,B\,C$, $A'\,B'\,C'$, $A''\,B''\,C''$ sind homolog, welche die Grenzen homologer Raumtheile sind. Ein beliebiger vierter Punkt D von Σ ist durch seine Abstände $D\,A$, $D\,B$, $D\,C$ von A, B, C und durch die Angabe, welchem der Räume P oder Q er angehört, unzweideutig bestimmt; denn diese drei Abstände bestimmen um A, B, C als Mittelpunkte drei Kugeln, von deren gemeinsamen Punkten nur einer dem Raum P oder Q angehört. Ist nun Σ in eine solche Lage gelangt, dass A, B, C

mit A'', B'', C'' zusammenfallen und die homologen Flächen der Dreiecke $A\,B\,C$ und $A''B''C''$ aufeinanderliegen, so fallen auch P und P'', Q und Q'' auf dieselben Seiten der Ebene $A\,B\,C$. Nun gibt es in dem Raume, welchem D angehört, nur einen Punkt, dessen Abstände von A, B, C gleich $D\,A$, $D\,B$, $D\,C$ sind und da D und der ihm homologe Punkt D'' von Σ'' beide dieser Bedingung genügen, so müssen sie mit ihm, also auch mit einander zusammenfallen. Was aber von dem beliebigen Punkte D gilt, gilt von allen Punkten des Systems Σ. — Die Bedingung, dass A, B, C nicht in gerader Linie liegen, ist wesentlich, wei im Falle, dass sie nicht erfüllt ist, unzählig viele Punkte gefunden werden können, welche mit D dieselben Abstände von A, B, C haben. Die Bedingung, dass $A\,B\,C$ und $A''B''C''$ mit ihren homologen Flächenseiten zusammenfallen, ist nothwendig, weil zwei congruente Dreiecke mitunter auf zwei Arten zur Deckung gebracht werden können, wobei aber nur in einem Falle homologe angrenzende Räume in einander fallen.

Durch Zufügung einiger besonderer Nebenbedingungen gelangt man von dem vorstehenden Satze zu folgenden speziellen Sätzen:

Haben die beiden Lagen Σ', Σ'' des beweglichen Systems Σ ein Paar homologe Punkte gemein, d. h. fallen zwei homologe Punkte A', A'' in einen Doppelpunkt zusammen, so genügt es zum Uebergang des Systems aus der ersten in die zweite Lage, wenn zwei mit A nicht in gerader Linie liegende Punkte B, C in ihre neuen Lagen B'', C'' gelangt sind und die homologen Flächenseiten der Dreiecke $A\,B\,C$ und $A'B''C''$ sich decken. Das System kann alsdann durch Drehung um den Doppelpunkt in die neue Lage gelangen.

Haben Σ', Σ'' zwei Doppelpunkte $(A'\,A'')$, $(B'\,B'')$, so genügt zum Uebergang des Systems aus der Lage Σ' in die Lage Σ'' der Uebergang eines einzigen nicht in der Verbindungslinie der Doppelpunkte liegenden Punktes C in seine neue Lage C'' und die Deckung der homologen Dreiecksflächen $A\,B\,C$ und $A''\,B''\,C''$. Bei der Bewegung des Systems können in diesem Falle die Punkte der Doppellinie AB in Ruhe bleiben und kann das System sich um sie als Axe drehen.

§. 3. Der Uebergang eines Punktes oder eines Systems aus einer ersten Lage in eine zweite kann auf sehr mannigfache Art erfolgen. Alle Bewegungen, welche den Punkt oder das System aus der ersten in die zweite Lage überzuführen im Stande sind, heissen äquivalente Bewegungen. In Bezug auf das unveränderliche System kann gezeigt werden, dass alle solche Bewegungen einer gewissen Schraubenbewegung oder einer ihrer Varietäten äquivalent sind, sodass, wenn das System an eine gewisse Schraube von bestimmter Axenlage und bestimmten Dimensionsverhältnissen befestigt würde, es vermittelst dieser aus sei-

ner ersten Lage in die zweite geschraubt werden könnte. Um jedoch zu diesem wichtigen Satze, welchen Chasles im Jahre 1831 zuerst ausgesprochen hat, ohne die Hülfsmittel der modernen Geometrie zu gelangen, wird ein eingehendes Studium der Aequivalenz der weniger complicirten Bewegungen erfordert, das wir jetzt beginnen wollen.

§. 4. Es gibt zwei Bewegungen eines unveränderlichen Systems, welche man als einfache Bewegungen bezeichnet, weil man auf sie alle anderen, insbesondere auch die §. 3 erwähnte Schraubenbewegung zurückführen kann: die Translation und die Rotation.

Ein System erleidet eine Translation, wenn alle seine Punkte parallele und gleiche Strecken in demselben Sinne durchlaufen. Die Grösse, Richtung und der Sinn dieser Strecken heisst die Grösse, Richtung und der Sinn der Translation. Durch eine irgendwo im Raume gegebene Strecke von bestimmter Länge und Richtung kann demnach die Translation eines Systems bezeichnet werden, sobald der Sinn etwa noch durch eine am Ende der Strecke angefügte Pfeilspitze angedeutet wird.

Je zwei Lagen eines in Translation begriffenen Systems sind parallel (alle homologen Geraden und Ebenen sind parallel); die Verbindungslinien homologer Punkte (Projectionsstralen, Sehnen) laufen der Translationsrichtung parallel.

Ein System ist durch Translation aus einer ersten Lage Σ' in eine zweite Σ'' gelangt, sobald ein Punkt A aus seiner ersten Lage A' in seine zweite Lage A'' gelangt ist. Es kann dies aus dem zweiten Satze des §. 2 gefolgert werden, indem man zeigt, dass die unendlichferne zur Translationsrichtung senkrechte Gerade des Raumes eine Doppellinie von Σ' und Σ'' ist, ergibt sich aber auch direkt daraus, dass wenn B', B'' irgend zwei andere homologe Punkte von Σ', Σ'' sind, die Figur $A'A''B''B'$ ein Parallelogramm ist und die veränderliche Figur $A'ABB'$ während der Bewegung fortwährend ein Parallelogramm bleibt, welches schliesslich in das vorige übergeht, sobald A nach A'' gelangt.

Ein System kann eine Folge von Translationen erleiden. Alle seine Punkte beschreiben dabei parallele, congruente, ebene oder windschiefe Polygone und alle Lagen des Systems sind unter sich parallel. Durch ein irgendwo im Raum gegebenes Polygon von bestimmten Seitenlängen und Seitenrichtungen nebst der Bezeichnung des Sinnes ist die Translationsfolge vollkommen bestimmt. Bei fortwährender Abnahme der Seitenlängen und gleichzeitig wachsender Anzahl derselben geht das Translationspolygon in eine Curve und die Translationsfolge in eine krummlinige Translationsbewegung über, welche den Charakter des Parallelismus der Bahnen und der Stellungen des Systems bewahrt. Würde die Erde z. B. keine Axendrehung besitzen, so bestände ihre jährliche Bewegung um die Sonne in einer krummlinigen Translation,

vermöge welcher alle ihre Punkte parallele und congruente Ellipsen beschreiben würden.

§. 5. Ein unveränderliches System erleidet eine *Rotation*, wenn während der Bewegung desselben zwei seiner Punkte ruhen. In Folge dessen ruhen alle Punkte der Verbindungslinie dieser Punkte, mithin sie selbst. Diese Gerade, um welche das System sich dreht, heisst die *Rotationsaxe*. Da die Punkte des Systems während der Bewegung ihre gegenseitigen Abstände nicht ändern, so behalten sie insbesondere constante Abstände von den Fusspunkten der Perpendikel, welche man von ihnen auf die Axe fällen kann und bleiben sie in den Ebenen, welche durch letztere senkrecht zur Axe gelegt werden. Daher sind die Bahnen aller Punkte Kreisbogen, deren Mittelpunkte in der Axe liegen und deren Ebenen auf der Axe in ihren Schnittpunkten mit ihr senkrecht stehen. Die Grösse dieser Kreisbogen wächst proportional der Entfernung des beschreibenden Punktes von der Axe, für Punkte der Axe ist sie Null. Eine Ebene des Systems, welche durch die Rotationsaxe geht, beschreibt während der Rotation einen Flächenwinkel und alle solche Ebenen beschreiben vermöge der Unveränderlichkeit des Systems Flächenwinkel von derselben Grösse. Dieser Winkel heisst der *Rotationswinkel*, seine Grösse die *Amplitude* der Rotation und der Sinn, in welchem er beschrieben wird, der *Sinn* derselben. Ein Punkt in der Einheit der Entfernung von der Axe beschreibt eine Bahn, deren Länge gleich der Amplitude ist. Um den Sinn der Rotation zu bestimmen, denken wir uns eine Ebene senkrecht zur Axe; sie theilt die Axe in zwei Halbstrahlen, welche nach entgegengesetzten Seiten der Ebene gerichtet sind. Ein in der Axe befindlicher sehender Punkt sieht die Rotation des Systems in dem einen oder in entgegengesetztem Sinne erfolgen, je nachdem er sich in dem einen oder in dem andern Halbstrahle befindet und nach der Ebene hinblickt. Bezeichnet man also denjenigen Halbstrahl der Axe, von welchem aus gesehen die Rotation in einem bestimmten Sinne, z. B. in dem Sinne der Uhrzeigerbewegung erscheint durch eine Marke, etwa durch eine der Axe eingezeichnete Pfeilspitze, so ist der Sinn der Rotation unzweideutig festgesetzt. Fügt man die Pfeilspitze dem Ende einer Axenstrecke von einer Länge gleich der Amplitude an, so genügt dies, um die Rotation nach Axe, Amplitude und Sinn vollständig zu bezeichnen. Das Zeichen der Rotation ist demnach: ↗ und bedeutet soviel, als das etwas ausführlichere: 

Ein System ist durch die Rotation aus einer ersten Lage in eine zweite gelangt, sobald irgend ein Punkt desselben, welcher nicht in der Axe liegt, in seine zweite Lage gelangt ist. Denn irgend zwei Punkte

der Axe bilden mit ihm drei Punkte, von denen jene beiden bereits in ihrer neuen Lage sich befinden (§. 2).

Je zwei Lagen des rotirenden Systems bilden zwei congruente Systeme mit einer Doppellinie, der Axe. Je zwei homologe Ebenen dieser Systeme schneiden sich auf der Axe, denn der Schnittpunkt der einen Ebene mit der Axe fällt mit seinem homologen zusammen und gehört mithin auch der homologen Ebene an. Ebenso können homologe Linien und Flächen, wenn sie sich überhaupt schneiden, sich nur auf der Axe schneiden. — Die Verbindungslinien der homologen Punkte (Projectionsstralen) kreuzen die Axe rechtwinklig, laufen also alle einer Ebene senkrecht zur Axe parallel.

Bei der Rotation sind die Bahnen der Punkte des Systems parallele und ähnliche Linien, bei der Translation sind sie parallel und congruent; bei der Rotation sind alle Bahnen einer Ebene parallel, welche senkrecht zur Axe gesetzt werden kann, bei der Translation sind sie alle einer Geraden und mithin jeder durch diese geführten Ebene parallel; bei der Rotation bewegt sich jede zur Axe senkrechte Ebene in sich selbst, bei der Translation jede zur Translationsrichtung parallele Ebene.

Ein System kann eine Folge von Rotationen um verschiedene Axen des Raumes erleiden. Dabei können hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Axen folgende Fälle eintreten: a) alle Axen sind unter einander parallel; die Bahnen der Punkte sind in diesem Falle parallele aber nicht ähnliche, ebene, aus Kreisbogen zusammengesetzte Figuren; b) die Axen laufen alle durch einen Punkt; die Bahnen der Punkte sind sphärische, aus Kugelkreisen gebildete Figuren; c) je zwei aufeinanderfolgende Axen schneiden sich, aber keine drei aufeinanderfolgende Axen gehen durch denselben Punkt; d) je zwei aufeinanderfolgende Axen kreuzen sich blos (schneiden sich nicht). — Wenn in diesen Fällen die Axenfolge continuirlich wird, so geht der Ort der Axen bei a) in eine Cylinderfläche, bei b) in eine Kegelfläche, bei c) in eine allgemeine abwickelbare und bei d) in eine windschiefe Fläche über.

Bei einer Folge von Rotationen ist jede Axe aus einem doppelten Gesichtspunkte zu betrachten; sie ist eine Linie des absoluten Raumes und zugleich eine Linie des beweglichen Systems. Während nämlich das System um eine erste Axe a rotirt, fällt mit dieser eine gewisse Linie α des Systems zusammen; durch die Rotation um a gelangt eine Linie α' des Systems in die zweite Axe a', um welche das System hierauf rotirt; durch die Rotation um a' verlässt α die Axe a und tritt eine weitere Linie α'' in die dritte Rotationsaxe a'' u. s. f. Die Axen a, a, a'' ..., welche dem absoluten Raume angehören, heissen gewöhnlich feste Axen, die Geraden α, α', α'' ... des beweglichen Systems, welche nach und nach mit ihnen zusammenfallen, bewegliche Axen. Bei der

continuirlichen Axenfolge bilden die Axen a eine feste geradlinige Fläche im absoluten Raume, die Axe α eine dem System angehörige, mit diesem bewegliche geradlinige Fläche, deren Erzeugungslinien während der Bewegung mit den Erzeugungslinien jener in Berührung kommen. Ein einfaches Beispiel hiezu bietet die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne; der Ort der Axe a ist ein elliptischer Cylinder, welcher die Ecliptik zur Leitlinie hat, die Linien α fallen alle mit der Erdaxe zusammen und bilden also einen Cylinder von verschwindenden Breitendimensionen, welcher über den elliptischen Cylinder hinrollt.

§. 6. Wir haben in §. 4 zwei einfache Bewegungen angenommen, die Translation und die Rotation; es ist dies der Uebersichtlichkeit wegen zweckmässig, aber keineswegs nothwendig, vielmehr kann die Translation als ein Grenzfall der Rotation aufgefasst werden. Es geht nämlich die Rotation in eine Translation über, sobald die Rotationsaxe ins Unendliche rückt. In diesem Falle wird die Amplitude der Rotation immer kleiner, flachen sich die Bahnen der Punkte ab und nähern sich der Gleichheit; ihre gemeinschaftliche Länge ist in der Grenze die Grösse der Translation. Dieser Grösse nähert sich also das Produkt $r.\vartheta$, worin r den Abstand eines Punktes von der Axe und ϑ die Amplitude bedeutet, bei abnehmendem ϑ und wachsendem r. — Es gibt also eigentlich nur *eine* einfache Bewegung und diese ist die Rotation.

§. 7. Ein System kann zugleich an mehreren Bewegungen Theil nehmen; es besitzt allerdings nur eine Bewegung, vermöge welcher seine Punkte Reihen von Punkten des absoluten Raumes durchlaufen, allein diese Bewegung kann mit Hülfe mehrerer anderer zu Stande kommen. Ist nämlich ein System in irgend einer Weise genöthigt, sich in einem andern Systeme zu bewegen, sodass seine Punkte nach und nach mit gewissen Punkten dieses zusammenfallen und besitzt das zweite System selbst eine Bewegung, so bestimmen beide Bewegungen zusammen die Orte des ersten Systems im absoluten Raum und also seine Bewegung in diesem. Ist das zweite System an ein drittes gebunden, in welchem es sich bewegen muss, dieses an ein viertes u. s. f., so bildet sich die Bewegung des ersten Systems aus den Bewegungen aller dieser Systeme. In diesem Sinne kann ein System zugleich mehrere Translationen, oder mehrere Rotationen oder Translationen und Rotationen gemischt besitzen.

Ein spezieller, aber besonders wichtiger Fall der gleichzeitigen Verbindung mehrerer Bewegungen ist die Verbindung einer Rotation des Systems mit einer Translation parallel der Rotationsaxe. Die Punkte des Systems beschreiben hiebei gewisse cylindrische Schraubenlinien, deren gemeinsame Axe die Rotationsaxe ist. Die Beschaffenheit dieser Bahnen hängt von der gegenseitigen Abhängigkeit der Trans-

lationsgrösse und der Rotationsamplitude ab; sind z. B. beide Grössen fortwährend einander proportional, so sind die Schraubenlinien gemeine Cylinderschrauben.

II. Capitel.

Aequivalenz der Bewegungen eines unveränderlichen Systems. Aequivalenz der Translationen und der Rotationen um parallele Axen.

§. 1. Zwei Bewegungen eines Systems sind nach Cap. I. §. 3 äquivalent, wenn durch jede von ihnen das System aus einer ersten Lage in dieselbe zweite Lage übergeführt werden kann. Es kann eine Folge von Bewegungen einer anderen Folge, eine Folge von Bewegungen einer einzelnen Bewegung, eine Verbindung zugleich stattfindender Bewegungen einer andern derartigen Verbindung, eine gleichzeitige Verbindung von Bewegungen einer einzelnen Bewegung etc. äquivalent sein. Eine einzelne Bewegung, welche einer Folge oder einer gleichzeitigen Verbindung von Bewegungen äquivalent ist, heisst die aus diesen zusammengesetzte, aus ihnen resultirende Bewegung oder ihre Resultante; die Bewegungen, denen sie aequivalent ist, heissen ihre Componenten; die Auffindung der Resultanten mehrerer Bewegungen heisst die Zusammensetzung und die Auffindung anderer Bewegungen, aus welchen eine gegebene resultiren kann, die Zerlegung der Bewegungen. Die letztere Aufgabe ist im Allgemeinen unbestimmt, wenn nicht noch andere Bedingungen hinzutreten. — Auch können mehrere Bewegungen der Ruhe aequivalent sein.

§. 2. Für die Aequivalenz der Translationen gelten folgende sehr einfache Sätze.

I. Die Folge zweier Translationen derselben Richtung ist äquivalent einer einzigen Translation der nämlichen Richtung. Die Grösse dieser resultirenden Translation ist die Summe oder Differenz der Translationsgrössen der Componenten, je nachdem diese von demselben oder von entgegengesetztem Sinne sind; der Sinn der Resultanten stimmt im ersten Falle mit dem gemeinschaftlichen Sinne der Componenten, im letzteren Falle mit dem Sinne der grösseren von ihnen überein. Die Ordnung der Aufeinanderfolge der Translationen ist willkührlich.

Durchlaufen nämlich die Punkte des Systems vermöge der einen Translation die Strecke a, vermöge der andern die Strecke b von derselben Richtung, so führt sie die Folge beider durch die Strecke $a + b$

im ersten und durch die Strecke $a - b$ im zweiten Falle; ebensoweit führt sie aber die eine Translation von der im Satze angegebenen Beschaffenheit. — Sind die Translationen gleich und entgegengesetzt, so ist ihre Folge äquivalent der Ruhe.

Der Satz gilt auch für die gleichzeitige Verbindung der beiden Translationen. Denn wenn das System in einem andern Systeme die Translation a, dieses selbst aber die Translation b, beide von derselben Richtung, besitzt, so ist $\pm (a \pm b)$ die Entfernung der Systempunkte in ihrer Endlage von ihrer Anfangslage und also zugleich die Grösse einer einzigen Translation, welche das System in dieselbe Endlage bringen kann. Dabei ist es wiederum gleichgültig, ob das erste System im zweiten mit der Translation a sich bewegt und jenes die Translation b besitzt, oder umgekehrt.

II. Die Folge zweier Translationen verschiedener Richtung ist äquivalent einer einzigen Translation, welche nach Grösse, Richtung und Sinn durch die dritte Seite eines Dreiecks bestimmt wird, dessen beiden andere Seiten aus den gegebenen Translationen nach Grösse und Richtung construirt werden können. Die Ordnung der Translationsfolge ist beliebig.

Durch die erste Translation gelangt ein beliebiger Punkt A des Systems aus einer ersten Lage A' in eine zweite A'', durch die zweite Translation gelangt er aus dieser in eine dritte Lage A''', sodass er also überhaupt die Seiten $A' A''$, $A'' A'''$ des Dreiecks $A' A'' A'''$ in dem Sinne durchläuft, der durch die Ordnung der Buchstaben angegeben ist. Bei der Translationsfolge bleibt das System sich selbst parallel und ist in seine neue Lage gelangt, sobald dies mit einem seiner Punkte der Fall ist. Der Punkt A gelangt aber auch durch die einzige Translation $A' A'''$, welche durch die dritte Seite des Dreiecks nach Grösse und Richtung angegeben wird, in seine neue Lage A'''. Denkt man sich die Seiten $A' A''$, $A'' A'''$ im Sinne der Translationen durchlaufen, so ist der Sinn der resultirenden Translation dem Sinne eines beweglichen Punktes entgegengesetzt, welcher jene beiden Seiten beschreibt und auf der dritten Seite $A''' A'$ nach A' zurückkehrt. — Bei geänderter Ordnung in der Folge der Translationen ergibt sich ein congruentes Dreieck $A' A'''' A'''$, welches mit $A' A'' A'''$ ein Parallelogramm bildet, sodass der Satz auch mit Hülfe der Seiten und einer Diagonale dieser Figur ausgesprochen werden kann. — Der Satz I. ist ein spezieller Fall dieses Satzes, entsprechend einem Winkel der Translationen gleich 0 oder gleich π.

Der Satz gilt auch für die gleichzeitige Verbindung zweier Translationen. Beweis ganz ähnlich, nur dass die Endlage des Systems dadurch herbeigeführt wird, dass die eine Translation in einem System erfolgt, welches die andere Translation besitzt.

III. Gleiche und entgegengesetzte Translationen können einem Systeme ohne Störung seiner Bewegung ertheilt oder entzogen werden.

Mit Hülfe der Sätze I. und II. können beliebig viele Translationen zusammengesetzt werden. Es verlangt diese Operation blos die Construction eines Polygons, dessen Seiten nach Grösse und Richtung die einzelnen Translationen darstellen; die Schlusslinie des Polygons stellt die resultirende Translation dar. Die Ordnung der Aufeinanderfolge der Translationen ist dabei beliebig, da je zwei aufeinanderfolgende und mithin auch je zwei beliebige derselben vertauscht werden können; auch können sämmtliche Translationen zugleich erfolgen.

Mit Hülfe derselben Sätze kann umgekehrt jede Translation in zwei oder mehrere Translationen zerlegt werden. Die Lösung aller Einzelaufgaben, welche sich hinsichtlich der Zerlegung einer Translation in zwei andere bilden lassen, reducirt sich auf die Auflösung eines Dreiecks mit Hülfe gegebener Bestimmungsstücke. Jede Aufgabe der ebenen Trigonometrie hat in diesem Sinne eine mechanische Deutung.

§. 3. Ganz abgesehen von jeder mechanischen Bedeutung redet man heutzutage in der Geometrie von der Zusammensetzung und Zerlegung von Linien und versteht darunter die Construction der Schlusslinien eines Polygons nach Grösse und Richtung mit Hülfe der Grösse und Richtung der Seiten und umgekehrt.

Möbius hat zuerst hiervon als einer selbstständigen Theorie in der Geometrie Gebrauch gemacht. Da die Ordnung der Seiten des Polygons beliebig verändert werden kann, ohne auf die Auffindung der zusammengesetzten Linie Einfluss zu haben, so nennt man diese auch die Summe jener und die ganze Operation die geometrische Addition der Linien. In ähnlicher Weise redet man auch von einer geometrischen Subtraction der Linien. Diese Benennungen sind durch die Auffindung der geometrischen Bedeutung des Imaginären von anderer Seite gerechtfertigt worden.

§. 4. Für die Aequivalenz der Rotationen um dieselbe und um parallele Axen gelten folgende bemerkenswerthe Sätze:

IV. Die Folge zweier Rotationen eines Systems um dieselbe Axe ist äquivalent einer einzigen Rotation um dieselbe Axe. Die Amplitude dieser resultirenden Rotation ist gleich der Summe der Amplituden, wenn beide Rotationen in demselben Sinne erfolgen und gleich ihrer Differenz, wenn sie entgegengesetzten Sinn haben; der Sinn der resultirenden Rotation stimmt im ersten Falle mit dem gemeinschaftlichen Sinn der Rotationen, im letzteren Falle mit dem Sinne derjenigen überein, welche die grössere Amplitude besitzt. Sind die Amplituden der Rotationen

gleich und entgegengesetzten Sinnes, so ist ihre Folge äquivalent der Ruhe. Die Aufeinanderfolge der Rotationen ist beliebig.

Der Satz gilt auch für die gleichzeitige Verbindung zweier Rotationen um dieselbe Axe. — Gleiche und entgegengesetzte Rotationen können einem Systeme ohne Einfluss auf seine Bewegung beliebig ertheilt oder entzogen werden.

Mit Hülfe dieses Satzes kann man beliebig viele Rotationen eines Systems um dieselbe Axe zusammensetzen. Bedient man sich hiebei der symbolischen Darstellung der Rotation des vorigen Capitels, indem man die Amplituden auf der Axe aufträgt und den Sinn durch die Richtung der Axe bezeichnet, so wird das Entgegengesetztsein der Amplituden durch die Vorzeichen ausgedrückt und ergibt sich die resultirende Rotation ihrer Amplitude nach durch die algebraische Summe der gegebenen Amplituden und ihr Sinn durch das Vorzeichen dieser Summe.

Für die folgenden Sätze ist es von Wichtigkeit, die doppelte Bedeutung der Rotationsaxen auch in der Bezeichnung derselben auszudrücken. Eine Rotationsaxe, insofern sie als eine Linie des Systems angesehen wird, nämlich als Inbegriff aller Systempunkte, welche durch die betreffende Rotation keine Bewegung erlangen, wollen wir mit einem der griechischen Buchstaben α, β, γ . . ., die Gerade des Raumes aber, in welchem die Rotation erfolgt und mit welcher die Axe während der Rotation zusammenfällt, durch den entsprechenden lateinischen Buchstaben a, b, c, . . . bezeichnen; die Combination beider Buchstaben, wie z. B. (α, a) soll ausdrücken, dass das System um die Axe α des Systems rotirt, welche während dieser Rotation in der Axe a des Raumes liegt.

V. Die Folge einer Rotation ϑ um die Axe (α, a') und einer Translation τ ist vertauschbar und äquivalent der gleichzeitigen Verbindung dieser beiden Bewegungen. Das System ist nämlich aus der ersten Lage Σ' in die zweite Σ'' gelangt, sobald die Axe α und irgend ein Systempunkt B aus ihren ersten Lagen a', B' in ihre zweiten Lagen a'', B'' gelangt sind. Es sei die Ebene der Figur 1. senkrecht zur Axe (α, a') und B' ein Punkt dieser Ebene. Durch die Rotation ϑ gelangt alsdann B aus der Lage B' nach B_1 und durch die nachfolgende Translation τ gehen α und B über in die Lagen a'' und B''. Durch die Translation gelangen aber α und B nach a'' und B_2 und durch die hierauf erfolgende Rotation geht B von B_2 in dieselbe Lage B'' über, wie vorher, während α in a'' bleibt. Bei der gleichzeitigen Verbindung beider Bewegungen sind zwei Fälle möglich; entweder das System rotirt in einem andern Systeme, welches die Translation besitzt, sodass die Axe α immer mit derselben

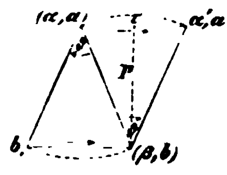
Fig. 1.

Linie dieses zweiten Systems verbunden bleibt, oder das System erleidet die Translation in einem andern System, welches um die Axe a rotirt.

VI. Die Folge einer Rotation von der Amplitude ϑ um eine Axe (α, a) und einer zu dieser rechtwinkligen Translation τ ist äquivalent einer Rotation von derselben Amplitude und demselben Sinne um eine bestimmte zu (α, a) parallele Axe (β, b). Diese Axe wird durch folgende Construction gefunden. Durch den Schnittpunkt der Axe (α, a) mit einer zu ihr senkrechten Ebene ziehe man eine Strecke von der Grösse und Richtung der Translation und beschreibe in derselben Ebene auf derjenigen Seite von τ, nach welcher die Rotation erfolgt, über τ als Sehne einen Kreis, in welchem zu dieser Sehne als Centriwinkel die Amplitude ϑ gehört, so geht die gesuchte Axe (β, b) durch den Mittelpunkt dieses Kreises.

Stellt nämlich Fig. 2. einen Schnitt des Systems senkrecht zur Axe (α, a) dar und ist in demselben $a\,a'$ nach Grösse, Richtung und Sinn gleich der Translation τ, sowie b der Mittelpunkt des über $a\,a'$ auf die im Satze angegebenen Art construirten Kreises, so gelangt die durch b gehende, mit α parallellaufende Gerade β des Systems durch die Rotation ϑ in die Lage b_1 und hierauf durch die Translation τ wieder in die ursprüngliche Lage b zurück. Sie ist mithin eine Gerade des Systems, welche vor Ausführung beider Bewegungen bereits in ihrer neuen Lage sich befand und genügt daher eine Rotation des Systems um sie, um dasselbe in seine neue Lage überhaupt überzuführen. Um die Amplitude und den Sinn dieser Rotation zu bestimmen, reicht es hin, die Bewegung irgend eines Systempunktes zu verfolgen. Hiezu eignet sich insbesondere der Punkt α. In Folge der Rotation um (α, a) erlangt er als ein Punkt dieser Axe keine Bewegung, vielmehr verdankt er seine Bewegung blos der Translation, welche ihn von α nach α' führt. Dahin gelangt er aber offenbar auch durch die Rotation um (β, b) von der Amplitude ϑ, deren Sinn vermöge der Construction mit dem Sinne der Rotation um die Axe (α, a) übereinstimmt.

Ist $\vartheta < \pi$, so ist ϑ der Innenwinkel eines über τ zu construirenden gleichschenkligen Dreiecks; ist $\vartheta > \pi$, so ist er dessen Ergänzung zu $2\,\pi$.



VII. Umgekehrt: Jede Rotation um eine Axe (β, b) von der Amplitude ϑ ist äquivalent der Folge einer Rotation von derselben Amplitude und demselben Sinne um eine beliebige zu (β, b) parallele Axe (α, a) und eine zu ihr rechtwinklige Translation. Die

Grösse und Richtung dieser Translation wird durch die Sehne des Kreisbogens angegeben, welchen ein beliebiger in der Axe (α, a) gelegener Systempunkt vermöge der Rotation um (α, a) beschreibt und ihr Sinn stimmt mit dem Sinne überein, in welchem dieser Bogen durchlaufen wird.

Aus Fig. 2. ist ersichtlich, dass, wenn d den Abstand beider Axen (α, a) und (β, b), p den Abstand der Axe (α, a) von der Sehne τ bezeichnet:

$$\tau = 2\, d \cdot \sin \tfrac{1}{2}\, \vartheta\,, \quad p = d \cdot \cos \tfrac{1}{2}\, \vartheta\,, \quad 2\, p' = \tau \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\, \vartheta.$$

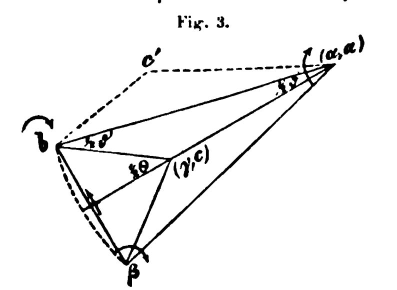
Mit Hülfe des erwähnten gleichschenkligen Dreiecks lassen sich viele Aufgaben über die Aequivalenz einer Rotation und der Folge einer Rotation um eine parallele Axe und dazu rechtwinkliger Translation bilden und lösen, je nachdem man diese oder jene Bestimmungsstücke der Dimensionen und der Lage des Dreiecks in den Ausdruck der Aufgabe aufnimmt. Jede Aufgabe über das gleichschenklige Dreieck erlangt hiedurch eine mechanische Interpretation. Unter den hier angedeuteten Aufgaben sind viele unbestimmte, welche auf geometrische Oerter führen; z. B. folgende: Die Rotationsaxe (β, b) und die Amplitude ϑ sind bekannt, die Translation ist aber blos ihrer Grösse, nicht ihrer Richtung nach gegeben, welches ist der Ort der Axe a?

VIII. Die Folge zweier Rotationen um zwei parallele Axen (α, a) und (β, b) ist äquivalent einer einzigen Rotation um eine mit jenen gleichfalls parallelen Axe (γ, c); die Amplitude dieser resultirenden Rotation ist die Summe der Amplituden der beiden gegebenen Rotationen, wenn diese von gleichem Sinne und die Differenz derselben, wenn sie von entgegengesetztem Sinne sind; der Sinn der Resultanten stimmt im ersten Falle mit dem gemeinschaftlichen Sinne der gegebenen Rotationen, im zweiten Falle mit dem Sinne derjenigen Rotation überein, welche die grössere Amplitude besitzt; die Axe c der Resultante bildet mit der Axe a und b im absolutem Raume ein prismatisches Dreiflach, in welchem die beiden Ebenen, welche durch die Axe c gehen, mit der dritten durch a und b gehenden Seitenebene an den Kanten a und b Winkel bilden, gleich den halben Amplituden der Rotationen um diese Axen, und zwar liegen diese Winkel in Bezug auf die Ebene $a\,b$ bei der Axe, um welche die Rotation zuerst erfolgt, auf der entgegengesetzten, bei der andern auf derselben Seite, nach welcher hin die Rotation stattfindet. Ebenso bilden die Axen α, β, γ des beweglichen Systems ein prismatisches Dreiflach, in welchem die Ebenen $\gamma\alpha$ und $\gamma\beta$ mit der Ebene $\alpha\,\beta$ an den Axen α und β Winkel einschliessen, gleich den

halben Amplituden der Rotationen um diese Axen, jedoch so, dass der Winkel an der ersten Axe auf derselben, der an der zweiten Axe auf der entgegengesetzten Seite der Ebenen $\alpha\beta$ liegt, nach welcher die Rotation erfolgt. Die Aufeinanderfolge der Rotationen ist nicht willkührlich.

1. Es seien ϑ, ϑ' die Amplituden der Rotationen um diese Axen α, β und zwar zunächst von gleichem Sinne (Fig. 3). Durch die Rotation um α, während welcher diese Axe mit der Geraden a des absoluten Raumes vereinigt bleibt, gelangt β in die Lage b und rotirt hierauf das System um die Axe (β, b), wodurch α aus der Geraden a herausrückt. Man ersetze nun nach VII. die Rotation ϑ um α durch eine gleiche und gleichsinnige um die Axe β und füge die Translation $\beta\, b$ hinzu, welche die Sehne des Bogens ist, den ein Punkt der Axe β in Folge der Rotation um die Axe α beschreiben würde. Von diesen beiden Bewegungen, deren Ordnung willkührlich ist, liefert die erste mit ϑ' zusammen eine Rotation $\Theta = \vartheta + \vartheta'$ um die Axe β, gleichen Sinnes mit ϑ und ϑ'. Diese Rotation Θ und die nachfolgende Translation $\beta\, b$ sind aber zusammen nach VI. äquivalent einer einzigen Rotation Θ desselben Sinnes, deren Axe (γ, c) durch die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks $\beta\, c\, b$ geht, wenn Winkel $\beta\, c\, b$ gleich Θ und c auf der Seite der Translationsrichtung ($\beta\, b$) angenommen wird, nach welcher die Rotation Θ erfolgt. Da auch das Dreieck $\beta\, a\, b$ gleichschenklig ist, so geht die Halbirungslinie des Winkels $\beta\, a\, b = \vartheta$ durch c und halbirt den Winkel $\beta c b = \Theta = \vartheta + \vartheta'$. Hieraus folgt, dass in dem Dreiecke $a b c$ und mithin auch in dem gleichnamigen Axenprisma die Winkel $b\, a\, c$ und $a b c$, resp. gleich $\frac{1}{2}\,\vartheta$ und $\frac{1}{2}\,\vartheta'$ sind und zwar liegt ersterer mit der Rotation um a entgegengesetzt, letzterer mit der Rotation um b gleichartig gegen $a\, b$. Ebenso sind in dem Dreiecke $\alpha\,\beta\,\gamma$ und dem gleichnamigen Axenprisma des beweglichen Systems die Winkel $\beta\,\alpha\,\gamma$ und $\alpha\,\beta\,\gamma$, resp. gleich $\frac{1}{2}\,\vartheta$ und $\frac{1}{2}\,\vartheta'$, es liegt aber ersterer mit der Rotation um α gleichartig, letzterer mit der Rotation um β entgegengesetzt gegen $\alpha\,\beta$. Der Sinn der Amplitude Θ ergibt sich leicht, indem man die Bewegung eines Systempunktes, z. B. des Punktes β, verfolgt. Derselbe verdankt dieselbe blos der Rotation um die Axe (α, a) und gelangt sowohl durch diese als auch durch die Rotation um (γ, c) nach b, woraus sich ergibt, dass die Amplituden beider Rotationen gleichen Sinnes sein müssen.

Fig. 3.



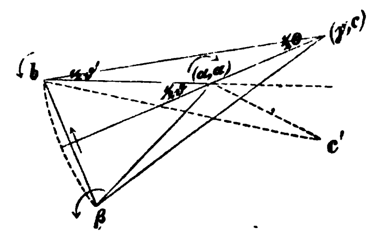
Noch etwas unmittelbarer sieht man den vorstehenden Satz folgendermassen ein. Durch die Rotation ϑ um die Axe a gelangt die Axe γ

in die Lage c', welche in Bezug auf $a\,b$ mit c symmetrisch ist; durch die nachfolgende Rotation ϑ' um b wird sie in die ursprüngliche Lage c zurückgeführt; daher befand sie sich vor Ausführung beider Bewegungen bereits in der Lage, in welche sie schliesslich durch sie gelangen soll. Es bedarf daher blos einer Rotation um (γ, c), um das System in seine neue Lage überzuführen. Die Bewegung eines tanzenden Paares kann den vorliegenden Fall einigermassen verdeutlichen.

Dass die Aufeinanderfolge der Rotationen nicht vertauschbar ist, erkennt man daraus, dass die Axe β durch die Rotation um (α, a) nach b gelangt, während sie dahin nicht mehr gelangen kann, wenn das System zuerst um β rotirt, weil alsdann α sich aus der Lage a entfernt hat. Aus dem Dreieck oder Prisma $a\,b\,c$ ergibt sich

$$\frac{a\,c}{\sin\frac{1}{2}\vartheta'} = \frac{b\,c}{\sin\frac{1}{2}\vartheta} = \frac{a\,b}{\sin\frac{1}{2}\Theta}; \quad \Theta = \vartheta + \vartheta'.$$

Fig. 4.



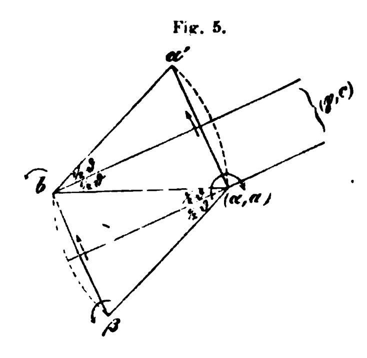
2. Sind die Rotationen von entgegengesetztem Sinn und ihre Amplituden ungleich, etwa $\vartheta > \vartheta'$ (Fig. 4), so ersetze man, wie vorher, die Rotation um α durch eine gleiche und gleichsinnige um β und füge die betreffende Translation $\beta\,b$ zu. Die beiden Rotationen ϑ und ϑ' um die gemeinsame Axe β liefern aber eine einzige Rotation von der Amplitude $\Theta = \vartheta - \vartheta'$ und dem Sinne von ϑ um dieselbe Axe β; diese Rotation Θ aber setzt sich mit der nachfolgenden Translation zu einer Rotation von derselben Amplitude und demselben Sinne zusammen um eine Axe (γ, c), welche wie beim vorigen Fall sich ergibt.

Auch sieht man wieder unmittelbar, dass die Axe γ durch die Rotation um (α, a) in eine zu $a\,b$ symmetrische Lage c' und hierauf durch die Rotation um die Axe (β, b) wieder in die ursprüngliche Lage zurückgeführt wird, sowie dass in Folge dessen das System durch die Rotation $\vartheta - \vartheta'$ um die Axe (γ, c) in seine neue Lage gelangt. Die obigen Gleichungen zwischen den Axenabständen und den Sinussen der halben Amplituden bestehen fort. Mit der relativen Grösse der Amplituden ϑ, ϑ' ändert sich die Lage der Axe (γ, c) nach einem leicht zu übersehenden Gesetze auf der Halbirungsebene der Amplitude ϑ. Wächst die Amplitude ϑ' von Null an, so entfernt sich (γ, c) von (α, a) und rückt ins Unendliche, sowie $\vartheta' = \vartheta$ wird, um von der entgegengesetzten Seite nach (α, a) zurückzukehren, sobald ϑ' über ϑ hinauswächst.

3. Sind die Amplituden ϑ, ϑ' gleich und entgegengesetzt (Fig. 5), so tilgen sich dieselben um die Axe β und bleibt blos die Translation $\beta\,b$ als Resultante der beiden Rotationen, d. h. zwei gleiche und

entgegengesetzte Rotationen um zwei parallele Axen sind äquivalent einer Translation; die Grösse und Richtung derselben wird durch die Sehne des Kreisbogens angegeben, welche ein beliebiger Systempunkt, welcher einer der Axen angehört, vermöge der Rotation um die andere Axe beschreibt und der Sinn stimmt mit dem Sinne überein, in welchem dieser Bogen durchlaufen wird.

Fig. 5.



Wegen der Gleichheit der Winkel ϑ und ϑ' wird $b\,c$ parallel $a\,c$, rückt also die Axe der resultirenden Rotation ins Unendliche und wird ihre Amplitude gleich Null. Auch erhellt die Aequivalenz der beiden entgegengesetzten Rotationen mit der Translation unmittelbar, wenn man bedenkt, dass in Folge beider Rotationen die Ebene $\alpha\,\beta$ in die ihr parallele Lage $\alpha'\,b$ gelangt, in welche sie durch die Translation $\beta\,b = a\,\alpha'$ unmitfelbar übergeführt werden kann.

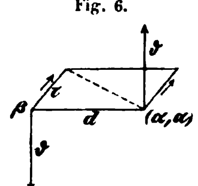
Die Aufeinanderfolge der Rotationen ist hier ebensowenig, wie in den beiden vorigen Fällen willkührlich. Die Grösse der resultirenden Translation ist $\tau = 2\,d\,sin\,\frac{1}{2}\,\vartheta$, wenn d den Abstand der Axen bedeutet, und bildet ihre Richtung mit der Ebene $\alpha\,\beta$ den Winkel $\frac{1}{2}\,c\,\pi - \vartheta$, und ist senkrecht zu den beiden Axen.

4. Die Folge der Rotationen ist äquivalent einer gewissen gleichzeitigen Verbindung derselben, nämlich so, dass das System um die bewegliche zweite Axe β rotirt und diese Rotation in einem Systeme, welcher die Axe β angehört, erfolgt, welches selbst die Rotation um die feste erste Axe a besitzt.

§. 5. Die Folge zweier Rotationen um parallele Axen von entgegengesetzt gleichen Amplituden heisst ein **Rotationspaar.** Dasselbe ist einer Translation äquivalent, deren Grösse durch das Produkt aus dem doppelten Axenabstande und dem Sinus der halben Amplitude dargestellt wird; ihre Richtung ist senkrecht zur Halbirungsebene der Amplitude. Unter Anwendung der im Cap. I, §. 5. eingeführten Bezeichnung, nach welcher man die Amplituden auf den Axen aufträgt und ihren Sinn durch eine Pfeilspitze markirt, überzeugt man sich leicht, dass die einem Rotationspaar äquivalente Translation immer nach derjenigen Seite der Axenebene hin erfolgt, von welcher aus gesehen die Pfeilspitzen des Rotationspaares mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmend erscheinen. (S. Fig. 6.)

Mit Hülfe des Rotationspaares könnte man den obigen Satz VII. leicht beweisen. Man ertheile dem Systeme um die Axe α zwei gleiche

und entgegengesetzte Rotationen ϑ; von diesen ist die eine nichts weiter, als die in die Axe α von β verlegte Rotation, während die andere mit der Rotation um β ein Rotationspaar bildet, welches der dort construirten Translation äquivalent ist.



Ferner sieht man hieraus zugleich, wie man jede Rotation ϑ um irgend eine Axe α ersetzen kann durch eine Rotation von derselben Amplitude und demselben Sinne um eine beliebige andere parallele Axe β in Verbindung mit einem Rotationspaare von der nämlichen Amplitude.

Jede Translation kann in ein Rotationspaar umgesetzt werden und zwar auf unendlich viele Arten.

§. 6. Die Sätze im §. 3. dienen einerseits dazu, zwei Rotationen um parallele Axen in eine einzige ihnen äquivalente zu vereinigen, andererseits eine Rotation in zwei andere von derselben Axenrichtung und demselben oder entgegengesetztem Sinne zu zerlegen. Die letztere Aufgabe ist im Allgemeinen unbestimmt und können noch nähere Bestimmungselemente hinsichtlich der Lage der Axen etc. hinzutreten. Das Dreieck $a\,b\,c$ der dortigen Figur leistet das Verlangte. Eine wiederholte Anwendung jener Sätze führt dazu, beliebig viele Rotationen um parallele Axen, gemischt mit Translationen, welche die Axen rechtwinklig kreuzen, zu vereinigen. In dieser Hinsicht hat man den allgemeinen Satz:

IX. Die Folge einer beliebigen Menge von Rotationen um parallele Axen und Translationen, welche zu diesen senkrecht sind, ist äquivalent einer einzigen Rotation um eine jenen gleichfalls parallele Axe oder einem Rotationspaare (einer Translation).

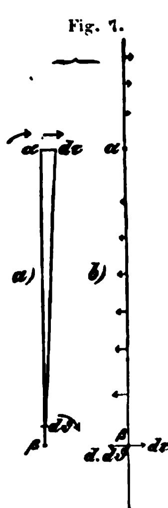
Es seien α, β, γ, ... die parallelen Axen des Systems, um welche dasselbe der Reihe nach um die Amplituden ϑ, ϑ', ϑ'', ... in bestimmtem Sinne rotirt, welcher durch das Vorzeichen der ϑ ausgedrückt werden kann. Es seien ferner a, b, c, ... die Geraden des absoluten Raumes, mit welchen die Axen während der einzelnen Rotationen zusammenfallen. Man ziehe eine beliebige Gerade u des absoluten Raumes parallel mit a, b, c, ... und ertheile dem System um sie die Rotationen ϑ und $-\vartheta$; ϑ' und $-\vartheta'$; ϑ'' und $-\vartheta''$; etc., wodurch an der Bewegung desselben nichts geändert wird. Diese Rotationen lassen sich nun mit den um die Axe a, b, c ... stattfindenden so zusammenfassen, dass man erhält 1. eine Rotation um die Axe u, deren Amplitude die algebraische Summe der Amplituden der gegebenen Rotationen ist, und 2. eine Reihe von Rotationspaaren, welche, da sie nichts anderes, als Translationen sind, mit den sonst noch vorhandenen Translationen leicht in eine Translation (oder ein Rotationspaar) vereinigt werden können.

Ist die Amplitude der Rotation um u nicht Null, so liefert diese mit der Translation eine einzige Rotation um eine mit u parallele Axe und ist alsdann diese die Resultante aller Bewegungen; ist jene Amplitude gleich Null, so ist die Resultante jene Translation, oder wenn man lieber will, ein ihr äquivalentes Rotationspaar.

§. 7. Von den Sätzen der §§. 3—5. werden wir im Folgenden vorzugsweise in dem Falle Gebrauch machen, dass die Translationen und die Amplituden der Rotationen unendlich klein werden. Hiebei treten wesentliche Vereinfachungen derselben ein.

1. Es besitze das System eine unendlich kleine Rotation von der Amplitude $d\vartheta$ um die Axe α und zugleich eine unendlich kleine Translation $d\tau$ senkrecht zu ihr. (Fig. 7, a.) Nach VI. ist die Resultante beider Bewegungen eine Rotation um eine zu α parallele Axe β; man findet aus derselben mit Hülfe der dortigen Betrachtung, indem man ϑ und τ ohne Ende abnehmen lässt, wodurch die Ebene $(\alpha\beta)$ beider Axen zur Translationsrichtung senkrecht wird und die erste der dort entwickelten Gleichungen übergeht in $d\tau = d \cdot d\vartheta$. Daher ist der Abstand d der Axe der resultirenden Rotation von der Axe α:

Fig. 7.



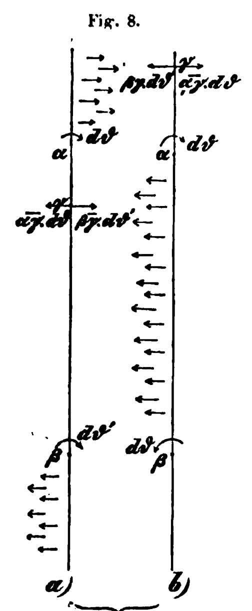
$$d = \frac{d\tau}{d\vartheta}.$$

Man sieht die Richtigkeit dieser Gleichung auch unmittelbar ein, wenn man bedenkt, dass sämmtliche Punkte der zur Translationsrichtung senkrechten Ebene $\alpha\beta$ (Fig. 7, b.) vermöge der Translation um eine gemeinsame unendlichkleine Strecke $d\tau$ fortgeführt werden, während die Rotationsaxe α diese Ebene in zwei Theile theilt, so dass die Punkte des einen Theiles vermöge der Rotation nach der einen, die des andern nach der entgegengesetzten Seite der Ebene geschleudert werden und zwar um unendlichkleine, ihrer Entfernung von der Axe α proportionale Strecken. Daher gibt es in demjenigen Theile, für welche beide Bewegungsrichtungen entgegengesetzt sind, in einem bestimmten Abstande d von der Axe α eine gerade Punktreihe oder Axe β, welche gleiche und entgegengesetzte Bewegungen erlangt und deren Bewegung mithin äquivalent der Ruhe ist. Für sie ist $d\tau = d \cdot d\vartheta$, wie oben. Die Amplitude und deren Sinn ergibt sich für die Rotation um β sofort, indem man die Bewegung eines Punktes der Axe α, welcher blos die Translation $d\tau$ besitzt, als Rotation um β auffasst.

2. Das System besitze zwei unendlichkleine Rotationen von den Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ (Fig. 8, a, b.) um zwei parallele Axen α, β. Nach Satz VIII. sind sie zusammen äquivalent einer einzigen Rotation, deren

Axe γ und Amplitude $d\vartheta$ durch die dortigen Constructionen leicht gefunden werden. Da die Amplituden unendlich klein sind, so folgt, dass die gesuchte Axe in die Ebene $\alpha\beta$ selbst fällt, dass der Unterschied der Aufeinanderfolge keinen Einfluss auf ihre Lage ausübt und die Rotationen gleichzeitig erfolgen können. Ferner ergibt sich, dass im Falle übereinstimmenden Sinnes $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ die Axe der Resultanten in den Streifen $\alpha\beta$, im Falle entgegengesetzten Sinnes aber in denjenigen Aussenraum fällt, welcher der Axe der grösseren Amplitude anliegt; sind $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ gleich und entgegengesetzt, so rückt die Axe ins Unendliche und ist die Resultante eine unendlich kleine Translation senkrecht zur Ebene $\alpha\beta$. Die unter Satz VIII. entwickelten Gleichungen reduciren sich auf

$$\frac{\alpha\gamma}{d\vartheta'} = \frac{\beta\gamma}{d\vartheta} = \frac{\alpha\beta}{d\Theta}, \quad d\Theta = d\vartheta \pm d\vartheta'$$



und zeigen, dass der Streifen $\alpha\beta$ oder eine Transversale der Axen $\alpha\beta$ von der Axe γ im umgekehrten Verhältniss der Amplituden getheilt wird. Alles dies erkennt man leicht auch unmittelbar auf folgende Weise. Es mögen $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ zunächst gleichen Sinnes sein. Die Axe α (Fig. 8, a.) theilt die Ebene $\alpha\beta$ in zwei Theile, deren Punkte in Folge der Rotation um α nach entgegengesetzten Seiten dieser Ebene und senkrecht zu ihr um unendlich kleine ihren Abständen von α proportionale Strecken herausgeschleudert werden. Dasselbe gilt von der Axe β und da die Rotationen gleichen Sinn besitzen, so folgt, dass blos die Punkte des Streifens $\alpha\beta$ entgegengesetzte Bewegungen durch die beiden Rotationen erlangen, während die Punkte eines jeden der beiden Aussenräume aus doppeltem Grunde nach der einen oder der andern Seite der Axenebene getrieben werden. Daher kann es nur innerhalb des Streifens Punkte γ geben, deren Bewegung äquivalent der Ruhe ist. Für solche Punkte muss die Bedingung $\overline{\alpha\gamma} \cdot d\vartheta = \overline{\beta\gamma} \cdot d\vartheta'$ erfüllt sein; d. h. sie liegen auf einer Geraden, welche den Streifen im umgekehrten Verhältniss der Amplituden theilt; es gibt nur eine solche Gerade, weil diese Theilung nur auf eine Weise möglich ist, sie existirt aber immer, mag das Verhältniss der Amplituden einen Werth haben, welchen man immer will. Die Amplitude $d\Theta$ der Resultanten ergibt sich, wenn man die Bewegung irgend eines Systempunktes als Rotation um γ auffasst. Dazu eignen sich besonders die Punkte der Axen α, β, da sie ihre Bewegung nur einer einzigen der beiden Rotationen verdanken. Der Punkt α z. B. erlangt vermöge der

Rotation um α keine Bewegung, die Rotation um β aber führt ihn um die Strecke $\overline{\alpha\beta} \cdot d\vartheta'$ senkrecht zur Axenebene fort, daher besteht die Gleichung $\overline{\alpha\gamma} \cdot d\Theta = \overline{\alpha\beta} \cdot d\vartheta'$, welche aber mit Hülfe von $\overline{\alpha\beta} = \overline{\beta\gamma} + \overline{\alpha\gamma} = \overline{\alpha\gamma}\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma} + 1\right) = \overline{\alpha\gamma}\left(\frac{d\vartheta}{d\vartheta'} + 1\right)$ übergeht in $d\Theta = d\vartheta + d\vartheta'$. Der Sinn von $d\Theta$ stimmt mit dem Sinn von $d\vartheta'$, also auch von $d\vartheta$ überein.

Sind die Rotationen entgegengesetzt (Fig. 8, b.), so ergibt sich in ähnlicher Weise, dass die Punkte des Streifens $\alpha\beta$ aus doppeltem Grunde aus der Axenebene herausgeschleudert werden, während die Punkte der beiden Aussenräume entgegengesetzte Bewegungen annehmen. Daher können nur in ihnen Punkte liegen, deren Bewegung äquivalent der Ruhe ist. Ist nun $d\vartheta > d\vartheta'$, so folgt, dass ein Punkt γ in dem der Axe α anliegenden Aussenraume um die entgegengesetzten Strecken $\overline{\alpha\gamma} \cdot d\vartheta$ und $\overline{\beta\gamma} \cdot d\vartheta'$ aus der Axenebene herausgetrieben wird und da für diesen Raum $\alpha\gamma < \beta\gamma$, so kann sehr wohl das kleinere $\overline{\alpha\gamma}$ mit dem grösseren $d\vartheta$ ein Produkt liefern gleich dem Produkte des grösseren $\overline{\beta\gamma}$ mit dem kleineren $d\vartheta'$. Für Punkte γ des andern Aussenraumes ist dies nicht möglich, da für sie $\alpha\gamma > \beta\gamma$ und folglich wegen $d\vartheta > d\vartheta'$ auch $\overline{\alpha\gamma} \cdot d\vartheta$ stets grösser als $\overline{\beta\gamma} \cdot d\vartheta'$ ist und ihm also für keine Lage des Punktes γ gleich werden kann. Die Gleichung $\overline{\alpha\gamma} \cdot d\vartheta = \overline{\beta\gamma} \cdot d\vartheta'$ sagt aber wieder aus, dass die gesuchten Punkte auf einer Geraden γ liegen, welche die Streifen im umgekehrten Verhältniss der Amplituden als Aussenlinie theilt. Es gibt nur eine solche Gerade, da diese Theilung nur auf eine Weise möglich ist; sie existirt immer, welchen Werth auch das Verhältniss der Amplituden haben mag. Indem man die Bewegung eines Punktes auf α als Rotation um γ auffasst, gelangt man zur Kenntniss der Amplitude $d\Theta$ der resultirenden Rotation. Man hat nämlich hierfür wieder $\overline{\alpha\gamma} \cdot d\Theta = \overline{\alpha\beta} \cdot d\vartheta'$, woraus aber mit Hülfe von $\overline{\alpha\beta} = \overline{\beta\gamma} - \overline{\alpha\gamma} = \overline{\alpha\gamma}\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma} - 1\right) = \overline{\alpha\gamma}\left(\frac{d\vartheta}{d\vartheta'} - 1\right)$ gefunden wird: $d\Theta = d\vartheta - d\vartheta'$.

Sind endlich die Amplituden entgegengesetzt gleich, so erlangt ein Punkt γ des Streifens die Bewegung $\overline{\alpha\gamma} \cdot d\vartheta + \overline{\beta\gamma} \cdot d\vartheta = (\overline{\alpha\gamma} + \overline{\beta\gamma})\, d\vartheta = \overline{\alpha\beta} \cdot d\vartheta$ und ebenso ein Punkt der Aussenräume die Bewegung $\overline{\beta\gamma} \cdot d\vartheta - \overline{\alpha\gamma} \cdot d\vartheta$ oder $\overline{\alpha\gamma} \cdot d\vartheta - \overline{\beta\gamma} \cdot d\vartheta$, deren gemeinschaftlicher Werth ebenfalls $\overline{\alpha\beta} \cdot d\vartheta$ ist. Alle Punkte der Axenebene haben also dieselbe Bewegung und das ganze System also eine Translation.

Die Resultate dieser Betrachtungen sind daher:

Eine unendlich kleine Rotation von der Amplitude $d\vartheta$ um eine Axe α und eine unendlichkleine Translation $d\tau$ senkrecht zu dieser Axe sind zusammen äquivalent einer Rotation derselben Amplitude und desselben Sinnes um eine zu α parallele Axe β, welche in der durch α zur Trans-

lationsrichtung senkrechten Ebene im Abstande $d = \frac{d\tau}{d\vartheta}$ von α auf derjenigen Seite von α liegt, auf welcher die Punkte dieser Ebene durch die Rotation und die Translation entgegengesetzte Bewegungen annehmen.

Zwei unendlichkleine Rotationen verschiedener Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ um zwei parallele Axen α, β sind äquivalent einer einzigen Rotation um eine gleichfalls parallele Axe, welche in die Ebene $\alpha\beta$ fällt. Sie theilt den Streifen $\alpha\beta$ im umgekehrten Verhältniss der Amplituden und zwar als innere Theilungslinie, wenn die Amplituden gleichen Sinnes, als äussere Theilungslinie, wenn sie entgegengesetzten Sinnes sind; im letzteren Falle findet sie sich auf der Seite der Axe der grösseren Amplitude. Die Amplitude der resultirenden Rotation ist die Summe oder Differenz der gegebenen Amplituden, je nachdem diese gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben; ihr Sinn stimmt im erstern Falle mit dem gemeinschaftlichen Sinne beider, im letztern Falle mit dem Sinnn der grösseren Amplitude überein.

Zwei entgegengesetzt gleiche unendlich kleine Rotationen um zwei parallele Axen α, β (ein unendlich kleines Rotationspaar) sind äquivalent einer unendlich kleinen Translation senkrecht zur Axenebene $\alpha\beta$, deren Grösse gleich dem Produkte des Axenabstandes und der gemeinschaftlichen Amplitude ist.

III. Capitel.

Bewegung eines unveränderlichen Systems parallel einer Ebene.

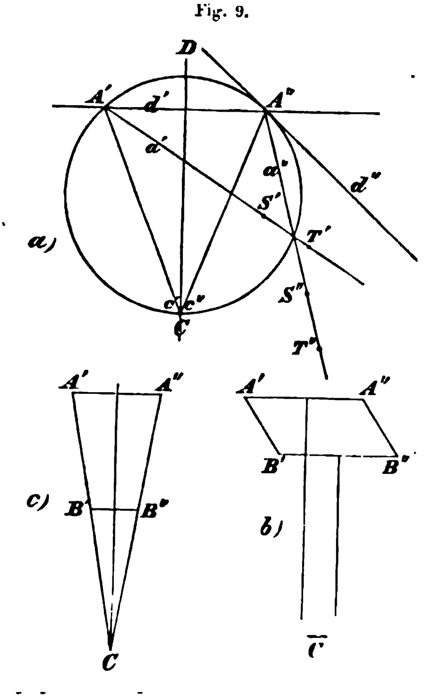
§. 1. Die Lehren des vorigen Capitels über die Aequivalenz der Translationen und der Rotationen um parallele Axen reichen hin, um eine genaue Einsicht in den Vorgang der Bewegung eines unveränderlichen Systems zu erlangen, bei welcher die Bahnen aller Punkte ein und derselben Ebene parallel sind. Hierbei bewegt sich jeder zu dieser Ebene parallel geführte Schnitt des Systems in seiner Ebene, führen alle Punkte einer zu der Ebene senkrechten Geraden congruente Bewegungen aus und sind mithin die Bewegungen aller Parallelschnitte zu jener Ebene dieselben. Daher genügt die Untersuchung der Bewegung eines solchen Parallelschnittes, d. h. die Untersuchung der Bewegung eines ebenen Systems in seiner eigenen Ebene.

I. Welches auch immer die Bewegung eines ebenen unveränderlichen Systems in seiner eigenen Ebene sei, sie ist immer äquivalent einer Rotation um ein bestimmtes in der Ebene des Systems-liegendes Centrum; und wie hieraus unmittelbar folgt:

Welches auch immer die Bewegung eines räumlichen unveränderlichen Systems parallel einer Ebene sei, sie ist stets äquivalent einer Rotation um eine bestimmte zu jener Ebene senkrechte Axe.

Es seien Σ' und Σ'' die beiden Lagen des beweglichen ebenen Systems Σ, welche dasselbe zu Anfang und am Schlusse seiner Bewegung einnimmt. Diese beiden Lagen bilden zwei in einer Ebene vereinigte congruente Systeme gleichartiger Lage*); es kommt darauf an zu zeigen, dass dieselben einen Doppelpunkt besitzen, d. h. dass es einen Punkt der Gesammtebene gibt, in welchem ein Paar homologer Punkte beider Systeme vereinigt ist. Zu dem Ende seien A', A'' (Fig. 9, a.) irgend ein Paar homologer Punkte; jeder Geraden von Σ', welche durch A' hindurchgeht, entspricht sodann eine bestimmte Gerade von Σ'', welche den Punkt A'' enthält, sodass A', A'' die Mittelpunkte zweier homologer Stralenbüschel sind. Diese Stralenbüschel sind gleichliegend, sodass, wenn ein beweglicher Stral von A' sich im Sinne der Uhrzeigerbewegung dreht, der homologe Stral von A'' sich in demselben Sinne dreht; die Büschel sind als Bestandtheile congruenter Systeme congruent, so dass je zwei Stralen des einen denselben Winkel einschliessen, wie die homologen Stralen des andern. Ziehen wir jetzt den Stral d' von A', welcher durch A'' geht und bestimmen den ihm homologen Stral d'' von A'',

Fig. 9.



*) Zwei congruente vereinigte Ebenen können gleichartige oder ungleichartige Lagen haben; jede Ebene hat nämlich ein doppeltes Gepräge und es findet gleichartige Lage statt, wenn die homologen Gepräge der Ebenen auf dieselbe Seite der Gesammtebene fallen, in welcher beide vereinigt sind; durch Umklappen der einen Ebene geht die gleichartige Lage in die ungleichartige über. Im vorliegenden Falle ist das Umklappen und damit auch die ungleichartige Lage ausgeschlossen.

so ist der Winkel $(d'a')$, den er mit einem beliebigen andern Strahle a' von A' bildet, gleich dem Winkel $(d''a'')$, den der homologe Strahl a'' mit d'' bildet und liegen beide Winkel auf homologen Seiten von d' und d''. Hieraus folgt, dass a' und a'' sich unter constantem Winkel schneiden, nämlich unter dem Winkel, den d' und d'' mit einander einschliessen. Daher ist der Ort der Schnittpunkte der homologen Stralen beider Büschel ein Kreis, welcher durch A' und A'' geht, diesen constanten Winkel als Peripheriewinkel fasst und folglich den Stral d'' in A'' berührt. Durch jeden Punkt dieses Kreises gehen mithin zwei homologe Stralen der beiden Büschel. Besitzen die Systeme nun einen Doppelpunkt, so muss derselbe auf diesem Kreise liegen. Denn es sind in ihm zwei homologe Punkte C', C'' vereinigt und daher die Geraden $C'A'$, $C''A''$ als Verbindungslinien homologer Punkte homologe Stralen der Büschel A', A'' und schneiden sich folglich auf dem Kreise. Die homologen Stralen wie a', a'' sind Träger congruenter Punktreihen $A'S'T'$.., $A''S''T''$.., so dass $A'S' = A''S''$, $A'T' = A''T''$ u. s. f.; sollen daher homologe Punkte C', C'' in einen Punkt C zusammenfallen, so muss dass Dreieck $A'CA''$ gleichschenklig werden und kann ein Doppelpunkt nur Schnittpunkt des in der Mitte von $A'A''$ auf $A'A''$ errichteten Perpendikels mit dem Kreise sein. Von den beiden Schnittpunkten C, D kann aber nur der eine Doppelpunkt sein. Zwar gehen nach beiden homologe Strahlenpaare der Büschel A', A'', aber nur in einem von ihnen, C, schneiden sich dieselben so, dass die zusammentreffenden Halbstrahlen $A'C'$ ..., $A''C''$ ... homologe Punkte enthalten.

Es gibt daher nur einen Doppelpunkt und derselbe existirt immer, wenn er auch in einem speziellern Falle in's Unendliche rücken kann. Um denselben zu finden, braucht man nur ausser dem Perpendikel, welches in der Mitte der Sehne $A'A''$ errichtet wurde, noch ein zweites in der Mitte einer andern Sehne $B'B''$ zu construiren, ihr Schnittpunkt liefert den gesuchten Doppelpunkt. Durch Rotation um den Doppelpunkt gelangt das System aus der ersten Lage in die zweite. Die Amplitude derselben ist gleich dem Winkel zweier homologer Geraden, wie z. B. d', d''. Die homologen Geradenpaare bilden mit einander denselben Winkel, da die Geraden des beweglichen Systems durch dieselbe Rotation aus der ersten in die zweite Lage gelangen.

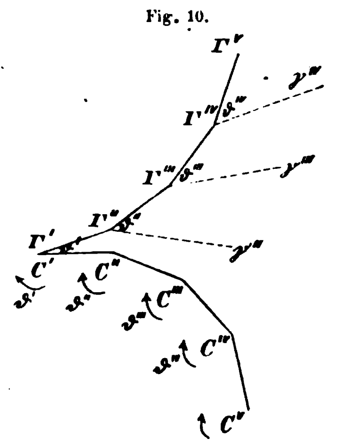
Sind die Sehnen $A'A''$ und $B'B''$ parallel und fallen die Perpendikel, welche in ihrer Mitte errichtet wurden, nicht zusammen, so rückt ihr Schnittpunkt und damit das Rotationscentrum in's Unendliche. Die Rotation geht in eine Translation über und bemerkt man, dass dieser Fall nur eintritt, wenn $A'A'' = B'B''$ ist (Fig. 9, b).

Fallen aber beide Perpendikel zusammen, so folgt, dass die Abstände des Centrums von beiden Sehnen sich wie die Längen der

Sehnen verhalten und dient diese Bemerkung zur Auffindung desselben. (Fig. 9, c).

Würden die Systeme Σ', Σ'' zwei Doppelpunkte C, D besitzen, so müssten sie zusammenfallen. Denn wegen der gleichartigen Lage fallen diesseits und jenseits der Verbindungslinie derselben homologe Theile der Ebenen aufeinander. Sind nun in C die Punkte A', A'', in D die Punkte B', B'' vereinigt und ist E', E'' ein weiteres Paar homologer Punkte der Systeme, so fallen die Dreiecke $A'\,B'\,E'$ und $A''\,B''\,E''$ vermöge der Congruenz zusammen und damit also die Punkte E', E''.

§. 2. Es seien jetzt Σ', Σ'', Σ''', ... eine Reihe von Lagen, welche das ebene System Σ während seiner Bewegung durchläuft. Die Bewegung, welche dasselbe aus der Lage Σ' nach Σ'' führt, ist äquivalent einer Rotation ϑ' um ein gewisses Centrum C' (Fig. 10), die Bewegung, durch welche dasselbe aus der Lage Σ'' in die folgende Lage Σ''' gelangt, ist äquivalent einer Rotation ϑ'' um ein anderes Centrum C'' u. s. f.


Fig. 10.

Construiren wir alle diese Centra und ertheilen dem System Σ statt seiner wirklichen Bewegung nach und nach die Rotationen ϑ', ϑ'' ... um sie, so ergibt sich eine Bewegung, welche mit der wirklich stattfindenden in den Lagen Σ', Σ'', Σ''' ... übereinstimmt. Schaltet man nun zwischen je zwei aufeinanderfolgenden dieser Lagen andere Lagen des beweglichen Systems ein und bestimmt von Neuem die Rotationscentra und Amplituden, wie vorher, so erhält man eine Bewegung des Systems, welche der wirklich stattfindenden sich bereits weit enger anschliesst. Setzt man diesen Prozess immer weiter fort, so häufen sich die Centra immer dichter und weil je zwei aufeinanderfolge Lagen des Systems immer weniger von einander abweichen, so nehmen die Amplituden immer mehr ab und erkennt man, dass die wirklich stattfindende Bewegung die Grenze ist, welcher sich die Rotationsfolge ohne Ende nähert. Dabei nähert sich die Reihe der Centra einer bestimmten Curve, sodass man beim Uebergang zur Grenze selbst den Satz erhält:

II. Die Bewegung eines unveränderlichen ebenen Systems in seiner eigenen Ebene ist äquivalent einer continuirlichen Folge von Rotationen um die Punkte einer bestimmten in der Ebene gelegenen Curve (C); und mit Rücksicht auf die Bewegung eines Systems parallel einer Ebene:

Die Bewegung eines unveränderlichen körperlichen

Systems parallel einer Ebene ist äquivalent einer continuirlichen Folge von Rotationen um die Erzeugungslinien eines zur Ebene senkrechten Cylinders (C) als Axen.

Die Curve (C) ist zum Verständniss der Bewegung des Systems zwar wesentlich, aber noch nicht hinreichend, vielmehr gehört dazu noch eine andere. Während sich nämlich das System um C' dreht, fällt mit diesem Centrum ein gewisser Punkt Γ' des Systems zusammen, welcher C' verlässt, sobald die Drehung um C'' beginnt; während dieser liegt ein Systempunkt Γ'' in C''; ebenso fällt während der Drehung um C''' mit diesem Punkte ein gewisser Punkt Γ''' zusammen u. s. f. Sowie nun die Punkte C in der Grenze eine Curve des absoluten Raumes bilden, so ist der geometrische Ort der Punkte Γ schliesslich eine gewisse Curve des Systems, deren Punkte während der Bewegung mit den Punkten der Curve (C) zur Berührung kommen, so zwar, dass die Curve (Γ) in jeder Lage des Systems die Curve (C) berührt und während der Bewegung auf ihr hinrollt ohne zu gleiten. Man hat daher weiter den Satz:

III. **Die Bewegung eines unveränderlichen ebenen Systems in seiner Ebene kann definirt werden als das Rollen einer bestimmten Curve (Γ) des beweglichen Systems auf einer bestimmten Curve (C) der festen Ebene.** Oder auch:

Die Bewegung eines unveränderlichen räumlichen Systems parallel einer Ebene kann definirt werden als das Rollen einer bestimmten Cylinderfläche (Γ) des beweglichen Systems auf einer bestimmten festen Cylinderfläche (C) des Raumes ohne Gleiten.

Man kann leicht zu einer Folge von Punkten C die entsprechende Folge der Punkte Γ construiren. Man trage zu dem Ende an $C'\,C''$ entgegengesetzt dem Sinne der Rotation um C' den Winkel $\Gamma''\,C'\,C''$ gleich der zu C' gehörigen Amplitude ϑ' an und nehme $\Gamma'\,\Gamma'' = C'\,C''$. Hierauf ziehe man $\Gamma''\gamma''$ so, dass der Winkel $\Gamma'\Gamma''\gamma''$ gleich dem Winkel $C'C''C'''$ wird, trage an $\Gamma''\gamma''$ wiederum entgegengesetzt der Rotation um C'' die diesem Centrum entsprechende Amplitude ϑ'' an und mache $\Gamma''\,\Gamma''' = C''\,C'''$. Setzt man diese Construction fort, so erhält man ein Polygon $[\Gamma]$, dessen Aussenwinkel gleich den Polygonwinkeln des Polygons $[C]$ sind vermehrt um die den Punkten C entsprechenden Rotationsamplituden, welches Polygon also bei der Rotation des Systems um die Punkte C sich mit seinen Seiten an die Seiten von $[C]$ anlegt. Geht nun das Polygon $[C]$ in die Curve (C) über, welche der Ort aller Rotationscentra im absoluten Raume ist, so geht das Polygon $[\Gamma]$ zugleich in die Curve (Γ) über, welche alle Punkte des Systems enthält, welche nach und nach mit den Punkten der Curve (C) zusammenfallen, und welche, indem sie über die Curve (C) hinrollt, das System nöthigt, die ihm vorgeschriebene Bewegung auszuführen.

§. 3. Jeder Lage des ebenen Systems entspricht ein bestimmter Punkt C der Curve (C), um welchen dasselbe eine unendlich kleine Rotation ausführt, um in die folgende, unendich nahe Lage zu gelangen. Dieser Punkt heisst das augenblickliche oder momentane Rotationscentrum des Systems (kürzer wollen wir „Momentancentrum" sagen) und die unendlichkleine Rotation um dasselbe die Elementarbewegung des Systems. Statt „Momentancentrum" ist bei dem räumlichen Systeme „Momentanaxe" zu sagen.

In Folge der Elementarbewegung beschreibt jeder Punkt des Systems ein Element seiner Bahn, welches als unendlich kleiner Kreisbogen um das Momentancentrum als Mittelpunkt oder auch als unendlich kleine gerade Linie angesehen werden kann, deren Richtung die Richtung der Tangente an die Bahn des Punktes ist. Da die Tangente des Kreises auf dem Radius derselben senkrecht steht, so sieht man, dass die Verbindungslinien des Momentancentrums mit den Punkten des Systems die Normalen der Bahnen dieser Punkte sind und dass in jeder Lage des Systems die Normalen der Bahnen seiner Punkte sich in ein und demselben Punkte schneiden, nämlich im Momentancentrum jener Lage. Die Aufgabe, die Tangente und Normale an irgend eine der Curven zu ziehen, welche die Punkte des Systems während der Bewegung beschreiben, ist mit Hülfe des Momentancentrums sehr einfach zu lösen.

§. 4. Aus Cap. I, §. 2. erhellt, dass die Bewegung eines unveränderlichen Systems bestimmt ist, sobald die Bewegung irgend dreier seiner Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmt ist. Es seien A, B, C drei solche Punkte des Systems und bewege sich einer von ihnen, z. B. A auf einer gegebenen ebenen oder doppelt gekrümmten Curve (α). Für jede seiner Lagen auf derselben ist der Punkt B auf die Oberfläche einer um A mit AB als Halbmesser beschriebenen Kugelfläche beschränkt; nimmt man daher auch für B eine Curve (β) als gegeben an, auf welcher dieser Punkt sich bewegen soll, so ergeben sich die den verschiedenen Lagen von A auf (α) entsprechenden Lagen von B auf (β) als die continuirliche Folge der Durchschnitte dieser Curve (β) mit jener Kugelfläche. Für jede Lage der Geraden AB ist alsdann der dritte Punkt C auf den Umfang eines Kreises beschränkt, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt einer durch C gehenden zu AB senkrechten Ebene mit AB ist. Um also die Bewegung dieses dritten Punktes C zu bestimmen, darf man nicht etwa noch eine dritte Curve willkührlich annehmen und festsetzen, C solle sich auf ihr bewegen. Denn da C ausserdem auch auf jenem Kreise liegen muss, so müsste die Bedingung noch hinzutreten, dass der Kreis in allen seinen Lagen die dritte Curve schneiden, dadurch aber die Willkührlichkeit der Wahl jener Curve aufgehoben wird. Vielmehr darf nur noch eine Fläche E als Ort des Punktes C beliebig angenommen werden und auf dieser ergeben sich die den ver-

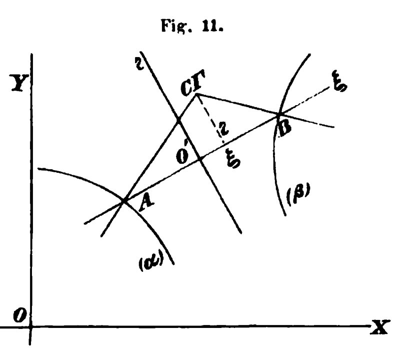
schiedenen Lagen der Geraden AB entsprechenden Lagen des Punktes C als die Folge der Durchschnitte jenes Kreises mit ihr.

Sind die beiden Curven (α), (β) ebene Curven und enthält eine Ebene E, auf welche der Punkt C beschränkt sei, beide, so bleibt das Dreieck ABC und mit ihm das ganze System, dem dasselbe angehört, fortwährend in dieser Ebene. Hieraus erkennt man, dass die Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene bestimmt ist, sobald in dieser zwei feste Curven (α), (β) gegeben sind und festgesetzt wird, dass zwei Punkte A, B des Systems auf ihnen zu bleiben genöthigt sind. Für diese Bestimmung der Bewegung ergeben sich alsdann die Aufgaben:

Mit Hülfe der gegebenen Curven (α), (β) zu finden 1) das Momentancentrum C für eine beliebige Lage des Systems, 2) den Ort (C) sämmtlicher Momentancentra, 3) zu einem gegebenen Momentancentrum C den Systempunkt Γ, welcher im Laufe der Bewegung mit C zusammentrifft, sowie die Lage des Systems, für welche dies geschieht, 4) den Ort (Γ) aller Punkte Γ im Systeme, 5) die Bahn eines beliebigen Systempunktes D und die Tangente oder Normale derselben in irgend einem ihrer Punkte.

Die constructive Lösung dieser Aufgaben beruht auf Folgendem (siehe Fig. 11). Da die Normalen der Bahnen aller Systempunkte entsprechend einer bestimmten Stellung des Systems durch das Momentancentrum gehen, so erhält man dies als Durchschnitt der Normalen an die Curven (α), (β) in den Punkten A, B. Die continuirliche Reihe aller dieser Normaldurchschnitte, entsprechend den verschiedenen Lagen der Punkte A, B auf den Curven (α), (β) bildet die Curve (C). — Die Punkte A, B und das Momentancentrum C bilden ein Dreieck ABC, welches im Allgemeinen für jede Lage des Systems ein anderes sein wird. Construirt man nun im beweglichen System über AB als Basis die Dreiecke $AB\Gamma$ congruent mit den verschiedenen Dreiecken ABC, so decken sich aufeinanderfolgend während der Bewegung diese mit jenen und sind folglich die Ecken Γ derselben, welche AB gegenüberliegen, die Systempunkte, welche mit den Momentancentris zusammentreffen. — Behufs Lösung der dritten Aufgabe wird man von dem gegebenen Momentancentrum C die Normalen CA, CB auf die Curven (α), (β) fällen und das Dreieck ABC in das bewegliche System an AB übertragen; der Systempunkt, mit welchem C zusammenfällt, ist der gesuchte Punkt Γ. Lassen

Fig. 11.



sich von C an eine oder die andere der Curven (α), (β) mehrere Normalen legen, so entscheidet die bekannte Länge AB, welche Verbindungslinie der Fusspunkte werden muss, welche zwei von den verschiedenen Fusspunkten der Normalen zu wählen sind. — Da das Bogenelement, welches ein beliebiger Systempunkt D beschreibt, als unendlich kleiner Kreisbogen um das Momentancentrum C angesehen werden muss, so folgt, dass die Bahn des Punkts D von sämmtlichen Kreisen, welche aus den Momentancentris C mit den Abständen CD derselben von den entsprechenden Lagen des beschreibenden Punktes D beschrieben werden können, berührt wird. Die Bahn des Punktes D ist also die Enveloppe derselben.

Behufs der analytischen Behandlung der vorstehenden Aufgaben nehmen wir in der festen Ebene ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y und in dem beweglichen Systeme ein anderes der ξ, η an. Das erste sei beliebig gewählt, der Ursprung des zweiten aber sei die Mitte der Geraden AB und seien AB und die in ihrer Mitte errichtete Senkrechte die Axen der ξ und η. Die Coordinaten des Punktes A auf der Curve (α) seien x_α, y_α, als Functionen irgend einer Variabeln t_α gedacht, durch deren Elimination die Gleichung der Curve (α) in der gewöhnlichen Form gefunden würde; die Coordinaten von B auf der Curve (β) seien in ähnlicher Weise x_β, y_β und als Functionen einer andern Variabeln t_β gegeben. Ist alsdann a der constante Abstand AB beider Punkte, so besteht zunächst die Gleichung

$$(x_\beta - x_\alpha)^2 + (y_\beta - y_\alpha)^2 = a^2 \tag{1}$$

und werden die Coordinaten des beweglichen Ursprunges O' sein: $\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)$, $\frac{1}{2}(y_\alpha + y_\beta)$. Charakterisirt man ausserdem die specielle Lage des beweglichen Coordinatensystems gegen das feste durch den Winkel λ, welchen die positiven Axen der x, ξ mit einander einschliessen, sodass also

$$\frac{\cos\lambda}{x_\beta - x_\alpha} = \frac{\sin\lambda}{y_\beta - y_\alpha} = \frac{1}{a}, \tag{2}$$

so bestehen zwischen den Coordinaten x, y eines Punktes der festen Ebene und denen ξ, η des mit ihm in einer speziellen Lage des Systems zusammenfallenden Punktes die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta) + \xi\cos\lambda - \eta\sin\lambda \\ y &= \tfrac{1}{2}(y_\alpha + y_\beta) + \xi\sin\lambda + \eta\cos\lambda, \end{aligned} \tag{3}$$

Bedeuten nun x, y die Coordinaten des Momentancentrums C, so sind ξ, η die Coordinaten des mit ihm zusammenfallenden Systempunktes Γ und müssen x, y den Gleichungen der Normalen an (α), (β) in den Punkten A, B genügen, nämlich

$$\begin{aligned} (x - x_\alpha)\,x_\alpha' + (y - y_\alpha)\,y_\alpha' &= 0 \\ (x - x_\beta)\,x_\beta' + (y - y_\beta)\,y_\beta' &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

worin die Accente Differentiationen nach t_α, t_β resp. bedeuten. Mit Hülfe der Gleichung (1) kann eine von den Grössen t_α, t_β eliminirt werden, sodass von (3) und (4) durch Entfernung von ξ, η noch zwei Gleichungen übrig bleiben, welche die Coordinaten des Momentancentrums durch die andere dieser Grössen darstellen. Eliminirt man auch diese noch, so bleibt eine Gleichung für den Ort (C). Um die Gleichung der Curve (Γ) zu finden, hat man statt ξ, η nur x, y zu eliminiren. — Bedeuten ξ, η die Coordinaten eines bestimmten Systempunktes, so sind x, y Coordinaten der Punkte seiner Bahn; die Gleichung dieser erhält man aus (3) (ohne (4) zu Hülfe zu nehmen) durch Elimination der Grundvariabeln.

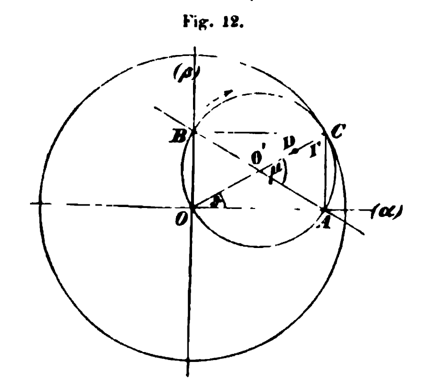
§. 5. Wir müssen noch eines merkwürdigen Dualismus gedenken, welchen die Erzeugung der Curven durch Bewegung eines ebenen Systems in einer festen Ebene darbietet. Während das System sich bewegt, d. h. also während die Curve (Γ) über die Curve (C) hinrollt, beschreibe der Systempunkt D, d. h. ein Punkt, welcher im beweglichen System fest ist, seine Curve. Vertauscht man nun die Curven (C) und (Γ) und lässt die Curve (C) auf der festgedachten Curve (Γ) im umgekehrten Sinne rollen, so beschreibt der Punkt D auf der jetzt beweglich gedachten Ebene der Curve (C) dieselbe Curve, wie vorher. Um dies einzusehen, bedenke man, dass die Bewegung des beweglichen Systems in der festen Ebene nicht im mindesten alterirt wird und jeder Punkt nach wie vor seine Bahn beschreibt, wenn man beiden eine gemeinsame Bewegung ertheilt. Nun ertheile man beiden in jeder Lage eine Rotation um den jedesmaligen Punkt Γ gleich und entgegengesetzt der vorigen Rotation um das Momentancentrum; dann wird das früher bewegliche System zur Ruhe kommen, dagegen die früher ruhende Ebene sich bewegen und zwar so, dass die Curve (C) in ihr auf der Curve (Γ) des jetzt ruhenden Systems im umgekehrten Sinne rollt. Hiebei beschreibt also der Punkt D in der jetzt beweglichen Ebene dieselbe Curve, wie früher in der ruhenden. Man sieht hieraus, dass man jede Curve auf eine doppelte Art erzeugen kann. Man hat von dieser doppelten Erzeugung vielfach Nutzen gezogen; so z. B. bei dem Mechanismus der Drehbank, wovon später die Rede sein wird. (Vgl. Chasles Aperçu hist. in der deutsch. Uebers. v. Sohnke, S. 447). Die Curven (C) und (Γ) hängen ab von der Art, wie die Bewegung des Systems bestimmt wird; vertauschen sie nun ihre Rollen, so wird die Bewegung der vorher festen Ebene in einer Weise bestimmt werden, welche aus den Bestimmungselementen der ursprünglichen Bewegung durch gewisse Vertauschungen hervorgeht. Wenn z. B. wie oben das System sich so bewegt, dass zwei Punkte desselben auf zwei festen Curven bleiben, so wird nachher das bewegliche System eine Bewegung haben, bei welcher zwei Curven desselben durch zwei feste Punkte hindurchgehen und ähnlich in andern Fällen. In diesem Umtausch der bestimmenden

Elemente der Bewegung beruht das, was als Dualismus bezeichnet wurde.

§. 6. Als erstes Beispiel für die bis jetzt behandelten Lehren dieses Capitels wählen wir die elliptische Hypocycloïdenbewegung.

Ein ebenes unveränderliches System bewegt sich in seiner Ebene so, dass zwei seiner Punkte, A und B (Fig. 12) fortwährend auf zwei festen zu einander rechtwinkligen Geraden (α), (β) bleiben, man soll finden: 1. das Momentancentrum C für eine beliebige Lage des Systems, sowie den Ort (C) aller Momentancentra, 2. den Ort (Γ) aller Systempunkte Γ, welche nach einander mit den Momentancentris C zusammentreffen, endlich 3. die Bahn eines beliebigen Systempunktes D nebst der Tangente oder Normalen derselben in einem beliebigen ihrer Punkte.

Fig. 12.



1. Das Momentancentrum C ist der Durchschnitt C der in den Punkten A, B auf ihre Bahnen (α), (β) errichteten Normalen AC, BC. Da in dem Rechteck $OABC$ die Diagonale OC, welche dies Centrum mit dem Schnittpunkte der festen Geraden verbindet, constant, nämlich gleich AB ist, so ist der Ort (C) aller Momentancentra ein um O mit AB als Radius beschriebener Kreis.

2. Da alle Dreiecke $AB\Gamma$, welche im beweglichen System über AB als Grundlinie mit den verschiedenen Punkten Γ, welche mit den Momentancentris C zusammentreffen, als Spitzen gebildet werden können, bei Γ rechtwinklig sind, so ist der Ort (Γ) ein über AB als Durchmesser beschriebener Kreis. Dieser Kreis geht während der Bewegung fortwährend durch O hindurch und berührt den Kreis der Momentancentra so, dass beide auf dieselbe Seite der gemeinschaftlichen Tangente fallen. Die Bewegung des Systems kann daher ebensogut durch das Rollen eines Kreises auf der Innenseite eines andern Kreises von doppelt so grossem Halbmesser definirt werden, als durch die Bewegung der beiden Systempunkte A, B auf den festen Geraden (α), (β); daher der Name „Hypocycloïdenbewegung". Die Bewegung ist eine periodische und kehren dieselben Lagen des Systems nach zwei vollen Umläufen des rollenden Kreises wieder; sie kann in beiderlei Sinne erfolgen, im Sinne der Uhrzeigerbewegung und im umgekehrten.

3. Um die Bahn eines beliebigen Systempunktes D (Fig. 13) zu finden, bestimmen wir zunächst die äussersten Lagen, welche derselbe während der Bewegung erreicht. Der Punkt D, der Mittelpunkt O des festen und der Mittelpunkt O' des rollenden Kreises kommen während einer vollen Periode der Bewegung viermal in gerade Linie zu liegen, zweimal so, dass D ausserhalb der Strecke OO' zwischen O' und der Peripherie des festen Kreises sich befindet und zweimal so, dass er zwischen O und O' liegt. Diese Lagen folgen abwechselnd auf einander und treten je nach einer halben Umdrehung des rollenden Kreises ein, liegen mithin paar-

weise sich diametral gegenüber. In den beiden ersten Lagen E, E' wird die Entfernung OD ein Maximum, in den beiden letzten F, F' ein Minimum. Bezeichnet a die Länge AB, den Durchmesser des rollenden Kreises, und D die Entfernung $O'D$ des beschreibenden Punktes von seinem Mittelpunkt, so ist $\frac{1}{2}a + d$ das Maximum, $\frac{1}{2}a - d$ das Minimum der Entfernung. Ziehen wir jetzt die beiden zu einander senkrechten Geraden EE', FF' und beschreiben wir aus O mit den Radien $\frac{1}{2}a - d$, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a + d$ drei feste Kreise, sowie aus O' mit der Entfernung d einen vierten beweglichen. Eine beliebige Lage des rollenden Kreises sei durch den Winkel $COE = \psi$ charakterisirt, welchen die Verbindungslinie OC des festen Mittelpunktes und des Momentancentrums mit OE bildet; diese Gerade schneide die drei ersten Kreise in K, O', L. Ist nun C_0 das Momentancentrum für die Lage $\psi = 0$ und Γ_0 der Punkt des rollenden Kreises, welcher in dieser Lage mit C_0 zusammenfiel, während in der Lage $\psi = \psi$ der Punkt Γ in das Momentancentrum C eingetreten ist, so sind die Bogen $\Gamma_0 \Gamma$ und $C_0 C$, von denen der erstere sich während der Bewegung auf dem letzteren abgewickelt hat, einander gleich. Da sie aber zwei Kreisen angehören, deren Halbmesser im Verhältnisse 1 : 2 stehen, so ist der dem ersteren zugehörige Centriwinkel das Doppelte des dem letzteren zugehörigen, d. h. es ist $\sphericalangle\, CO'\Gamma_0 = 2\psi$. Aus dem gleichschenkligen Dreiecke $DO'K$ folgt daher, dass die Gerade KD parallel OE, wozu man weiter hinzufügen kann, dass LD parallel OF, indem $\sphericalangle\, KDL = \frac{\pi}{2}$. Man erkennt hieraus, dass der Ort des Systempunktes D übereinkommt mit dem Orte des Durchschnitts zweier zu zwei festen rechtwinkligen Axen OE, OF paralleler Geraden KD, LD, welche durch die Schnittpunkte K, L eines beweglichen Strahles OC mit zwei um den Durchschnitt der festen Axen beschriebenen Kreisen gezogen werden. Der gesuchte Ort des Punktes D ist daher eine **Ellipse**, welche den Punkt O zum Mittelpunkt und die Geraden EE', FF' zu Hauptaxen hat. Auch kann man die Natur der Bahncurve so erkennen. Zieht man durch den beweglichen Punkt D eine Parallele zu CO, welche die Geraden EE', FF' in G und H schneidet, so folgt aus den Parallelogrammen LH und KG, dass $DH = \frac{1}{2}a + d$, $DG = \frac{1}{2}a - d$ und folglich $GH = 2d = KL$ ist. Demnach kommt der gesuchte Ort überein mit dem Orte des Punktes D einer Geraden, von welcher zwei andere Punkte G, H auf zwei festen Geraden EE', FF' sich bewegen. Dieses ist aber dieselbe Ellipse, wie vorher.

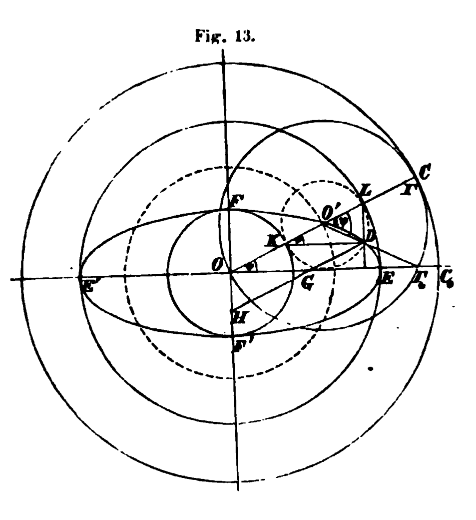
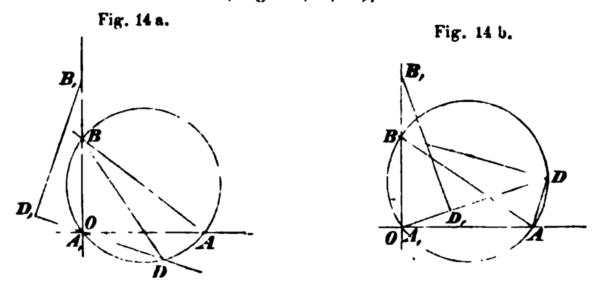


Fig. 13.

Da die Halbaxen der Ellipse $\frac{1}{2}a + d$ und $\frac{1}{2}a - d$ sind, so folgt, dass alle Punkte des beweglichen Systems, welche auf einem Kreise um O' liegen, congruente Ellipsen beschreiben, welche sich blos durch die Lage ihrer Hauptaxen unterscheiden. Wird der Radius d dieses Kreises Null, so erhält man den Kreis, welchen O' beschreibt. Für $d = \frac{1}{2}a$, d. h. für Punkte auf dem Umfang des rollenden Kreises wird die kleine Axe der Ellipse Null, die grosse gleich dem Durchmesser des festen Kreises. Alle Punkte dieses Umfanges beschreiben daher gerade

Strecken. Denn da das Dreieck $OO'\Gamma_0$ gleichschenklig ist und an seiner Basis Winkel gleich ψ besitzen muss, weil der Aussenwinkel 2ψ ist, so folgt, dass der Punkt Γ_0 für jede Lage des Systems sich auf EE' befinden muss. Auch kann die geradlinige Beschaffenheit der Bahn dieser Punkte unmittelbar auf folgende Art erkannt werden. Denkt man sich nämlich die Lage des Systems, bei welcher A mit dem Punkte O zusammenfällt (Fig. 14, a, b.), also das Dreieck ABD die Lage

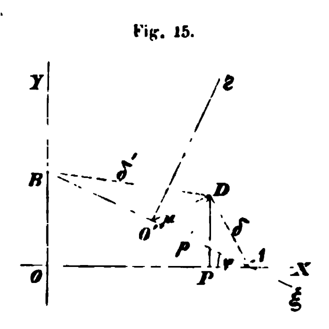
Fig. 14 a. Fig. 14 b.



$A_{,}B_{,}D_{,}$ hat, so muss, da Winkel $B_{,}A_{,}D_{,}$ = Winkel BAD, die Gerade $OD_{,}$ durch D hindurchgehen, d. h. der Punkt D muss für jede Lage des Systems auf dem Strale $OD_{,}$ oder seiner Rückverlängerung liegen.

Um die Lage der Hauptaxen der von einem bestimmten Systempunkte beschriebenen Ellipse zu bestimmen, sei (Fig. 12) μ der Winkel $DO'A$ im System, den die Verbindungslinien $O'D$ des beschreibenden Punktes und des Mittelpunktes des beweglichen Kreises wie der Geraden BA bildet, deren Endpunkte auf den festen Geraden (α), (β) sich bewegen. Die Lage der grossen Axe ist nun diejenige, für welche D in den Punkt E (siehe Fig. 13) eintritt; daher muss der Winkel ϑ, den die grosse Axe mit (α) bildet, die Hälfte von μ sein. Man sieht hieraus, dass alle Punkte einer Geraden des Systems, welche durch O' geht, Ellipsen beschreiben, deren Hauptaxen in dieselben Richtungen der festen Ebenen fallen. Für $\mu = 0$ erhält man die Gerade AB selbst; für ihre Punkte wird $\vartheta \doteq o$; alle ihre Punkte beschreiben daher Ellipsen, deren Hauptaxenrichtungen in (α) und (β) liegen. Das Quadrat der halben Excentricität c dieser Ellipsen ist $c^2 = (\frac{1}{2}a + d)^2 - (\frac{1}{2}a - d)^2 = 2ad$, es ist also diese Grösse das geometrische Mittel zwischen dem Durchmesser $2a$ des festen Kreises und dem Abstande d des beschriebenen Punktes von dem Mittelpunkt des rollenden Kreises.

Fig. 15.



4. Um die Bahn eines Systempunktes D analytisch zu bestimmen, seien ξ, η (Fig. 15) seine Coordinaten in Bezug auf ein dem System angehöriges rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Axe der ξ in die Gerade BA fällt und dessen Ursprung der Mittelpunkt derselben ist. Ferner seien x, y die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf das Coordinatensystem der festen Ebene, dessen x- und y-Axe in die Geraden (α) und (β) fallen. Während der Bewegung des Systems bleiben also ξ, η constant, dagegen sind x, y die variabeln Coordinaten eines Punktes der Bahn, welche D beschreibt. Wählt man nun den Winkel $BAO = \psi$ als unabhängige Variable, welche die spezielle Lage des Systems bestimmt, so sind die Coordinaten des beweglichen Ursprungs $\frac{1}{2}a \cos\psi$ und $\frac{1}{2}a \sin\psi$ und erhält man aus den Gleichungen des §. 4 oder auch unmittelbar durch Projection des Dreiecks $O'pD$ auf die festen Axen die beiden Gleichungen:

$$x = (\tfrac{1}{2} a + \xi) \cos\psi + \eta \sin\psi$$
$$y = \eta \cos\psi + (\tfrac{1}{2} a - \xi) \sin\psi.$$

Aus ihnen folgt, indem man die Quadratsumme von $\sin\psi$ und $\cos\psi$ entwickelt und dieselbe gleich Eins setzt, als Gleichung des gesuchten Ortes

$$[(\tfrac{1}{2} a - \xi)^2 + \eta^2]\, x^2 - 2\, a\, \eta\, x\, y + [(\tfrac{1}{2} a + \xi)^2 + \eta^2]\, y^2 = \Delta^2,$$

wo
$$\Delta = \tfrac{1}{4} a^2 - (\xi^2 + \eta^2) = \tfrac{1}{4} a^2 - d^2.$$

Bemerkt man, dass $(\frac{1}{2} a - \xi)^2 + \eta^2 = \overline{AD}^2$, $(\frac{1}{2} a + \xi)^2 + \eta^2 = BD^2$ ist, so erhält man hierfür etwas einfacher, indem man $AD = \delta$, $BD = \delta'$ setzt:

$$\delta^2 x^2 - 2\, a \eta\, xy + \delta'^2 y^2 = \Delta^2.$$

Dies ist die Gleichung eines centralen Kegelschnittes, dessen Mittelpunkt im Coordinatenursprung liegt. Die Art desselben hängt von der Beschaffenheit der Grösse

$$D = a^2 \eta^2 - \delta^2 \delta'^2$$

ab. Nun stellt einerseits $a\eta$, andererseits, wenn der Winkel ADB mit ω bezeichnet wird, $\delta\delta' \sin\omega$ den doppelten Inhalt $2J$ des Dreiecks ABD dar, daher ist $D = -4J^2 a^2 tg\, \omega$, also nicht positiv, mithin ist der Kegelschnitt elliptischer Natur. Für den Fall $\omega = \frac{\pi}{2}$ wird $D = 0$, d. h. $a\eta = \delta\delta'$; daher ist die linke Seite der Gleichung der Curve ein vollkommenes Quadrat und degenerirt der Kegelschnitt in zwei zusammenfallende Gerade $(\delta x - \delta' y)^2 = 0$, da in diesem Falle der Punkt D auf dem rollenden Kreise liegt, also $d = \frac{1}{2} a$, mithin $\Delta = 0$ ist. Für $\eta = 0$ liegt D auf der Geraden AB und wird wegen $\Delta^2 = \frac{1}{4} a^2 - \xi^2 = (\frac{1}{2} a - \xi)(\frac{1}{2} a + \xi) = \delta\delta'$ die Gleichung der Curve $\frac{x^2}{\delta'^2} + \frac{y^2}{\delta^2} = 1$, sie selbst also eine Ellipse, deren Hauptaxenrichtungen in die festen Geraden fallen. — Für den Winkel ϑ einer Hauptaxe des Kegelschnitts mit der Axe der x hat man $tg\, 2\vartheta = \frac{2 a \eta}{\delta^2 - \delta'^2}$, oder da $\delta^2 = \frac{1}{4} a^2 + d^2 + ad \cos\mu$, $\delta'^2 = \frac{1}{4} a^2 + d^2 - ad \cos\mu$, also $\delta^2 - \delta'^2 = 2\, ad \cos\mu$, sowie $a\eta = ad \sin\mu$ wird: $tg\, 2\vartheta = tg\, \mu$, also $\vartheta = \frac{1}{2}\mu$, wie oben.

5. Wir wollen noch die Enveloppe einer Geraden des Systems suchen. Ihr Abstand vom Mittelpunkte des beweglichen Kreises sei e. Wir ziehen durch diesen Punkt den zu ihr parallelen Durchmesser, dessen Endpunkte dem Obigen zufolge zwei zu einander senkrechte Gerade beschreiben. Nehmen wir diese zu Coordinatenaxen, so wird, wenn wieder ψ den Neigungswinkel jenes Durchmessers gegen die x-Axe bezeichnet, die Gleichung der beweglichen Geraden $x \sin\psi + y \cos\psi = \frac{1}{2} a \sin 2\psi + e$. Nach der Theorie der Enveloppen ist diese Gleichung nach ψ zu differentiiren, welches liefert: $x \cos\psi - y \sin\psi = a \cos 2\psi$ und nun ist aus beiden der Winkel ψ zu eliminiren. Aus ihnen findet man mit Hülfe einer leichten Transformation $x = a \cos^3\psi + e \sin\psi$, $y = a \sin^3\psi$ und hieraus die gesuchte Gleichung der Enveloppe

$$\left[x - e\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Für $e = 0$ erhält man als Enveloppe des zur Geraden parallelen Durchmessers des rollenden Kreises die Astroïs:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

6. Nimmt man die beiden festen Geraden (α) und (β) nicht rechtwinklig, sondern schief zu einander an (Fig. 16), so lässt sich die Untersuchung dieses Falles leicht auf die vorhergehende zurückführen. Die Normalen in A und B liefern wie früher das Momentancentrum C. Da nun in dem Vierecke $OABC$ die Summe der Gegenwinkel π beträgt, so ist dasselbe ein Sehnenviereck und da die Diagonale

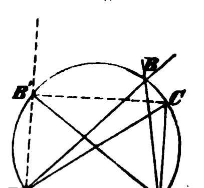


Fig. 16.

OC rechten Winkeln gegenüberliegt, so ist sie ein Durchmesser dieses Kreises; dieser findet sich mit Hülfe des Dreiecks AOB und hat, wenn λ den Winkel der Geraden bedeutet, den Werth $OC = \frac{AB}{\sin\lambda}$. Es ist mithin OC constant und folglich der Ort der Momentancentra auch hier ein Kreis vom Radius $\frac{a'}{\sin\lambda}$, wenn $AB = a'$ gesetzt wird.

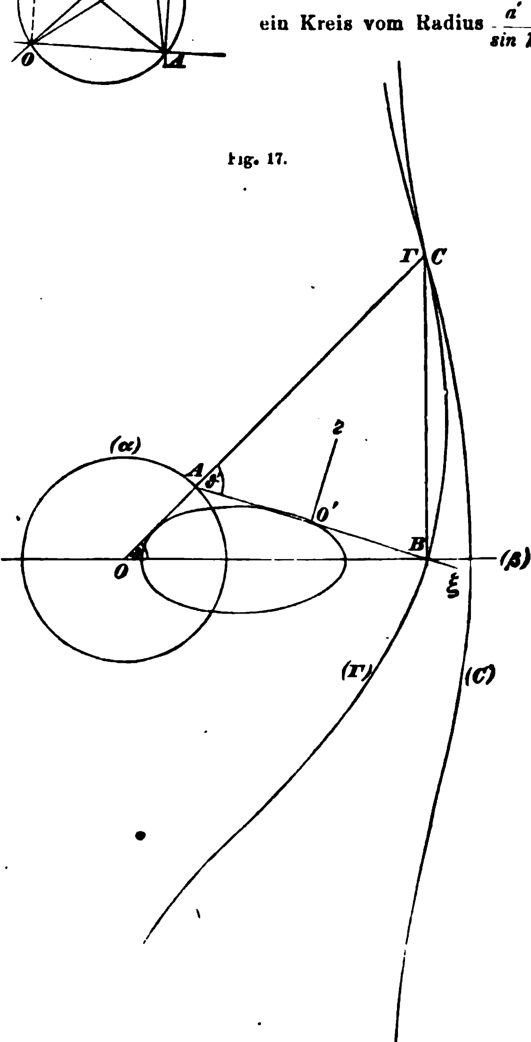


Fig. 17.

Da ferner der Winkel $ACB = \pi - \lambda$ constant ist, so ist der Ort der Punkte Γ ein Kreis und zwar der obenerwähnte dem Viereck $OACB$ umschriebene. Sein Durchmesser ist wie früher gleich dem Radius des Kreises der Momentancentra. Die Bewegung besteht auch hier in dem Rollen des kleineren Kreises auf der Innenseite des grösseren. Jeder Punkt auf dem Umfang des rollenden Kreises beschreibt auch hier einen Durchmesser des festen Kreises, wie man direkt mit Hülfe derselben Construction, die oben angewandt wurde, einsieht.

Errichtet man auf OA die Gerade OB' senkrecht, welche den rollenden Kreis in B' trifft, so bewegt sich der Punkt B' des Systems auf dieser Geraden; AB' ist Durchmesser des rollenden Kreises, mithin gleich OC und sieht man, wie die vorliegende Aufgabe identisch mit der im Vorstehenden behandelten ist. Man kann irgend zwei Durchmesser des festen Kreises als die festen Geraden (α), (β) annehmen.

7. Um die elliptische Hypocycloïdenbewegung zu realisiren, lässt man ein cylindrisches Zahnrad im Innern eines andern von doppelter Grösse laufen, indem man die Mittelpunkte beider durch eine Stange verbindet und das bewegliche mit Hülfe einer Kurbel dreht.

§. 7. Die Kurbelbewegung. (Fig. 17.)

Ein ebenes unveränderliches System bewegt sich in

seiner Ebene so, dass einer seiner Punkte, A, auf einem Kreise (α) und ein anderer, B, auf einer durch dessen Mittelpunkt gehenden Geraden (β) fortrückt, man soll die Curven (C) und (Γ), sowie die Bahn eines Systempunktes D bestimmen, welcher auf der Geraden AB liegt.

Das Momentancentrum C ist der Schnittpunkt der Normalen OC des Kreises und BC der Geraden in den Punkten A, B. Für den Mittelpunkt O des Kreises als Pol, die Gerade (β) als Polaraxe, $\sphericalangle COH = \vartheta$, $OC = \varrho$ erhält man aus dem Dreieck AOB, in welchem die constante Länge von AB mit a und der Radius des Kreises mit r bezeichnet werden mögen: $a^2 = \overline{OB}^2 + r^2 - 2\,r \cdot \overline{OB} \cdot \cos\vartheta$ und folglich wegen $\overline{OB} = \varrho \cos\vartheta$ als Polargleichung der Curve (C):

$$\varrho\,(\varrho - 2\,r)\,\cos^2\vartheta = a^2 - r^2.$$

In rechtwinkligen Coordinaten x, y für die Polaraxe als Axe der x und den Pol als Ursprung ergiebt sich für dieselbe:

$$(x^2 + y^2)\,(x^2 + r^2 - a^2)^2 = 4\,r^2\,x^4.$$

Die Curve nimmt verschiedene Gestalten an, je nachdem $a \lesseqgtr r$ ist.

Um eine Gleichung für die Curve (Γ) zu finden, nehmen wir A als Pol und AB als Polaraxe eines Polarcoordinatensystems im beweglichen System an, sodass die Coordinaten des Punktes Γ sind: $A\Gamma = \varrho_1$ und $\sphericalangle BA\Gamma = \vartheta_1$; man hat dann zunächst $\overline{OB} \cdot \sin\vartheta = a \sin\vartheta_1$ oder wegen $OB = \varrho \cos\vartheta$ und $\varrho = \varrho_1 + r$ auch: $(\varrho_1 + r)\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta = a \sin\vartheta_1$. Aus der Polargleichung der Curve (C) zieht man aber $(\varrho_1 + r)\,(\varrho_1 - r)\,\cos^2\vartheta = a^2 - r^2$ und hiermit $(\varrho_1 + r)\,(\varrho_1 - r)\,\sin^2\vartheta = \varrho_1^2 - a^2$, sodass, wenn man das Produkt dieser beiden letzten Gleichungen, nämlich $(\varrho_1 + r)^2\,(\varrho_1 - r)^2\,\sin^2\vartheta\,\cos^2\vartheta = (a^2 - r^2)\,(\varrho_1^2 - a^2)$ mit der vorigen Gleichung verbindet, man als Polargleichung der Curve (Γ) erhält:

$$a^2\,(\varrho_1 - r)^2 \sin^2\vartheta_1 = (a^2 - r^2)\,(\varrho_1^2 - a^2).$$

In Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Ursprung in A und dessen x-Axe AB ist, lautet die Gleichung dieser Curve:

$$4\,a^4\,(x^2 + y^2)\,y^4 = r^2\,[(x^2 + y^2)^2 + a^2\,x^2]^2.$$

Für die Bahn eines beliebigen Systempunktes D (ξ, η) sei die Mitte O' von AB der Ursprung des beweglichen Coordinatensystems der ξ, η, AB die Richtung der ξ-Axe und werde der Winkel $ABO = \psi$ zur Bestimmung der individuellen Lage des beweglichen Systems verwandt; unter Beibehaltung des ursprünglichen Coordinatensystems der x, y in der festen Ebene sind dann die Coordinaten von O' gleich $r \cos\vartheta + \frac{1}{2}\,a \cos\psi$, $\frac{1}{2}\,a \sin\psi$, worin an die Stelle von $r \cos\vartheta$ die gleichbedeutende Grösse $\sqrt{r^2 - a^2 \sin^2\psi}$ tritt, wie dies aus der Gleichung $r \sin\vartheta = a \sin\psi$ folgt. Mit Hülfe dieser Werthe erhält man ähnlich wie §. 6:

$$x = \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \psi} + (\tfrac{1}{2} a + \xi) \cos \psi + \eta \sin \psi$$
$$y = \eta \cos \psi + (\tfrac{1}{2} a - \xi) \sin \psi.$$

Liegt der Punkt D auf der Geraden AB, so ist $\eta = 0$ und ist die Elimination leicht auszuführen. Man erhält als Gleichung für die gesuchte Bahn:

$$(\tfrac{1}{2} a - \xi) x = (\tfrac{1}{2} a + \xi) \sqrt{(\tfrac{1}{2} a - \xi)^2 + y^2} + \sqrt{r^2 (\tfrac{1}{2} a - \xi)^2 - a^2 y^2}.$$

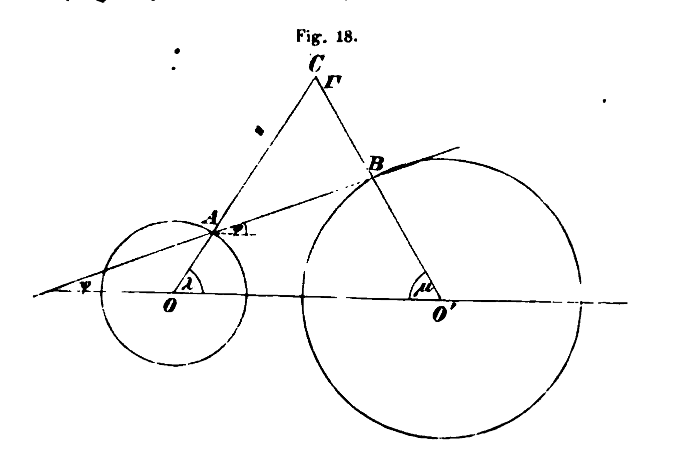
Für $\xi = 0$, d. h. für die Mitte von AB wird diese Gleichung besonders einfach, nämlich:

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{4} a^2 + y^2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} a^2 - y^2}$$

Die Elimination des Winkels ψ ist zwar immer ausführbar, doch werden die Resultate etwas ungefügig. Die Figur 17 stellt die Curven (C) und (Γ), sowie die Bahn des Mittelpunktes O' von AB dar.

§. 8. Ein ebenes System bewegt sich so, dass zwei seiner Punkte A, B auf den Umfängen zweier Kreise (α), (β) fortrücken (Fig. 18), die Curven (C), (Γ), sowie die Bahn eines

Fig. 18.



Systempunktes D zu bestimmen, welcher auf der Geraden AB liegt.

Der Schnittpunkt der Normalen beider Kreise in A und B liefert das Momentancentrum C; hiernach erhält man leicht durch Zeichnung die Curve (C); ebenso die Curve (Γ), indem man über AB als Basis in irgend einer Lage dieser Geraden die sämmtlichen Dreiecke ACB construirt. Man erkennt leicht, dass beide Curven von derselben Art sind. Die sämmtlichen Dreiecke OCO' nämlich haben dieselbe Seite OO' und sind auf den Seiten OC, $O'C$ die Segmente OA, OB von unveränderlicher Länge. Construirt man daher über AB in irgend einer Lage alle Dreiecke ACB und verlängert die Seiten CA, CB über A und B hinaus um die Radien der Kreise, so liegen die Enden der Verlängerungen auf zwei Kreisen, welche um A und B mit denselben Radien be-

schrieben sind und haben diese Enden constanten Abstand gleich OO'. Daher ist der Ort der Punkte Γ ebenfalls der Ort der Normalen zweier um A, B beschriebener Kreise in den Punkten, welche den constanten Abstand OO' besitzen. Lässt man also das einemal das ebene System sich so bewegen, dass die Endpunkte der Geraden AB auf den beiden um O, O' beschriebenen Kreisen laufen, das anderemal so, dass die Enden der Geraden OO' auf zwei um A und B mit denselben Radien beschriebenen Kreisen bleiben, so vertauschen die Curven (C) und (Γ) ihre Rollen, sodass das einemal (Γ) auf (C), das anderemal (C) auf (Γ) hinrollt.

Es seien die Radien der beiden Kreise (α), (β) gleich r, r', ihr Centralabstand $OO' = b$, der Abstand $AB = a$ und mögen die veränderlichen Entfernungen OC, $O'C$ des Momentancentrums von den Mittelpunkten der Kreise mit ϱ und ϱ' bezeichnet werden. Es ist dann leicht, eine Gleichung für die Curve (C) in dem bipolaren Coordinatensystem der ϱ, ϱ' aufzustellen. Aus den beiden Dreiecken ABC und $OO'C$ erhält man nämlich, wenn $\sphericalangle OCO' = \omega$:

$$a^2 = (\varrho - r)^2 + (\varrho' - r')^2 - 2\,(\varrho - r)\,(\varrho' - r')\cdot \cos\omega$$
$$b^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\,\varrho\varrho' \cos\omega$$

und hieraus weiter durch Elimination von ω als Gleichung für die Curve (C):

$$[(\varrho - r)^2 + (\varrho' - r')^2]\,\varrho\varrho' - (\varrho - r)\,(\varrho' - r')\,(\varrho^2 + \varrho'^2 - b^2) = \tfrac{1}{2}\,a^2.$$

Bezeichnet man weiter AC und BC mit ϱ_1 und ϱ_1', sodass also $\varrho = \varrho_1 + r$, $\varrho' = \varrho_1' + r'$, so erhält man durch Einführung von ϱ_1 und ϱ_1' an die Stelle von ϱ und ϱ' als Gleichung der Curve (Γ) in Bezug auf das dem beweglichen System angehörige bipolare Coordinatensystem der ϱ_1, ϱ_1':

$$[\varrho_1^2 + \varrho'^2_1]\,(\varrho_1 + r)\,(\varrho_1' + r) - \varrho_1\varrho'_1\,[(\varrho_1 + r)^2 + (\varrho'_1 + r')^2 - b^2] = \tfrac{1}{2}\,a^2.$$

In rechtwinkligen Coordinaten x, y würde man hiermit die Gleichungen für (C) und (Γ) leicht aufstellen können.

Zu der Gleichung für die Bahn eines beliebigen Systempunktes würde folgende Betrachtung führen. Es sei O der Ursprung des festen Coordinatensystems der x, y und OO' die x-Axe; ferner sei die Mitte von AB der Ursprung des beweglichen Coordinatensystems der ξ, η und AB die Axe der ξ; endlich seien λ und μ die Winkel AOO' und $OO'B$, sowie ψ der Winkel, unter welchem AB gegen OO' geneigt ist. Dann sind die Coordinaten von O: $r\cos\lambda + \frac{1}{2}a\cos\psi$, $r\sin\lambda + \frac{1}{2}a\sin\psi$ und folglich nach den bekannten Formeln für die Transformation der Coordinaten:

$$x = r\cos\lambda + (\tfrac{1}{2}a + \xi)\cos\psi - \eta\sin\psi$$
$$y = r\sin\lambda + \eta\cos\psi + (\tfrac{1}{2}a + \xi)\sin\psi,$$

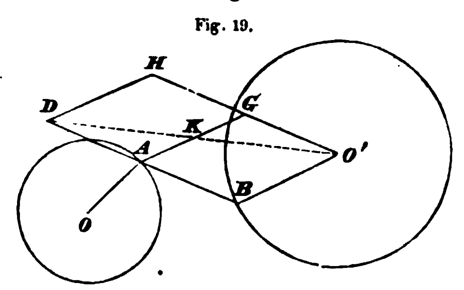
wozu noch die folgenden Gleichungen hinzutreten:

$$r\cos\lambda + r'\cos\mu + a\cos\psi = b$$
$$r\sin\lambda - r'\sin\mu + a\sin\psi = 0.$$

Aus diesen vier Gleichungen sind λ, μ und ψ zu eliminiren, um die gesuchte Gleichung zu finden. Die Bahn eines Systempunktes D, welcher auf der Geraden AB liegt, bildet eine Schleife, welche symmetrisch liegt gegen OO', sodass also der Doppelpunkt in diese Gerade fällt. Diese Curve geht in eine Lemniscate über, wenn der beschreibende Punkt die Mitte von AB ist, die Kreise sich rechtwinklig schneiden und die Länge von AB gleich dem Centralabstande OO' ist.

Die vorliegende Aufgabe findet eine wichtige Anwendung durch das Watt'sche Parallelogramm. Zieht man nämlich (Fig. 19) durch O' eine Parallele zu AB, sowie durch A und den die Schleifencurve beschreibenden Systempunkt D auf AB Parallelen AG und DH zu $O'B$, so bleibt GH während der Bewegung gleich AD, mithin constant und wenn man die vier Punkte A, G, H, D zu einem Parallelogramm verbindet, dessen Seiten um seine Ecken drehbar sind, so bedarf man blos noch der unveränderlichen Geraden OA und $O'G$, um mit Hinweglassung aller übrigen Figurtheile den Punkt D zu nöthigen, die Schleifencurve zu beschreiben. In der Nähe des Doppelpunktes ist die Schleife, wenn die Dimensionen des Apparates zweckmässig gewählt werden, innerhalb gewisser Grenzen nahezu geradlinig; dieser Umstand ist der Grund für die praktische Anwendbarkeit. Zieht man noch $O'D$, so besteht für die Lage des Schnittpunktes K dieser Geraden mit AG die Proportion $O'K : O'D = BA : BD$ und ist folglich das Verhältniss $O'K : O'D$ constant. Daher beschreibt der Punkt K eine der Schleifenlinie des Punktes D ähnliche Curve und kann also der Punkt K ähnlichen Zwecken dienen, wie der Punkt D.

Fig. 19.



Die hier behandelte Aufgabe ist eine Verallgemeinerung der Aufgabe des §. 7; sie geht in jene über, wenn der Kreis um O' in eine durch den Punkt O gehende Gerade übergeht, indem $r' = \infty$ wird.

§. 9. Bisher haben wir immer angenommen, dass die Bewegung des Systems in der Ebene dadurch definirt sei, dass zwei seiner Punkte sich auf zwei gegebenen Curven bewegen. Die Bewegung kann aber noch auf mannigfache andere Weisen definirt werden; so z. B. dadurch, dass eine bestimmte Curve des Systems während der Bewegung fortwährend zwei gegebene Curven berührt. Von dem Zustandekommen einer solchen Bewegung gewinnt man auf folgende Weise eine deutliche Vorstellung. Man bringe die bewegliche Curve mit der ersten festen Curve zur Berührung und lasse sie berührend längs derselben so lange hingleiten, bis sie in eine Lage gelangt, in welcher sie auch die zweite berührt; hierauf drehe man sie unendlich wenig um den Berührungs-

punkt mit der ersten, sodass sie mit einem unendlich nahen Punkte zur Berührung kommt und lasse sie wiederum längs der ersten gleiten (es wird dies jetzt nur um eine unendlich kleine Strecke erforderlich sein), bis sie die zweite Curve von neuem berührt u. s. f. Es entspringt hieraus die sehr allgemeine Aufgabe:

Ein ebenes System bewegt sich in seiner Ebene so, dass eine gegebene Curve desselben fortwährend zwei feste Curven berührt, man soll die Curve (C) der Momentancentra, die zugehörige Curve (Γ) und die Bahn eines beliebigen Systempunktes, sowie die Tangentenconstruction der letzteren finden.

Da während der Elementarbewegung des Systems die beiden Berührungspunkte in den gemeinschaftlichen Tangenten unendlich wenig fortrücken, so folgt, dass das dieser entsprechende Momentancentrum der Durchschnitt der Normalen in den Berührungspunkten ist und dass man also die Normalen der Bahnen der Systempunkte findet, indem man dies Centrum mit den Systempunkten durch Gerade verbindet. Die Curve (Γ) ergibt sich, indem man in den verschiedenen Paaren von Berührungspunkten der beweglichen Curve mit den beiden festen die Normalen der beweglichen Curve zum Durchschnitt bringt.

Was die Bahn eines Systempunktes betrifft, so kann dieselbe auf folgende Weise analytisch dargestellt werden (Vergl. Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Bd. I, S. 476). Es seien in Bezug auf ein festes Coordinatensystem der x, y die Gleichungen der festen Curven

$$(1) \quad \varphi(x, y) = 0; \qquad (2) \quad \psi(x, y) = 0$$

und die Gleichung der beweglichen Curve in Bezug auf ein dem beweglichen System angehöriges Coordinatensystem der ξ, η:

$$(3) \quad F(\xi, \eta) = 0.$$

Sind nun für irgend eine Lage der beweglichen Curve a, b und ψ die Coordinaten des Ursprungs der ξ, η und der Neigungswinkel der Axe der ξ gegen die Axe der x, so hat man nach der Theorie der Coordinatentransformation:

$$x = a + \xi \cos\psi - \eta \sin\psi$$
$$y = b + \eta \cos\psi + \xi \sin\psi,$$

und indem man aus diesen beiden Gleichungen ξ, η entwickelt und in die Gleichung (3) einführt, erhält man:

$$(4) \quad F\left\{[(x-a)\cos\psi + (y-b)\sin\psi],\ [(y-b)\cos\psi - (x-a)\sin\psi]\right\} = 0$$

als die Gleichung der beweglichen Curve in Bezug auf die Axen der x, y für irgend eine durch die speziellen Werthe a, b, ψ charakterisirte Lage. Nun soll diese Curve die Curve (1) berühren. Sind also x', y'

die Coordinaten des gemeinsamen Berührungspunktes, so müssen x', y' den Gleichungen (1) und (4), sowie ihren ersten Differentialgleichungen genügen. Dadurch erhält man vier Gleichungen und aus diesen durch Elimination von x', y' eine Relation zwischen a, b, ψ. In ähnlicher Weise erhält man vermöge der Bedingung, dass die bewegliche Curve die Curve (2) berühren soll, eine zweite Relation zwischen denselben Grössen.

Bezeichnen von jetzt an x, y die Coordinaten irgend eines Systempunktes ξ, η in der durch a, b, ψ charakterisirten Lage des Systems, so bestehen zwischen diesen vier Grössen wiederum die Gleichungen

$$x = a + \xi \cos \psi - \eta \sin \psi$$
$$y = b + \eta \cos \psi + \xi \sin \psi$$

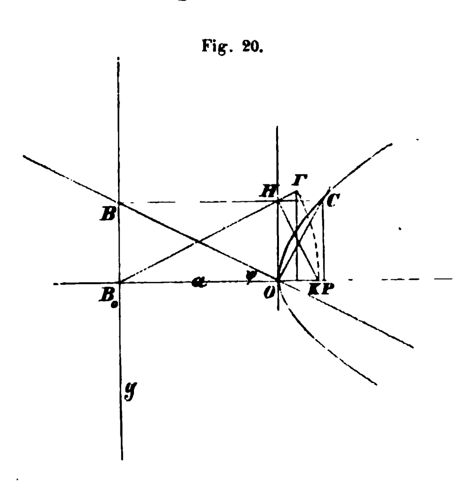
und indem man jetzt aus diesen die Grössen a, b, ψ mit Hülfe der vorhin erwähnten Relationen eliminirt, ergibt sich die gesuchte Gleichung der Bahn des Systempunktes (ξ, η).

In der vorstehenden allgemeinen Aufgabe sind eine Menge von Einzelaufgaben enthalten, welche daraus hervorgehen, wenn man die festen Curven oder die bewegliche Curve oder beide zugleich spezialisirt und die Degenerationsfälle mit berücksichtigt. Lassen wir zunächst die bewegliche Curve allgemein und spezialisiren die festen. Wenn die eine von diesen sich auf einen Punkt reducirt, so erhält man die Bewegung eines Systems, bei welcher die bewegliche Curve eine feste Curve berührt und fortwährend durch einen festen Punkt hindurchgezogen wird; reduciren sich beide Curven auf Punkte, so entsteht die Bewegung, bei welcher eine Curve des beweglichen Systems fortwährend durch zwei feste Punkte hindurchgeschoben wird; reducirt sich nur eine der festen Curven auf einen Punkt, welcher aber auf der andern liegt, so berührt die bewegliche Curve eine feste Curve immer in demselben Punkt und schiebt sich durch den Berührungspunkt hindurch. Werden die beiden festen Curven congruent und fallen in eine zusammen, so fallen auch ihre Berührungspunkte mit der beweglichen zusammen, dann berührt die bewegliche diese feste so, dass das Gleiten an derselben ausgeschlossen ist und sie auf ihr hinrollt; dann ist die feste der Ort der Momentancentra selbst und die bewegliche die Curve (Γ). Dies liefert zugleich eine ebenso einfache Construction für die Curve (Γ) wie für die Curve (C).

Mit diesen mannigfachen Specialisirungen der festen Curven können sich Spezialisirungen der beweglichen combiniren. Diese kann sich z. B. auf zwei Punkte reduciren, oder auf eine Gerade und einen Punkt, oder eine Curve und einen Punkt oder sie kann in zwei Gerade zerfallen u. dgl. m. Diese Uebersicht soll nur die Reichhaltigkeit des hier vorliegenden Stoffes andeuten; einige Einzelheiten wollen wir jetzt noch besprechen.

§. 10. **Ein ebenes System bewegt sich so, dass eine seiner Geraden fortwährend durch einen festen Punkt geht und ein Punkt auf ihr längs einer festen Geraden fortrückt; man soll die Curven (C), (Γ) und die Bahn eines Systempunktes bestimmen (Conchoïdenbewegung).**

Von den beiden festen Curven des vorigen §. hat sich die eine auf eine Gerade g (Fig. 20), die andere auf einen Punkt O reducirt, den man als einen verschwindenden Kreis ansehen kann; die bewegliche Curve, welche beide berührt, zerfällt in eine Gerade und einen auf ihr liegenden Punkt B, der gleichfalls als unendlichkleiner Kreis gelten kann. Die Normalen auf g in B und auf die bewegliche Gerade in O liefern das Momentancentrum C; indem man im System über der beweglichen Geraden in irgend einer ihrer Lagen, z. B. in der zu g senkrechten Lage OB_0 Dreiecke $B_0\Gamma D$ congruent den Dreiecken BCO construirt, erhält man die Punkte Γ. Die Curve (C) ist eine Parabel. Sind nämlich B_0O und eine Parallele zu g durch O gelegt, die Axen der x, y eines festen Coordinatensystems und ist $\psi = BOB_0$ der veränderliche Winkel, welcher die Lage der beweglichen Geraden charakterisirt, so erhält man für die Coordinaten x, y des Punktes C aus den Dreiecken OB_0B und OCP, wenn O und g den Abstand a besitzen, $y = a \cdot tg\,\psi$, $x = y \cdot tg\,\psi$, mithin $y^2 = ax$. Brennpunkt und Directrix der Parabel stehen von O um $\frac{1}{4}a$ ab. Für die Curve (Γ) sei $B_0D = BO = x$



und $D\Gamma = OC = y$, dann ist $x = \frac{a}{\cos\psi}$, $y = \frac{a}{\cos\psi} \cdot tg\,\psi$ und folglich wird die Gleichung dieser Curve: $a^2(x^2 + y^2) = x^4$, oder in Polarcoordinaten für B_0 als Pol und B_0O als Polaraxe $\varrho \cos^2\vartheta = a$. Man erhält daher Punkte der Curve (Γ), indem man in H, dem Schnittpunkte der Richtung des Radiusvectors mit der Scheiteltangente der Parabel ein Perpendikel HK auf die Richtung des Radiusvectors errichtet, indem $B_0K = \varrho$ wird.

Um die Bahn eines Systempunktes zu bestimmen, sei B_0 der Ursprung des festen Coordinatensystems der x, y, OB_0 die positive Richtung der x-Axe, die Gerade g die y-Axe, B der Ursprung des beweglichen Systems der ξ, η, OB die positive Richtung der ξ; dann sind die Coordinaten des beweglichen Ursprungs $x = 0$, $y = a\,tg\,\psi$ und mithin

geht die Gleichung der Bahn des Systempunktes durch Elimination von ψ aus den Gleichungen:

$$x = \xi \cos \psi - \eta \sin \psi$$
$$y = a \operatorname{tg} \psi + \eta \cos \psi + \xi \sin \psi$$

hervor. Für $\eta = 0$, d. h. für die Punkte der beweglichen Geraden erhält man die Conchoïden des Nicomedes, nämlich

$$x^2 y^2 = (a + x)^2 (\xi^2 - x^2).$$

§. 11. **Die Bewegung eines ebenen Systems sei dadurch bestimmt, dass eine Gerade desselben fortwährend durch einen festen Punkt A geht, während eine andere zu ihr senkrechte Gerade des Systems einen festen Kreis berührt, dessen Mittelpunkt B nicht mit A zusammenfällt.**

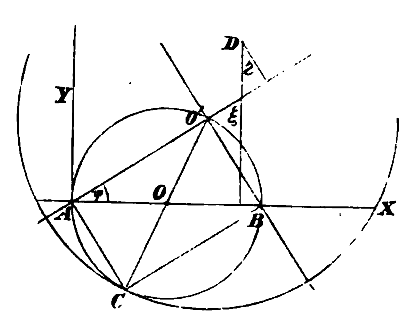
Es leuchtet ein, dass der Kreis hiebei nichts Wesentliches ist. Denn da die Tangente des Kreises immer constanten Abstand vom Mittelpunkte hat, so kann eine Linie des Systems mit ihr parallel gezogen werden, welche in allen Lagen des Systems durch den Mittelpunkt hindurchgeht. Demnach kommt die Bedingung der Bewegung des Systems darauf hinaus, dass zwei zu einander senkrechte Gerade des Systems durch zwei feste Punkte A und B hindurchgehen.

Da die Punkte A, B als verschwindende Kreise angesehen werden können, welche von den beiden beweglichen Geraden berührt werden, so folgt, dass der Schnittpunkt, der in A und B auf sie errichteten Normalen das Momentancentrum C und ein Kreis über AB als Durchmesser den Ort des Momentancentra darstellt. Ist ferner O' der Schnittpunkt der beweglichen Geraden, so bleibt in dem Rechtecke $AO'BC$ die Diagonale $O'C = AB$ constant, daher liegen die Punkte Γ des Systems von dem Systempunkte O' alle um die Strecke AB ab und bilden also einen um O' als Mittelpunkt mit AB als Halbmesser beschriebenen Kreis. Demnach kann die vorliegende Bewegung auch definirt werden durch das Rollen eines Kreises auf einem andern von halb so grossem Durchmesser, wenn sie so erfolgt, dass beide Kreise immer auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente liegen.

Vergleicht man die vorliegende Bewegung mit der im §. 6. behandelten, so zeigt sich der §. 5. erwähnte Dualismus zwischen beiden, welcher darin besteht, dass die Curven (C) und (Γ) ihre Rollen vertauschen und sich noch insbesondere in den die Bewegung definirenden Bedingungen dahin ausspricht, dass in derselben Punkt und Gerade mit einander verwechselt sind. Aus §. 5. folgt, dass ein Punkt der festen Ebene in dem beweglichen System eine Ellipse beschreibt, dieselbe, welche in der dualen Bewegung ein Systempunkt in der festen Ebene

beschreibt. Um den Dualismus auch in den analytischen Ausdrücken zu erkennen, sei A (Fig. 21.) der Ursprung und AB die x-Axe des festen, O' der Ursprung des beweglichen Coordinatensystems, dessen ξ- und η-Axen mit den beiden durch A und B gehenden Geraden zusammenfallen mögen. Ist $\sphericalangle\, O'AB = \psi$, $AB = a$, so bestehen für ein Paar zusammenfallende Punkte (x, y) und (ξ, η) der festen Ebene und des beweglichen Systems die Gleichungen:

Fig. 21.



$$\xi = (x - a)\,\psi + y \sin\psi$$
$$\eta = y \cos\psi - x \sin\psi,$$

aus welchen durch Elimination von ψ folgt:

$$[x\,(x - a) + y^2]^2 = [x\,\xi + y\,\eta]^2 + [(y\,\xi - (x - a)\,\eta]^2.$$

Sind nun x und y constant, so stellt diese Gleichung in ξ, η einen Kegelschnitt dar; derselbe ist, wie leicht zu sehen, eine Ellipse. Sind ξ, η constant, so stellt sie den Ort eines Systempunktes der festen Ebene dar; derselbe ist eine Curve vierten Grades; für $\eta = 0$ wird dieselbe einfach, nämlich

$$(x^2 + y^2)\,\xi^2 = [x\,(\alpha - a) + y^2]^2$$

und ihre Polargleichung in ϱ, ψ wird für A als Pol

$$\varrho = a \cos\psi + \xi;$$

sie ist mithin eine Pascal'sche Schneckenlinie. Nämlich $a \cos\psi$ ist die Sehne AO' in dem Kreise über AB als Durchmesser und sind alle Sehnen der Art um dieselbe Strecke zu verlängern, um zum beschreibenden Punkte zu gelangen, welches eine der Erzeugungsarten jener Curven ist. Statt dass das System mit dem grösseren Kreise auf dem kleineren hinrollt, kann man sich einen andern Kreis von derselben Grösse, wie der feste über diesen hinrollend denken; indem er als dem System angehörig betrachtet wird, bestimmt er dessen Bewegung ebenso, wie sie vorher bestimmt wurde. Man erkennt hieraus, dass die Systempunkte Epicycloiden beschreiben, welche der Gattung angehören, für welche der rollende Kreis gleich dem festen ist. Die Punkte des Umfangs des rollenden Kreises beschreiben gewöhnliche Cardioiden, die übrigen Curven, die in ihrer Gestalt sich diesen annähern.

Die vorliegende Bewegung ist von Wichtigkeit für die Construction der Ovalwerke (Ellipsendrehbank), einer sinnreichen Erfindung von Leonardo da Vinci.*)

*) Vgl. Chasles, Aperçu historique in der Sohnke'schen Uebersetzung, Note

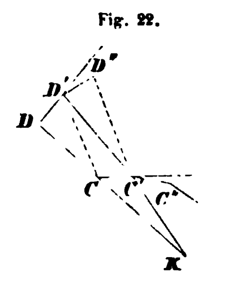
§. 12. Von den Entwickelungen der letzten §§. lassen sich zahllose geometrische Anwendungen machen. So z. B. auf die Construction der Tangenten der Fusspunktcurven, indem man den Pol und die Grundcurve als die festen Curven ansieht, längs welchen zwei zu einander senkrechte Gerade, die Tangente der Grundcurve und das vom Pol auf sie gefällte Perpendikel hingleiten. Ebenso kann man vermöge jenes Dualismus zu jeder Erzeugungsart einer Curve sofort noch eine zweite angeben.

§. 13. Sind die Curven (C) und (Γ) selbst gegeben, sowie irgend eine Anfangslage von (Γ) auf (C), so sind blos die Bahnen der Systempunkte zu finden. Diese Aufgabe heisst das Problem der Rouletten; es besitzt zwei Umkehrungen, welche eintreten, wenn die Gattung der zu erzeugenden Curven, ausserdem aber nur die eine oder die andere der beiden Curven (C), (Γ) gegeben ist. Hierüber verbreiten sich die Werke über analytische Geometrie ausführlicher, insbesondere die Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der analytischen Geometrie von Magnus, Bd. I, S. 603—622.

Ein wichtiger besonderer Fall ist der, dass die Curve (C) eine Gerade, die Curve (Γ) ein Kreis ist. Die Systempunkte beschreiben hiebei bekanntlich Cycloiden und zwar gemeine, verkürzte oder verschlungene Cycloiden, je nachdem sie der Peripherie, dem Innenraume oder dem Aussenraume des rollenden Kreises angehören.

§. 14. Bei dem Hinrollen der Curve (Γ) auf der Curve (C) beschreibt jeder Punkt D des Systems ein Element DD' (Fig. 22) seiner Bahn als Kreisbogen um das Momentancentrum C als Mittelpunkt. Der Kreis, welchem dies Element angehört, hat mit jener Bahn blos dies Element oder also die Tangente gemein und ist nicht etwa der Krümmungskreis derselben. Der Krümmungsmittelpunkt ergibt sich vielmehr, wenn man die Normale DC, welche durch das Momentancentrum C geht, mit der folgenden Normalen $D'C'$, welche durch das folgende Momentancentrum C' geht, zum Durchschnitte K bringt.

Fig. 22.



Im Uebrigen kennt man eine sehr elegante Methode, um den Krümmungshalbmesser der Bahnen der Systempunkte zu finden. Dieselbe rührt von Abel Transon her (Vgl. L'Institut. Année 1844. S. 573, sowie Liouville, Journal de Mathém. T. X. S. 148; 1845) und wurde

XXXIV, S. 447, woselbst sich noch manche Einzelheiten über den Dualismus der Bewegung finden. Ueber die Schneckenlinien des Pascal ebendas. S. 158 und Note XXI. S. 369.

von Chasles erweitert (Liouville, Journ. T. X, S. 204). Eine gehaltvolle Ableitung der Abel Transon'schen Methode gab Stegmann (Grunert's Archiv. Thl. VII, S. 48, 1846).

Für die vorliegende Untersuchung können die beiden Curven (C) und (Γ), welche sich mit den Punkten C, Γ berühren und also das Bogenelement $CC' = \Gamma\Gamma'$ gemein haben, durch ihre Krümmungskreise ersetzt werden, welche mit ihnen auch die folgenden Bogenelemente $C'C''$, $\Gamma'\Gamma''$ gemein haben. Es seien r, r' die Krümmungshalbmesser dieser beiden Curven in C, Γ und mögen dieselben als auf entgegengesetzter Seite der gemeinsamen Tangente liegend vorausgesetzt werden. Der Winkel, um welchen sich das bewegliche System um C umdreht, um in die unmittelbar folgende Lage zu gelangen, ist alsdann die Summe der Contingenzwinkel $\frac{CC'}{r} + \frac{\Gamma\Gamma'}{r'} = CC'\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$ und folglich erhält man für das Bogenelement DD' zunächst

$$\overline{CD} \cdot \overline{CC'} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$$

Andererseits aber ergibt sich dies Bogenelement, indem man den Abstand KD des Krümmungsmittelpunktes der Curve (D) von D mit dem Winkel der beiden auf einanderfolgenden Normalen der Curve (D) multiplicirt. Diese Normalen gehen aber durch die Momentancentra C, C' und wenn also i den Winkel der Normalen CD mit der gemeinschaftlichen Normalen der Curven (C) und (Γ) im Sinne nach dem Krümmungsmittelpunkt von (Γ) genommen bedeutet, so wird dieser Winkel der aufeinanderfolgenden Normalen $\frac{CC' \cdot \cos i}{KC}$ und folglich erhält man für das Bogenelement DD' den weiteren Ausdruck:

$$DD' = \frac{KD}{KC} \cdot CC' \cdot \cos i.$$

Die Verbindung beider Ausdrücke für DD' liefert daher, wenn $KC = \varrho$, $CD = \varrho'$, also $KD = \varrho + \varrho' = R$ gesetzt wird:

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right) \cos i = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'},$$

woraus für den gesuchten Krümmungshalbmesser R sich ergibt, indem man ϱ eliminirt:

$$(2) \qquad R = \varrho'^2 \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}{\varrho'\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - \cos i}.$$

Liegen die Krümmungskreise der Curven (C), (Γ) auf derselben Seite

der gemeinschaftlichen Tangente, so genügt eine gleichzeitige Aenderung des Zeichens von r' und ϱ' um die Formeln für diesen Fall umzugestalten; sie werden:

$$(3) \qquad \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right) \cos i = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'};$$

$$(4) \qquad R = \varrho'^2 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}{\varrho'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) - \cos i.}$$

Man wendet die obige Formel (4) mit Leichtigkeit auf die Hypocycloidenbewegung an (§. 6.). Man hat hiefür $r = a$, $r' = \frac{1}{2} a$, also

$$R = \frac{\varrho'^2}{\varrho' - a \cos i};$$

fällt man daher ein Perpendikel OP vom Mittelpunkte O des festen Kreises auf die Richtung der Normalen CD, so wird $DP = \varrho' - a \cos i$ und ist also R die dritte Proportionale zu $\varrho' = CD$ und DP.

Es ist leicht, die Bedeutung der Verbindung $\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'}$ der Krümmungsradien der Curven (C), (Γ) zu erkennen, in welcher diese Grössen allein in den Formeln für R auftreten. Man kann nämlich eine Cycloide construiren, welche die gemeinsame Tangente dieser Curven zur Basis und mit der Curve (D) die beiden Elemente DD', $D'D''$ und folglich auch den Krümmungshalbmesser gemein hat. Der Wälzungskreis dieser Cycloide muss die Eigenschaft besitzen, dass er, dem beweglichen System angehörend gedacht, durch Drehung um das Momentancentrum um die Elementaramplitude in seine nächstfolgende Lage gelangt. Daher muss sein Contingenzwinkel gleich $\overline{CC'}\left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'}\right)$, d. h. der reciproke Werth seines Radius K muss

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'}$$

sein. Abel Transon nennt diesen Kreis den Rollkreis (cercle de roulement). Diese Cycloide wechselt mit jeder Lage des Systems; nur wenn (C) eine Gerade ist und (Γ) ein Kreis, bleibt sie constant dieselbe, ist aber verschieden für die verschiedenen Systempunkte. In diesem Falle beschreiben die Systempunkte selbst Cycloiden der verschiedenen Formen, für alle ist die gemeinsame Formel für den Krümmungshalbmesser

$$(5) \qquad R = \varrho'^2 \frac{1}{\varrho' - K \cos i},$$

worin ϱ' die Normale der einzelnen Cycloide, vom Curvenpunkte bis zur Cycloidenbasis gerechnet, ist.

Ist die Bewegung des Systems dadurch definirt, dass zwei Punkte A, B desselben auf festen Curven (α), (β) bleiben, so erhält sich für die Construction des Krümmungshalbmessers folgende Methode. Die Formel (5.) auf den Punkt A bezogen, gibt

$$(6)\quad K\cos i_1 = \overline{AC} - \frac{\overline{AC}^2}{R_1}$$

wenn R_1 der Krümmungshalbmesser von (α) in A und i_1 der Winkel ist, den die Normale in A mit der Normalen in C bildet. $K\cos i_1$ stellt aber die Projection des Radius des Rollkreises auf AC dar. Die Formel (6) setzt voraus, dass die Curve (α) concav liegt gegen C; liegt sie convex, so wird

$$K\cos i_1 = AC + \frac{\overline{AC}^2}{R_1}.$$

Allgemein gültig aber erhält man die Projection des Mittelpunktes des Rollkreises auf AC, wenn man auf AC von A aus auf der concaven Seite der Curve (α) die Länge $\frac{\overline{AC}^2}{R_1}$ aufträgt. Ebenso erhält man mittelst BC und R_2, welches die analogen Elemente der Curve (β) sind, die Projection des Mittelpunktes des Rollkreises auf OB. Daher hat man jetzt diesen Mittelpunkt selbst. Projicirt man nun diesen Punkt nach T auf die Normale DC der Bahn des Systempunktes D, so wird der Krümmungshalbmesser R in D die dritte Proportionale zu DC und DT, nämlich

$$R = \frac{\overline{DC}^2}{DT}.$$

Chasles hat diese Methode von Abel Transon verallgemeinert und die Aufgabe gelöst, den Krümmungshalbmesser der Enveloppe zu finden, welche von einer beliebigen Curve des beweglichen Systems erzeugt wird. Er geht dabei von folgender von Savary aufgestellten Formel aus, worin r, r' die Radien der Curve (C), (Γ) wie vorher bedeuten, γ, γ' die Krümmungsmittelpunkte der Systemcurve L und ihrer Enveloppe E bezeichnen, nämlich

$$\left(\frac{1}{\gamma C} + \frac{1}{\gamma' C}\right)\cos i = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}.$$

Die Punkte γ, γ' liegen auf der gemeinschaftlichen Normalen von L und E, welche durch C hindurchgeht. Man gelangt zu dieser Formel in ähnlicher Weise wie zu der von Abel Transon, indem man bedenkt, dass die Normalen der Enveloppe zugleich Normalen der Curve L sind und durch die Momentancentra hindurchgehen, sowie durch die Bemer-

kung, dass das Bogenelement der Curve, welche der Punkt γ beschreibt, wie oben doppelt ausgedrückt werden kann.

Die Bewegung des Systems sei dadurch definirt, dass eine Curve (λ) desselben (die sich in zwei Curven spalten kann) zwei feste Curven (α), (β) fortwährend berührt. Haben nun ε, ε' ψ die Bedeutung von γ, γ', i für die Curve (α) in dem Punkte, wo (λ) sie berührt, so kann (α) als Enveloppe von (λ) angesehen werden, sodass

$$\left(\frac{1}{\varepsilon C} \pm \frac{1}{\varepsilon' C}\right) \cos\psi = \frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'}.$$

Eliminirt man aus dieser und der vorigen Gleichung $\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'}$, so kommt:

$$\left(\frac{1}{\gamma C} \pm \frac{1}{\gamma' C}\right) \cos\varphi = \left(\frac{1}{\varepsilon C} \pm \frac{1}{\varepsilon' C}\right) \cos\psi.$$

Nun sind εC, $\varepsilon' C$, γC bekannt, da sie die Abstände der Krümmungsmittelpunkte dreier gegebener Curven von dem Momentancentaum sind; die letzte Gleichung liefert also $\gamma' C$ und folglich den Krümmungsmittelpunkt γ' der Enveloppe E, sobald man die Lage der Normalen an die Curve (C), (Γ) kennt, auf welche sich die Winkel φ, ψ beziehen. Um diese zu finden, wenden wir die Savary'sche Gleichung auch auf die Curve (β) an, für welche ζ, ζ', χ die Bedeutung von ε, ε', ψ bei der Curve (α) haben, und setzen also

$$\left(\frac{1}{\zeta C} \pm \frac{1}{\zeta' C}\right) \cos\chi = \frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'}.$$

Hierdurch erhalten wir mit Hülfe der für die Curve (α) aufgestellten Relation

$$\frac{\cos\psi}{\cos\chi} = \left(\frac{1}{\zeta C} \pm \frac{1}{\zeta' C}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon C} \pm \frac{1}{\varepsilon' C}\right)$$

wodurch das Verhältniss gegeben ist, in welchem die Normale von (C), (Γ) den Winkel der Normalen der Curven (α) und (β) theilt. Man braucht also zur Construction des gesuchten Krümmungshalbmessers der Enveloppe die Curven (C), (Γ) selbst nicht zu kennen.

IV. Capitel.

Aequivalenz der Rotationen um Axen, welche sich in demselben Punkte schneiden. — Rotation eines unveränderlichen Systems um einen Punkt.

§. 1. Es werde wie in Cap. II. durch das Zeichen (α, a) die doppelte Bedeutung einer Rotationsaxe ausgedrückt, dass nämlich das System um die ihm angehörende Gerade α rotiren und diese Gerade während der Rotation mit der Linie a des Raumes zusammenfallen soll. Wenn daher ein System nach einander um die Axen (α, a), (β, b), (γ, c), ... rotiren soll, so heisst dies soviel, als während der ersten Rotation ist die Gerade α des Systems mit der Geraden a des Raumes vereinigt und gelangt durch diese Rotation die Gerade β des Systems in die Gerade b des Raumes; durch die folgende Rotation tritt α aus a heraus und γ in c, während β mit b vereinigt bleibt u. s. w. Schneiden sich α, β, γ ... in einem Punkte, so ist dies auch mit a, b, c ... der Fall. Für die Aequivalenz der Rotationen um Axen, die sich schneiden, hat Euler zuerst folgenden Satz bewiesen (Novi commentt. Acad. Petropolit. a. 1775. T. XX.):

Die Folge zweier Rotationen um zwei Axen (α, a) und (β, b), welche sich in einem Punkte O schneiden, ist äquivalent einer einzigen Rotation um eine dritte Axe (γ, c), welche gleichfalls durch den Schnittpunkt jener hindurchgeht; die drei Axen a, b und (γ, c) bilden die Kanten eines dreiseitigen pyramidalen Raumes, in welchem die beiden Seitenebenen, welche durch die Axe (γ, c) gehen mit der dritten durch a und b gehenden Seitenebene an den Kanten a und b Winkel bilden, welche den halben Amplituden der Rotationen um diese Axen gleich sind und zwar liegen diese Winkel bei der Axe a, um welche die erste Rotation erfolgt, auf entgegengesetzter Seite der Ebene ab, bei der andern Axe b auf derselben Seite, nach welcher hin die betreffende Rotation erfolgt. Die halbe Amplitude der resultirenden Rotation um die Axe (γ, c) ist gleich dem an der Axe (γ, c) liegenden Aussenwinkel des pyramidalen Raumes; die Aufeinanderfolge der Rotation ist nicht vertauschbar.

Beschreibt man nämlich (Fig. 23) um den gemeinsamen Schnittpunkt O der Axen mit der Einheit als Radius eine Kugelfläche, so bestimmen die Axen (α, a) und b, in dem dem Sinne der Rotationen entsprechenden Sinne genommen, auf derselben zwei Punkte (α, a) und

b und liefert die Ebene derselben den Bogen grössten Kreises $a\,b$, welcher den Winkel der beiden Axen misst. Einen dritten Punkt β gibt die Axe β und ist der Bogen $\beta\alpha$ gleich $b\,a$. Trägt man nun an $a\,b$ bei a und b die halben Amplituden $\frac{1}{2}\,\vartheta$, $\frac{1}{2}\,\vartheta'$ der Rotationen um a, b an und zwar $\frac{1}{2}\,\vartheta$ dem Sinne der zuerst erfolgenden Rotation entgegengesetzt, $\frac{1}{2}\,\vartheta'$ übereinstimmend mit dem Sinn der zweiten Rotation, so erhält man im Durchschnitt der Schenkel dieser Winkel die dritte Ecke c eines sphärischen Dreiecks $a\,b\,c$ und mit ihr eine gewisse Axe c, welche durch sie und den Kugelmittelpunkt O hindurchgeht. Bestimmt man nun zu c den gegen $a\,b$ symmetrisch liegenden Punkt c' und zieht nach ihm durch O die zur Axe c symmetrisch gegen die Ebene $a\,b$ gelegene Axe c', so erkennt man, dass die mit c zusammenfallende Gerade γ des Systems durch die Rotation ϑ um $(\alpha,\,a)$, durch welche β in die Axe b eintritt, nach c' gelangt und hierauf durch die Rotation ϑ' um $(\beta,\,b)$ wieder in ihre frühere Lage zurückkehrt; mithin ist γ eine Linie des Systems, welche bereits vor Beginn der Bewegungen in ihrer neuen Lage sich befand. Daher kann das ganze System durch die Rotation um die Axe $(\gamma,\,c)$ in seine neue Lage gelangen. Um die Amplitude Θ dieser resultirenden Rotation zu finden, genügt die Bemerkung, dass die Axe β ihre Bewegung der Rotation ϑ um die Axe $(\alpha,\,a)$ allein verdankt und durch diese nach b, in eine zu $a\,c$ symmetrische Lage gelangt, woraus folgt, dass der Winkel $\beta\,c\,b = \Theta$ die der Axe $(\gamma,\,c)$ entsprechende Amplitude, also der Aussenwinkel des spärischen Dreiecks $a\,b\,c$ bei c die halbe Amplitude darstellt.

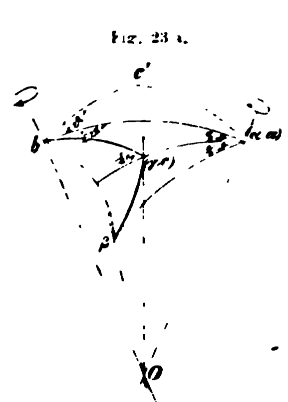


Fig. 23 a.

Aus dem Dreieck $a\,b\,c$ folgt $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) = -\cos\frac{1}{2}\,\vartheta\,\cos\frac{1}{2}\,\vartheta' + \sin\frac{1}{2}\,\vartheta\,\sin\frac{1}{2}\,\vartheta'\cdot\cos(a\,b)$, oder also

$$\cos\tfrac{1}{2}\,\Theta = \cos\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,\cos\tfrac{1}{2}\,\vartheta' - \sin\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,\sin\tfrac{1}{2}\,\vartheta'\cdot\cos(a\,b)$$

Fig. 23 b.

und weiter

$$\frac{\sin(a\,c)}{\sin\frac{1}{2}\,\vartheta'} = \frac{\sin(b\,c)}{\sin\frac{1}{2}\,\vartheta} = \frac{\sin(a\,b)}{\sin\frac{1}{2}\,\Theta},$$

sowie auch für die Neigung p der resultirenden Axe c gegen die Ebene $a\,b$ der gegebenen Axen (Fig. 23 b):

$$\sin p.\,\sin\tfrac{1}{2}\,\Theta = \sin\tfrac{1}{2}\,\vartheta\cdot\sin\tfrac{1}{2}\,\vartheta'\cdot\sin(a\,b).$$

Es ist nämlich in Betreff der letzteren Gleichung, wenn $b\,d$ das von b auf die Seite $a\,c$ gefällte sphärische Perpendikel ist, einerseits

$$\sin(b\,c)\cdot\sin\tfrac{1}{2}\,\Theta = \sin(b\,d) = \sin\tfrac{1}{2}\,\vartheta\cdot\sin(a\,b)$$

und andererseits $\sin p = \sin (bc) \cdot \sin \frac{1}{2} \vartheta'$, aus welchen Gleichungen jene durch Multiplication hervorgeht.

Dass die Folge der Rotationen um die Axen α, β nicht umkehrbar ist, ist von selbst klar. Denn durch die Rotation um α gelangt β nach b; dahin kann β nur durch Rotation um eine Axe gelangen, welche in die Ebene $a\,c$ fällt. Erfolgt nun die Rotation um β zuerst, so tritt α aus dieser Ebene heraus, mithin kann β durch die nachfolgende Rotation um α nicht mehr die Lage b erreichen. Indessen können beide Bewegungen gleichzeitig erfolgen, nämlich so, dass das System um die Axe β rotirt, diese Rotation aber in einem andern Systeme stattfindet, welches selbst eine Rotation um die Axe α besitzt.

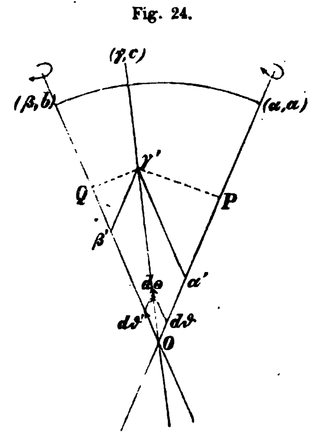
Mit Hülfe des vorstehenden Satzes können zwei Rotationen von beliebigen Amplituden in eine Rotation vereinigt und kann umgekehrt eine Rotation in zwei andere zerlegt werden. Die Lösung dieser Aufgaben ist immer durch das sphärische Dreieck abc leicht herzustellen. Durch wiederholte Anwendung des Satzes können ebenso mehrere Rotationen zu einer einzigen vereinigt und kann eine Rotation in mehrere andere zerlegt werden.

Der im II. Capitel entwickelte Satz über die Zusammensetzung zweier Rotationen um parallele Axen ist ein spezieller Fall des vorliegenden. Rückt nämlich der Schnittpunkt O der Axen ins Unendliche, so werden die Axen parallel, die Kugel geht in eine Ebene und das sphärische Dreieck in ein ebenes Dreieck über.

§. 2. Werden die Amplituden der beiden Rotationen unendlich klein, $d\vartheta$, $d\vartheta'$, so fällt die Axe c der resultirenden unendlich kleinen Rotation $d\Theta$ in die Ebene der Axen a, b und nimmt eine solche Lage an, dass

$$\frac{\sin (a\,c)}{d\Theta'} = \frac{\sin (b\,c)}{d\vartheta} = \frac{\sin (a\,b)}{d\,\Theta},$$

$$d\Theta^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 - 2\,d\vartheta\,d\vartheta' \cdot \cos (a\,b)$$



wird, wie unmittelbar aus den Gleichungen des vorigen §. erhellt. Es wird demnach der Bogen $a\,b$ nach einem Sinusverhältniss getheilt, dessen Werth durch das reciproke Verhältniss der Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ angegeben wird. Diese Theilung kann man bewirken, indem man auf den Axenrichtungen Oa, Ob von O aus (Fig. 24) zwei Strecken $O\alpha'$, $O\beta'$ aufträgt, welche $d\vartheta$, $d\vartheta'$ proportional sind und über ihnen das Parallelogramm $O\alpha'\beta'\gamma'$ construirt. Die Diagonale $O\gamma'$ dieses Parallelogramms gibt

die resultirende Axe c nach Richtung und Sinn und ist zugleich der resultirenden Amplitude $d\Theta$ proportional. Dies führt zu dem folgenden Satze, welcher unter dem Namen des Satzes vom Parallelogramm der Rotationen bekannt ist:

Die Folge oder auch die Verbindung zweier unendlichkleiner Rotationen $d\vartheta$, $d\vartheta'$ um zwei sich in einem Punkte O schneidende Axen (α, a), (β, b) ist aequivalent einer einzigen unendlichkleinen Rotation $d\Theta$ um eine Axe (γ, c), welche durch den Schnittpunkt O geht und in die Ebene jener beiden Axen hineinfällt; man erhält diese resultirende Axe nach Richtung und Sinn durch die Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten zwei den Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ proportionale, auf den Axen (α, a), (β, b) von ihrem Schnittpunkte aus übereinstimmend mit dem Sinne der Rotationen aufzutragende Strecken sind; die Amplitude $d\Theta$ der resultirenden Rotation ist der Länge dieser Diagonale proportional.

Da die Amplituden der Rotationen unendlich klein sind, so liegt β der Geraden b unendlich nahe und tritt α nur unendlich wenig aus der Geraden a heraus; die Geraden α, β können daher als mit a, b zusammenfallend angesehen werden; der Unterschied der Aufeinanderfolge der Rotationen fällt hier weg, beide Rotationen können als gleichzeitig erfolgend gelten und ist es gleichgültig, ob man das System die Rotation $d\vartheta'$ um β in einem System ausführend sich denkt, welches um α die Rotation $d\vartheta$ besitzt oder das System um α rotirt in einem andern Systeme, welches die Rotation um β besitzt.

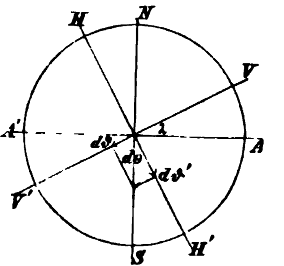
Auch kann man die Richtigkeit des vorstehenden Satzes auf folgende Art unmittelbar einsehen. Die Axe a theilt die Ebene ab in zwei Felder; durch die Rotation um sie werden die Punkte des eines Feldes nach der einen, die des andern nach der andern Seite der Ebene ab geschleudert, während die Punkte der Axe hierbei keine Bewegung annehmen. Ebenso theilt die Axe b die Ebene ab in zwei andere Felder, für welche in Bezug auf die Rotation um b Aehnliches gilt. Beide Axen zusammen theilen die Ebene in zwei Paar Scheitelräume und das Zusammenwirken beider Rotationen ertheilt den Punkten des einen Paares gleichartige, denen des andern Paares entgegengesetzte Bewegungen. Blos in diesem letzten Paare können also Punkte liegen, welche ungeachtet beider Rotationen in Ruhe bleiben. Ist γ' ein Punkt dieses Scheitelpaares und fällt man von ihm auf a und b die Perpendikel $\gamma'P$, $\gamma'Q$, so sind die beiden unendlich kleinen Wege, um welche er senkrecht zur Ebene ab nach der einen und der andern Seite hinausgeschleudert wird $\gamma'P \cdot d\vartheta$ und $\gamma'Q \cdot d\vartheta'$; dieselben werden gleich,

sobald $\gamma' P : \gamma' Q = d\vartheta' : d\vartheta$ und liegen daher die Punkte γ' in einer durch den Schnittpunkt O der Axen gehenden Geraden, welche den Winkel des Scheitelraumes nach einem Sinusverhältniss theilt, welches den Werth $d\vartheta' : d\vartheta$ besitzt. Da diese Theilung für alle Werthe des Verhältnisses immer durch eine einzige Gerade möglich ist, so folgt, dass es in dem fraglichen Paar Scheitelräumen eine Gerade gibt, welche durch die beiden Rotationen nicht in Bewegung geräth, um welche das System sich folglich dreht. Die Construction des Parallelogramms folgt daraus, dass $\gamma' P$, $\gamma' Q$ den Sinussen der Winkel $a O \gamma'$, $b O \gamma'$ proportional sind; die Amplitude $d\Theta$ der resultirenden Rotation ergibt sich, sobald man die Bewegung eines Punkts einer der Axen, z. B. des Punktes Q von b als Rotation um die Axe $O\gamma$ auffasst.

Der Satz vom Parallelogramme der Rotationen erweitert sich zu einem Satze vom Parallelepiped und Polygon der Rotationen, sobald man von ihm wiederholte Anwendung behufs Zusammensetzung mehrerer unendlichkleiner Rotationen macht. Will man hiebei fortwährend auf der Kugelfläche construiren, so kommt alles auf die Theilung von Kreisbogen nach gegebenem Verhältnisse oder schliesslich auf die Aufsuchung eines gewissen Punktes in einem gegebenen sphärischen Punktsysteme hinaus, welcher durch fortgesetzte Theilung von Bogen grösster Kreise, welche zwischen den Punkten desselben gezogen werden können, nach gegebenen Verhältnissen entspringt.

Von nicht geringerer Bedeutung ist die Zerlegung einer unendlichkleinen Rotation in zwei oder mehrere andere, welche man durch die umgekehrte Anwendung des Parallelogramms der Rotationen erreicht. Ein einfaches, aber lehrreiches Beispiel hierfür bietet die Rotation der Erde um ihre Axe dar, wenn von dem gleichzeitigen Fortrücken ihres Mittelpunktes im Raume abgesehen wird. Die unendlich kleine Rotation $d\Theta$ der Erde um ihre Axe NS (Fig. 25) zerlegen wir in der Ebene des Meridians irgend eines Beobachtungsortes, dessen geographische Breite λ sei, in zwei Componenten $d\vartheta$, $d\vartheta'$ um die Vertikale VV' des Ortes und eine zu dieser senkrechte um die dem Horizonte parallele durch den Erdwinkelpunkt gehende Axe HH'. Man erhält hierfür mit Hülfe des Parallelogramms der Rotationen

Fig. 25.



$$d\vartheta = d\Theta \cdot \sin\lambda, \quad d\vartheta' = d\Theta \cdot \cos\lambda.$$

Die Componente um die Vertikale ist es, welche in dem Foucault'schen Pendelversuch zur Anschauung gelangt. Der Sinn der Rotationsaxe für $d\Theta$ ist von Norden nach Süden gerichtet, da die Erde sich von Westen nach Osten dreht; daher ist der Sinn der Axe für die Rotation $d\vartheta$ der Sinn der Vertikalen nach dem Mittelpunkt der Erde und der Sinn der Axe für

$d\vartheta'$ nach Süden gerichtet. Die Rotation $d\vartheta'$ führt den Meridian und mit ihm eine am Beobachtungsorte befindliche Pendelebene um die Axe HH' und ändert nicht die Lage dieser Ebene gegen die Ebene des Meridians, daher bemerkt ein Beobachter nichts von ihr; die Rotationscomponente $d\vartheta$ dagegen dreht die Erde unterhalb das Pendels für nördliche Breiten im Sinne von Norden über Westen nach Süden zu und es scheint daher die Pendelebene dem Beobachter im umgekehrten Sinne sich zu drehen. Für südliche Breiten wechselt diese scheinbare Drehung den Sinn, für die Breite Null verschwindet dieselbe. Denkt man sich die Zerlegung der Erdrotation jeden Augenblick ausgeführt, so summiren sich $d\Theta$, $d\vartheta$, $d\vartheta'$, sodass

$$\Sigma\, d\vartheta = \sin\lambda \cdot \Sigma\, d\Theta\,, \quad \Sigma\, d\vartheta' = \cos\lambda\, \Sigma\, d\Theta,$$

und wenn $\Sigma d\Theta = 2\pi$ wird, d. h. die Erde eine volle Umdrehung macht, so beträgt die Drehung $\Sigma\, d\vartheta$ um die Vertikale $2\pi \sin\lambda$. Umgekehrt entspricht einer vollen Umdrehung der Pendelebene die Amplitude $\frac{2\pi}{\sin\lambda}$ der Axendrehung der Erde.

§. 3. Durch die Untersuchungen der beiden vorigen §§. sind wir in den Stand gesetzt, eine genaue Einsicht in den Vorgang der Bewegung eines unveränderlichen Systems zu erlangen, welches um einen Punkt rotirt. Bei dieser Bewegung beschreiben die Punkte des Sytems sphärische Bahnen, welche concentrischen Kugelflächen angehören, deren gemeinsamer Mittelpunkt jener Punkt ist. Ein sphärischer Schnitt des Systems, um diesen Mittelpunkt geführt, bewegt sich in seiner eigenen Kugelfläche und die Bahnen aller auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden des Systems sind ähnliche Curven. Es genügt daher die Bewegung eines einzigen solchen sphärischen Schnittes zu untersuchen, um die Bewegung aller Systempunkte kennen zu lernen und kommt demnach das Problem der Rotation eines unveränderlichen Systems um einen Punkt auf das einfachere der Bewegung eines sphärischen Systems auf seiner eigenen Kugelfläche zurück. Man hat hierfür folgenden Satz.

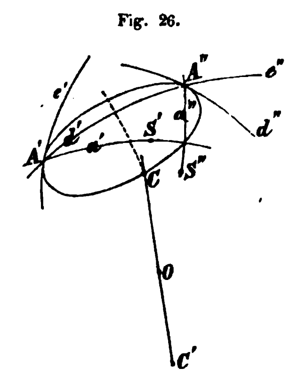
Jede Bewegung eines unveränderlichen sphärischen Systems auf seiner Kugelfläche ist äquivalent einer Rotation desselben um eine bestimmte durch den Kugelmittelpunkt hindurchgehende Axe; oder wie hieraus unmittelbar folgt:

Jede Bewegung eines unveränderlichen räumlichen Systems um einen Punkt ist äquivalent einer Rotation desselben um eine bestimmte durch diesen Punkt gehende Axe.

Sind nämlich Σ' und Σ'' die beiden Lagen des beweglichen sphärischen Systems Σ, welche dasselbe zu Anfang und Ende seiner Bewegung einnimmt, so bilden Σ', Σ'' zwei vereinigte congruente sphärische Systeme; es kann gezeigt werden, dass dieselben stets zwei Doppelpunkte besitzen, welche Gegenpunkte auf der Kugelfläche sind.

Zu dem Ende seien $A'A''$ (Fig. 26) ein Paar homologe Punkte von Σ', Σ''; jedem Hauptkreise a' durch A' entspricht ein Hauptkreis a'' durch A'', sodass der sphärische Stralenbüschel A' dem sphärischen Stralenbüschel A'' homolog ist; diese Büschel sind congruent, es bilden daher irgend zwei Stralen des einen denselben Winkel miteinander, wie die homologen Stralen des andern und wenn ein beweglicher Stral den einen Büschel in einem gewissen Sinne beschreibt, so beschreibt der homologe Stral den homologen Büschel in demselben Sinne. In dem Verbindungsstrale von A' und A'' insbesondere sind zwei Stralen vereinigt, ein Stral d' von A' und ein Stral e'' von A'', denen wiederum in A'' und A' resp. die Stralen d'' und e' entsprechen. Den Punkten S' eines Strales a' entsprechen Punkte S'' des homologen Strales a'', welche auf homologen Seiten von A', A'' in gleichen sphärischen Abständen $A'S' = A''S''$ liegen. Die Durchschnitte homologer Stralenpaare a', a'' bilden nun eine Curve, welche durch A', A'' hindurchgeht und in diesen Punkten die Stralen e', d'' berührt, wie man leicht findet, wenn man ein Paar bewegliche Stralen verfolgt. Auf dieser Curve liegen nothwendig die Doppelpunkte der Systeme Σ', Σ'', wenn solche existiren. Denn ist C ein solcher Doppelpunkt, so sind in derselben zwei homologe Punkte C', C'' vereinigt und er ist mithin Schnittpunkt homologer Stralen $C'A'$, $C''A''$. Diese Curve wird durch das im Mittelpunkte von $A'A''$ ermittelte sphärische Perpendikel symmetrisch getheilt und liegen daher die Schnittpunkte desselben mit ihr von den Punkten A', A'' gleich weit entfernt. Von diesen Schnittpunkten ist der eine ein Doppelpunkt. Die Stralen e', e'' zerlegen nämlich die Kugelfläche in zwei Paar Scheitelräume, von denen nur das eine homologe Punkte zugleich enthalten kann, nämlich dasjenige, in welchem sich die homologen Seitenräume der Stralen e', e'' übereinanderlagern. Daher ist derjenige von jenen Schnittpunkten, welcher sich in diesem Paare Scheitelräume findet, ein Doppelpunkt. Da zwei homologe Stralen a', a'' sich aber in zwei Gegenpunkten schneiden, so besitzt die Curve zwei Aeste, deren Punkte Gegenpunkte sind. Daher gibt es noch einen zweiten Doppelpunkt, welcher der Gegenpunkt des eben bestimmten ist, woraus die Richtigkeit des Satzes erhellt.

Fig. 26.



Die hier erwähnte Curve ist der sphärische Kegelschnitt, d. h. die Durchschnittslinie eines Kegels zweiten Grades mit einer concentrischen Kugelfläche. Legt man nämlich durch die homologen Stralenpaare wie a', a'' und den Kugelmittelpunkt Ebenen, so sind diese homologe Ebenen der räumlichen Systeme Σ', Σ'' und bilden zwei homologe gleiche

Ebenenbüschel, deren Axen sich in dem Kugelmittelpunkte schneiden; dieselben erzeugen durch die Durchschnittslinien ihrer homologen Ebenenpaare einen Kegel zweiten Grades, dessen Schnitt mit der Kugel jene aus zwei Aesten bestehende Curve ist. Die wenigen oben benutzten Eigenschaften der Curve, nämlich dass jeder Ast von einem Hauptkreise in zwei Punkten getroffen wird und dass sie symmetrisch liegt gegen das sphärische Perpendikel, welches in der Mitte von $A'A''$ errichtet werden kann, ergeben sich unmittelbar aus der obigen Construction derselben auf der Kugelfläche.

Der Hauptbogen $A'A''$, welcher zwei homologe Punkte der sphärischen Systeme verbindet, heisst eine sphärische Sehne der Systeme. Die Perpendikel, in den Mitten der sphärischen Sehnen errichtet, schneiden sich dem Obigen zufolge sämmtlich in den beiden Doppelpunkten. Die Perpendikel auf irgend zwei Sehnen genügen daher, die Doppelpunkte zu finden. Durch Rotation um einen Doppelpunkt, oder was dasselbe ist, um beide Doppelpunkte oder ihre Verbindungslinie gelangt das bewegliche sphärische System Σ aus der Lage Σ' in die Lage Σ''; die Amplitude derselben ist der Winkel, welchen die Hauptbogen vom Doppelpunkte nach zwei homologen Punkte A', A'' gezogen mit einander bilden.

Die Uebertragung aller auf der Kugelfläche hier ausgeführten Constructionen auf das räumliche System, welches sich um den Kugelmittelpunkt dreht, besteht grösstentheils nur in einer Aenderung des Wortausdruckes. An die Stelle des Punktes auf der Kugelfläche tritt die Gerade, welche durch den Rotationsmittelpunkt geht, an die Stelle homologer Punkte treten homologe Geraden dieser Art, der Hauptbogen wird ersetzt durch die Ebene, welche den Mittelpunkt enthält, die sphärische Sehne wird zur Ebene des Winkels zweier nach homologen Punkten durch den Mittelpunkt gezogenen Geraden u. s. f.

§. 4. Wenn ein sphärisches System Σ sich auf seiner Kugelfläche bewegt und wenn $\Sigma', \Sigma'', \Sigma''', \ldots$ eine Reihe von Lagen ist, welche dasselbe während seiner Bewegung durchläuft, so ist die Bewegung aus der Lage Σ' in die Lage Σ'' äquivalent einer Rotation um einen bestimmten Punkt C' der festen Kugelfläche (oder seinen Gegenpunkt oder um beide), die Bewegung aus der Lage Σ' in die Lage Σ'' ebenso äquivalent einer Rotation um ein zweites Centrum C'', u. s. f. Wählt man nun die Zwischenlagen $\Sigma', \Sigma'', \Sigma''', \ldots$ immer dichter und dichter an einander, so häufen sich die Rotationscentra $C', C'' \ldots$ gleichfalls und werden die Amplituden für die Rotation aus einer Lage des Systems in die nächstfolgende immer kleiner. In der Grenze geht die Folge der Rotationen in die wirklich stattfindende Bewegung und die Folge der Centra C in eine continuirliche Curve (C) auf der festen Kugelfläche über. Während der Rotation um C' fällt ein gewisser Systempunkt Γ' mit C' zusammen, während der Rotation um C'' ein anderer Systempunkt Γ'' mit diesem

u. s. f. Bei dem Grenzenübergange erhält man daher noch eine zweite, aber dem beweglichen System angehörende Curve (Γ), deren Punkte während der Bewegung des Systems nach und nach mit den Punkten der Curve (C) zusammentreffen. In dem Momente, in welchem die verschwindend kleine Rotation um C″ beginnt, ist Γ″ in C″ eingetreten und verlässt Γ′ den Punkt C′; daher haben beide Curven die Bogenelemente C′C″ und Γ′Γ″ gemein, d. h. sie berühren sich in C′. Fügt man diesen Betrachtungen über die Bewegung des sphärischen Systems die entsprechende über die Bewegung des körperlichen Systems um den Kugelmittelpunkt hinzu, so gelangt man dazu, die folgenden Sätze, welche den Sätzen im III. Cap. §. 2. analog sind, aufzustellen.

Jede Bewegung eines unveränderlichen sphärischen Systems auf seiner Kugelfläche ist äquivalent einer continuirlichen Folge von Rotationen um die Erzeugungslinien einer bestimmten Kegelfläche, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugel ist und welche durch eine bestimmte auf der Kugelfläche liegende Curve (C) hindurchgeht, oder auch:

Jede Bewegung eines unveränderlichen räumlichen Systems um einen Punkt ist äquivalent einer continuirlichen Folge von Rotationen um Axen, welche durch diesen Punkt gehen und die Erzeugungslinien einer bestimmten von der speziellen Natur der Bewegung abhängigen Kegelfläche des absoluten Raumes sind.

Jede Bewegung eines unveränderlichen sphärischen Systems auf seiner Kugelfläche ist äquivalent dem Rollen einer bestimmten Curve (Γ) des beweglichen Systems auf einer bestimmten anderen Curve (C) der festen Kugelfläche.

Jede Bewegung eines unveränderlichen räumlichen Systems um einen Punkt ist äquivalent dem Rollen einer bestimmten, dem beweglichen System angehörenden Kegelfläche (Γ) auf einer bestimmten andern Kegelfläche (C) des absoluten Raumes, welche mit jener den Punkt, um welchen das System sich bewegt, zum gemeinschaftlichen Mittelpunkte hat.

§. 5. Jeder Lage des beweglichen Systems entspricht eine bestimmte Gerade C des Kegels (C), um welche dieselbe eine unendlichkleine Rotation ausführt, um in die folgende, jener unendlichnahe Lage zu gelangen. Diese Gerade heisst die jener Lage entsprechende **Momentanaxe** des Systems und die unendlichkleine Rotation um sie die **Elementarbewegung** des Systems. Die Momentanaxe ist eine Doppellinie der beiden aufeinanderfolgenden unendlichnahen Lagen des Systems und sämmtliche Momentanaxen laufen durch den allen Lagen

gemeinsamen Doppelpunkt, nämlich den Punkt, um welchen das System sich überhaupt bewegt. Vermöge der Elementarbewegung beschreibt jeder Systempunkt ein Element seiner Bahn als einen unendlichkleinen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt der Fusspunkt des von ihm auf die Momentanaxe gefällten Perpendikels ist. Dieser Kreisbogen oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Richtung seiner Tangente ist senkrecht zu der Ebene, welche durch dies Perpendikel um die Momentanaxe gelegt werden kann, d. h. die Ebene, durch den beschreibenden Punkt und die Momentanaxe gelegt, ist die Normalebene der Bahn des Punktes. Daher schneiden sich die Normalebenen der Bahnen sämmtlicher Systempunkte in den Punkten, welche ein und derselben Lage des Systems angehören, in der dieser Lage entsprechenden Momentanaxe. Um also die Normalebene und die Tangente an die Bahn eines Systempunktes zu construiren, bedarf es nur der Aufsuchung der entsprechenden Momentanaxe.

Für die Bewegung des sphärischen Systems auf seiner Kugelfläche ändert sich blos die Nomenclatur ein wenig. Die Momentanaxe wird vertreten durch zwei Punkte, von denen jeder als Momentancentrum angesehen werden kann. Vermöge der Elementarbewegung beschreibt der Systempunkt das Element eines Kreisbogens, der um das Momentancentrum mit dem sphärischen Abstande des Systempunktes in diesem beschrieben werden kann. Die sphärischen Normalen der Bahnen aller Punkte laufen durch das zugehörige Momentancentrum.

§. 6. Die Bewegung eines unveränderlichen räumlichen Systems überhaupt ist durch die Bewegung dreier nicht in gerader Linie liegender Punkte bestimmt (Cap. I, §. 2.). In dem vorliegenden Falle der Rotation um einen Punkt kann man den ruhenden Punkt als den einen von diesen ansehen und bedarf es nur noch der Kenntniss der Bewegung von zwei mit diesem nicht in gerader Linie liegenden Punkten, um die Bewegung aller Systempunkte ermitteln zu können. Da die Systempunkte nur sphärische Curven beschreiben können, so ist die Bewegung des Systems bestimmt, sobald zwei Curven auf zwei mit dem festen Rotationsmittelpunkte concentrischen Kugelflächen (die auch in eine Kugelfläche zusammenfallen können) als Bahnen zweier Punkte gegeben sind. Statt dessen können auch die beiden Kegelflächen, welche diese Curven enthalten und mit dem Rotationsmittelpunkt concentrisch sind, als Orte für zwei Gerade des Systems angenommen werden.

Es ist interessant und sehr lehrreich, die Betrachtungen, welche wir in den §§. 4—11 des vorigen Capitels für die Bewegung eines unveränderlichen Systems parallel einer Ebene oder für die Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene durchgeführt haben, zu übertragen auf die hier vorliegende allgemeinere Bewegung eines Systemes um einen festen Punkt oder die Bewegung eines sphärischen Systemes auf seiner Kugelfläche. Das Allgemeine dieser Uebertragung ist sehr leicht, die

Lösung spezieller Aufgaben complicirt sich aber in dem Maasse, als die Sphärik weniger einfach als die ebene Geometrie ist.

Die der Aufgabe im III. Capitel, §. 6. analoge Aufgabe würde lauten: „Ein unveränderliches System bewegt sich so um einen gegebenen Punkt, dass zwei seiner Geraden, welche sich in diesem Punkte schneiden, auf zwei festen gleichfalls durch diesen Punkt gehenden Ebenen bleiben, die Momentanaxe für eine beliebige Lage des Systems, die Kegelflächen (C) und (Γ), die Kegelfläche, welche eine beliebige Gerade, welche durch den festen Punkt geht, beschreibt, sowie die Bahn eines beliebigen Systempunktes nebst der Tangentenconstruction für letztere zu finden." Für das sphärische System würde man ihr folgende Einkleidung geben: „Ein unveränderliches sphärisches System bewegt sich auf seiner Kugelfläche so, dass zwei seiner Punkte auf zwei Hauptkreisen sich bewegen u. s. f."

Sind die Kegelflächen (C) und (Γ) selbst gegeben, so kommt das Problem der Bewegung unseres Systems auf das Problem der sphärischen Rouletten zurück. Ist z. B. (Γ) ein gerader Kreiskegel, (C) eine Ebene, so sind die Bahnen der Systempunkte sphärische Cycloïden.

Mit der Uebertragung und Ausbildung der im III. Capitel geführten Untersuchungen ist aber das Gebiet der Möglichkeiten, die Bewegung eines Systems um einen Punkt zu bestimmen, nicht im Entferntesten erschöpft. Denn die allgemeinste sich hierbei darbietende Aufgabe: „Die Bewegung des Systems zu bestimmen, wenn eine Kegelfläche desselben zwei andere feste Kegelflächen, welche mit ihr den Punkt, um den das System sich bewegt, zum gemeinsamen Mittelpunkt haben, fortwährend berührt, ist immer noch sehr speziell, weil die sich berührenden Elemente Kegelflächen sind. Sie kann dahin erweitert werden, dass an die Stelle der beiden festen Kegelflächen irgend zwei feste beliebige Flächen treten, welche von einer beliebigen dem Systeme angehörenden Fläche während der Bewegung fortwährend berührt werden sollen.

V. Capitel.

Aequivalenz von Translationen und Rotationen um gekreuzte Axen mit der Schraubenbewegung. Die allgemeinste Art der Bewegung eines unveränderlichen Systems.

§. 1. Ein unveränderliches System rotire um die Axe a (Fig. 27) um die Amplitude ϑ und erleide hierauf eine Translation τ parallel dieser Axe. Vermöge der Rotation beschreibt ein Punkt A des Systems, welcher sich in A' befindet, einen Kreisbogen $A'\alpha$, dessen Ebene senkrecht zur Axe a ist und welcher einem Centriwinkel $A'O\alpha$ gleich der Amplitude ϑ entspricht; durch die nachfolgende Translation durchläuft A sodann die Strecke $\alpha A'' = \tau$ parallel der Axe und gelangt dadurch in die Endlage A''. Ebendahin gelangt A, indem das System zuerst die Translation und hierauf die Rotation erleidet; der Punkt durchläuft hiebei zuerst die Strecke $A'\alpha' = \tau$ parallel zur Axe und hierauf den Kreisbogen $\alpha' A''$ parallel und gleich dem vorigen $A'\alpha$. Aehnliches gilt für alle Systempunkte und die Folge der Rotation und der Translation ist vertauschbar. Beide Bewegungen können zugleich stattfinden, sei es, dass das System die Translation besitzt und sie in einem andern System ausführt, welches um die Axe a des absoluten Raumes rotirt oder sei es, dass es um die in a befindliche Systemlinie α in einem andern Systeme rotirt, welches die Translation besitzt. Bei der gleichzeitigen Verbindung beider Bewegungen durchlaufen die Systempunkte A cylindrische Curven, welche im Allgemeinen Schraubenlinien genannt werden und gelangen auf diese Weise in dieselben Endlagen wie vorher. Während der Bewegung wachsen die Amplitude und die Translation allmählig auf ϑ und τ an; je nach dem Verhältnisse, in welchem die gleichzeitigen Aenderungen beider erfolgen, ist die Beschaffenheit der Schraubenlinien verschieden. Bleibt die Translation fortwährend der Rotationsamplitude proportional, so sind sie Bahnen der Systempunkte gemeine Schraubenlinien. Nennt man in diesem Falle die einer vollen Umdrehung 2π entsprechende Translationsgrösse h die Höhe des Schraubenganges, so erhält man dieselbe aus der Gleichung $\frac{h}{2\pi} = \frac{\tau}{\vartheta}$, nämlich $h = \pi\lambda$, wenn das constante Verhältniss $\frac{\tau}{\vartheta}$ gleich λ gesetzt wird.

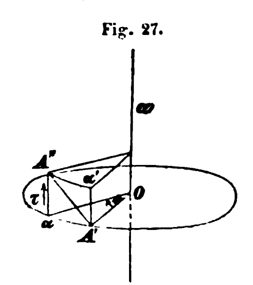


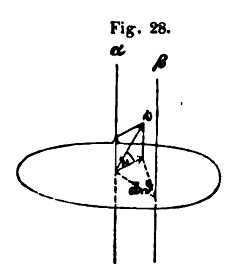
Fig. 27.

Die Schraubenbewegung ist eine aus einer Rotation und einer zur Rotationsaxe parallelen Translation zusammengesetzte Bewegung; sie kann in diese beiden Componenten wieder zerlegt werden und ist diesen in beliebiger Ordnung äquivalent.

§. 2. Für die Aequivalenz der Schraubenbewegung mit Translationen und Rotationen gelten folgende Sätze.

I. Die Folge einer Rotation ϑ und einer zur Rotationsaxe geneigten Translation τ oder auch die gleichzeitige Verbindung beider Bewegungen ist äquivalent einer Schraubenbewegung; die Axe der Schraubenbewegung ist parallel der Rotationsaxe und die Amplitude ihrer Rotationscomponente stimmt mit ϑ nach Grösse und Sinn überein, die Translationscomponente derselben ist $\tau \sin\lambda$, wenn λ die Neigung von τ gegen eine zur Rotationsaxe senkrechte Ebene bedeutet. Ist nämlich (Fig. 28.) α die Rotationsaxe und zerfällt man die Translation τ in zwei Componenten $\tau \sin\lambda$, $\tau \cos\lambda$, erstere parallel, letztere senkrecht zu α, so ist die Rotation ϑ um α in Verbindung mit der Translation $\tau \cos\lambda$ äquivalent einer Rotation ϑ um eine Axe β, welche mit α im Abstande $d = \frac{1}{2}\tau \frac{\cos\lambda}{\sin\frac{1}{2}\vartheta}$ parallel läuft (Vgl. Cap. II, Satz VI); diese Rotation liefert mit der andern Componente $\tau \sin\lambda$ der Translation die Schraubenbewegung um die Axe β.

Fig. 28.



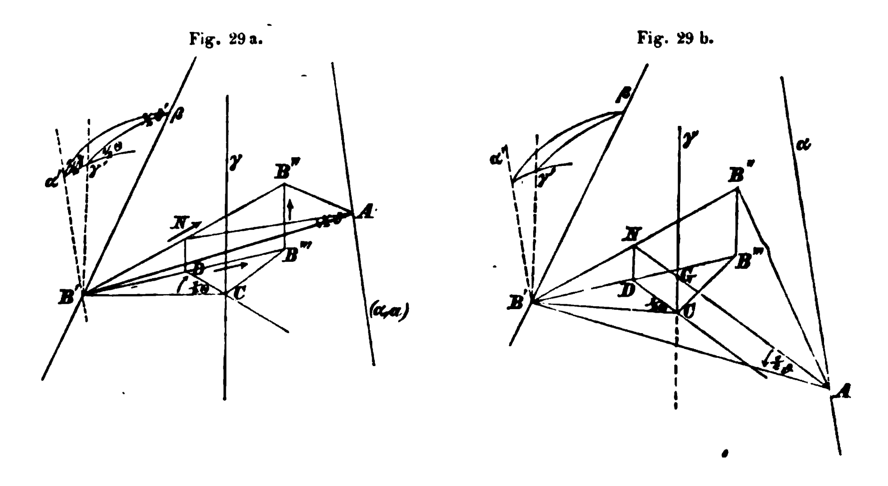
Ist $\lambda = \frac{\pi}{2}$, so verschwindet die Translationscomponente der Schraubenbewegung und reducirt sich diese auf eine blosse Rotation. Man erhält den Satz VI in Cap. II wieder.

II. Umgekehrt ist jede Schraubenbewegung äquivalent einer Rotation um eine beliebig wählbare, zur Schraubenaxe parallele Axe von derselben Amplitude, wie die Rotationscomponente der Schraubenbewegung und einer zur Axe geneigten Translation.

Man erhält dies Resultat, indem man die Schraubenbewegung in ihre Rotations- und Translationscomponente zerlegt, die Axe der ersteren nach Cap. II, Satz V. in eine parallele Axe verlegt und die hiebei sich ergebende Translation mit der Translationscomponenten der Schraubenbewegung vereinigt. Die aus beiden Translationen resultirende Translation ist geneigt gegen die Axe der Rotation, da von ihren Componenten die eine dieser parallel, die andere zu ihr senkrecht ist.

III. Die Folge zweier Rotationen um zwei gekreuzte Axen (α, a), (β, b) ist äquivalent einer Schraubenbewegung. Um diese zu finden, sei (Fig. 29 a.) α die erste, β die zweite Axe, ϑ

die Amplitude der Rotation um α, ϑ' die Amplitude der Rotation um β. Während der Rotation um α bleibt diese Axe mit der Geraden a des Raumes vereinigt und gelangt die Axe β durch dieselbe in die Gerade b, um welche hierauf die zweite Rotation erfolgt. In Folge der Rotation um α beschreiben alle Punkte B' der Axe β Kreisbogen $B'B''$, deren Ebenen senkrecht zu α sind und diese Axe in den Kreismittelpunkten A treffen; alle diese Kreisbogen nebst den zugehörigen Sehnen $B'B''$ entsprechen der Amplitude ϑ als Centriwinkel. Durch irgend einen der Punkte B' ziehen wir mit α die Parallele α' und ersetzen die Rotation ϑ um α durch dieselbe Rotation um α' und die zugehörige Translation $B'B''$. Die beiden Rotationen ϑ, ϑ' um die sich schneidenden Axen α', β sind aber nach Cap. IV. §. 1. äquivalent einer einzigen Rotation Θ um eine gewisse durch B' gehende Axe γ', welche durch die dort angegebene Construction gefunden wird. Die Folge der Rotationen ϑ, ϑ' um die Axen α, β ist demnach äquivalent der Rotation Θ um γ' in Verbindung mit der Translation $B'B''$, in beliebiger Aufeinanderfolge dieser beiden



Bewegungen. Die Translation $B'B''$ zerlegen wir nun in zwei Componenten $B'B'''$ und $B'''B''$, von denen die erstere senkrecht, die letztere parallel zur Axe γ' ist und verbinden die zu γ' senkrechte Translationscomponente $B'B'''$ nach Cap. II, Satz VI. mit der Rotation Θ um diese Axe zu einer Rotation Θ um eine zu γ' parallele Axe γ. Diese Rotation Θ um γ endlich liefert in Verbindung mit der zu ihr parallelen Translationscomponenten $B'''B''$ die Schraubenbewegung, welche der Folge der Rotationen ϑ, ϑ' um die Axen α, β äquivalent ist. Die Rotationsfolge ist nicht vertauschbar, wohl aber können beide Rotationen gleichzeitig stattfinden, so zwar, dass das System um β rotirt, während β selbst einem um (α, a) rotirenden zweiten Systeme angehört, in welchem das gegebene System jene Rotation um β ausführt.

§. 3. Wir wollen jetzt insbesondere die Punkte A, B' auf den Axen α, β so wählen, dass AB' der kürzeste Abstand beider Axen ist (Fig. 29b.) In diesem Falle ist AB' senkrecht zu beiden Axen α, β, also auch senkrecht zur Ebene $(\alpha'\beta)$. Legt man daher durch α' eine Ebene und lässt dieselbe sich um α' drehen, sodass sie zuerst durch β, dann durch $B'B''$ und hierauf durch $B'A$ hindurchgeht, so müssen die Winkel, welche ihre erste Lage mit der zweiten und diese mit der dritten bildet, sich zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzen. Es steht aber α' senkrecht auf der Ebene des gleichschenkligen Dreiecks $AB'B''$ und ist Winkel $AB'B''$ und folglich auch der Neigungswinkel, den die zweite Lage der beweglichen Ebene mit deren dritter Lage bildet, $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\vartheta$; daher bildet die erste Lage mit der zweiten den Winkel $\frac{1}{2}\vartheta$. Um denselben Winkel muss sich aber auch die bewegliche Ebene drehen, um aus der Lage $(\alpha'\beta)$ in die Lage $(\alpha'\gamma')$ zu gelangen; daher geht die Ebene $(\alpha'\gamma')$ durch die Gerade $B'B''$ und da $B''B'''$ parallel der Axe γ' ist, auch durch $B''B'''$, d. h. die Ebene $(\alpha'\gamma')$ fällt mit der Ebene des Dreiecks $B'B''B'''$ zusammen, mit Hülfe dessen die Translation $B'B''$ zerlegt wurde, oder die Ebene dieses Dreiecks ist parallel der ersten Axe α und der gesuchten Axe γ der Schraubenbewegung. Eine Gerade, welche senkrecht zu dieser Ebene ist und die Axen α und γ schneidet, gibt daher den kürzesten Abstand beider an. Diese Gerade ist die Verbindungslinie des Punktes A mit der Mitte N der Sehne $B'B''$; sie trifft die Axe γ in einem gewissen Punkte G und AG ist der kürzeste Abstand der Axe α von der Schraubenaxe γ. Es sei ferner C der Schnittpunkt der Schraubenaxe γ mit der zu ihr senkrechten durch $B'B'''$ geführten Ebene und folglich CB' senkrecht zu γ und γ'. Denkt man sich nun eine Ebene durch γ' gelegt und lässt sie nach einander Lagen annehmen, in welchen sie durch $B'C$, $B'B'''$ und β geht, so bilden die beiden ersten Lagen derselben mit einander den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\Theta$ und da die Ebene $(\gamma'\alpha')$ durch $B'B'''$ hindurchgeht, so bildet die zweite Lage mit der dritten den Winkel $\frac{1}{2}\Theta$; beide Winkel betragen zusammen $\frac{1}{2}\pi$, es steht daher die Gerade CB' senkrecht auf der Ebene $(\gamma'\beta)$, mithin insbesondere auf der Axe β und ist folglich der kürzeste Abstand zwischen der zweiten Axe β und der Schraubenaxe γ.

Da die Strecke $CG = DN = \frac{1}{2} B'''B''$ ist; so folgt, dass die Projection CG des kürzesten Abstandes AB' der Axen α, β auf die Richtung der Schraubenaxe gleich der halben Translationsgrösse $\frac{1}{2}\tau$ der Schraubenbewegung ist.

Fällt man in dem sphärischen Dreieck $\alpha'\beta\gamma$ von γ' das Perpendikel p auf $(\alpha'\beta)$, so ist nach Cap. IV, §. 1.:

$$\sin p \cdot \sin \tfrac{1}{2}\Theta = \sin \tfrac{1}{2}\vartheta \cdot \sin \tfrac{1}{2}\vartheta' \cdot \sin(\alpha\beta);$$

$\sin p$ ist aber der Cosinus des Winkels, welchen γ' mit dem auf der

Ebene $(\alpha'\beta)$ errichteten Perpendikel, d. h. in der Richtung des kürzesten Abstandes der beiden Axen α, β bildet. Ist d dieser Abstand, so stellt daher $d\ \sin p$ die Projection von d auf die Axe γ, d. h. die halbe Translationsgrösse $\frac{1}{2}\tau$ dar. Multiplicirt man daher die vorstehende Gleichung mit d, so erhält man aus ihr

$$\tfrac{1}{2}\tau \cdot \sin\tfrac{1}{2}\Theta = d \cdot \sin\tfrac{1}{2}\vartheta \cdot \sin\tfrac{1}{2}\vartheta' \cdot \sin(\alpha\beta),$$

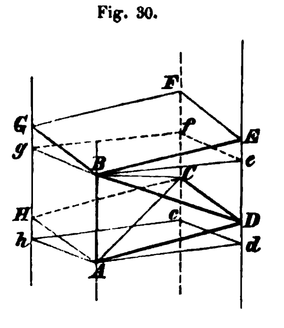
d. h. das Produkt der Sinusse der halben Amplituden der Rotationen um zwei Axen, des kürzesten Abstandes dieser Axen und des Sinus ihrer Neigung ist gleich dem Produkte aus der halben Translation und dem Sinus der halben Amplitude der der Folge beider Rotationen äquivalenten Schraubenbewegung. Dieser Satz wurde zuerst 1840 von Rodrigues bewiesen. (Vgl. dessen Abhandlung: Des lois géométriques qui régissent le déplacement d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements. Liouville's Journal de Mathém. T. V, p. 390.)

§. 4. IV. Umgekehrt ist jede Schraubenbewegung äquivalent der Folge zweier Rotationen um zwei sich kreuzende Axen und zwar auf unendlich viele Arten, sodass man die eine der beiden Axen willkührlich annehmen und die andere dazu finden kann. Ist die zweite Axe β gegeben, so kann man mit Hülfe der bekannten Schraubenbewegung leicht die Lage b bestimmen, in welche β durch die Schraubenbewegung gelangt und kann demnach zu jedem Punkte B' auf β den homologen Punkt B'' auf b finden. Vermöge der Rotation um die noch unbekannte erste Axe muss aber β gleichfalls in die Lage b versetzt werden. Hieraus folgt, dass alle Geraden, wie $B'B''$, welche homologe Punkte von β und b verbinden, die Sehnen von Kreisbogen sind, deren Mittelpunkte auf der ersten Axe liegen und deren Ebenen senkrecht zu dieser ersten Axe sind. Eine Ebene, in der Mitte von $B'B''$ normal zu dieser Sehne, geht daher durch die gesuchte Axe; eine Normalebene zu einer weiteren Sehne $C'C''$ liefert durch ihre Schnittlinie mit dieser die erste Axe selbst. Ist die erste Axe α gegeben und wird die zweite gesucht, so führt eine ähnliche Construction zum Ziel. Man bestimmt vermöge der Schraubenbewegung die Lage, in welche α gelangen muss und da sie ihre ganze Bewegung der Rotation um die zweite Axe verdankt, so genügen die Normalebenen in der Mitte zweier Sehnen auch hier um die Axe b und folglich auch um β zu finden.

Zwei Axen, für welche die Rotationsfolge einer gegebenen Schraubenbewegung äquivalent ist, heissen conjugirte Axen. Es ist immer genau anzugeben, welche von ihnen die erste, welche die zweite sein soll. Für alle Paare conjugirter Axen ist nach dem Satze von Rodrigues

das Produkt aus den Sinussen der halben Amplituden, dem kürzesten Axenabstande und dem Sinus der Neigung der Axen gegen einander constant. Man kann diesem Satze auch eine etwas mehr geometrische Fassung geben. Trägt man nämlich irgendwo auf den beiden Axen Längen auf, welche den Sinussen der halben Amplituden der Rotationen um sie proportional sind und construirt das Tetraeder, in welchem diese Längen Gegenkanten sind, so wird jenes Produkt dem Volumen dieses Tetraeders proportional und bleibt dies Volumen also constant, auf welche Weise man auch immer die Schraubenbewegung in die Folge zweier Rotationen auflösen möge. Ein Tetraeder $ABCD$ nämlich (Fig. 30), welches die beiden Gegenkanten AB, CD besitzt, ist der sechste Theil eines Parallelepipeds $AHCDEBGF$, welches zwischen der durch jene Kanten bestimmten Parallelschicht enthalten ist und mithin den kürzesten Abstand beider Kanten zu einer seiner Höhen hat. Dies Parallelepiped ist an Volumen gleich einem andern Parallelepiped $AhcdeBgf$, dessen durch A und B gehende Gegenflächen senkrecht zu AB sind und das jenen kürzesten Abstand gleichfalls zur Höhe hat. Daher ist das Tetraeder $ABCD$ der sechste Theil des Produktes aus der Fläche des Parallelogramms $cdef$ und des kürzesten Abstandes von AB und CD. Der Inhalt dieses Parallelogramms ist aber $\overline{ed} \cdot \overline{CD} \cdot \sin(CD, ed) = \overline{AB} \cdot \overline{CD} \sin(AB, CD)$, u. s. w.

Fig. 30.



Denkt man sich durch einen beliebigen Punkt B' des Systems (Fig. 29, b.) alle möglichen Axen β gelegt und bestimmt alle ihnen conjugirten Axen α, so fallen diese sämmtlich in eine Ebene, nämlich in die Normalebene der Sehne $B'B''$, welche diese Sehne halbirt. Dreht sich daher von zwei in Bezug auf eine gegebene Schraubenbewegung conjugirten Axen die eine um einen Punkt des Systems um, so beschreibt die andere eine bestimmte Ebene.

Fällt die Axe β mit der Sehne $B'B''$ zusammen, so kreuzt sie die ihr conjugirte Axe α rechtwinklig. Man kann daher durch jeden Punkt des Systems eine Axe legen, zu welcher die conjugirte Axe rechtwinklig ist.

§. 5. V. Die Folge von beliebig vielen Rotationen und Translationen ist immer einer Schraubenbewegung äquivalent. Man findet dieselbe, indem man die Rotationen in der gegebenen Ordnung und die Translationen für sich zusammensetzt; die resultirende Rotation und die resultirende Translation liefern die Schraubenbewegung nach Satz I.

VI. Zwei Schraubenbewegungen sind einer einzigen dritten Schraubenbewegung äquivalent; die Ordnung derselben ist nicht vertauschbar. Es genügt, die Schraubenbewegungen in ihre Rotations- und Translationscomponenten aufzulösen; die beiden Translationen liefern wieder eine Translation, die Rotationen eine Rotation nebst Translation. Setzt man die so gewonnenen Translationen in eine einzige zusammen, so vérbindet sie sich nach Satz I. mit der zuletzt erhaltenen Rotation zu der resultirenden Schraubenbewegung.

§. 6. Werden die in den sechs vorstehenden Sätzen auftretenden Translationen und Rotationsamplituden unendlich klein, so vereinfachen sich die Sätze in folgender Weise.

1. Die Folge oder auch die gleichzeitige Verbindung einer unendlich kleinen Translation $d\tau$ und einer unendlich kleinen Rotation $d\vartheta$ um eine zur Richtung von $d\tau$ geneigte Axe α ist äquivalent einer unendlich kleinen Schraubenbewegung von derselben Amplitude $d\vartheta$ und Translation $d\tau$ um eine zur Axe α parallele Axe β; diese Axe β liegt mit α in einer zu der durch α und $d\tau$ bestimmten Ebene senkrechten Ebene und zwar auf derjenigen Seite von α, nach welcher hin die Rotation $d\vartheta$ erfolgt, in einem Abstande $d = \frac{d\tau}{d\vartheta} \cos\lambda$, wenn λ, wie früher, die Neigung von $d\tau$ gegen die zu α senkrechte Ebene bedeutet. (Vgl. Fig. 28.)

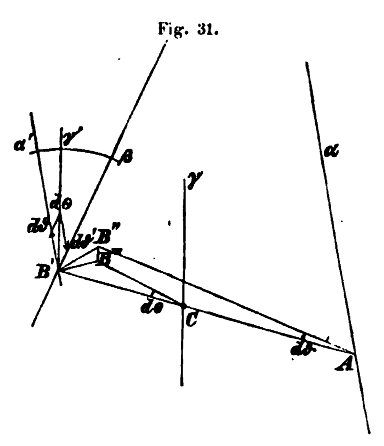
2. Die Folge oder auch gleichzeitige Verbindung zweier unendlich kleinen Rotationen $d\vartheta$, $d\vartheta'$ um zwei sich kreuzende Axen (α, a) und (β, b) ist äquivalent einer unendlich kleinen Schraubenbewegung. Die Figur 29 b. erleidet hiefür folgende Modificationen. Da $d\vartheta$, $d\vartheta'$ verschwindend klein sind, so fällt die Axe γ' in die Ebene $(\alpha'\beta)$ und läuft also die Axe der Schraubenbewegung parallel mit den Ebenen der Schicht, welche durch die Axen α, β bestimmt wird; sie ist mithin senkrecht zu dem kürzesten Abstande $AB' = d$ dieser Axen. Die Amplitude $d\Theta$ der Schraubenbewegung erhält man zufolge des Satzes vom Parallelogramm der Rotationen (Cap. IV. §. 2.) und zwar ist

$$\frac{\sin\gamma\alpha}{d\vartheta'} = \frac{\sin\gamma\beta}{d\vartheta} = \frac{\sin\alpha\beta}{d\Theta}.$$

Die unendlich kleine Translation $B'B''$ ist senkrecht zu AB' und fällt in die Ebene $(\alpha'\beta)$; ihr Werth ist $d\cdot d\vartheta$. Da die Ebene $B'B''B'''$ mit der Ebene $(\alpha'\gamma')$, also jetzt mit der Ebene $(\alpha'\beta)$ zusammenfällt, welche senkrecht zu AB' ist, so fällt der Punkt C in die Richtung des kürzesten Abstandes AB' beider Axen und ist seine Entfernung von der zweiten Axe $CB' = \frac{B'B''}{d\Theta}\cdot\cos(B''B'B''') = d\cdot\frac{d\vartheta}{d\Theta}\cdot\cos\gamma\alpha$, da Winkel $B''B'B'''$ gleich Winkel $(\gamma'\alpha') = (\gamma\, a)$ ist (weil $B'B''$ auf α und $B'B'''$ auf γ senkrecht steht). Die Translationscomponente der Schraubenbewegung ist

$B'''B'' = d\tau = d \cdot d\vartheta \cdot \sin \gamma\alpha$, oder da $\sin \gamma\alpha = \frac{d\vartheta'}{d\Theta} \cdot \sin (\alpha\beta)$ ist,

$d\tau = \frac{d \cdot d\vartheta \, d\vartheta' \sin \alpha\beta}{d\Theta}$. Diese Gleichung ergibt sich auch aus dem Rodrigues'schen Satze, indem man denselben für unendlich kleine Amplituden und Translationen in Anwendung bringt. Die Figur 31. erläutert den Uebergang der Fig. 29 b. für den Fall der unendlich kleinen Bewegungen.



Sind die Amplituden der Rotationen gleich, so bildet γ mit α und β gleiche Winkel. — Der Unterschied der Aufeinanderfolge der Rotationen fällt weg; sie können beide gleichzeitig erfolgen. Die Rotation $d\vartheta$ um α verrückt die Axe β, die Rotation um β die Axe α unendlich wenig; dabei verschiebt sich blos die Axe γ in sich selbst um die unendlichkleine Grösse $d\tau$. Analog der oben gegebenen Formel für den kürzesten Abstand CB' der Schraubenaxe von der Axe β erhält man durch geeignete Vertauschung der correspondirenden Elemente für den kürzesten Abstand CA derselben Schraubenaxe von der Axe α die Formel $CA = d \cdot \frac{d\vartheta'}{d\Theta} \cdot \cos \gamma\beta$. Demnach erhält man weiter für das Theilungsverhältniss des kürzesten Abstandes durch die Schraubenaxe:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{d\vartheta'}{d\vartheta} \cdot \frac{\cos \gamma\beta}{\cos \gamma\alpha}$$

oder da $\frac{d\vartheta'}{d\vartheta} = \frac{\sin \gamma\alpha}{\sin \gamma\beta}$ ist:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{tg\, \gamma\alpha}{tg\, \gamma\beta}.$$

Es theilt demnach die Schraubenaxe den kürzesten Abstand der Axen α, β im Verhältniss der Tangenten der Winkel, welche sie mit diesen Axen bildet.

§. 7. Bereits im Cap. I. §. 2. wurde gezeigt, dass ein unveränderliches System aus einer ersten Lage in eine zweite gelangt ist, sobald dies bei irgend drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten desselben der Fall ist. Haben daher beide Lagen drei Doppelpunkte, so sind alle Punkte Doppelpunkte und fallen beide Lagen zusammen. Sollen also beide Lagen von einander verschieden sein, so können sie nur 2, 1 oder 0 Doppelpunkte besitzen. Die beiden ersten dieser Fälle sind in den

vorigen Capiteln erörtert worden, denn die Bewegung des Systems ist in diesen Fällen äquivalent einer Rotation um die Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte als Axe und einer Rotation um den einen Doppelpunkt. Es bleibt daher von allen möglichen Fällen der Bewegung eines unveränderlichen Systems blos der eine noch zu untersuchen, in welchem die beiden Lagen keinen Doppelpunkt besitzen; dieser Fall ist der allgemeinste und zu seiner Behandlung dienen die in vorliegendem Capitel bis jetzt entwickelten Sätze, aus denen sich die folgenden ergeben.

I. Jede Bewegung eines unveränderlichen Systems Σ aus einer ersten Lage Σ' in eine zweite Σ'' ist äquivalent der Folge zweier Rotationen um zwei Axen auf unendlich viele Arten, sodass die eine von diesen willkührlich gewählt und die andere dazu gefunden werden kann. Sind nämlich β', β'' irgend zwei homologe Gerade von Σ', Σ'' und auf ihnen A', A''; B', B'' zwei homologe Punktpaare, so construire man die Kugelfläche, welche diese beiden Paare enthält und denke sich ein Hülfssystem σ, dessen beide Lagen σ', σ'' die Punkte A', B'; A'', B'' als homologe Punkte und den Mittelpunkt der Kugelfläche als Doppelpunkt (O', O'') besitzen. Nach Cap. IV. gelangt dies System σ aus der Lage σ' in die Lage σ'' durch Rotation um eine bestimmte durch den Doppelpunkt gehende Axe a, welche die Durchschnittslinie der Normalebenen ist, welche man in den Mitten der Sehnen $A'A''$, $B'B''$ auf diesen Sehnen errichten kann. Mit dieser Axe a fällt eine gewisse Gerade α des Systems Σ zusammen, und da durch Drehung um sie die Gerade β aus der Lage β' in die Lage β'' übergeführt wird, so bedarf es, nachdem dies geschehen, blos noch einer Rotation um letztere, damit das System Σ vollständig in die Lage Σ'' gelange. Die Linie β kann willkührlich angenommen werden und zu ihr als zweiter Rotationsaxe die zugehörige erste Axe α nach der vorigen Construction gefunden werden.

II. Jede Bewegung eines unveränderlichen Systems Σ aus einer ersten Lage Σ' in eine zweite Σ'' ist äquivalent der Folge einer Translation und einer Rotation in beliebiger Ordnung auf unendlich viele Arten. Ertheilt man nämlich dem System eine Translation übereinstimmend nach Grösse, Richtung und Sinn mit der Verbindungssehne zweier homologer Punkte A', A'' von Σ' und Σ'', so gelangt dasselbe in eine gewisse Lage $\Sigma_{,}$, in welcher es mit Σ'' einen Doppelpunkt (A', A'') besitzt. Nach Cap. IV. gibt es daher eine durch A'' gehende Axe α, durch Rotation um welche Σ aus der Lage $\Sigma_{,}$ in die Endlage Σ'' gelangen kann. Da Translation und Rotation vertauschbare Bewegungen sind, so kann das System auch erst die Rotation um eine zu der eben erwähnten Axe parallele, durch A' gelegte Axe ausführen und dann die Translation $A'A''$ erleiden, um schliesslich in dieselbe Lage Σ'' übergeführt zu sein.

Da man zur Translation jede andere Verbindungssehne zweier homologer Punkte von Σ', Σ'' wählen kann, so ist die Aufgabe, das System Σ aus der Lage Σ' in die Lage Σ'' durch eine Folge von Translation und Rotation überzuführen, auf unzählige Arten lösbar. Obgleich die hiezu dienenden Translationen im Allgemeinen nach Grösse und Richtung verschieden sind, so ist die Rotation dennoch nach Axenrichtung, Amplitude und Sinn immer die nämliche und haben die Translationen parallel der Richtung der Rotationsaxe sämmtlich gleiche Componenten. Zieht man nämlich durch irgend einen andern Systempunkt B mit α eine Parallele β, so gelangt dieselbe durch die Translation $A'A''$ aus der Lage β', in welcher sie durch B' ging, in eine Lage $\beta_{,}$, und bleibt sich und α dabei fortwährend parallel. Durch die nachfolgende Rotation des Systems um α gelangt sie in ihre definitive Lage β'', in welcher sie durch B'' hindurchgeht. Da sie auch während dieser Rotation sich parallel bleibt, so folgt, dass sie auch dann in ihre definitive Lage gelangt, wenn das System statt der Translation $A'A''$ die Translation $B'B''$ erleiden würde. Ertheilt man folglich dem System diese letztere Translation, so bedarf es blos noch einer Rotation um (β, β''), damit dasselbe die Endlage Σ'' erreiche. Daher sind alle den verschiedenen Translationen $A'A''$, $B'B''$, ... entsprechenden Rotationsaxen einer gemeinschaftlichen Richtung parallel. Da nach Ausführung der Translation $A'A''$ das System blos noch um die Axe α zu rotiren braucht und dabei sich parallel einer zu α senkrechten Ebene bewegt, so folgt, dass durch die Translation $A'A''$ alle zur Richtung der Rotationsaxe senkrecht durch die verschiedenen Punkte A, B, ... geführten ebenen Schnitte des Systems bereits in ihre definitiven Ebenen gelangt sind. Dasselbe gilt von der Translation $B'B''$, etc. Daher müssen die Rotationen um die parallelen Axen α, β äquivalent sein. Sie können sich daher blos um eine Translation senkrecht zu ihrer gemeinschaftlichen Axenrichtung unterscheiden und haben folglich gleiche Amplituden von demselben Sinne. Ein zur Axenrichtung α senkrechter Schnitt des Systems bewegt sich in Folge der Translation $A'A''$ parallel mit sich selbst aus seiner Lage in Σ' in die homologe Lage in Σ'' um eine Strecke, welche durch die Projection der Translation $A'A''$ auf die Richtung α angegeben wird; da er auch durch die Translation $B'B''$, sowie durch jede andere eben dahin gelangt, so folgt, dass die Projectionen aller Translationen $A'A''$, $B'B''$, ... auf die Axenrichtung α, oder also die Translationscomponenten parallel dieser Axe gleich gross sind. Die gemeinschaftliche Richtung der Rotationsaxen ist mithin diejenige Gerade des Raumes, für welche die Verbindungssehnen der homologen Punktpaare von Σ' und Σ'' gleiche Projectionen liefern.

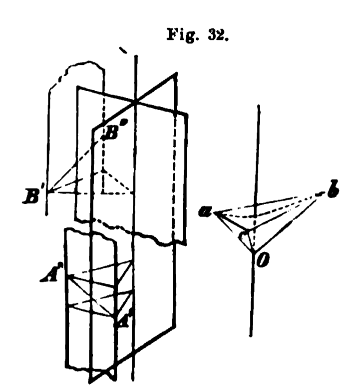
III. Jede Bewegung eines unveränderlichen Systems Σ

aus einer Lage Σ' in eine andere Σ'' ist äquivalent einer Schraubenbewegung.

Dem vorigen Satz zufolge ist nämlich die Bewegung des Systems äquivalent einer Translation, welche nach Grösse, Richtung und Sinn mit der Verbindungssehne zweier homologer Punkte A', A'' von Σ' und Σ'' übereinstimmt und einer Rotation um eine durch den Punkt A gehende Axe α. Diese beiden Bewegungen sind aber nach §. 1, Satz I. einer Schraubenbewegung äquivalent, welche wie dort gefunden wird, indem man die Translation $A'A''$ in zwei Componenten zerlegt, die eine parallel der Rotationsaxe, die andere senkrecht zu ihr. Die erstere dieser Componenten ist die Translationscomponente der Schraubenbewegung, die zweite bestimmt in Verbindung mit der Rotation um α die Axe derselben ihrer Lage und Amplitude nach.

Unmittelbar kann dieselbe, wie folgt, bestimmt werden. Da das System in seine neue Lage übergeführt ist, sobald drei nicht in gerader Linie liegende Punkte ihre Endlagen erreicht haben, so müssen drei Sehnen $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, welche nicht parallel sind, zur Auffindung genügen. Nun ist die Richtung der Axe α und mithin auch die der Schraubenaxe die Richtung des Raumes, in Bezug auf welche alle Sehnen, insbesondere also auch jene drei gleiche Projectionen besitzen. Zieht man also durch irgend einen Punkt O des Raumes drei Strecken Oa, Ob, Oc (Fig. 32.) gleich, parallel und von demselben Sinne mit den Sehnen $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ legt durch die Punkte a, b, c eine Ebene und zieht durch O die Normale dieser Ebene, so erfüllt dieselbe die Bedingung der Gleichheit der Projectionen, und zwar ist sie die einzige Richtung, welche dieser Bedingung genügt. Nachdem auf diese Weise die Richtung der Schraubenaxe gefunden ist, ergibt sich die Lage derselben im Raume und im beweglichen System folgendermassen mit Hülfe zweier Punktpaare, z. B. A', A''; B', B''. Zwei durch A' und A'' zur Schraubenaxenrichtung parallel gezogene Gerade α' und α'' sind homologe Gerade von Σ' und Σ'', indem eine bewegliche Gerade durch die Schraubenbewegung aus der Lage α' in die Lage α'' gelangt; sie liegen daher auf einer Cylinderfläche, deren Axe mit der Schraubenaxe zusammenfällt. Legt man daher durch sie eine Ebene und halbirt den zwischen ihnen in dieser enthaltenen Parallelstreifen $\alpha'\alpha''$ durch eine ihnen parallele Normalebene (welche mithin durch die Mitte der Sehne $A'A''$ geht), so muss diese die Schraubenaxe enthalten; wendet man dieselbe Construction nochmals, nämlich in Bezug auf die Punkte

Fig. 32.



B', B'' an, indem man durch diese zwei zur Schraubenaxenrichtung parallele Gerade β', β'' zieht, so liefert die Ebene, welche den Parallelstreifen $\beta'\beta''$ normal halbirt, durch ihren Durchschnitt mit der vorigen Normalebene die Schraubenaxe selbst. Um die Amplitude der Schraubenbewegung zu finden, hat man nur nöthig, durch die bereits gefundene Schraubenaxe und zwei homologe Punkte, z. B. A', A'', zwei Ebenen zu legen, ihr Winkel ist die gesuchte Amplitude. Der ebengeführte Beweis zeigt zugleich, dass jede Bewegung des Systems nur einer einzigen Schraubenbewegung äquivalent sein kann.

Die Aequivalenz der Bewegung eines unveränderlichen Systems mit einer Schraubenbewegung wurde von Chasles entdeckt und im Bulletin des sciences mathém. von Ferussac als eine Mittheilung an die Société philomatique zu Paris vom 5. Februar 1831 zuerst gedruckt. In Uebereinstimmung mit Chasles wird die Schraubenaxe auch die Centralaxe (besser Centralaxe der Bewegung zum Unterschiede von der von Poinsot gefundenen Centralaxe der Kräfte) genannt.

Der Satz über die Schraubenbewegung ergibt sich auch aus dem obigen Satze I; jedes Paar Rotationsaxen, wie sie dort gefunden werden, ist ein Paar conjugirter Axen der Schraubenbewegung.

§. 8. Die Schraubenaxe ist eine Doppellinie der beiden Systeme Σ', Σ''; zieht man durch alle Punkte von Σ' einerseits und durch die ihnen homologen Punkte von Σ'' andererseits Geraden parallel dieser Axe, so bilden sie zwei Parallelstralenbündel homologer Geraden der Systeme, die Axe ist der Doppelstral dieser Bündel. Die Punkte des beweglichen Systems, welche in die Schraubenaxe fallen, erleiden während der Schraubenbewegung eine blosse Verschiebung in ihr, alle andern Punkte des Systems eine Verschiebung parallel dieser Axe und eine Rotation um dieselbe. Die Verbindungssehnen homologer Punkte, welche in die Axe fallen, sind alle gleich und sind die kleinsten Sehnen des Systems. Ist τ die Translation und Θ die Amplitude der Schraubenbewegung, so ist die Grösse t einer Sehne, deren Mitte von der Axe den Abstand r besitzt, gegeben durch die Gleichung $t^2 = 4\, r^2 tg^2 \tfrac{1}{2}\Theta + \tau^2$ und die Tangente ihrer Neigung φ gegen die Axe durch $tg\, \varphi = \dfrac{2r}{\tau}\, cotg\, \tfrac{1}{2}\Theta$. Alle Sehnen, welche gleichen Abstand von der Axe haben, sind daher gleich und gleichgeneigt gegen die Axe; mit wachsendem Abstande wächst die Sehne und nähert sich ihre Lage gegen die Axe immer mehr der rechtwinkligen Kreuzung.

Die Schraubenbewegung ist äquivalent einer Rotation um irgend eine Gerade des obigen Parallelstralenbündels von derselben Amplitude in Verbindung mit einer Translation gleich der einem Punkte der Geraden entsprechenden Sehne des Systems. Je weiter diese Rotationsaxe sich von der

Schraubenaxe entfernt, um so grösser wird die zugehörige Translation und um so mehr biegt sich dieselbe von der Rotationsaxe ab.

Die Schraubenaxe ist die einzige Doppellinie der Systeme Σ', Σ''; hieraus folgt, dass wenn dieselben einen Doppelpunkt besitzen, dieser auf der Axe liegen muss. In diesem Falle fallen alle homologen Punkte auf der Axe zusammen, verschwindet die Translationscomponente der Schraubenbewegung und geht diese selbst in eine blosse Rotation über, wie dieselbe Cap. IV. näher untersucht wurde. Besitzen Σ' und Σ'' zwei Doppelpunkte, so tritt Aehnliches ein und erhalten wir den Fall des Cap. II.

§. 9. Es sei jetzt Σ', Σ'', Σ''' ... eine Reihe von Lagen, welche das System Σ während seiner Bewegung durchläuft. Die Bewegung, welche dasselbe aus der Lage Σ' nach Σ'' führt, ist äquivalent einer Schraubenbewegung von der Amplitude ϑ' und der Translation τ' um eine gewisse Axe C', die Bewegung aus der Lage Σ'' nach Σ''' ist ebenso äquivalent einer zweiten Schraubenbewegung (ϑ'', τ'') um eine zweite Axe C'' u. s. f. Construiren wir alle diese Axen und ertheilen dem Systeme Σ statt seiner wirklichen Bewegung nach und nach die Schraubenbewegungen (ϑ', τ'), (ϑ'', τ''), (ϑ''', τ''') ..., so ergibt sich eine Bewegung, welche mit der wirklich stattfindenden in den Lagen Σ', Σ'', Σ''' ... übereinstimmt, im Uebrigen aber im Allgemeinen von ihr abweicht. Schaltet man aber zwischen je zwei aufeinanderfolgenden dieser Lagen andere Lagen des beweglichen Systems ein und wiederholt die Construction der Schraubenbewegungen, wobei sowohl die Amplituden, als auch die Translationen und nicht minder die Axen sich ändern, so ergibt sich eine Bewegung, welche sich der wirklichen Bewegung weit inniger anschliesst. Bei Fortsetzung dieses Prozesses häufen sich die Axen immer dichter und dichter, nehmen die Amplituden und Translationen, weil die Lagen des Systems einander immer näher aneinanderrücken, ohne Ende ab und nähert sich der Ort aller Axen einer bestimmten geradlinigen Fläche, die ganze Bewegung aber der wirklich stattfindenden Bewegung ohne Ende als ihrer Grenze. Durch die Vollziehung dieses Grenzüberganges ergibt sich daher der Satz:

IV. Die Bewegung eines unveränderlichen Systems ist äquivalent einer continuirlichen Folge verschwindend kleiner Schraubenbewegungen um die Erzeugungslinien einer bestimmten geradlinigen Fläche (C) des absoluten Raumes.

Während das System die Schraubenbewegung um die Axe C' erleidet, fällt eine bestimmte Linie Γ' des Systems mit C' zusammen und verschiebt sich in Folge der Translationscomponente der Schraubenbewegung in ihr; durch die folgende Schraubenbewegung um C'' verlässt Γ' diese Linie, während derselben fällt aber eine zweite Linie Γ'' des

Systems mit C'' zusammen; ebenso fällt während der Bewegung um C'' eine dritte Linie Γ''' in C'' u. s. f. Der geometrische Ort aller dieser Geraden Γ, welche nach und nach mit den Schraubenaxen C zusammenfallen und in diesen gleiten, ist in der Grenze eine bestimmte geradlinige Fläche (Γ) des beweglichen Systems. Beide Flächen (C) und (Γ) berühren sich während der Bewegung längs der zusammenfallenden Erzeugungslinien C' und Γ', C'' und Γ'' u. s. f., d. h. sie haben längs diesen in allen Punkten gemeinschaftliche Tangentenebenen. Denn durch die Schraubenbewegung um C' z. B. gelangt Γ'' in die Axe C'', während Γ' in C' bleibt, und C' erst in dem Momente verlässt, in welchem Γ'' in C'' eintritt; mithin haben die Flächen in diesem Moment zwei aufeinanderfolgende Erzeugungslinien gemein, und berühren sich folglich längs der ersten von ihnen. Man hat daher weiter den Satz:

V. Die Bewegung eines unveränderlichen Systems ist äquivalent dem Gleiten und Rollen einer bestimmten geradlinigen Fläche (Γ) des beweglichen Systems auf einer bestimmten geradlinigen Fläche (C) des absoluten Raumes.

Sind die beiden Flächen Kegelflächen mit gemeinsamem Mittelpunkt, so ist das Gleiten ausgeschlossen und reducirt sich die Bewegung der Flächen auf das blosse Rollen der einen auf der andern; die Bewegung ist die in Cap. IV. behandelte Rotation des Systems um einen Punkt. — Sind die Flächen Cylinderflächen, welche nicht aufeinander gleiten, sondern blos rollen, so ist die Bewegung die in Cap. III. behandelte Bewegung eines Systems parallel einer Ebene.

Es sei A ein beliebiger Punkt des Systems, welcher durch die Schraubenbewegung um die Axe C' aus der Lage A' in die nächstfolgende unendlich nahe Lage A'' gelangt; man ersetze die in der Schraubenbewegung enthaltene Rotation durch die gleiche Rotation um die durch A gehende, zu C' parallele Axe c' und füge die zu dieser senkrechte Translation $A'A_,$ zu, so wird letztere mit der Translationscomponenten der Schraubenbewegung zusammen äquivalent der Translation $A'A''$ sein und mithin die Schraubenbewegung äquivalent sein einer Rotation von derselben Amplitude mit ihr um eine durch einen beliebigen Punkt A des Systems gehende, zu ihrer Axe parallele Axe und einer Translation gleich der Strecke, welche dieser Punkt beim Uebergang des Systems aus der ersten Lage in die zweite durchläuft. Wiederholt man diese Zerlegung der Schraubenbewegung bei den Axen C'', C'''. . ., so ergibt sich folgender Satz:

VI. Die Bewegung eines unveränderlichen Systems ist äquivalent der im Allgemeinen krummlinigen Translation, welche durch die Bahn eines beliebigen seiner Punkte angegeben wird in Verbindung mit einer continuirlichen Rotationsfolge um Axen, welche durch die aufeinanderfolgenden

Orte dieses Punktes parallel der Schraubenaxe gelegt werden.

Während der Bewegung fallen mit den Axen $c', c'', c''' \dots$ gewisse Linien $\gamma', \gamma'', \gamma''' \dots$ des Systems zusammen und da der Punkt A die Punktreihe $A', A'', A''' \dots$ welche auf dem geometrischen Orte der Axen $c', c'', c''' \dots$ liegt, durchläuft, so gehen alle diese Linien γ durch A hindurch und bilden im beweglichen System eine Kegelfläche, deren Erzeugungslinien nach und nach mit der Rotationsaxe zusammenfallen. Ziehen wir durch den Punkt A' ausser c' noch eine Schaar Gerader, resp. parallel $c'', c''', \dots$ so bilden diese einen zweiten Kegel, und wenn wir diesem die Translation $A'A''A''' \dots$ ertheilen, so gelangen wegen des Parallelismus diese Geraden nach und nach in die Lage von $c', c'', c''' \dots$; rollt daher der erste Kegel (γ) auf diesem zweiten (c), während dieser selbst die Translation erleidet, so gelangt das System nach und nach in alle seine Lagen. Daher:

VII. **Die Bewegung eines unveränderlichen Systems ist äquivalent dem Rollen eines dem System angehörigen Kegels auf einem andern gleichfalls beweglichen, aber nicht dem System angehörigen Kegel, welcher eine Translation besitzt, welche durch die Bahn des Mittelpunktes des ersteren Kegels bestimmt ist.**

§. 10. Jeder Lage des Systems entspricht eine bestimmte Gerade der Fläche (C), um welche dasselbe eine unendlich kleine Schraubenbewegung ausführt, um in die folgende unendlich nahe Lage zu gelangen. Diese Gerade heisst die **Momentanaxe** und die unendlich kleine Schraubenbewegung um sie die **Elementarbewegung** des Systems, entsprechend jener Lage desselben.

In Folge der Elementarbewegung beschreibt jeder Punkt des Systems ein Element seiner Bahn als Element einer gewissen gemeinen Cylinderschraube; ist daher die Momentanaxe und das Verhältniss der Elementaramplitude zur Elementartranslation, welche ihr zukommen, bekannt, so hat die Aufgabe, die Tangente und Normalebene der Bahn zu bestimmen, keine Schwierigkeit. Die Cylinderschraube hat übrigens mit der Bahn des Punktes blos ein Element gemein und berührt sie folglich blos in der ersten Ordnung; sie ist wesentlich verschieden von der Schmiegungsschraubenlinie, welche die Curve weit inniger berührt.

An diese Betrachtungen lässt sich die Behandlung einer Reihe von allgemeinen und speziellen Aufgaben anschliessen, in ähnlicher Weise, wie wir dies Cap. III. und IV. gethan haben. Die Bewegung des Systems ist bestimmt, sobald die Bewegung dreier Punkte desselben bestimmt ist. Man findet die Momentanaxe und die Elemente der Schraubenbewegung um sie, indem man die §. 7. III. (Fig. 32.) gegebene Construction für den Fall durchführt, dass die Sehnen $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ die unendlich kleinen

Bogenelemente der Bahnen der drei Punkte darstellen. Zunächst wird man durch einen beliebigen Punkt O des Raumes drei Gerade parallel den Tangenten dieser Bahnen ziehen und auf ihnen von O aus drei den Bogenelementen proportionale Längen im Sinne der Bewegung dieser Punkte auftragen; die Ebene, welche die Endpunkte derselben enthält, ist senkrecht zur Momentanaxe und ihre Normale folglich die Richtung dieser Axe. Hierauf wird man durch zwei der drei Punkte mit dieser Axenrichtung Parallelen legen und durch sie Ebenen führen normal zu den Ebenen, welche eine Parallele und die Tangente der Bahn des Punktes enthalten, durch welchen die Parallele gelegt ist; der Durchschnitt dieser Ebenen ist die Momentanaxe. Die Elementartranslation der Schraubenbewegung ist gleich der Projection eines der Bogenelemente auf die Richtung der Momentanaxe; die Elementaramplitude wird erhalten, indem man die Projection dieses Bogenelementes auf die zur Momentanaxe senkrechte Ebene durch den Abstand des Punktes von der Momentanaxe dividirt, dessen Bahn das Bogenelement angehört.

Die Bewegung des Systems und damit die Bewegung dreier seiner Punkte kann auf sehr mannigfache Art bestimmt sein; so z. B. dadurch, dass zwei Punkte genöthigt werden, bestimmte Curven zu beschreiben, während ein dritter eine bestimmte Fläche nicht verlassen darf; oder dadurch, dass ein Punkt eine Curve beschreiben und eine Fläche, die durch ihn hindurchgeht, zwei andere gegebene Flächen berühren soll; oder dadurch, dass eine Fläche des Systems drei gegebene Flächen fortwährend berühren soll, etc. Der letztere Fall ist sehr allgemein, indem die bewegliche Fläche sich in drei andere spalten kann, von denen einzelne in Punkte degeneriren können.

Die individuelle Natur der Bewegung des Systems wird durch die beiden geradlinigen Flächen (C), (Γ) bestimmt, von denen die letztere auf der ersteren rollt und gleitet. So viele derartige Flächenpaare denkbar sind, so viele verschiedene Bewegungsarten des Systems sind möglich. Darunter gibt es jedoch Fälle von einer gewissen Unbestimmtheit. Denn nicht immer sind die Elemente der Schraubenbewegung, Translation und Amplitude, durch die Beschaffenheit der Flächen bestimmt und es können z. B. zwei Cylinder auf mannigfache Weise aufeinander rollen und gleiten.

Die Bewegungsarten des Systems lassen sich eintheilen nach dem Gesichtspunkte, dass die Flächen (C), (Γ) beide windschief, oder beide abwickelbar sind oder die eine von ihnen windschief, während die andere abwickelbar ist. Die Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, wenn der eine oder der andere dieser Fälle eintreten soll, sind bekannt und von **Resal** in seinem Traité de Cinématique pure. Paris 1862, ausführlicher behandelt.

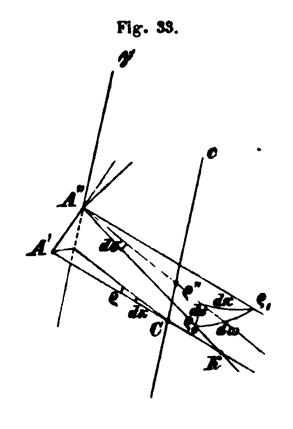
§. 11. Als ein interessantes Beispiel zu den Lehren dieses Capitels

wollen wir die **Schmiegungsschraubenlinie der Curven doppelter Krümmung** bestimmen.*) Ein unveränderliches System Σ bewege sich so, dass ein Punkt A desselben eine gegebene Curve doppelter Krümmung beschreibt, eine durch A hindurchgehende Gerade t des Systems fortwährend Tangente dieser Curve und eine durch t gehende Ebene ε fortwährend Schmiegungsebene derselben bleibt. Die zu t in ε senkrechte durch A gehende Gerade ϱ bleibt dann immer Hauptnormale und die zu ε normale gleichfalls durch A gezogene Gerade n die Binormale der Curve. Die drei zu einander rechtwinkligen Geraden t, ϱ, n charakterisiren das bewegliche System hinreichend und um die Bewegung desselben mit den im vorigen §. angegebenen Bestimmungsweisen der Bewegung in Einklang zu bringen, genügt es, sich auf t irgend einen Punkt B und auf ϱ einen andern Punkt C des Systems zu denken; von den drei Punkten A, B, C ist alsdann der erste genöthigt, die gegebene Curve zu beschreiben, während der zweite auf deren Tangentenfläche und der dritte auf deren Fläche der Hauptnormalen oder Krümmungshalbmesser bleiben muss. Der Uebergang des Systems Σ aus einer Lage Σ', in welcher A, t, ϱ, n die Lagen A', t', ϱ', n' haben, in eine andere unendlich nahe Lage Σ'', in welcher diese Elemente sich in A'', t'', ϱ'', n'' befinden, erfolgt durch eine Elementarschraubenbewegung, um die Bestimmung deren Axe, Elementartranslation und Elementaramplitude es sich hier handelt. Die Bewegung des Systems ist nun zunächst äquivalent der Translation $A'A''$, welche das Bogenelement ds der Curve darstellt, und einer Rotation um eine durch A'' gehende Axe γ. Da nach Ausführung der Translation die Punkte der Tangente t durch die Rotation in die Punkte der Tangente t'' gelangen müssen, so folgt, dass die Rotationsaxe in der zur Schmiegungsebene $(t't'')$ normalen Halbirungsebene des Contingenzwinkels $d\omega$ liegen muss; da ferner durch dieselbe Rotation die Gerade ϱ aus der Lage ϱ_1, in welche sie durch die Translation gelangt ist, in die Lage von ϱ'' übergeführt werden soll, so muss die Rotationsaxe in einer Ebene liegen, welche den Winkel $\varrho_1 \varrho''$ halbirt und zu dessen Ebene senkrecht ist. Die Schnittlinie beider Halbirungsebenen ist folglich die Rotationsaxe selbst. Da $d\omega$ unendlich klein ist, so fällt die erste Halbirungsebene mit der Ebene $(t'n')$, der sogenannten rectificirenden Ebene der Curve im Punkte A' zusammen und ist folglich die Rotationsaxe senkrecht zu ϱ' und da die zweite Halbirungsebene senkrecht zur Ebene $(\varrho_1 \varrho'')$ oder also senkrecht zu der Ebene ist, welche mit

*) Vgl. meine Schrift: Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung, in rein geometrischer Darstellung. Leipz., B. G. Teubner, 1859. S. 82, sowie S. 21 u. 61. — In neuester Zeit gab **Chelini** in Battaglini's Giornale di Matematica. T. V. (1867). p. 96 eine Entwickelung der Schraubenbewegung der Curven doppelter Krümmung in der im Texte befolgten Anordnung.

ϱ', ϱ'' parallel läuft, so ist die Rotationsaxe als Schnittlinie beider Halbirungsebenen senkrecht zu ϱ' und ϱ''. Sie hat daher die Richtung des kürzesten Abstandes der beiden Hauptnormalen ϱ', ϱ'' und fällt mit der sogenannten rectificirenden Geraden der Curve im Punkte A' zusammen, wenn wir sie, was wegen der Vertauschbarkeit der Folge von Translation und Rotation erlaubt ist, durch A' statt durch A'' ziehen. Die Grösse der Translation der gesuchten Schraubenbewegung ist die Projection von ds auf die Richtung der Schraubenaxe, folglich der kürzeste Abstand de von ϱ' und ϱ'', die Amplitude derselben ist der Winkel dk, welchen ϱ', ϱ'' oder ϱ_1, ϱ'' mit einander bilden (Winkel der ganzen Krümmung). Ist $(\gamma t')$ der Winkel, den die Rotationsaxe mit der Tangente t' bildet, so wird die Translationscomponente parallel γ, $dc = ds \cdot \cos(\gamma t')$ und die zu dieser Axe senkrechte Componente $ds \cdot \sin \gamma t'$, daher ist der Abstand p der Schraubenaxe (auf ϱ' gemessen) von A' gleich $\frac{ds \cdot \sin \gamma t'}{(\varrho' \varrho'')}$ und bezeichnet der Endpunkt dieser Strecke den Fusspunkt des kürzesten Abstandes der Geraden ϱ', ϱ'' auf ϱ'. Um diese Formeln zu entwickeln, suchen wir die Winkel $(\gamma t')$ und $(\varrho' \varrho'')$. Fig. 33 stellt ϱ' und ϱ'' in den beiden aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen, sowie ϱ_1 (parallel ϱ'), nebst der Projection ϱ_2 von ϱ'' auf die erste Schmiegungsebene dar. Die von den drei Kanten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho''$ gebildete Ecke A'' ist an ϱ_2 rechtwinklig, ebenso das gleichnamige sphärische Dreieck, welches wir erhalten, indem wir um A' mit der Einheit als Radius eine Kugelfläche beschreiben. In diesem letzteren misst der Bogen $\varrho_1 \varrho_2$ den Contingenzwinkel $d\omega$, weil ϱ_1 und ϱ_2 in der ersten Schmiegungsebene normal zu den Tangenten in A' und A'' sind, $\varrho' \varrho_2$ den Winkel $d\sigma$ der beiden Schmiegungsebenen, weil die Ebene desselben normal ist zu der Schnittlinie beider, nämlich der Tangente in A'' und ϱ, ϱ'' den Winkel dk der beiden Hauptnormalen ϱ', ϱ'', da ϱ_1 pararallel ϱ' ist. Dies unendlich kleine rechtwinklige Dreieck ist als eben anzusehen und in demselben ist also $dk^2 = d\omega^2 + d\sigma^2$, oder wenn man diese Gleichung mit ds^2 dividirt und die drei Längen $\frac{ds}{d\omega} = \varrho$, $\frac{ds}{d\sigma} = r$, $\frac{ds}{dk} = R$ einführt, nämlich den Krümmungsradius, Schmiegungsradius und Radius der ganzen Krümmung:

Fig. 33.



$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}.$$

Auf den drei Ebenen der Ecke stehen senkrecht: die Tangente t''

(oder t', was wegen des unendlichkleinen Winkels $d\omega$ keinen Unterschied macht) auf der Ebene von $d\sigma$, die Binormale auf der des Winkels $d\omega$ und die Rotationsaxe oder rectificirende Gerade auf der Ebene von dk. Daher sind die Winkel des sphärischen Dreiecks bei ϱ'' und ϱ_1 gleich $(\gamma t')$ und $(n' t') = \frac{\pi}{2} - (\gamma t')$; mithin erhält man

$$\cos(\gamma t') = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{R}{r}, \quad \sin(\gamma t') = \frac{d\omega}{dk} = \frac{R}{\varrho}$$

und hiermit wird

$$de = ds \cdot \cos(\gamma t') = \frac{d\sigma}{dk} ds = \frac{R}{r} \cdot ds$$

und

$$p = \frac{d\omega}{dk} \cdot \frac{ds}{dk} = \frac{R^2}{\varrho}.$$

Theilt man demnach den Krümmungshalbmesser $A'K = \varrho$ in C so, dass $A'C \cdot A'K = R^2$ wird und zieht durch C eine Gerade parallel der rectificirenden Ebene $(t'n')$, welche mit der Richtung der Tangente t' einen Winkel bildet, dessen Cosinus $\frac{R}{r}$ ist, so ist sie die gesuchte Schraubenaxe c, um welche das System $(t\varrho n)$ sich bewegen muss, um aus der Lage $(t'\varrho' n')$ in die Lage $(t''\varrho'' n'')$ zu gelangen. Die Translation der hierzu nöthigen Elementarschraubenbewegung ist de und die Amplitude dk.

Man kann die Schraubenbewegung auf mannigfache Art in zwei Rotationen um conjugirte Axen auflösen; nimmt man zu der einen von diesen die Tangente, so wird die andere die Krümmungsaxe (die Normale zur Schmiegungsebene im Krümmungsmittelpunkte); sie sind ein Paar rechtwinklig conjugirte Axen. Durch die Rotation um die Krümmungsaxe von der Amplitude gleich dem Contingenzwinkel $d\omega$ gelangt A von A' nach A'' und ϱ' nach ϱ_1, t nach t' in der Schmiegungsebene, durch die Rotation um die Tangente von der Amplitude gleich dem Schmiegungswinkel $d\sigma$ rückt ϱ aus der Lage ϱ_1 in die definitive Lage ϱ''.

In Folge der Schraubenbewegung beschreibt der Punkt A das Bogen element $A'A''$ als Element einer gemeinen Cylinderschraube, deren Axe c ist; der Basisradius des zugehörigen Cylinders ist p. Da die Axe c parallel der rectificirenden Geraden γ ist, so ist diese Gerade eine Erzeugungslinie des Cylinders und da sie in der zur Schmiegungsebene senkrechten rectificirenden Ebene $(t'n')$ liegt, so besitzen die beiden Tangenten t', t' gleiche Neigung gegen sie. Daher hat die erwähnte Cylinderschraube mit der gegebenen Curve zwei Tangenten gemein und berührt sie folglich dreipunktig; in Folge dessen hat sie auch mit ihr gemeinschaftlichen Krümmungskreis. Da beide Curven aber auch die rectificirende Gerade gemein haben, so fallen nicht nur ihre ersten, sondern auch noch die folgenden Schmiegungsebenen zusammen und haben beide

Curven auch gleiche Schmiegungsradien und Radien der ganzen Krümmung. Die Berührung der Curven ist also eine dreipunktige besonders inniger Art, aber noch keine vierpunktige, die dritten Tangenten fallen zwar in dieselbe Schmiegungsebene, aber nicht in dieselbe Gerade. Die hier construirte Schraubenlinie heisst die Schmiegungsschraube der Curve im Punkte A'. Im Allgemeinen berühren die Schraubenlinien, deren Elemente die Punkte eines Systems während der Elementarschraubenbewegung durchlaufen, die Bahnen der Punkte nur zweipunktig, die spezielle Art der Bewegung unseres Systems, derart, dass nicht nur der Punkt A die Curve beschreiben sollte, sondern auch noch die Geraden t, ϱ, n mit den Krümmungselementen der Curve in einer intimeren Beziehung zu bleiben genöthigt wurden, führte eine innigere Berührung herbei.

Zum Schlusse dieses Capitels und des hauptsächlichsten Theiles der Lehre von der Bewegung unveränderlicher Systeme fügen wir noch einige Bemerkungen über die Bewegung einer gewissen Gattung veränderlicher Systeme hinzu. Die Geometrie kennt eine Verwandtschaft zweier Systeme, welche die Collineation oder die projectivische Verwandtschaft heisst und dadurch definirt ist, dass, wenn in dem einen Systeme Punkte in gerader Linie liegen, ihre homologen Punkte im andern System gleichfalls in einer Geraden liegen, wenn auch in andern Abständen von einander. Hieraus folgt, dass einer Ebene eine Ebene, allen Ebenen, welche durch einen Punkt oder eine Gerade gehen, wieder Ebenen homolog sind, welche durch den homologen Punkt oder die homologe Gerade gehen. Congruente und ähnliche Systeme sind spezielle Fälle dieser allgemein projectivischen Systeme. Nun können zu einem System unzählig viele andere, ihm projectivische construirt werden, und wenn man sich eine solche Schaar continuirlich aufeinanderfolgend denkt, so sieht man ein, dass es möglich ist, dass ein veränderliches System sich so bewege, dass es nach und nach mit allen zusammenfällt und sich also selbst immer projectivisch bleibt. Derartige Bewegungen eines veränderlichen Systems gibt es unzählig viele, denn es ist durch die bisher gemachten Annahmen weder die Art der Veränderlichkeit vollkommen, noch die Art der Aufeinanderfolge der Lagen des beweglichen Systems überhaupt bestimmt. Es kann leicht gezeigt werden, dass zwei projectivische Systeme durch 5 Paar homologe Punkte bestimmt sind, so dass, wenn diese gegeben sind, man im Stande ist, zu jedem beliebigen sechsten Punkte des einen den homologen des anderen zu finden. Hieraus folgt, dass, wenn zwei solche Systeme eine beliebige gegenseitige Lage im Raume haben, sie höchstens 4 Doppelpunkte besitzen können, ohne vollständig zusammenzufallen. Die vier Doppelpunkte

bestimmen vier Doppelebenen, welche durch sie hindurchgehen und sechs Doppellinien, welche sie paarweise verbinden. In jeder dieser Doppelebenen liegen also im Allgemeinen drei Doppelpunkte und drei Doppellinien, in deren jeder Doppellinie zwei Doppelpunkte, aber nicht mehr. Wenn daher ein System sich so bewegt, dass es während der Bewegung sich selbst projectivisch bleibt, so ist diese Bewegung durch folgende Eigenschaften ausgezeichnet:

1. In jedem Momente der Bewegung ruhen vier bestimmte Punkte des Systems, während die übrigen rings herum liegenden sich bewegen. Diese vier Punkte wechseln mit jeder andern Lage des Systems und erzeugen vier Curven im absoluten Raum, welche die geometrischen Orte dieser Ruhepunkte sind, sodass in jedem Moment die Bewegung von vier Systempunkten, welche in diese Curven eintreten, für einen Augenblick erlischt.

2. In jedem Momente ruhen 6 Gerade des Systems, sodass deren Punkte blos in diesen Geraden sich bewegen; jede Gerade enthält zwei der vorgenannten vier Ruhepunkte.

3. In jedem Momente ruhen vier Ebenen des Systems, sodass deren Punkte und Geraden blos in ihnen sich bewegen; jede Ebene enthält drei der ruhenden Linien und drei Ruhepunkte.

Die angegebene Zahl der Ruhepunkte, Ruhelinien und Ruheebenen ist blos das Maximum, sie kann geringer sein; dann werden, wie man sagt, einige von ihnen imaginär.

Man kann zeigen, dass für die Bewegung eines Systems, welches während seiner Bewegung sich ähnlich bleibt, von den vier Ruhepunkten nur zwei vorhanden sind, von denen der eine in endlicher Entfernung, der andere aber im Unendlichen liegt, dass mithin von den 6 Ruhelinien nur eine einzige, nämlich die Verbinduugslinie der beiden Ruhepunkte, und von den vier Rnheebenen nur zwei, nämlich die unendlich ferne Ebene und die zu der einzigen Ruhelinie im endlich entfernten Ruhepunkte senkrechte Ebene. Hienach besteht die Bewegung eines veränderlichen sich ähnlich bleibenden Systems in einer Rotation um eine Axe und einer gleichzeitigen Bewegung der Systempunkte in der Richtung nach einem bestimmten Punkte hin oder von ihm weg und zwar so, dass das Abstandsverhältniss von ihm für alle dasselbe bleibt.

Soll das System während seiner Bewegung sich selbst congruent bleiben, so geht es in ein unveränderliches über. Für die congruenten Systeme entfernt sich der letzte, in endlicher Entfernung liegende Ruhepunkt der ähnlichen Systeme gleichfalls ins Unendliche, während die Ruhelinie bleibt, in ihr aber zwei homologe Grade liegen, welche erst durch Verschiebung sich decken können. In der Ruhelinie finden wir die Axe und in der Verschiebung die Translation der Schraubenbewegung des unveränderlichen Systems wieder. Hiemit ist die zu Anfang des Cap. I ausgesprochene Behauptung gerechtfertigt, dass die

neuere synthetische Geometrie die Mittel besitze, um die Schraubenbewegung unmittelbar nachzuweisen.

Die erste Idee zum Verständniss der Bewegung eines Systems, welches sich ähnlich bleibt, hat wohl Chasles gehabt, wenigstens kann man dies nach der früher citirten Abhandlung im Bulletin von Férussac, welche die Entdeckung der Schraubenbewegung enthält, vermuthen. In neuester Zeit erschienen zwei Abhandlungen über eine spezielle hierher gehörige Aufgabe, nämlich über die Bewegung eines ebenen, sich ähnlich bleibenden Systems in seiner Ebene, wenn drei Gerade des Systems durch drei feste Punkte gehen, die eine von Durand (Nouvelles Annales de Mathém. p. Terquem et Gerono 2ième Serie, T. VI. p. 80), in welcher der von Petersen in demselben Journal aufgestellte Satz, dass bei dieser Bewegung jede beliebige vierte Gerade gleichfalls durch einen festen Punkt geht, bewiesen wird, die andere von Wiener (Annali die matematica pura ed applicata p. Cremona, Seria II, T. I, p. 139), welche den Petersen'schen Satz gleichfalls beweist, an diesen Beweis aber weitergehende Consequenzen anknüpft.

VI. Capitel.

Die relative Bewegung eines unveränderlichen Systems.

§. 1. Ein unveränderliches Systems sei in Bewegung und sei der geometrische Vorgang derselben bekannt; ein Punkt, welcher von dem System unabhängig ist, bewege sich gleichfalls und sei seine Bewegung ebenfalls bekannt; endlich sei auch noch eine Beziehung zwischen beiden Bewegungen gegeben, vermöge welcher zu jeder Lage des Punktes die zugehörige Lage des Systems und umgekehrt unzweideutig gefunden werden kann. Eine solche Beziehung wird am einfachsten dadurch begründet, dass man die Lagen des Punktes und des Systems von ein und derselben Grundvariablen abhängig macht. Während nun Punkt und System sich bewegen, trifft der Punkt mit immer andern Punkten des Systems zusammen, sodass er im System eine bestimmte Punktreihe durchwandert oder also im System eine bestimmte Bahn beschreibt. Diese Bewegung des Punktes im System, d. i. also seine Ortsveränderung im System, heisst seine relative Bewegung und die Bahn, welche er in ihm beschreibt, nämlich die continuirliche Folge der Systempunkte, mit welchen er während seiner Bewegung zusammentrifft, seine relative Bahn in Bezug auf das System. Dieser relativen Bewegung gegenüber heisst die Ortsveränderung des Punktes im absoluten Raume seine absolute Bewegung und seine Bahn in diesem seine absolute Bahn.

Bewegen sich zwei Systeme zugleich, so nimmt jedes im andern successive andere und andere Lagen an und beschreibt also jeder Punkt des einen im andern eine relative Bahn. Die Ortsveränderung des einen Systems im andern heisst seine relative Bewegung in Bezug auf dieses. Es hat also jedes von ihnen eine relative Bewegung in Bezug auf das andere.

Bewegen sich drei Systeme zugleich, so hat jedes in Bezug auf jedes andere eine relative Bewegung; da aber die beiden andern selbst in Bezug auf einander relative Bewegungen besitzen, so kann eine solche relative Bewegung mehrmals mit der Bewegung der ersten der drei Systeme in Verbindung gebracht werden. Insofern könnte man von relativen Bewegungen verschiedener Ordnungen sprechen: das bekannte Beispiel vom Passagier, welcher sich auf dem Schiffe bewegt, während dieses den Strom hinabfährt und dieser an der Bewegung der Erde Theil nimmt, genügt dies zu erläutern.

Die Aufgaben, welche der Geometrie der Bewegung hinsichtlich der relativen Bewegung eines Punktes zufallen, sind folgende:

1. Wenn gegeben ist die absolute Bahn des Punktes, die Bewegung des Systems und eine Beziehung, vermöge welcher zu jeder Lage des Punktes die ihr entsprechende Lage des Systems gefunden werden kann, die den absoluten Orten des Punktes entsprechenden relativen Orte desselben im System, also auch seine relative Bahn in diesem zu bestimmen.

2. Wenn gegeben ist die relative Bahn des Punktes im System, die Bewegung des Systems und eine Beziehung, durch welche zu jeder relativen Lage des Punktes auf der relativen Bahn die entsprechende Lage des Systems gefunden werden kann, die entsprechenden absoluten Orte, also auch die absolute Bahn des Punktes zu bestimmen.

3. Wenn gegeben ist die absolute Bahn des Punktes, seine relative Bahn und eine Beziehung, welche die entsprechenden absoluten und relativen Orte bestimmt, sowie ein bewegliches System, welchem die relative Bahn angehört, die jenen Orten entsprechenden Lagen des Systems oder die Bewegung des Systems zu finden (unbestimmte Aufgabe).

Aehnliche Aufgaben lassen sich für die relative Bewegung zweier Systeme aufstellen, wobei aber jede derselben in doppeltem Sinne gelöst werden kann, nämlich einmal für das eine, das anderemal für das andere System. Sie lauten:

1. Wenn gegeben sind die absoluten Bewegungen zweier Systeme (durch die Elementarschraubenbewegungen für alle Lagen oder die Flächen (C) und (Γ)), die relative Bewegung des einen in Bezug auf das andere, d. h. die Elemente der relativen Schraubenbewegung oder die relativen Flächenpaare (C), (Γ) zu bestimmen, vorausgesetzt, dass eine

Relation bekannt ist, vermöge welcher die sich entsprechenden Bewegungszustände beider Systeme aufgefunden werden können.

2. Wenn die absolute Bewegung des einen Systems und die relative Bewegung des andern in Bezug auf dasselbe, sowie eine Relation gegeben ist, welche ermöglicht, die sich entsprechenden Zustände beider Bewegungen zu ermitteln, die absolute Bewegung des zweiten Systems zu bestimmen.

3. Wenn die absolute Bewegung eines ersten Systems, seine relative Bewegung in Bezug auf ein zweites und die das Entsprechen der Bewegungszustände vermittelnde Relation gegeben ist, die absolute Bewegung des zweiten Systems zu finden.

§. 2. Für die Behandlung dieser Aufgaben ist das folgende Princip von Wichtigkeit, welches die Bestimmung der relativen Bewegung eines Punkts oder Systems in Bezug auf ein gegebenes System auf die Bestimmung einer absoluten Bewegung zurückführt. Wir wollen dasselbe zunächst für die relative Bewegung eines Punktes erläutern. Das bewegliche System sei Σ, P der Punkt, um dessen relative Bewegung in Σ es sich handelt und falle P in einem bestimmten Momente mit dem Systempunkte p zusammen, d. h. habe die Lage p auf seiner relativen Bahn. Ertheilt man nun dem System ausser der vorhandenen noch eine weitere Elementarbewegung, so würde vermöge dieser allein der Systempunkt p sich von P entfernen, ertheilt man daher P dieselbe Bewegung, welche der mit ihm eben vereinigte Systempunkt p annimmt, so bleibt P mit p verbunden und entfernt sich von ihm blos in Folge seiner absoluten Bewegung. Daher der Satz:

Die relative Bewegung eines Punktes in Bezug auf ein bewegliches System wird nicht geändert, wenn man dem System noch irgend eine andere Bewegung, dem Punkte aber zugleich in jedem Momente diejenige Bewegung ertheilt, welche der in diesem Momente mit ihm zusammenfallende Symstempunkt vermöge der zugefügten Bewegung annimmt.

Wählt man zu der zuzufügenden Bewegung in jedem Momente diejenige, welche der vorhandenen Elementarbewegung des Systems entgegengesetzt ist, so gelangt das System zur Ruhe, während sich die absolute Bewegung des Punktes mit der ihm zu ertheilenden entgegengesetzten Bewegung des mit ihm zusammenfallenden Systempunktes zu der relativen Bewegung combinirt und ergibt sich daher weiter:

Die relative Bewegung eines Punktes in Bezug auf ein System ist in jedem Momente die Resultante aus der absoluten Bewegung desselben und derjenigen Bewegung, welche der Bewegung des mit dem Punkte in diesem Momente zusammenfallenden Systempunktes entgegengesetzt

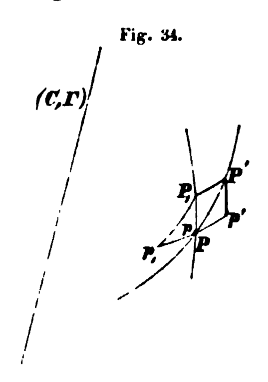
ist. Da das System hiebei ruht, so geschieht die Bestimmung der relativen Bewegung in demselben hiedurch, wie die einer absoluten und ist mithin dieser Satz das Mittel, um die Bestimmung der relativen Bewegung eines Punktes auf die einer absoluten zurückzuführen.

In gleicher Weise lassen sich diese Betrachtungen auf die relative Bewegung eines Systems in einem andern anwenden. Die relative Bewegung eines Systems in Bezug auf ein anderes System wird nicht geändert, wenn man beiden in jedem Momente ein und dieselbe Elementarbewegung (Elementarschraubenbewegung von derselben Translation und Rotation um dieselbe Axe) ertheilt.

Die relative Bewegung eines Systems in Bezug auf ein anderes System ist in jedem Momente die Resultante aus der absoluten Bewegung des ersteren und der entgegengesetzten Bewegung des zweiten, nämlich die aus diesen beiden Elementarschraubenbewegungen resultirende Elementarbewegung.

§. 3. Die Anwendung dieses Princips auf die Lösung der obigen Aufgaben über die relative Bewegung eines Punktes oder Systems ist leicht. Es sei für irgend eine Lage des Systems (C, Γ) (Fig. 35) die Momentanaxe und pp' das Element der Schraubenlinie, welches der mit dem Punkte P, dessen relative Bewegung zu bestimmen ist, zusammenfallende Systempunkt p beschreiben würde; kehrt man die Elementarbewegung des Systems um, so stelle pp_1 das dieser umgekehrten Bewegung entsprechende Schraubenelement desselben Punktes dar. Der Punkt P beschreibe nun das Element PP' seiner absoluten Bahn während der Elementarbewegung des Systems; die Diagonale PP_1 des unendlich kleinen Parallelogramms $PP'P_1p_1$ stellt alsdann das Element der relativen Bahn dar und P', P_1 sind die correspondirenden Orte des Punktes P am Ende der Elementarbewegung. Wiederholt man dieselbe Construction für die folgende Elementarbewegung des Systems, so ergibt sich ein weiteres Paar correspondirender Orte u. s. f. und können auf diese Weise beliebig viele Punkte der relativen Bahn bestimmt werden.

Fig. 34.



Soll andererseits aus der relativen Bewegung eines Punktes und der Bewegung des Systems die absolute Bewegung des Punktes gefunden werden, so folgt ebenso einfach, dass das Element der absoluten Bahn die Diagonale des unendlichkleinen Parallelogramms ist, dessen Seiten das Element der relativen Bahn und das Element sind, welches der mit dem Punkte, um dessen absolute Bewegung es sich handelt, zu-

sammenfallende Punkt vermöge der Elementarbewegung des Systems beschreibt.

Sind endlich die absolute und die relative Bahn gegeben und die correspondirenden Punkte P, p; P', P_1, so liefert das vorhin erwähnte Parallelogramm das Bahnelement pp' des Systempunktes p, welcher zu Anfang der Elementarbewegung des Systems mit P zusammenfältt; die Lage der Momentanaxe des Systems ist aber nicht vollständig bestimmt; ihre Richtung ist willkührlich wählbar, hat man diese angenommen und durch pp' eine Ebene parallel zu ihr gelegt, so ist die Lage der Axe auf eine Ebene beschränkt, welche durch p senkrecht zu jener Ebene geführt werden kann; die Elementaramplitude und Translation ergibt sich durch Zerlegung des Elementes pp'.

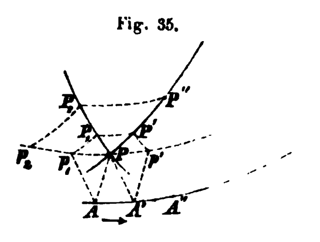
Befindet sich der Punkt P in absoluter Ruhe, so ist $PP' = 0$ und fällt das Element PP_1 der relativen Bahn mit dem Elemente pp_1 der Bahn des Systempunktes zusammen, welche dieser vermöge der umgekehrten Bewegung des Systems beschreiben würde; da dies von allen Elementen gilt, so folgt, dass die relative Bahn im System überhaupt mit der umgekehrten Bahn des Systempunktes übereinkommt.

Soll der Punkt P sich in relativer Ruhe befinden, so muss PP_1 verschwinden, folglich PP' mit pp' zusammenfallen, es muss P mithin an der Bewegung des Systems theilnehmen.

§. 4. Einige Beispiele sollen die vorstehenden Lehren erläutern.

1. Es sei $PP'P'' \ldots$ (Fig. 35) die absolute Bahn eines Punktes P, ein System Σ besitzt eine Translationsbewegung, vermöge welcher alle Punkte desselben Bahnen congruent und parallel $AA'A'' \ldots$, der Bahn eines Systempunkts A beschreiben; es seien ferner P, A; P', A'; P'', A''; ... correspondirende Lagen von P und A, die in beliebiger Menge aufgefunden werden können, die relativen correspondirenden Orte des Punktes P in Bezug auf das System oder also dessen relative Bahn im System zu bestimmen.

Fig. 35.

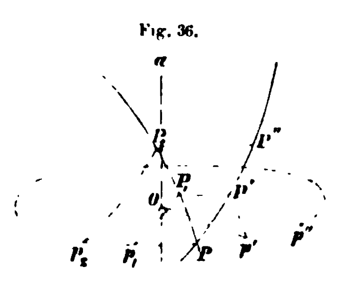


Zieht man AA', $A'P$ und mit diesen Geraden parallel Pp_1, Ap_1, so ist p_1 der Ort, an welchen der mit P zusammenfallende Systempunkt p vermöge der dem System zu ertheilenden entgegengesetzten Translationsbewegung gelangen würde, während P selbst auf der absoluten Bahn nach P' gelangt. Durch Vollendung des Parallelogramms $PP'P_1p_1$ ergibt sich daher der dem Punkt P' entsprechende relative Ort P_1. Die Construction ist gleich gut anwendbar für verschwindend kleine Abstände PP', pp_1, wie für endliche, also für die Elementarbewegungen so gut wie

für Bewegungen von endlichen Bahnstrecken, und da bei Translationen alle homologen Parthien der Figuren sich parallel bleiben, so kann man die Sehnen der Bogen oder die Bogen selbst zur Bildung der Parallelogramme verwenden. Ebenso gut hätte man auch die Parallelogramme $APp'A'$ und $Pp'P'P_1$ benutzen können; man hätte dann pp' als die Bahn des Systempunktes, welche dieser in Folge der direkten (nicht umgekehrten) Translation beschreibt und die absolute Bewegung aus der Bewegung des Systempunktes und der relativen Bewegung zusammengesetzt gedacht, während nach der vorigen Construction die relative Bewegung aus der absoluten und der entgegengesetzten Bewegung des Systempunktes als Resultante hervorgehend gedacht wird.

Man kann die Construction auf verschiedene Weise fortsetzen. Einmal kann man $AA''Pp_2$ und $pP''P_2p_2$ bilden und erhält mit Hülfe der Lage p_2 des Punkts p, welche der umgekehrten Translation AA'' entspricht, den Punkt P_2 der relativen Bahn, welcher durch die direkte Translation mit P'' zusammengeführt wird; oder man führt die Construction für den mit P' zusammenfallenden Systempunkt P_1 unter Zugrundelegung der Translation $A'A''$ aus, muss alsdann aber den gewonnenen relativen Ort in die ursprüngliche Lage des Systems zurückversetzen, da die Construction annimmt, dass das System bereits die Translation AA' ausgeführt habe und P_1 sich in P' befinde.

Ist der Punkt P in absoluter Ruhe, so reducirt sich die absolute Bahn $PP'P''$ ... auf diesen Punkt und fällt die relative Bahn PP_1P_2 ... mit der entgegengesetzten Translationsbahn pp_1p_2 ..., zusammen und ist der direkten Translationsbahn $pp'p''$... symmetrisch gleich in symmetrischer Lage. Ein passendes Spezialbeispiel hiezu bietet die jährliche Bewegung der Erde dar. Wenn dieselbe keine Axendrehung besässe, so wäre sie ein in Translation begriffenes System und die Translationsbahn wäre die Ellipse, welche ihr Mittelpunkt um den Sonnenmittelpunkt als Brennpunkt im Laufe des Jahres beschreibt. Wird nun der Sonnenmittelpunkt als in absoluter Ruhe befindlich angenommen, so ist dessen relative Bahn in Bezug auf die Erde eine symmetrisch gleiche und symmetrisch liegende Ellipse, welche vom Sonnenmittelpunkte um den Erdmittelpunkt als Brennpunkt im umgekehrten Sinne der Bewegung der Erde beschrieben wird.


Fig. 36.

2. Es sei $PP'P''$ ... (Fig. 36) die absolute Bahn eines Punktes P, ein System Σ besitze eine Rotation um die Axe a, vermöge welcher die Systempunkte Kreisbogen senkrecht zur Axe beschreiben

und seien $0, pOp', pOp'', \ldots$ die Amplituden der Rotation, welche den absoluten Lagen $P, P', P'' \ldots$ entsprechen, man soll die relativen Orte des Punktes P, also dessen relative Bahn im System bestimmen.

Construirt man die Orte $p, p_1, p_2 \ldots$, welche der mit P zusammenfallende Systempunkt p in Folge der entgegengesetzten Rotation einnimmt, so liefern die krummlinigen Parallelogramme $PP'P_1p_1$, $PP''P_2p_2, \ldots$ die relativen Orte $P_1, P_2 \ldots$ und damit beliebig viele Punkte der relativen Bahn.

Ist der Punkt P in absoluter Ruhe, so reducirt sich die absolute Bahn auf den Punkt P und fällt die relative Bahn mit der entgegengesetzten Rotationsbahn des mit p zusammenfallenden Systempunktes zusammen. Ein Beispiel hiezu bietet die tägliche Bewegung der Erde dar. Würde die Erde im Raume nicht fortschreiten, so wäre sie ein System, welches blos eine Rotation um ihre Axe besitzt. Wird nun der Sonnenmittelpunkt als absolut ruhend angesehen, so ist seine relative Bahn in Bezug auf das System ein Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Erdaxe ist, und im umgekehrten Sinn der Erdrotation beschrieben wird (scheinbare Bewegung der Sonne um die Erde).

Als weiteres passendes Uebungsbeispiel dürfte die graphische Behandlung der Aufgabe dienen: „Ein Punkt beschreibt als absolute Bahn eine Gerade, senkrecht zur Axe eines rotirenden Systems, die veränderliche Amplitude ϑ der Rotation und der veränderliche Abstand s des beweglichen Punktes von einem festen Punkte A seiner absoluten Bahn bleiben sich fortwährend proportional, sodass die Gleichung besteht $s = a\vartheta$; man soll die relative Bahn des Punktes im rotirenden System finden.“

3. Besitzt das System, in Bezug auf welches die relative Bewegung eines Punktes ermittelt werden soll, eine Schraubenbewegung um eine feste Axe, so führt eine Combination der Lösung der beiden vorigen Aufgaben zum Ziele, indem man die Schraubenbewegung in die Translations- und Rotationscomponente auflöst.

Bewegt sich das System einer Ebene parallel oder dreht es sich um einen Punkt oder besitzt es die allgemeinste Art der Bewegung, so reichen auch hierfür die erläuterten Principien für die Bestimmung der relativen Bewegung aus.

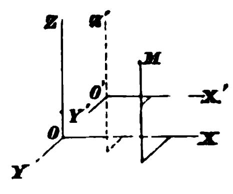
§. 5. In Bezug auf die relative Bewegung eines Systems Σ' in einem andern System Σ'' zu bestimmen, ist die Aufgabe zu lösen, für jedes Paar correspondirender Lagen der Systeme aus ihren absoluten Elementarbewegungen (Translationen und Rotationen um die absoluten Momentanaxen) die Momentanaxe, sowie deren Translation und Rotation um sie für die relative Bewegung zu finden. Indem man dem System Σ' zu seiner absoluten Bewegung noch die entgegengesetzte Bewegung

um die Momentanaxe von Σ' ertheilt und beide Bewegungen zu der aus ihnen entspringenden Schraubenbewegung zusammensetzt, gelangt man zur Kenntniss der gesuchten Elemente der relativen Bewegung. Das System Σ'' verhält sich dabei für jeden Moment wie ein ruhendes und ergibt sich in ihm eine geradlinige Fläche (C''), auf welcher eine gewisse geradlinige Fläche (Γ') rollt und gleitet, um dem System Σ' die relative Bewegung zu ertheilen. Die erstere Fläche ist der Ort der relativen Momentanaxen im System Σ'', die zweite der Ort der Geraden von Σ', welche durch die relative Bewegung mit den Momentanaxen zusammentreten.

§. 6. Für die analytische Behandlung kommt das Problem der relativen Bewegung eines Punktes auf das Problem der Coordinatentransformation zurück. Man denkt sich nämlich zwei Coordinatensysteme, von denen das eine dem absoluten Raume, das andere dem beweglichen Systeme angehört. Die Coordinaten eines beweglichen Punktes in Bezug auf das erste geben seinen Ort im absoluten Raume an und heissen seine absoluten Coordinaten, die Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf das andere bestimmen seinen Ort im beweglichen Systeme und sind seine relativen Coordinaten. Die Art und Weise, wie diese Coordinaten sich ändern, bestimmt die Bewegung der einen oder der andern Art. Die absoluten Coordinaten des Punktes seien x, y, z; die relativen derselben x', y', z'; die Bewegung des Systems werde durch die Bewegung des Ursprungs der relativen Coordinaten und der Axen des relativen Coordinatensystems bestimmt. Da letztere in verschiedenen Fällen einfacher, in anderen complicirter ist, so behandeln wir dieselben der Reihe nach.

1. Das bewegliche System besitze blos eine Translation (Fig. 37); hiebei bewegen sich die Axen der x', y', z' parallel mit sich; wir nehmen der Einfachheit wegen die Axen beider Coordinaten als mit einander resp. parallel an. Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des beweglichen Ursprungs, so hängen sie mit den 6 übrigen durch die Gleichungen zusammen: $x_1 + x' - x = 0$, $y_1 + y' - y = 0$, $z_1 + z' - z = 0$, welche man findet, indem man den Umfang des Dreiecks, gebildet von den Anfangspunkten der beiden Coordinatensysteme und dem Punkte $(x\,y\,z)$, auf die absoluten oder auf die relativen Axen projicirt, gleich Null setzt. Die relativen Coordinaten sind daher:

Fig. 37.

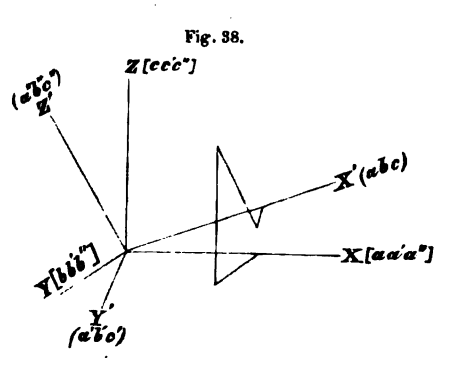


$$x' = x - x_1$$
$$y' = y - y_1$$
$$z' = z - z_1;$$

sind also die absoluten und die Coordinaten des relativen Ursprungs als

Functionen irgend einer Grösse gegeben, so erhält man hiedurch die relativen Coordinaten als Functionen derselben Grösse.

2. Das bewegliche System besitze blos eine Bewegung um einen festen Punkt (Fig. 38.). Wir nehmen denselben zum Ursprung der absoluten und der relativen Coordinaten $x, y, z; x', y', z'$ und bestimmen die Lage der x'-Axe gegen die festen Axen der x, y, z durch die Winkel, welche sie mit ihnen bildet und deren Cosinusse a, b, c seien, ebenso die Lage der y'-Axe gegen dieselben durch ihre Neigungswinkel, deren Cosinusse a', b', c' und ähnlich die Lage der z'-Axe durch die Winkel, deren Cosinusse a'', b'', c'' sind. Die neun Grössen $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ hängen von der Bewegung des Systems ab und sind unter sich durch 6 unabhängige Relationen verbunden, vermöge welcher sie auf drei reducirbar sind. Projicirt man unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten den Linienzug der Coordinaten x', y', z' und zurück nach dem Ursprung auf die absoluten Axen, und andererseits den Linienzug der x, y, z und zurück zum Ursprung auf die relativen Axen, so erhält man:



$$x = ax' + a'y' + a''z' \qquad x' = ax + by + cz$$
$$y = bx' + b'y' + b''z' \qquad y' = a'x + b'y + c'z$$
$$z = cx' + c'y' + c''z' \qquad z' = a''x + b''y + c''z$$

wobei die Relationen bestehen:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \qquad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \qquad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$$

$$aa' + bb' + cc' = 0 \qquad ab + a'b' + a''b'' = 0$$
$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \qquad bc + b'c' + b''c'' = 0$$
$$a''a + b''b + c''c = 0 \qquad ca + c'a' + c''a'' = 0,$$

von denen jedesmal die drei ersten ausdrücken, dass $a, b, c \ldots$ Richtungscosinus einer Geraden sind, während die drei letzten die Rechtwinkligkeit der Axe darstellen.

3. Besitzt das bewegliche System die allgemeinste Bewegung, so genügt eine Combination der beiden vorigen Fälle, um die relative Bewegung zu bestimmen. Denkt man sich nämlich durch den Ursprung der beweglichen Axen drei Hülfsaxen der ξ, η, ζ, welche während der Bewegung der festen Axen fortwährend parallel bleiben, so hat man, wie bei 2.:

$$x' = a\xi + b\eta + c\zeta \qquad\qquad \xi = x - x_1$$
$$y' = a'\xi + b'\eta + c'\zeta \quad \text{und zugleich:} \quad \eta = y - y_1$$
$$z' = a''\xi + b''\eta + c''\zeta \qquad\qquad \zeta = z - z_1,$$

mithin aus diesen Gleichungen zusammen:

$$x' = a\,(x - x_1) + b\,(y - y_1) + c\,(z - z_1)$$
$$y' = a'\,(x - x_1) + b'\,(y - y_1) + c'\,(z - z_1)$$
$$z' = a''\,(x - x_1) + b''\,(y - y_1) + c''\,(z - z_1).$$

§. 7. Die Zerlegung der absoluten Bewegung eines Punktes in zwei oder mehrere andere (welche zum Theil als relative Bewegungen anzusehen sind) ist ein wirksames Mittel, um eine schwierige Untersuchung zu erleichtern oder wenigstens übersichtlicher zu machen. Der Gebrauch der Coordinatensysteme führt fast von selbst dazu; wir wollen einige der wichtigeren Fälle daher behandeln.

1. Ein Punkt beschreibt eine ebene Curve, bezogen auf ein Parallelcoordinatensystem der x, y; man kann seine Bewegung zerlegen in eine relative längs der Ordinate und die Translation der Ordinate (oder der ganzen beweglichen Ebene) parallel der Abscissenaxe oder umgekehrt in eine relative Bewegung parallel der Abscissenaxe und eine Translationsbewegung parallel der Ordinatenaxe. Die Projectionen des Punktes auf die Coordinatenaxen stellen diese Bewegungen dar.

2. Ein Punkt beschreibt eine ebene Curve; man bezieht dieselbe auf ein Polarcoordinatensystem. Die Bewegung zerfällt hier in eine relative Bewegung längs des Radiusvectors und eine Rotation der Ebene um den Pol.

3. Ein Punkt beschreibt eine Raumcurve; sie wird auf ein Parallelcoordinatensystem bezogen. Die Bewegung zerfällt in die Bewegungen der Projectionen des Punktes auf die Axen oder in die Bewegung seiner Projection auf eine Coordinatenebene und eine Translation parallel der Axe, welche nicht in diese hineinfällt.

4. Ein Punkt beschreibt eine Raumcurve; man bezieht dieselbe auf ein räumliches Polarcoordinatensystem mit Hülfe von Radiusvector, Winkel zwischen ihm und der Polaraxe und Winkel zwischen der Ebene des ebengenannten Winkels und der Fundamentalebene. Die Bewegung kann zerfällt werden in die Bewegung längs des Radiusvectors und eine sphärische Bewegung oder in eine Rotation um die Polaraxe und eine ebene Bewegung, von denen die sphärische und die ebene Componente noch weiter aufgelöst werden können.

5. Wenn ein Punkt eine Gerade beschreibt, diese Gerade sich in einer Ebene bewegt, sodass sie sich in einem jeden Momente um den Punkt umdreht und die Ebene sich im Raume so bewegt, dass sie jeden Moment um diese bewegliche Gerade rotirt, so ist die absolute Bahn des Punktes eine Raumcurve, deren Tangente die Gerade (weil sie durch

je zwei aufeinanderfolgende Lagen des Punktes geht) und dessen Schmiegungsebene jene Ebene ist (weil sie durch je zwei aufeinanderfolgende Lagen der Geraden geht). Umgekehrt kann man die Bewegung eines Punktes zerlegen in die Bewegung in der Schmiegungsebene und die Bewegung dieser Schmiegungsebene selbst; die Bewegung in der Schmiegungsebene zerfällt aber weiter in die Bewegung in der Tangente und die Bewegung der Tangente in dieser Ebene.

§. 8. Zwei unveränderliche Systeme, welche sich zugleich bewegen, werden, rein geometrisch aufgefasst, im Allgemeinen in einander eindringen, sodass Punkte und Theile des einen zwischen Theile des andern gelangen, über diese hinweggehen, etc. Von den vielen Möglichkeiten, welche in dieser Hinsicht stattfinden können, wollen wir hier blos die eine näher betrachten, dass es in den Systemen zwei Flächen gibt, welche während der Bewegung fortwährend in Berührung bleiben und insbesondere die relative Bewegung dieser Flächen selbst ins Auge fassen. Es ist dieser Fall für die Technik besonders wichtig und sind in der Regel diese Flächen Oberflächen der physischen Körper, welche dortselbst die unveränderlichen Systeme oder wenigstens Theile von diesen repräsentiren.

Hinsichtlich der Berührung zweier Flächen, d. h. wenn dieselben gemeinschaftliche Tangentenebenen und Normalen und den Berührungspunkt der ersteren als gemeinschaftlichen Doppelpunkt ihrer Schnittcurven mit denselben besitzen, sind für unsere Untersuchung folgende Fälle hervorzuheben: a) die Berührung findet blos in einem einzigen Punkte statt, welcher während der Bewegung für beide Flächen derselbe bleibt; b) die Berührung findet in einem einzigen Punkte statt, welcher zwar auf der einen Fläche immer derselbe bleibt, auf der andern aber continuirlich wechselt (eine springende Bewegung wird hier ausgeschlossen), sodass die verschiedenen Punkte einer Curve der zweiten Fläche nach und nach mit jenem in Berührung kommen; in diesem Falle gleitet jede Fläche an der andern hin; c) die Berührung findet in einem Punkte statt, welcher aber auf beiden Flächen continuirlich wechselt, sodass es auf jeder Fläche eine Curve gibt, deren Punkte nach und nach mit Punkten der andern in Berührung kommen. Diese Curven haben in jedem Berührungspunkte der Flächen zwei Tangenten, welche beide in die gemeinschaftliche Tangentenebene der Flächen fallen; fallen sie selbst zusammen und sind die vom Berührungspunkte auf beide Curven durchlaufenen Bogen gleich, so findet ein Rollen der einen Fläche auf der andern statt, sind diese Bogenlängen ungleich, Rollen und Gleiten. Schneidet aber die eine Tangente die andere unter einem Winkel, so gleitet die eine Fläche an der andern; der Fall b) ist alsdann eine Specialität dieses Falles, welche hervortritt, wenn die eine Curve sich auf einen Punkt reducirt; der Winkel der Tangenten kann veränderlich

sein und hie und da auch Null werden, alsdann findet ein momentaner Uebergang vom Gleiten zum Rollen statt. d) Die Berührung findet in mehreren Punkten statt, e) die Flächen berühren sich in allen Punkten einer Linie, f) sie berühren sich mit allen ihren Punkten. Die Bewegung ist im letzten Falle eine schleifende; sie findet statt, wenn eine Kugelfläche auf einer ihr congruenten oder eine Schraubenfläche auf einer congruenten Schraubenfläche fortrückt.

Wir wollen jetzt sehen, wie diese Fälle in Folge der Elementarbewegung der beiden Systeme, Σ', Σ'', welchen respective unsere Flächen S', S'', die sich fortwährend berühren, angehören, zu Stande kommen. Es genügt, die relative Bewegung der einen Fläche gegen die andere zu untersuchen und wir reduciren die relative Bewegung von Σ' gegen Σ'' auf eine absolute, indem wir Σ' die entgegengesetzte Bewegung von Σ'' ertheilen, sie mit der absoluten Bewegung von Σ' verbinden und Σ'' selbst als ruhend denken. Es sei C die Momentanaxe für diese Bewegung für irgend eine Lage des Systems Σ', $d\vartheta$ und $d\tau$ die Elementaramplitude und die Elementartranslation, welche ihr zukommen, B einer der Berührungspunkte der Flächen S', S'' und $BP = r$ sein Abstand von C. Man ersetze die Elementarrotation $d\vartheta$ durch eine ihr gleiche um eine durch B gehende, mit C parallele Axe c und füge die hieraus entspringende Translation $r d\vartheta$, welche rechtwinklig zur Ebene (Cc) ist, hinzu; sie setzt sich mit $d\tau$ zu einer resultirenden Translation $du = \sqrt{d\tau^2 + r^2 d\vartheta^2}$ zusammen, welche mit der Rotation $d\vartheta$ um die Axe c die gesammte Elementarbewegung des Systems Σ darstellt. Im Berührungspunkte B haben nun die Flächen ein Flächenelement gemein, welches in die gemeinschaftliche Tangentenebene fällt. Damit sich also die beiden Flächen nach Ausführung der Elementarbewegung in einem folgenden, dem Punkte B unendlich nahen Punkte von Neuem berühren, ist nothwendig, aber auch genügend, dass die Translation du der gemeinschaftlichen Tangentenebene in B parallel sei. In allen Fällen, in welchen die Rotation $d\vartheta = 0$ ist, findet ein Gleiten der Fläche S' an S'' statt; die Flächen berühren sich mit anderen und anderen Punkten, deren Tangentenebenen also jedesmal zusammenfallen, es geschieht dies aber allein in Folge einer Translation du.

Ist die Translation $du = 0$, ohne dass $d\vartheta$ um c verschwindet, so muss $d\tau = 0$ und $r = 0$ sein; es geht mithin die Momentanaxe C durch den Punkt B; durch die Rotation um sie gelangen zwei folgende Punkte der Flächen zur Berührung in einem gemeinsamen Punkte B' und wenn jetzt wiederum die Translation Null ist, so rotirt das System um eine Momentanaxe c', welche durch B' geht u. s. f. In allen diesen Fällen findet ein Rollen der Fläche S' auf S'' ohne Gleiten statt. Es ist hiebei nicht nöthig, dass die Axen $c, c' \ldots$ in die Tangentenebenen der Punkte $B, B' \ldots$ fallen; findet dies nicht statt, so kann man die Rotation $d\vartheta$ um c in zwei Com-

ponenten zerlegen, deren Axen in die gemeinschaftliche Normale und die Tangentenebene fallen. Die erstere dreht die Tangentenebene von S' in der Tangentenebene von S'', die zweite hebt sie aus dieser heraus. Die erstere verleiht der Bewegung von S' den Charakter der Bohrbewegung. In den Fällen des Rollens der Flächen gehen die Normalebenen der Bahnen aller Systempunkte durch die Momentanaxe. Sollen die Flächen S', S'' sich nicht blos in einem Punkte, sondern in mehreren berühren und soll in allen diesen ein Rollen derselben aufeinander stattfinden, so müssen alle auf der Momentanaxe liegen, und sollen die Flächen auf einander rollen und sich längs einer Linie berühren, so kann letztere nur eine Gerade sein, welche mit der Momentanaxe zusammenfällt. Es können daher nur geradlinige Flächen aufeinander rollen und sich dabei längs einer Linie berühren, diese Linie kann nur eine Erzeugungslinie sein.

In allen Fällen, in welchen du und $d\vartheta$ nicht Null sind, findet ein Rollen und Gleiten der Flächen S', S'' auf einander zugleich statt.

Einige literarische Nachweise zur Geometrie der Bewegung.

Cartesius bemerkte zuerst das Momentancentrum bei der Erzeugung der Cycloïde (Lettres de Descartes, t. II, p. 39. (Ausg. v. 1724). — Die Entdeckung des Momentancentrums für die allgemeine Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene gebührt Johann Bernouilli (De centro spontaneo rotationis. Opera, t. IV, p. 265. a. 1742). — Die Bewegung räumlicher Systeme erforschten zuerst d'Alembert: Traité de la précession des équinoxes (1749), in welchem Werke zuerst eine „axe instantanée de rotation" vorkommt und Euler: Découverte d'un nouveau principe de Mécanique (Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1750); Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable (Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1758); Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum (1765); Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum (Novi Commentarii Acad. Petropolit. a. 1795. t. XX.) — Von grösster Wichtigkeit sind folgende Arbeiten von Chasles: 1) Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr'eux, et placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini, ou infiniment petit, d'un corps solide libre; communiquée à la soc. philom. 5. Fevrier 1831. (Bulletin des sciences math. p. Férussac. Novemb. 1830). 2) Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace. (Comptes rend. de l'Academ. des sciences de Paris, t. XVI. p. 1420—1432. année 1843). 3) Propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable. (Comptes rend. de l'Acad. de Paris t. LI: 5. Décembre 1860, 10. Décembre 1860; t. LII: 21. Janv. 1861, 4. Févr. 1861, 18. Mars 1861). Hieran reiht sich unmittelbar an: Jonquières: Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps in seinem Werke: Mélanges de Géométrie pure. Paris 1856. p. 1—51. Enthält eine Entwickelung der Beweise zu der unter No. 2 bei Chasles angeführten

gleichnamigen Schrift). — **Poinsot**: Théorie nouvelle de la rolatione des corps (Journ. des Mathém. p. Lionville, t. XVI, p. 9 et 289), in welcher Arbeit, die eine weitere Ausführung einer gleichnamigen des Verfassers aus dem Jahre 1834 ist, die Theorie des Rollens der Kegel (Γ) und (C) zuerst vollständig entwickelt ist. — **Möbius**: Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen. (Crelle, Journ. d. reinen und angewandten Mathematik. Bd. XVIII. S. 189—212, a. 1836.) — **Rodrigues**: Des lois géométriques qui régissent le déplacement d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. (Journ. des Mathém. p. Liouville, t. V. p. 380—440.). — **Lamarle**: Mém. sur la théorie géometrique des centres et axes instantanés de rotation (Bullet. des séances de l'Acad. des sciences de Bruxelles, a. 1859), sowie dessen Exposé géométrique du Calcul differentiel et integral, précédé de la cinématique du point, de la droite et du plan. Paris 1861 und 1863. — **Stegmann**: geometrische Untersuchungen über Drehung. Marburg 1853. — **Chelini**: Dei moti geometrici e loro leggi nello spostamento di una figura di forma invariabile. Bologna 1862, sowie dessen Elementi di Meccanica razionale. Bologna 1860. — **Resal**: Traité de cinématique pure. Paris 1862. — **Belanger**, Traité de cinématique. Paris 1864.

Zweiter Theil.

Die Geschwindigkeit der Bewegung.

I. Capitel.

Die Geschwindigkeit eines Punktes. Projectionen der Geschwindigkeit auf Axen und Ebenen.

§. 1. Die Geometrie der Bewegung betrachtet die Bewegung als blose Aenderung des Ortes ohne Rücksicht auf die innere Natur derselben; ihr genügt es, zu bestimmen, wohin der bewegliche Punkt oder das bewegliche System gelangt und welche Lagen es durchläuft oder wenigstens durchlaufen könnte, um eine bestimmte Lage zu erreichen. Nun kann aber dieselbe geometrische Bewegung, sowohl die eines Punktes als die des Systems auf sehr verschiedene Art erfolgen, schneller oder langsamer in sehr mannigfachen Abstufungen. Um die innere Natur einer Bewegung zu erkennen, vergleicht man sie mit anderen bereits bekannten Bewegungen mit Hülfe des Begriffs der Geschwindigkeit. Derselbe basirt auf der Vorstellung der Zeit. Die Zeit wird als continuirlich, unbegrenzt, aber beliebig begrenzbar, mithin als messbar gedacht; die Einheit derselben ist an sich willkürlich, gewöhnlich wählt man aber dazu die Secunde mittlerer Zeit, wie sie die Uhren angeben. Die Astronomie unterscheidet nämlich drei Arten der Zeiteintheilung: die Sternzeit, die wahre Sonnenzeit und die mittlere Sonnenzeit. Der Sterntag ist die constante Umdrehungszeit der Erde; der wahre Sonnentag ist die Zeit des scheinbaren Umlaufs der Sonne um die Erde und ist veränderlich im Laufe des Jahres, der mittlere Sonnentag aber ist die mittlere Dauer des wahren Sonnentages. Der mittlere Sonnentag hat 86400, der Sterntag nur 86164,09 Sekunden mittlerer Zeit; letzterer ist also etwa um 4 Minuten kürzer, als ersterer.

In allen mechanischen Untersuchungen, wobei es sich um Bewegung handelt, tritt die Zeit als unabhängige Variabele auf und pflegt als solche mit dem Buchstaben t bezeichnet zu werden; für bestimmte constante Zeiten reservirt man sich gern die gleichlautenden T, τ.

§. 2. Wir beginnen mit der Geschwindigkeit des Punktes und werden erst später von der Geschwindigkeit im Systeme reden. Die Bewegung eines Punktes heisst gleichförmig, wenn derselbe in gleichen, übrigens beliebigen Zeiten gleiche Längen seiner Bahn durchläuft; sie heisst veränderlich in jedem andern Falle. Zwei gleichförmige Bewegungen besitzen gleiche Geschwindigkeit, wenn der bewegliche Punkt bei beiden gleiche Längen in derselben Zeit durchläuft; ist die Weglänge bei der einen das Doppelte, Dreifache, Vierfache etc. der Weglänge bei der andern, so heisst die Geschwindigkeit derselben doppelt so gross, dreimal so gross, viermal so gross etc., als die der anderen. Sind daher V, V' die Geschwindigkeiten zweier gleichförmigen Bewegungen, a, a' die Längen, welche die beweglichen Punkte in der Zeiteinheit zurücklegen, so besteht die Proportion $V:V' = a:a'$. Wählt man nun zur Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung, bei welcher in der Zeiteinheit die Längeneinheit durchlaufen wird, so wird diese Proportion, wenn V' die Einheit der Geschwindigkeit bedeutet und mithin $a' = 1$ gesetzt, die Masszahl $V:V'$ aber mit v bezeichnet wird, übergehen in $v = a$, d. h. bei der gleichförmigen Bewegung ist die Masszahl der Geschwindigkeit die Masszahl der Länge, welche in der Sekunde durchlaufen wird. Kürzer, wenn auch weniger accurat, sagt man gewöhnlich: Bei der gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit der Weg des Punktes in der Zeiteinheit. — Beschreibt der bewegliche Punkt in der Zeit t den Weg w gleichförmig mit der Geschwindigkeit a, so ist $\frac{w}{t}$ der Weg, welchen er in der Zeiteinheit zurücklegt, also $\frac{w}{t} = a$ oder $w = at$, d. h.: Bei der gleichförmigen Bewegung ist der in irgend einer Zeit zurückgelegte Weg gleich dem Produkte aus der Geschwindigkeit und der Zeit.

Ein Punkt bewege sich in der Linie OS gleichförmig mit der Geschwindigkeit a, befinde sich zu den Zeiten t_0 und t respective in M_0 und M und seien von dem beliebigen Anfangspunkte O ab gerechnet $OM_0 = s_0$, $OM = s$, diese Abstände positiv genommen im Sinne der Bewegung, negativ im entgegengesetzten; dann ist $M_0M = s - s_0$ der in Zeit $t - t_0$ zurückgelegte Weg und folglich

Fig. 39.

O M₀ M M' S

$$s - s_0 = a\,(t - t_0).$$

Für $t_0 = 0$, d. h. wenn man die Zeit von dem Momente an zählt, wo der bewegliche Punkt den Punkt M_0 verlässt, wird diese Gleichung etwas einfacher, nämlich

$$s = s_0 + at.$$

Sie, sowie die vorige etwas allgemeinere heisst die **Gleichung der gleichförmigen Bewegung**. Sie ist linear und bestimmt den Abstand s des beweglichen Punktes M von einem beliebigen Anfangspunkte O seiner Bahn als Function der Zeit. Erfolgt die Bewegung im entgegengesetzten Sinne, so ist $s_0 - s$ oder $-(s - s_0)$ der in der Zeit t durchlaufene Weg und folglich $-(s - s_0) = at$ oder $s - s_0 = (-a)\,t$ die Gleichung der Bewegung. Um dieselbe mit der vorigen in Harmonie zu bringen, muss also die Geschwindigkeit das Zeichen wechseln. Ebenso überzeugt man sich leicht, dass dieselbe Gleichung für positive, wie für negative Werthe von t gilt und dass überhaupt sämmtliche darin vorkommende Grössen s_0, t_0, s, t, a beliebige positive oder negative Werthe haben können, ohne die Gültigkeit der Gleichung zu beeinträchtigen.

Man kann die Gleichung der gleichförmigen Bewegung geometrisch construiren, indem man die Zeiten t als Abscissen, die Abstände s als Ordinaten eines Parallelcoordinatensystems aufträgt, wobei man die Einheit der Zeit gewöhnlich durch dieselbe Länge darstellt, wie die des Raumes. Die Gleichung stellt alsdann eine gerade Linie dar, welche durch den Punkt (s_0, t_0) geht, und wenn das Coordinatensystem rechtwinklig ist, so drückt die Geschwindigkeit a die Tangente der Neigung dieser Geraden gegen die Axe der t aus.

§. 3. Bei der veränderlichen Bewegung legt der bewegliche Punkt in gleichen Zeiten ungleiche Wege zurück. Man kann daher nicht von der Geschwindigkeit einer solchen Bewegung im Allgemeinen, sondern nur von der Geschwindigkeit zu einer bestimmten Zeit oder an einer bestimmten Stelle der Bahn reden. Um die Geschwindigkeit einer solchen Bewegung am Ende der Zeit t zu erkennen, denken wir in diesem Momente alles hinweg, was die Veränderlichkeit derselben bestimmt, sodass die Bewegung in eine gleichförmige übergeht und definiren, wie folgt. **Die Geschwindigkeit einer veränderlichen Bewegung am Ende der Zeit t ist die Geschwindigkeit derjenigen unveränderlichen Bewegung, in welche die veränderliche Bewegung in diesem Momente übergehet, wenn plötzlich alles hinwegfällt, was die Veränderlichkeit bestimmt; sie ist demnach der Weg, welchen der Punkt in der nächsten Sekunde zurücklegen würde, wenn die Bewegung gleichförmig würde.**

Um den analytischen Ausdruck dieser Geschwindigkeit, welche im Allgemeinen mit der Zeit und der Stelle der Bahn variiren wird, zu finden, seien (Fig. 39) $OM = s$ und $OM' = s + \Delta s$ die Abstände des beweglichen Punktes zu den Zeiten t und $t + \Delta t$ von irgend einem festen Punkte O der Bahn, sodass $MM' = \Delta s$ den in der Zeit Δt durchlaufenen

Weg darstellt; es seien ferner v und $v + \Delta v$ die Werthe der Geschwindigkeit, welche der Punkt zu denselben Zeiten besitzt und schliesslich werde Δt bereits so klein gedacht, dass innerhalb dieses Zeitintervalls die Aenderung Δv der Geschwindigkeit das Zeichen nicht wechselt, d. h. v selbst während dieses Intervalles nicht vom Abnehmen zum Wachsen oder von diesem zu jenem übergeht. Würde nun der bewegliche Punkt während der Zeit Δt das einemal mit der Geschwindigkeit v, das anderemal mit der Geschwindigkeit $v + \Delta v$ in der Richtung von M nach M' sich gleichförmig bewegen, so wären $v \cdot \Delta t$ und $(v + \Delta v) \cdot \Delta t$ seine Wege, aber keiner von ihnen würde die mit der veränderlichen Geschwindigkeit durchlaufene Strecke Δs darstellen, vielmehr würde Δs zwischen beide fallen, sodass mit Rücksicht auf das Vorzeichen von Δv die Ungleichung $v\,\Delta t \lesseqgtr \Delta s \lesseqgtr (v + \Delta v)\,\Delta t$ besteht, aus welcher durch Division mit Δt die die folgende entsteht:

$$v \lesseqgtr \frac{\Delta s}{\Delta t} \lesseqgtr v + \Delta v.$$

Lässt man nun Δt ohne Ende abnehmen, welches unmittelbar auch die unendliche Abnahme von Δs und Δv nach sich zieht, so fallen die Grenzwerthe v und $v + \Delta v$ zusammen und mit ihnen folglich auch der Grenzwerth $\frac{ds}{dt}$ von $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Es ergibt sich daher durch diesen Grenzübergang die Gleichung:

$$v = \frac{ds}{dt},$$

d. h. **die Geschwindigkeit einer veränderlichen Bewegung am Ende der Zeit t ist die Derivirte des von dem beweglichen Punkte durchlaufenen Raumes nach der Zeit, d. h. das Element dieses Raumes, dividirt durch das Zeitelement, in welchem es durchlaufen wird.**

Die gleichförmige Bewegung ist ein spezieller Fall veränderlicher Bewegung; für sie reducirt sich die Geschwindigkeit auf eine Constante. Die Gleichung für die gleichförmige Bewegung, nämlich $s = s_0 + at$ liefert übereinstimmend hiemit $v = \frac{ds}{dt} = a$. — Aus der Gleichung $v = \frac{ds}{dt}$ folgt $ds = v\,dt$, d. h. das während des Zeitelementes dt beschriebene Bahnelement ds wird erhalten, indem man die Geschwindigkeit v mit dem Zeitelemente multiplicirt. Nun galt für die gleichförmige Bewegung der Satz, dass der Weg gleich dem Produkte der Geschwindigkeit und der Zeit ist, für beliebige endliche Zeiten. Man sieht daher, dass bei einer beliebigen Bewegung derselbe Satz für die Bewegung während des Zeitelementes gilt und man während desselben jede Bewegung als eine gleichförmige behandeln darf.

§. 4. Ist v als Function der Zeit bekannt, so liefert die Gleichung $ds = v dt$ durch Integration die Gleichung der Bewegung, nämlich:

$$s - s_0 = \int_{t_0}^{t} v\, dt,$$

worin t_0, s_0 zwei zusammengehörige Spezialwerthe von t und s sind. Ist v als Function von s gegeben, so erhält man die Gleichung der Bewegung unter der Form:

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v}.$$

Die Gleichung der Bewegung $s = f(t)$ kann analog, wie in §. 2. geometrisch construirt werden. Sie stellt eine Curve dar, die Tangente der Neigung derselben gegen die Axe der t ist die Geschwindigkeit und es gibt mithin das Steigen und Fallen der Tangente das Wachsen und Abnehmen der Geschwindigkeit an. Die Tangente an die Curve ist aber selbst die Linie, welche eine gleichförmige Bewegung darstellt; man sieht daher, wie die Geschwindigkeit der veränderlichen Bewegung übereinkommt mit der Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung, mit welcher sie während des Zeitelementes zusammenfällt.

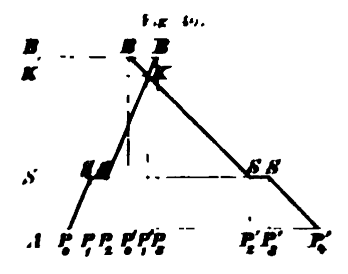
Ist die Geschwindigkeit als Function der Zeit bekannt, so kann man dieselbe als Ordinate einer Curve construiren für die Zeit als Abscisse. Diese Curve heisst die Geschwindigkeitscurve. Für die gleichförmige Bewegung ist sie eine mit der Abscissenaxe parallellaufende Gerade. Der Flächenraum dieser Curve, begrenzt von zwei Ordinaten, dem zwischenliegenden Bogen und der Abscissenaxe, nämlich das Integral $\int_{t_0}^{t} v\, dt$ stellt die Differenz $s - s_0$, d. h. den in der Zeit $t - t_0$ durchlaufenen Weg dar.

§. 5. Bisher war nur von der Grösse der Geschwindigkeit die Rede; man spricht aber auch von ihrer Richtung. Unter der Richtung der Geschwindigkeit versteht man die Richtung der Bewegung, nämlich die Tangente der Bahn des beweglichen Punktes. (Vgl. I. Thl. Cap. I, §. 1.) Bei der geradlinigen Bewegung bleibt mithin die Richtung derselben fortwährend die nämliche, bei der krummlinigen wechselt sie von Punkt zu Punkt. Würde bei der krummlinigen Bewegung alles plötzlich hinwegfallen, was die Bahn krümmt, so würde der bewegliche Punkt in der Richtung seiner Bewegung, d. h. in der Tangente der Bahn seine Bewegung fortsetzen und dieselbe würde fortan geradlinig sein; würden zugleich auch alle Umstände hinwegfallen, welche die Bewegung veränderlich machen, so würde die Bewegung gleichförmig werden. Der Punkt würde alsdann in der Richtung der Tangente mit der zuletzt erlangten Geschwindigkeit sich gleichförmig bewegen.

Man pflegt auf der Tangente vom Berührungspunkte aus im Sinne der Bewegung die Geschwindigkeit als Länge aufzutragen. Von den beiden die Geschwindigkeit bestimmenden Merkmalen, Grösse und Richtung, kann jedes für sich und können auch beide zusammen unveränderlich werden.

§. 6. Als Beispiel wählen wir die Bewegung, deren Gleichung $s = s_1 + v_1 t + \frac{1}{2} a t^2$ ist. Für sie ist $v = \frac{ds}{dt} = v_1 + at$, mithin ändert sich die Geschwindigkeit der Zeit proportional und stellt der Coëfficient a die nach jeder Zeiteinheit erfolgte Aenderung derselben dar. Die Geschwindigkeitscurve ist eine Gerade, welche gegen die Axe der t unter einem Winkel λ geneigt ist, für welchen $\operatorname{tang} \lambda = a$ ist. Die Bewegung heisst die gleichförmig veränderliche und zwar je nach der positiven oder negativen Beschaffenheit von a gleichförmig beschleunigt oder gleichförmig verzögert; a selbst wird die Beschleunigung genannt. Der in der Zeit t durchlaufene Weg ist $s - s_1 = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} t (v_1 + v)$. Er wird durch den Inhalt des Trapezes der Geschwindigkeitslinie dargestellt. Wir werden später auf diese Bewegung zurückkommen.

§. 7. Da jede Bewegung eine Gleichung hat zwischen s und t, so kann eine ziemlich grosse Parthie der analytischen Geometrie der Ebene unmittelbar in die Mechanik übersetzt werden, sobald man voraussetzt, dass zwei oder mehrere Bewegungen zugleich auf derselben Bahn erfolgen. So hat die Aufsuchung der Coordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden die Lösung der mechanischen Aufgabe zur Folge: „Zwei Punkte bewegen sich in derselben Bahn, die Gleichungen ihrer gleichförmigen Bewegungen sind $s = s_0 + at$ und $s = \sigma_0 + \alpha t$, wann und wo werden sich die Punkte begegnen?“ Ist die Bahn eine in sich zurückkehrende Linie, so ergeben sich viele Lösungen. An die Stelle der gleichförmigen Bewegungen können hiebei andere treten, etc. Die Bedingung, dass drei Geraden sich in einem Punkte schneiden, liefert mechanisch gedeutet die Lösung der Aufgabe: „Drei Punkte bewegen sich gleichförmig auf derselben Bahn, werden sie überhaupt einmal alle drei zusammentreffen und wann und wo wird dies geschehen?“ u. s. w.


Fig. 40.

Die Technik macht hiervon nützlichen Gebrauch. Hierher gehört z. B. die für die graphischen Eisenbahnfahrpläne übliche Construction. Es sei (Fig. 40) P_0SSKB die Linie, deren Ordinaten die von einem beweglichen Punkte in den durch die Abscissen angegebenen Zeiten durchlaufenen Strecken darstellen. Die Figur zeigt, dass der Punkt zur Zeit

$t_0 = AP_0$ von A abgeht, zur Zeit $t_1 = AP_1$ in S ankommt und wenn P_0S eine Gerade ist, sich gleichförmig dorthin bewegt hat. Ist SS parallel der Axe t, so drückt dies aus, dass der Punkt hierauf bis zur Zeit $t_2 = AP_2$ in S verweilt und wenn SB geradlinig und parallel P_0S mit derselben Geschwindigkeit, wie vorher, sich von S nach B bewegt und an letzterem Orte zur Zeit $t_3 = AP_3$ ankommt. Grösserer Uebersichtlichkeit wegen kann man sich auf der Ordinatenaxe die den verschiedenen Zeiten entsprechenden Entfernungen von A aus abtragen, sodass diese Axe die geradlinig ausgestreckte Bahn des Punktes darstellt. Die Figur zeigt weiter, dass ein anderer Punkt zur Zeit t_0' den Ort B verlässt und nach A zurückkehrt, zur Zeit $t_1' = AP_1'$ dem ersteren Punkte in K begegnet, hierauf zur Zeit $t_2' = AP_2'$ in S eintrifft, um nach einem Verweilen $t_3' - t_2 = P_2'P_3'$ in S zur Zeit $t_4' = AP_4'$ in A anzulangen. Die Neigung der Strecken BS, SP_4' gegen die Axe der t gibt die Geschwindigkeit der Bewegung des zweiten Punktes an. Zugleich lehrt die Figur die Orte zu bestimmen, an welchen beide Punkte zu derselben Zeit sich befinden.

§. 8. Unter der mittleren Geschwindigkeit der veränderlichen Bewegung eines Punktes während der Zeit $t - t_0$, während welcher er den Raum $s - s_0$ durchläuft, versteht man die constante Geschwindigkeit, mit welcher er in derselben Zeit denselben Raum durchlaufen würde. Ist daher $\overset{*}{v}$ diese mittlere Geschwindigkeit, so besteht die Gleichung:

$$\overset{*}{v}(t - t_0) = s - s_0.$$

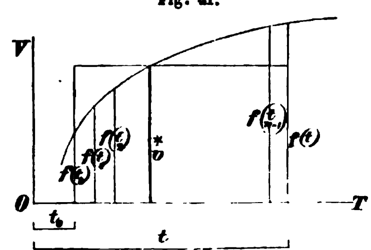
Setzt man in diese Gleichung den Werth für $s - s_0$ aus §. 4. ein, so erhält man, falls v als Function der Zeit bekannt ist,

$$\overset{*}{v} = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} v\,dt;$$

ist aber v als Function von s gegeben, so erhält man durch Einsetzen des dort für $t - t_0$ gegebenen Ausdruckes:

$$\overset{*}{v} = \frac{s - s_0}{\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v}}.$$

Fig. 41.



Stellt (Fig. 41) die Geschwindigkeitscurve dar, so drückt der Flächenraum derselben, welcher über der Basis $t - t_0$ steht, den Raum $s - s_0$ aus und ist folglich die mittlere Geschwindigkeit die Höhe eines Rechtecks von derselben Basis, dessen Fläche gleich diesem Flächenraume

ist. — Ist $v = f(t)$, schaltet man zwischen t_0 und t in gleichen Intervallen aufeinanderfolgend die Werthe $t_1, t_2, t_3 \ldots t_{n-1}$ ein und bildet das arithmetische Mittel aus den den Zeitwerthen $t_0, t_1 \ldots . t_{n-1}$ entsprechenden Werthen $f(t_0), f(t_1), f(t_2) \ldots f(t_{n-1})$ der Geschwindigkeit, nämlich die Grösse

$$\frac{1}{n}[f(t_0) + f(t_1) + \ldots . + f(t_{n-1})],$$

so geht dieselbe in der Grenze für wachsende n und abnehmende Zeitintervalle in die mittlere Geschwindigkeit über. Denn aus den Gleichungen

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 \ldots . \quad = t_0 - t_{n-1} = \delta,$$

welche die Gleichheit der Zeitintervalle ausdrücken, folgt,

$$t - t_0 = n\delta$$

und indem man hieraus den Werth für n entnimmt und in den Ausdruck des arithmetischen Mittels einführt, nimmt dies die Gestalt

$$\frac{\delta}{t - t_0}[f(t_0) + f(t_1) + \ldots + f(t_{n-1})]$$

an und sein Grenzwerth ist daher nach der Definition des bestimmten Integrales

$$\frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} f(t)\, dt,$$

wie oben.

§. 9. Projicirt man einen in Bewegung begriffenen Punkt M durch einen Stral oder auch durch eine Ebene nach irgend einem bestimmten Gesetze jeden Augenblick auf eine feste Gerade als Axe, so besitzt die Projection m desselben eine Bewegung, deren Natur von der Bewegung jenes, der Lage der Axe und dem Gesetze, welchem die Projection unterworfen ist, abhängt. Die Bewegung der Projection eines Punktes auf eine Axe wird auch die Projection der Bewegung desselben auf diese Axe genannt; ihr gegenüber mag die projicirte Bewegung die Hauptbewegung heissen.

Ist $MM' = ds$ (Fig. 42) das im Zeitelemente dt von M beschriebene Wegelement, so ist seine Projection $mm' = dx$ das in demselben Zeitelemente von m auf der Axe durchlaufene Element; es sind mithin nach §. 4.

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad v_x = \frac{dx}{dt}$$

die Geschwindigkeiten der Hauptbewegung und der Projectionsbewegung zur Zeit t. Zwischen den Elementen ds und dx besteht aber vermöge des Gesetzes der Projection ein Abhängigkeit und in Folge dieser wird

auch v_x von v abhängig. Für rechtwinklige Projectionen ist, wenn α den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente der Hauptbahn im Sinne der Geschwindigkeit v genommen mit der Axe im Sinn von v_x bildet:

$$dx = ds \cdot \cos \alpha.$$

Hierdurch wird

$$v_x = \frac{ds}{dt} \cos \alpha = v \cos \alpha.$$

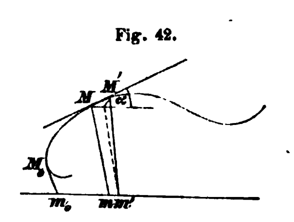


Fig. 42.

Für schiefwinklige Projectionen wird $\cos \alpha$ durch eine andere Winkelfunction vertreten, welche, wie der Cosinus für die rechtwinklige, das Gesetz des schiefen Projicirens darstellt. In beiden Fällen aber ergibt sich, wenn man die Geschwindigkeit der Hauptbewegung auf der Tangente der Hauptbahn vom Berührungspunkte aus aufträgt, dass die Geschwindigkeit der Projectionsbewegung gleich der Projection der Geschwindigkeit der Hauptbewegung auf die Axe ist. Auch kann man folgendermassen schliessen, um zu diesem Satze zu gelangen. Die Abstände s und x der Punkte M und m von beliebigen Anfangspunkten auf der Hauptbahn und der Projectionsbahn gerechnet, sind Functionen der Zeit t. Statt x als unmittelbare Function von t anzusehen, kann man diese Grösse zunächst als Function von s und durch dieses mittelbar als Function von t betrachten. Dadurch erhält man $\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$ und folglich $v_x = v \cdot \frac{dx}{ds}$. Das Verhältniss der Elemente dx und ds stellt aber für die rechtwinklige Projection $\cos \alpha$, für jede andere die Winkelfunction dar, mit deren Hülfe projicirt wird.

§. 10. Projiciren wir die Bewegung des Punktes M auf drei Axen, von denen keine zwei einander parallel sind und die wir, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, durch ein und denselben Punkt O des Raumes ziehen können, so stellen in Bezug auf sie als Coordinatenaxen die Coordinaten x, y, z des beweglichen Punktes M die Abstände seiner Projectionen m_x, m_y, m_z auf diese Axen von O dar und sind ebenso, wie der Abstand s des Punktes M auf seiner Bahn von irgend einem Anfangspunkt auf derselben gerechnet, Functionen der Zeit. Dann bestehen, wenn die Winkel α, β, γ die Neigungen der Tangente der Hauptbahn gegen die Axen bezeichnen, für die Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z der drei Projectionsbewegungen auf die Axen die Gleichungen

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

und wenn das Coordinatensystem rechtwinklig ist, auch die drei folgenden:

$$v_x = v \cos \alpha, \quad v_y = v \cos \beta, \quad v_z = v \cos \gamma.$$

Es stellen mithin die ersten Derivirten der Coordinaten des beweglichen Punktes in Bezug auf die Zeit die Geschwindigkeiten der drei Projectionsbewegungen auf die Coordinatenaxen dar und sind gleich den Projectionen der Geschwindigkeit der Hauptbewegung auf diese Axen.

Da die Quadratsumme der drei Projectionen einer Strecke auf drei rechtwinklige Axen gleich dem Quadrate der Strecke selbst ist, so folgt

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Es ist daher die Geschwindigkeit der Hauptbewegung die Diagonale des über den Geschwindigkeiten der drei Projectionsbewegungen auf drei rechtwinklige Axen construirten Parallelepipeds. Dies folgt auch aus den drei letzten der vorstehenden Gleichungen mit Rücksicht darauf, dass für die Cosinusse der Richtungswinkel α, β, γ einer Geraden die Relation gilt $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$.

Quadrirt man die drei ersten Gleichungen im Fall eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so folgt weiter

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

da $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Endlich erhält man noch für die Richtung der Geschwindigkeit

$$\frac{\cos\alpha}{v_x} = \frac{\cos\beta}{v_y} = \frac{\cos\gamma}{v_z} = \frac{1}{v},$$

An diese Formeln schliessen sich die folgenden Hauptaufgaben über die Geschwindigkeit an, welche mit Hülfe derselben leicht zu lösen sind:

1. Wenn die Coordinaten des beweglichen Punktes als Functionen der Zeit gegeben sind, die Geschwindigkeiten der drei Projectionsbewegungen, die Geschwindigkeit der Hauptbewegung, ihre Richtung und die Beschaffenheit der Hauptbahn zu finden.

2. Wenn die Geschwindigkeiten der drei Projectionsbewegungen als Functionen der Zeit gegeben sind, die Coordinaten des beweglichen Punktes und dessen Bahn zu finden.

3. Wenn der Bogen s der Hauptbahn als Function der Zeit gegeben und die geometrische Beschaffenheit der Bahn bekannt ist, die drei Projectionsbewegungen zu bestimmen.

Ist die Bahn der Hauptbewegung eine ebene Curve, so vereinfachen sich die Formeln. Nimmt man nämlich die Ebene derselben zu einer der Coordinatenebenen, z. B. zur xy-Ebene, so erhält man

$$z=0,\quad \frac{dz}{dt}=0,\quad \cos\gamma=0,\quad \cos\beta=\sin\alpha,$$

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt},\quad v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,\quad tg\,\alpha=\frac{v_y}{v_x}.$$

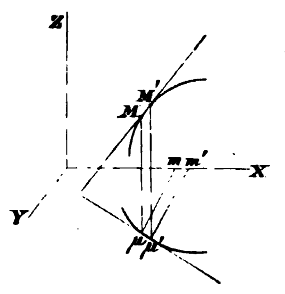
§. 11. Projicirt man einen beweglichen Punkt M durch einen Stral auf eine Ebene ε, so wird die Bewegung seiner Projection μ die Projection seiner Bewegung auf diese Ebene genannt. Sind die Projectionen rechtwinklig, so besteht zwischen den Geschwindigkeiten v und $v_{,}$ der Hauptbewegung und der Projectionsbewegung die Gleichung $v_{,}=v\cos\gamma$, wenn der Winkel γ die Neigung der Bogenelemente ds und $d\sigma$ beider Bahnen, oder also die Neigung der Tangente der Hauptbahn gegen die Projectionsebene darstellt.

Projicirt man die Bewegung auf die Coordinatenebenen eines rechtwinkligen Coordinatensystems des xyz und bezeichnen α, β, γ die Neigungen der Tangente der Hauptbahn gegen die Coordinatenaxen, so sind deren Neigungen gegen die Ebenen der yz, zx, xy die Complemente zu α, β, γ und folglich die Geschwindigkeiten v_{yz}, v_{zx}, v_{xy} der drei Projectionsbewegungen

$$v_{yz}=v\sin\alpha,\quad v_{zx}=v\sin\beta,\quad v_{xy}=v\sin\gamma.$$

Zwei der Projectionsbewegungen genügen, um die Hauptbewegung zu bestimmen. Sind die Projectionsbewegungen für die drei Axen gegeben, so können die Projectionsbewegungen für die Ebenen gefunden werden und umgekehrt kann man aus jeder Projectionsbewegung für eine Ebene die beiden Projectionsbewegungen für die beiden in dieser Ebene liegenden Axen finden. Das Detail dieser Betrachtungen ergibt sich leicht aus Fig. 43.

Fig. 43.



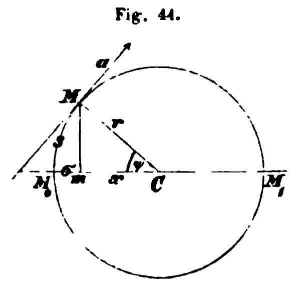
§. 12. Als Beispiel zu den vorstehenden Lehren wählen wir zunächst folgende Aufgabe.

Ein Punkt M bewegt sich mit constanter Geschwindigkeit $v=a$ auf dem Umfange eines Kreises, welches ist die Beschaffenheit der Projection seiner Bewegung auf irgend eine in der Ebene des Kreises liegende Axe, z. B. auf einen Durchmesser des Kreises?

Es seien M_0, M die Lagen des beweglichen Punktes zu den Zeiten $t=0$ und $t=t$ und werde die Bewegung auf den durch M_0 gehenden Durchmesser M_0M_1 projicirt. Der in der Zeit t durchlaufene Bogen $M_0M=s$ ist $s=at=r\psi$, wenn r den Radius des Kreises, ψ den zu

$M_0 M$ gehörigen Centriwinkel bezeichnet. Der Weg der Projection m in der Zeit t ist $Am = \sigma = r - r\cos\psi$ und der Abstand vom Mittelpunkte, nämlich $mC = x = r\cos\psi$. Aus der Gleichung $at = r\psi$ folgt, wenn $a : r = \omega$ gesetzt wird, $\psi = \omega t$ und hiemit wird

Fig. 44.



$$s = r\omega t, \quad x = r\cos\omega t, \quad \sigma = r - x.$$

Die Geschwindigkeit der Projectionsbewegung ist

$$v_x = \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dx}{dt} = r\,\omega\sin\omega t.$$

Zu derselben Formel führt auch der Satz $v_x = v\cos\alpha$ (§. 8.). Denn der Winkel α, den die Tangente in M mit der Projectionsaxe bildet, ist $\frac{1}{2}\pi - \psi$, folglich wird $v_x = a\sin\psi = r\omega\sin\omega t$.

Die Gleichungen $x = r\cos\omega t$, $v_x = r\,\omega\sin at$ geben, soweit nur die Orte und Geschwindigkeiten des Punktes m in Frage kommen, vollständigen Aufschluss über die Natur der Projectionsbewegung. Sie zeigen, dass dieselbe in Bezug auf beides periodisch ist; der Punkt m oscillirt zwischen den Grenzlagen M_0 und M_1. Den Mittelpunkt C des Kreises passirt er zu den Zeiten t, für welche $x = 0$, d. h. $\omega t = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi, \ldots \frac{2n+1}{2}\pi$ wird, nämlich zu den Zeiten $t = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\omega}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; in M_0 befindet er sich zu den Zeiten, für welche $x = r$ wird; dieselben ergeben sich durch die Bedingung $\omega t = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots 2n\pi$, nämlich $t = \frac{2n\pi}{\omega}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; in M_1 ist er zu Zeiten $t = \frac{(2n+1)\pi}{\omega}$, $n = 0$, 1 2, ... Die Zeiten, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Lagen M_0, oder M_1 verfliessen, sind gleich gross, nämlich $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und doppelt so gross, als die Zeiten, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Lagen C liegen.

Die Geschwindigkeit v_x wird Null in den Lagen M_0, M_1 und erreicht ihr Maximum $r\omega = a$, sobald der Punkt den Mittelpunkt C passirt; sie wächst, während er von M_1 bis C geht, nimmt hierauf bis zu Null ab, während er der Grenzlage M_1 zueilt, wechselt hierauf ihren Sinn und wächst im Negativen, während er nach C zurückkehrt, und verschwindet wieder, sobald er die andere Grenzlage M_0 erreicht.

Trägt man v_x als Ordinate zu x als Abscisse auf, so bilden die Endpunkte der Ordinaten eine Ellipse, deren Gleichung $\frac{x^2}{r^2} + \frac{v_x^2}{r^2\omega^2} = 1$ aus den Gleichungen für x und v_x durch Elimination von t entspringt. Die Grösse ω, welche hier auftritt und mit deren Hülfe die Geschwindigkeit

a durch die Gleichung $a = r\omega$ ausgedrückt wurde, stellt die Geschwindigkeit des Punktes M dar, für den Fall, dass der Kreis die Einheit als Radius besitzt. Man nennt sie die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung.

Die Zeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ heisst die Oscillationsdauer der Projectionsbewegung. Sie ist unabhängig von dem Radius r des Kreises und hängt nur von der Winkelgeschwindigkeit ab. Die Entfernung $M_0 M_1 = 2r$ heisst die Oscillationsweite; sie ist ohne Einfluss auf die Oscillationsdauer und alle Bewegungen, deren Gleichung $x = r \cos \omega t$ für die verschiedenen Werthe von r ist, haben dieselbe Oscillationsdauer.

§. 13. Als weitere Beispiele dürften sich zur Behandlung folgende empfehlen.

1. Ein Punkt bewegt sich gleichförmig auf einem Kreise; seine Bewegung wird auf eine Ebene projicirt, welche gegen die Ebene des Kreises geneigt ist, man soll die Projectionsbewegung hinsichtlich der Geschwindigkeit untersuchen.

2. Die Projectionen einer ebenen Bewegung sind gegeben durch die Gleichungen $x = a \cos \varkappa t$, $y = b \sin \varkappa t$, man soll bestimmen: a) die Bahn, b) die Projectionen der Geschwindigkeit, c) die Geschwindigkeit selbst und ihre Richtung.

3. Welche Bewegung ist durch die Gleichungen $x = bt$, $y = \frac{1}{2}ct^2$, welche durch $x = bt$, $y = b \sin \varkappa t$ dargestellt?

4. Ein Punkt bewegt sich auf einer gemeinen Schraubenlinie gleichförmig, seine Bewegung wird auf drei rechtwinklige Axen, nämlich zwei Durchmesser des Basiskreises und die Schraubenaxe projicirt, welches sind die Gleichungen seiner Projectionsbewegungen und die Geschwindigkeiten derselben? Welches sind die Projectionen der Bewegung auf die Ebenen der drei Axen?

5. Dieselbe Aufgabe für die gleichförmige Bewegung auf der Kegelloxodrome.

II. Capitel.

Aequivalenz der Geschwindigkeiten eines Punktes. Parallelogramm und Parallelepiped der Geschwindigkeiten. Zerlegung der Geschwindigkeiten. Construction der Tangenten von Roberval.

§. 1. Ein Punkt besitze zwei Bewegungen; vermöge der ersten allein würde er eine continuirliche Punktreihe $m, m', m'' \dots$ durchlaufen, diese Punktreihe gehöre aber einem System an, welches selbst in Bewegung begriffen ist und an dessen Bewegung sie mithin Theil nimmt. Der bewegliche Punkt erlangt dadurch die zweite Bewegung, welche in jedem Augenblicke dieselbe ist, wie die Bewegung des Systempunktes,

mit welchem er eben zusammentrifft. Dabei kann das System, in welchem der Punkt die erste Bewegung ausführt, unveränderlich oder auch veränderlich sein, sodass die Punktreihe m, m', m''... im absoluten Raume entweder blos fortgeführt wird oder zugleich auch ihre Gestalt ändert. Jene Punktreihe ist die relative Bahn des beweglichen Punktes im System und die erste Bewegung seine relative Bewegung in Bezug auf dieses; sie combinirt sich mit der Bewegung des Systems und bildet die absolute Bewegung des Punktes. Durch die Bewegung des Systems beschreibt die Punktreihe eine Fläche im absoluten Raum, welche der Ort aller Punkte ist, mit welchen der bewegliche Punkt während seiner Bewegung überhaupt zusammentreffen kann; auf dieser Fläche liegt daher auch seine absolute Bahn. — Dieser Vorgang lässt aber noch eine andere Auffassungsweise zu, welche auf der Vertauschbarkeit beider Bewegungen beruht. Ein Punkt von der Punktreihe m, m', m'' . . . beschreibt vermöge der Bewegung des Systems eine gewisse Punktreihe μ, μ', μ''..., ebenso beschreibt m' eine andere, m'' eine dritte u. s. f. Es steht nichts im Wege, diese Bewegung des Punktes m als eine relative Bewegung in einem Systeme anzusehen, welches selbst in Bewegung begriffen ist und durch seine Bewegung die Punktreihe μ', μ'', μ''' . . . in die übrigen Punktreihen überführt. Dadurch wird diese Punktreihe dieselbe Fläche beschreiben, welche vorher die Reihe m, m', m'' . . . beschrieb, und der bewegliche Punkt durchläuft dieselben absoluten Orte auf dieser Fläche, wie früher. Der ganze Unterschied zwischen dieser Auffassung und der vorigen besteht darin, dass dort die Reihe m, m', m'' ... die relative Bahn war, welche der Punkt in Folge der ersten Bewegung beschrieb und die Systempunkte, mit welchen er zusammentraf, vermöge der zweiten Bewegung Punktreihen, wie μ, μ', . . . durchliefen, während hier die Reihe μ, μ', μ'' . . . relative Bahn ist und durch die zweite Bewegung der Punkt getrieben wird, sie zu beschreiben, ihre Punkte aber vermöge der ersten Bewegung Punktreihen, wie m, m', m'' . . . durchlaufen. — Die erwähnte Fläche ist der Ort beider Arten von Punktreihen, welche sich gegenseitig auf ihr durchschneiden, sodass jeder Punkt der absoluten Bahn des beweglichen Punktes der Durchschnittspunkt einer Reihe der ersten und einer Reihe der zweiten Art ist.

Fig. 45.

Es sei nun M (Fig. 45) der Ort des beweglichen Punktes zur Zeit t; wir ziehen durch ihn die Curve (m), die relative Bahn und die Curve (μ), die Bahn des Systempunktes μ, der eben mit m zusammenfällt, so wie die absolute Bahn (M) und legen an diese drei Curven die Tangenten, welche die Bogenelemente Mm', $M\mu'$, MM' derselben enthalten und alle drei in die Tangentenebene im Punkte M der obenerwähnten Fläche fallen. Diese

Tangenten sind die Richtungen der Geschwindigkeiten der relativen Bewegung, der Bewegung des mit M zusammenfallenden Systemspunktes μ und der absoluten Bewegung, die wir mit v_1, v_2 und v bezeichnen und als Längen MV_1, MV_2, MV auf ihnen aufgetragen denken. Da die absolute Bewegung des Punktes M die Resultante der beiden andern ist, so wird auch ihre Geschwindigkeit die Resultante der Geschwindigkeiten jener, nämlich der Geschwindigkeit der relativen Bewegung und der Bewegung des Systempunktes genannt; diese selbst heissen ihre Componenten. Da die drei Geschwindigkeiten erhalten werden, indem wir die drei Bogenelemente durch das Zeitelement dividiren, so folgt, dass sie diesen Bogenelementen proportional sind, sodass

$$\frac{v_1}{Mm'} = \frac{v_2}{M\mu'} = \frac{v}{MM'}.$$

Verbinden wir daher die Endpunkte V_1, V, V_2 durch die Geraden V_1V, V_2V, so folgt, dass das Viereck MV_1VV_2, in welchem die in M zusammenstossenden Seiten und Diagonale die drei Geschwindigkeiten der relativen Bewegung, der Bewegung des Systempunktes und der absoluten Bewegung darstellen, dem verschwindend kleinen Vierecke $Mm'M'\mu$ ähnlich in ähnlicher Lage ist. Beide Vierecke sind, weil sie in die Tangentenebene der Fläche fallen, ebene Figuren, und da das Viereck der Bogenelemente als Parallelogramm verschwindet, weil Mm' und $\mu'M'$ beide als Bogenelement der relativen Bahn in zwei verschiedenen Lagen gleich sind und im Moment des Zusammenfallens der Curven $Mm'm''\ldots$ und $\mu'M'\ldots$ als parallel anzusehen sind, so folgt, dass auch das Viereck $MV_1M'V_2$ ein Parallelogramm ist.

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht darauf, dass die ganze Betrachtung auch mit Zugrundelegung der obenerwähnten zweiten Auffassungsweise der Bedeutung beider Bewegungen unverändert ebenso durchgeführt werden kann, also der Unterschied der Bedeutung der Bewegungen keinen Einfluss auf das Endresultat hat und folglich nicht in den Wortausdruck desselben aufgenommen zu werden braucht, der folgende unter dem Namen des Satzes vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten bekannte Satz:

Die Resultante zweier gleichzeitigen Geschwindigkeiten eines Punktes wird nach Grösse, Richtung und Sinn durch die Diagonale des Parallelogramms dargestellt, welches aus jenen beiden Geschwindigkeiten als Seiten construirt werden kann.

Umgekehrt ist die Geschwindigkeit eines Punktes äquivalent je zwei andern gleichzeitigen Geschwindigkeiten desselben, wenn sie ein Parallelogramm bilden, dessen Diagonale nach Grösse, Richtung und Sinn mit der gegebenen Geschwindigkeit übereinkommt.

Zur Auflösung aller die Zusammensetzung zweier Geschwindigkeiten zu ihrer Resultanten und die Zerlegung einer Geschwindigkeit in zwei Componenten betreffenden Aufgaben dient das Dreieck MVV_2, dessen Seiten v_1, v_2, v sind. In demselben ist insbesondere

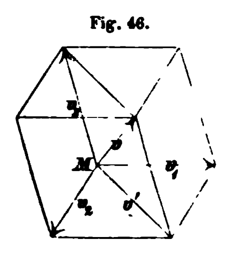
$$v^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2 + 2vv \cdot \cos(vv_1), \quad \frac{\sin vv_1}{v_2} = \frac{\sin vv_2}{v_1} = \frac{\sin v_1 v_2}{v}.$$

Als spezieller Fall des allgemeinen Satzes verdient Erwähnung, dass, wenn die Geschwindigkeiten dieselbe Richtung besitzen, ihre Resultante gleich ihrer Summe oder Differenz ist, je nachdem sie übereinstimmenden oder entgegengesetzten Sinnes sind und dass ihre Resultante verschwindet, wenn sie entgegengesetzt gleich sind. Ferner:

Entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten können einem Punkte beliebig ertheilt oder entzogen werden ohne Einfluss auf seine Bewegung.

§. 2. Besitzt ein Punkt drei Bewegungen, sodass er vermöge der ersten eine continuirliche Punktreihe durchlaufen würde, aber in einem System, welches selbst eine zweite Bewegung besitzt, an welcher jene Punktreihe Theil nimmt und zwar in einem weiteren Systeme, welches einer dritten Bewegung unterworfen ist, so ergibt sich die Geschwindigkeit seiner absoluten Bewegung als die Resultante der drei Geschwindigkeiten, welche er einzeln durch diese drei Bewegungen erlangt, mit Hülfe der Diagonale des über jenen Geschwindigkeiten construirten Parallelepipeds. Denn die Geschwindigkeiten v_1, v_2 (Fig. 46.), welche von den beiden ersten Bewegungen herrühren, sind zusammen aequivalent ihrer Resultante v', welche die Diagonale des Parallelogramms über v_1, v_2 ist, und v' liefert mit v_3 die Resultante v als die Diagonale des Parallelepipeds über v_1, v_2, v_3. (Parallelepiped der Geschwindigkeiten.)

Fig. 46.



Indem man in derselben Weise fortschliesst, gelangt man zu dem allgemeinen Satze über die Resultante einer beliebigen Menge von Geschwindigkeiten eines Punktes, nämlich:

Die Resultante von beliebig vielen Geschwindigkeiten eines Punktes wird nach Grösse, Richtung und Sinn durch die Schlusslinie eines Polygonalzuges dargestellt, dessen Seiten in beliebiger Ordnung genommen nach Grösse, Richtung und Sinn mit den einzelnen Geschwindigkeiten übereinstimmen. (Polygon der Geschwindigkeiten.)

§. 3. Für die Zerlegung einer Geschwindigkeit v in drei Componenten v_x, v_y, v_z parallel drei rechtwinkligen Coordinatenaxen der x, y,

z, sowie umgekehrt für die Zusammensetzung der letzteren zu ersterer, als ihrer Resultanten treten die Formeln des Cap. I, §. 9. in Kraft, denn die Componenten sind nichts anderes als die Projectionen von v auf die Axen oder auf Gerade, welche ihnen parallel laufen.

Behufs der Zusammensetzungen der Geschwindigkeiten $v_1, v_2, \ldots v_n$ eines Punktes, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel $(\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1)$, $(\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2) \ldots (\alpha_n\ \beta_n\ \gamma_n)$ bilden, zerlege man jede von ihnen, wie v_n in ihre drei Componenten $v_n \cos \alpha_n$, $v_n \cos \beta_n$, $v_n \cos \gamma_n$ parallel diesen Axen, vereinige die auf dieselbe Axe bezüglichen Componenten zu den drei Summen

$$X = \Sigma v_n \cos \alpha_n, \quad Y = \Sigma v_n \cos \beta_n, \quad Z = \Sigma v_n \cos \gamma_n,$$

und hierauf diese drei Geschwindigkeiten X, Y, Z, welche dem Systeme aller zusammen aequivalent sind, mit Hülfe des Parallelepipeds der Geschwindigkeiten zu der Resultanten

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

für deren Richtungswinkel a, b, c alsdann die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\cos a}{X} = \frac{\cos b}{Y} = \frac{\cos c}{Z} = \frac{1}{R}.$$

Fallen die Geschwindigkeiten alle in dieselbe Ebene, so gelten für diese als xy-Ebene die einfacheren Formeln

$$X = \Sigma v_n \cos \alpha_n, \quad Y = \Sigma v_n \sin \alpha_n,$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad tg\, a = \frac{Y}{X}.$$

Zu denselben Formeln gelangt man auch unter Anwendung des Satzes, dass die Projection eines geschlossenen Polygons auf irgend eine Axe gleich Null ist. Denn da die Resultante von $v_1, v_2 \ldots v_n$ die Schlusslinie eines aus diesen Strecken gebildeten Polygonalzuges ist, so bildet sie, in entgegengesetztem Sinne genommen, mit diesem Polygonalzuge ein geschlossenes Polygon, und wenn also, wie vorher a, b, c ihre Richtungswinkel gegen die Axen, also $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$ die Richtungswinkel für sie, in entgegengesetztem Sinne genommen, sind, so erhält man z. B. für die x-Axe $\Sigma v_n \cos \alpha_n + R \cos (\pi - a) = 0$ oder $R \cos a = \Sigma v_n \cos \alpha_n$ u. s. w. Auch kann man den Inhalt einer solchen Gleichung dahin aussprechen, dass die Projection der Resultanten auf einer Axe gleich der Summe der Projectionen der Componenten ist.

§. 4. Wird die Bewegung auf eine Ebene projicirt, so folgt daraus, dass die Projection eines geschlossenen Polygons auf einer Ebene wieder ein geschlossenes Polygon ist, dass die Resultante aus den Projectionen der Geschwindigkeiten eines Punktes auf einer Ebene gleich der Projection der Resultanten auf diese Ebene ist.

§. 5. Die im I. Capitel behandelten Projectionen der Geschwindigkeit auf Axen und Ebenen sind Componenten derselben, welche aus

Zerlegungen entspringen, auf welche der Gebrauch des Parallelcoordinatensystems hinführt. Andere Zerlegungen werden durch die Polarcoordinatensysteme veranlasst, wie wir jetzt zeigen wollen.

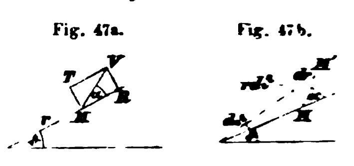


Fig. 47a. Fig. 47b.

Ein Punkt M bewege sich in einer Ebene und seien (Fig. 47a.) r, ϑ seine Polarcoordinaten; seine Geschwindigkeit $v = MV$ soll in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine $v_r = MR$ die Richtung des Radiusvectors besitzt, die andere $v_\vartheta = MT$ senkrecht zu ihm ist. Das Zerlegungsrechteck gibt zunächst, wenn α den Winkel bedeutet, welchen die Tangente der Bahn mit dem Radiusvector bildet, $v_r = v \cos \alpha$, $v_\vartheta = v \sin \alpha$. Die Hilfsfigur (Fig. 47b.) zeigt aber, dass

$$\cos \alpha = \frac{dr}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{r d\vartheta}{ds},$$

wodurch man mit Hilfe von $v = \frac{ds}{dt}$ erhält:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\vartheta = r \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Zu demselben Resultat gelangt man, indem man die Bewegung des Punktes zerlegt in seine relative Bewegung längs des Radiusvectors und die Bewegung, welche der mit M zusammenfallende Punkt des Radiusvectors in Folge der Rotation des Systems um den Pol annimmt. Während M das Bogenelement ds beschreibt, werden bei diesen Bewegungen die Elemente dr und $r d\vartheta$ längs des Radiusvectors und des zu ihm senkrechten Kreisbogens beschrieben und sind folglich $\frac{dr}{dt}$ und $r \frac{d\vartheta}{dt}$ die zugehörigen Geschwindigkeiten.

Da die Zerlegung rechtwinklig erfolgt, so muss $v_r^2 + v_\vartheta^2 = v^2$ sein, wie man dies auch daraus sieht, dass $dr^2 + r^2 d\vartheta^2 = ds^2$ und folglich $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ ist.

§. 6. Ein Punkt beschreibe eine Curve im Raum, seine Bewegung werde auf räumliche Polarcoordinaten r, ϑ, φ bezogen (Radiusvector, Polarwinkel zwischen ihm und der Polaraxe und Polarwinkel zwischen der Ebene des Winkels ϑ und einer Fundamentalebene); die Geschwindigkeit v soll in drei zu einander rechtwinklige Componenten zerlegt werden, eine längs des Radiusvectors, eine senkrecht zu ihm in der Ebene des Winkels ϑ und eine senkrecht zur Ebene dieses Winkels. Sind α, β, γ die Neigungen der Tangente der Bahn gegen diese drei Richtungen, so sind diese Componenten zunächst (Fig. 48a.) $v_r = v \cos \alpha$,

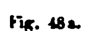
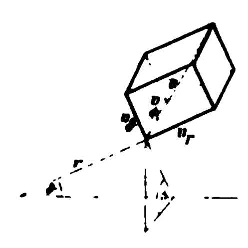
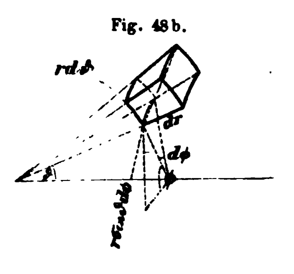


Fig. 48a.



$v_\vartheta = v \cos\beta$, $v_\varphi = v \cos\gamma$. Von ihren Richtungen berühren die der beiden letzteren die mit dem Radiusvector r um den Pol beschriebene Kugel und sie sind alle drei zusammen die Richtungen der Eckkanten eines Elementarparallelepipeds (Fig. 48b.), dessen acht Ecken der Reihe nach die Coordinaten haben: r, ϑ, φ; $r, \vartheta + d\vartheta, \varphi$; $r, \vartheta, \varphi + d\varphi$; $r, \vartheta + d\vartheta, \varphi + d\varphi$; $r + dr, \vartheta, \varphi$; $r + dr, \vartheta + d\vartheta, \varphi$; $r + dr, \vartheta, \varphi + d\varphi$; $r + dr, \vartheta + d\vartheta$; $\varphi + d\varphi$. Aus demselben erhält man

Fig. 48b.



$\cos\alpha = \frac{dr}{ds}$, $\cos\beta = \frac{r\,d\vartheta}{ds}$, $\cos\gamma = \frac{r \sin\vartheta\, d\varphi}{ds}$ und mithin wegen $v = \frac{ds}{dt}$:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\vartheta = r\,\frac{d\vartheta}{dt}, \quad v_\varphi = r \sin\vartheta\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Zu denselben Formeln gelangt man auch, wenn man die Bewegung des Punktes während des Zeitelementes dt spaltet in eine relative Bewegung längs des Radiusvectors und eine sphärische Bewegung um den Pol, diese letztere aber selbst wieder in zwei Rotationen auflöst, eine um eine zur Ebene des Winkels ϑ senkrechte Axe und eine andere um die Polaraxe. Die Elementarwege für diese drei Bewegungen sind dr, $r\,d\vartheta$, $r \sin\vartheta\, d\varphi$ und mithin ihre drei Geschwindigkeiten $\frac{dr}{dt}$, $r\frac{d\vartheta}{dt}$, $r \sin\vartheta\,\frac{d\varphi}{dt}$ wie vorher. Da $ds^2 = dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$ ist, so gibt ihre Quadratsumme wieder $v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$.

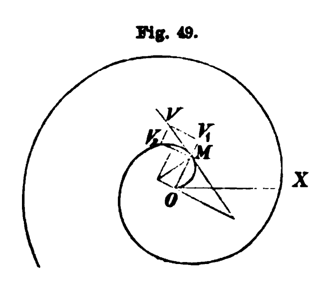
Einige spezielle Fälle sind von Interesse. α) Es sei r constant gleich a. Die Bewegung erfolgt auf einer Kugelfläche. Wegen $dr = 0$ ist $v_r = 0$, $\cos\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\cos\beta = a\,\frac{d\vartheta}{ds}$, $\cos\gamma = a\,\frac{\sin\vartheta\, d\varphi}{ds}$, $v_\vartheta = a\,\frac{d\vartheta}{dt}$, $v_\varphi = a \sin\vartheta\,\frac{d\varphi}{dt}$, $tg\,\gamma = \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta\, d\varphi}$. Sind z. B. v_ϑ und v_φ constant, welche Curve beschreibt der bewegliche Punkt? — β) Es sei φ constant $= \delta$. Die Bewegung ist eine ebene. — γ) Ist ϑ constant $= \lambda$, so ist die Bewegung eine conische; hierbei ist $v_\vartheta = 0$, $v_r = \frac{dr}{dt}$, $v_\varphi = \sin\lambda\,\frac{d\varphi}{dt}$, $v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2\lambda \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$. Welche Curve beschreibt der Punkt, wenn v_ϑ und v_φ constant bleiben?

§. 7. Von der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten hat *Roberval* (1602—1675) eine sehr ingeniöse Anwendung auf die Construction der Tangente der Curven gemacht, welche von einem beweglichen Punkte

beschrieben werden, indem er die Bewegung in zwei oder mehrere Componenten zerfällt, die Verhältnisse ihrer Geschwindigkeiten bestimmt und hieraus die Richtung ihrer Resultante sucht, welche keine andere, als die der Tangente ist. Er hat diese Methode auf 13 Curven angewandt, darunter auf die Kegelschnitte, die Conchoïde, die archimedische Spirale, die Cycloïde u. s. w. Einige Beispiele hiervon mögen folgen.

1. Die archimedische Spirale. Diese Curve wird von einem Punkte beschrieben, welcher sich auf einer Geraden gleichförmig immer in demselben Sinne bewegt, während diese selbst sich in der Ebene um einen ihrer Punkte mit constanter Winkelgeschwindigkeit umdreht. Ist O der Pol und zugleich das Rotationscentrum, OX die Polaraxe, $OM = r$ und Winkel $MOX = \vartheta$, ist ferner ω die constante Winkelgeschwindigkeit, c die relative Geschwindigkeit längs der Geraden, so wird $r = ct$, $\vartheta = \omega t$, oder wenn $\frac{c}{\omega} = a$, also $c = a\omega$ gesetzt wird, $r = a\omega t$, $\vartheta = \omega t$ und durch Elimination von ω ergibt sich die Gleichung der Curve, nämlich $r = a\vartheta$. Das Verhältniss der Geschwindigkeiten des Punktes ist $a : r$; trägt man daher auf dem Radiusvector OM von M aus $MV_1 = a$ und senkrecht dazu übereinstimmend mit dem Sinne der Rotation $MV_2 = r$ auf, so ist die Diagonale MV des über diesen Linien als Seiten construirten Parallelogramms die Richtung der Geschwindigkeit und folglich die Tangente. Lässt man das Parallelogramm MV um die Ecke M im Sinne der Rotation der Geraden sich um $\frac{\pi}{2}$ umdrehen, so wird die Tangente MV zur Normalen und da $MV_2 = MO$ ist, wird V_2V das Perpendikel auf den Radiusvector im Pol und folglich V_2V die Polarsubnormale. Hieraus erhellt die bekannte Eigenschaft der archimedischen Spirale, dass ihre Polarsubnormale constant gleich a ist; diese Constante ist die Länge des dem Polarwinkel $\vartheta = 2\pi$ entsprechenden Radiusvectors, dividirt durch 2π.

Fig. 49.

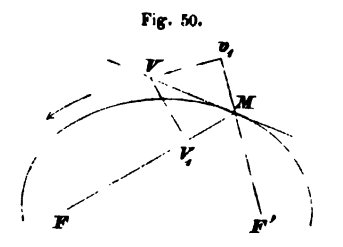


2. Nach derselben Methode kann man die Tangente für jede Polarcurve $r = f(\vartheta)$ suchen. Denn die Componenten der Geschwindigkeit des beschreibenden Punktes längs des Radiusvectors und senkrecht dazu sind $\frac{dr}{dt}$ und $r\,\frac{d\vartheta}{dt}$, ihr Verhältniss also $\frac{dr}{r\,d\vartheta} = \frac{\frac{dr}{d\vartheta}}{r}$, mit Hülfe dessen das Parallelogramm der Geschwindigkeiten oder ein ihm ähnliches hergestellt werden kann.

3. Die Ellipse. Sind F, F' (Fig. 50.) die Brennpunkte, so kann die Geschwindigkeit des beschreibenden Punktes M in Bezug auf

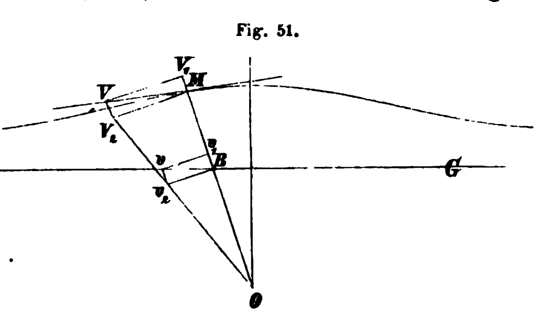
jeden von ihnen in zwei Componenten zerlegt werden, nämlich in eine längs des Radiusvectors und eine andere senkrecht hiezu. Da aber die Summe $FM + F'M$ der Radienvectoren constant bleibt, also der eine um die nämliche Grösse abnehmen muss, um welche der andre wächst und umgekehrt, so folgt, dass die Componente der Geschwindigkeit längs des wachsenden Radiusvectors nach dem Aussenraume der Curve, die längs des abnehmenden nach dem Innenraume derselben gerichtet, in beiden Fällen aber von derselben Grösse sein muss. Erfolgt also die Drehung der Radienvectoren im Sinne des Pfeils, so ist die Geschwindigkeit MV_1 in der Richtung MF, die gleichgrosse Mv_1 aber in der Richtung $F'M$ aufzutragen. Ein Perpendikel in V_1 auf FM errichtet muss durch die Ecke des Parallelogramms der Geschwindigkeiten gehen, welchem MV_1 als Seite angehört, ein Perpendikel in v_1 auf $F'M$ errichtet durch die des entsprechenden Parallelogramms, welches Mv_1 zur Seite hat. Die Geschwindigkeit des Punktes M ist aber die gemeinsame Diagonale dieser beiden Parallelogramme, daher ist der Schnittpunkt V beider Perpendikel ein Punkt der Tangente. Es folgt hieraus der Satz, dass die Tangente der Ellipse den Winkel der Radienvectoren halbirt. — Dieselben Betrachtungen gelten mit geringen Modificationen für die Hyperbel und die Parabel.

Fig. 50.



4. Die Conchoïde. Diese Curve wird von einem Punkte M einer Geraden beschrieben, welche sich um einen festen Punkt O der Ebene dreht, während ein anderer Punkt B derselben eine feste Gerade G durchläuft. (S. Thl. I. Cap. III. §. 10.) Man kann die Geschwindigkeit der Punkte B und M längs des Radiusvectors OBM und senkrecht zu diesem zerlegen. Da die beiden Punkte feste Punkte der beweglichen Geraden sind und also während der Bewegung constanten Abstand von einander haben, so sind ihre Elementarwege und mithin auch ihre Geschwindigkeiten längs des Radiusvectors gleich gross; die Componenten ihrer Geschwindigkeit senkrecht zum Radiusvector, welche sie der Rotation der Geraden OB um O verdanken, stehen aber im Verhältniss ihrer Abstände von O. Nun ist die Geschwindigkeit von B längs der festen Geraden G gerichtet; sie oder eine ihr proportionale Länge, welche beliebig wählbar ist, sei Bv

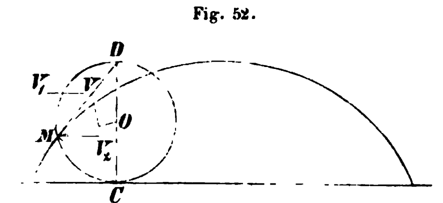
Fig. 51.



und Bv_1, Bv_2 seien ihre ebengenannten Componenten. Trägt man daher $MV_1 = Bv_1$ auf dem Radiusvector OM auf, zieht die Gerade Ov_2 und errichtet in M das Perpendikel MV_2 auf OM, so sind MV_1 und MV_2 die Geschwindigkeitscomponenten von M und mithin ist die Diagonale MV des über ihnen construirten Rechtecks die Tangente der Conchoïde in M.

5. Die Cycloïde. Die Curve wird von einem Punkte M der Peripherie eines Kreises beschrieben, welcher in der Ebene über eine Gerade hinrollt. Zerlegen wir die Geschwindigkeit des Punktes M in zwei Componenten, eine parallel der Basis, auf welcher der Kreis rollt und eine andere tangentiell an den rollenden Kreis, so entspricht diese Zerlegung einer Spaltung der Elementarbewegung um den Berührungspunkt C des Kreises mit der Geraden als Momentancentrum in eine Rotation um den Mittelpunkt O und eine Translation parallel der Basis. Ist $d\vartheta$ die Elementaramplitude um C, so sind die beiden Componenten der Geschwindigkeit des

Fig. 52.



Punktes M folgende: $OM \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = MV_1$ und $OC \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = MV_2$; sie sind also einander gleich. Daher ist $\triangle MV_2V$ gleichschenklig und ähnlich $\triangle COM$ und da zwei homologe Seitenpaare OC, MV_2; OM, V_2V zu einander senkrecht sind, so findet dies auch bei dem dritten Paare CM, MV statt und geht mithin die Richtung der Tangente MV durch den Punkt D, den Gegenpunkt des Berührungspunktes C.

III. Capitel.

Aequivalenz der Translationsgeschwindigkeiten und der Winkelgeschwindigkeiten um parallele Axen. Geschwindigkeiten im unveränderlichen System, welches sich parallel einer Ebene bewegt.

§. 1. In einem in Bewegung begriffenen System besitzt jeder Punkt in jedem Momente eine Geschwindigkeit, deren Grösse das Bogenelement seiner Bahn, welches er zu beschreiben im Begriff steht, dividirt durch das Zeitelement ist, und deren Richtung in die Tangente der Bahn fällt, in dem Sinne genommen, in welchem das Bogenelement beschrieben wird. Vermöge des Zusammenhanges der Systempunkte unter einander sind die Geschwindigkeiten derselben von einander abhängig, so dass die Geschwindigkeiten aller Punkte bestimmt werden können, sobald die Geschwindigkeiten einer gewissen Anzahl derselben gegeben sind. Im unveränderlichen System sind die Bahnelemente aller Punkte bekannt,

sobald die Elementarbewegung des Systems um die Momentanaxe bekannt ist, und diese kann aus den Bewegungen dreier Punkte, sowie aus den ihr äquivalenten Translationen und Rotationen gefunden werden. Aehnliches findet bei den Geschwindigkeiten statt, sodass der Lehre von der Aequivalenz der unendlich kleinen Bewegungen eines Systemes eine Theorie der Aequivalenz der Geschwindigkeiten zur Seite steht, deren Sätze mit geringen Modificationen im Wortlaut aus den ihnen dort entsprechenden abgeleitet werden, indem man die dort aufgestellten Gleichungen mit dem Zeitelemente dividirt und den Begriff der Geschwindigkeit einführt.

§. 2. Das unveränderliche System besitze zur Zeit t eine unendlich kleine Translation, vermöge welcher seine Punkte sämmtlich parallele und congruente Bogenelemente ds in demselben Sinne während des folgenden Zeitelementes dt beschreiben. Die gemeinschaftliche Geschwindigkeit derselben ist alsdann $v = \frac{ds}{dt}$ und heisst die Translationsgeschwindigkeit des Systems. Besitzt das System während einer endlichen Zeitdauer eine Translationsbewegung, so ist v mit t im Allgemeinen nach Grösse und Richtung veränderlich; in jedem Augenblick aber haben die Geschwindigkeiten aller Punkte dieselbe Grösse und Richtung, sowie denselben Sinn.

Besitzt das System zugleich zwei oder mehrere unendlich kleine Translationen, so resultirt aus ihnen eine einzige Translation und dient das Parallelogramm, Parallelepiped und Polygon der Geschwindigkeiten dazu, um die Geschwindigkeit jedes einzelnen Punktes und hiermit die resultirende Translationsgeschwindigkeit des Systems zu finden.

Das System besitze zur Zeit t eine unendlich kleine Rotation $d\vartheta$ um eine Axe (α, a). Vermöge derselben beschreiben die Punkte in der Einheit der Entfernung von der Axe im Zeitelemente Bogenelemente gleich $d\vartheta$ und ist ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$.. Diese Geschwindigkeit heisst die Winkelgeschwindigkeit des Systems um die Axe α zur Zeit t; indem wir ihre Grösse als Länge auf der Axe α auftragen und durch eine angefügte Pfeilspitze den Sinn der Rotation ausdrücken, wie wir dies bereits im I. Thl. bei den Rotationsamplituden gethan haben, erhalten wir ein Symbol, welches uns augenblicklich alle Umstände der Bewegung des Systems zur Zeit t vergegenwärtigt. Aus der Winkelgeschwindigkeit des Systems ergibt sich sofort die Grösse der Geschwindigkeit aller Systempunkte. Das von einem Punkte in der Entfernung r von der Axe im Zeitelemente dt beschriebene Bogenelement ist dem Abstande r proportional, nämlich $r\,d\vartheta$ und folglich ist die Geschwindigkeit des Punktes $v = r\frac{d\vartheta}{dt} = r\omega$. Indem wir diese Betrach-

tungen mit den im I. Theile enthaltenen zusammenfassen, erhalten wir den Satz:

Die Geschwindigkeiten der Punkte eines um eine Axe rotirenden Systems sind durch die Winkelgeschwindigkeit ω desselben um diese Axe bestimmt; alle Punkte in derselben Entfernung r von der Axe besitzen dieselbe Geschwindigkeit $v = r \cdot \omega$, ihre Richtung ist senkrecht zu der Ebene, welche durch die Axe und den einzelnen Punkt gelegt werden kann; die Punkte einer solchen Ebene haben gemeinsame Geschwindigkeitsrichtung, und zwar von demselben Sinne, wenn sie auf derselben, von entgegengesetztem Sinne, wenn sie auf verschiedenen Seiten der Axe liegen. Die Geschwindigkeit ist für die Punkte der Axe Null und wächst dem Abstande von der Axe proportional.

§. 3. Das System besitze zur Zeit t eine Winkelgeschwindigkeit ω um eine Axe (α, a) und zugleich eine Translationsgeschwindigkeit v senkrecht zu dieser Axe. Vermöge der ersteren erleidet es in dem auf t folgenden Zeitelemente dt eine unendlich kleine Rotation $d\vartheta$ um α, vermöge der letzteren eine unendlich kleine Translation $d\tau$ in der Richtung von v und hat man daher

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad v = \frac{d\tau}{dt}.$$

Nach Cap. II. §. 6. im I. Theile sind beide unendlich kleine Bewegungen zusammen äquivalent einer Elementarrotation gleich $d\vartheta$ und von demselben Sinne um eine zu α parallele Axe (β, b), welche mit α zusammen in einer zur Translationsrichtung senkrechten Ebene liegt, und zwar auf derjenigen Seite von α, auf welcher die Punkte dieser Ebene durch die Rotation und die Translation entgegengesetzte Bewegungen erlangen, in einem Abstande d von α, welcher aus der Gleichung $d\tau = d \cdot d\vartheta$ sich ergibt. Dividirt man diese Gleichung mit dt und führt die Werthe ω und v in dieselbe ein, so erhält man d durch ω und v ausgedrückt, nämlich

$$d = \frac{v}{\omega}$$

und ergibt sich mit Rücksicht auf die weiteren a. a. O. gemachten Bemerkungen der Satz:

Die gleichzeitige Verbindung einer Winkelgeschwindigkeit ω um eine Axe (α, a) und einer Translationsgeschwindigket v senkrecht zu dieser Axe in einem unveränderlichen System ist äquivalent einer Winkelgeschwindigkeit gleich und gleichen Sinnes mit ω um eine zur Axe α parallele Axe (β, b), welche mit α in einer zur Richtung der Translationsgeschwindigkeit senkrechten Ebene auf der-

jenigen Seite von α liegt, auf welcher die Punkte dieser Ebene durch ω und v entgegengesetzte Geschwindigkeiten erlangen und zwar in einem Abstande d von α, welcher erhalten wird, indem man die Translationsgeschwindigkeit v durch die Winkelgeschwindigkeit ω dividirt.

§. 4. Das System besitze zur Zeit t zwei Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' um zwei parallele Axen (α, a), (β, b); vermöge derselben erleidet dasselbe um die beiden Axen in dem nächsten Zeitelemente dt die unendlich kleinen Rotationen $d\vartheta$, $d\vartheta'$, welche mit ω, ω' durch die Gleichungen

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \omega' = \frac{d\vartheta'}{dt}$$

verbunden sind. Nach Cap. II. §. 7. im I. Theile sind $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ zusammen äquivalent einer Elementarrotation um eine zu α, β parallele Axe, welche in die Ebene $\alpha\beta$ fällt und den Parallelstreifen der Axen im umgekehrten Verhältniss der Amplituden $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ theilt. Die Grösse dieser Elementarrotation ist je nach Beschaffenheit des Sinnes von $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ die Summe der Differenz dieser Amplituden und ihr Sinn wird aus dem Sinne dieser leicht erkannt. Indem man die a. a. O. entwickelten Gleichungen mit dt dividirt und die Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' in dieselben einführt, erhält man die folgenden den dort entwickelten analogen Sätze:

Zwei Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' eines unveränderlichen Systems um zwei parallele Axen (α, a), (β, b) sind zusammen äquivalent einer einzigen Winkelgeschwindigkeit um eine jenen Axen parallele dritte Axe, welche in die Ebene $\alpha\beta$ fällt und den Parallelstreifen $\alpha\beta$ im umgekehrten Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten theilt und zwar als innere Theilungslinie, wenn die Winkelgeschwindigkeiten übereinstimmenden, als äussere Theilungslinie, wenn sie entgegengesetzten Sinnes sind; im letzteren Falle liegt sie auf der Seite der der grösseren Winkelgeschwindigkeit entsprechenden Axe. Die resultirende Winkelgeschwindigkeit ist im ersten Falle gleich der Summe, im zweiten gleich der Differenz der gegebenen Winkelgeschwindigkeiten und ihr Sinn stimmt im ersten Falle mit dem gemeinschaftlichen Sinne beider, im letzten mit dem Sinne der grösseren von ihnen überein. Sind die Winkelgeschwindigkeiten entgegesetzt gleich, so rückt die resultirende Axe ins Unendliche und werden beide zusammen einer Translationsgeschwindigkeit äquivalent, deren Richtung senkrecht zu der Axenebene $\alpha\beta$ ist und eine Grösse besitzt gleich dem Produkte des Axenabstandes und der

gemeinschaftlichen Grösse beider Winkelgeschwindigkeiten.

Die gleichzeitige Verbindung zweier entgegengesetzt gleicher Winkelgeschwindigkeiten um zwei parallele Axen heisse ein Winkelgeschwindigkeitspaar (Rotationsgeschwindigkeitspaar oder kürzer, wenn keine Verwechslung mit dem Rotationsamplitudenpaar I. Thl. Cap. II., §. 4. zu befürchten ist, ein Rotationspaar), die Richtung und der Sinn der ihr äquivalenten Translationsgeschwindigkeit seine Axenrichtung und das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit und dem Axenabstand, welches gleich der Translationsgeschwindigkeit ist, sein Moment. Dies Moment tragen wir als Länge auf der Axe des Paares auf und versehen dieselbe mit einer Pfeilspitze, um den Sinn der Translation zu markiren; diese Pfeilspitze zeigt nach derjenigen Seite der Axenebene hin, von welcher aus die Pfeilspitzen der Winkelgeschwindigkeiten, wenn letztere auf den Axen des Paares in dem ihnen entsprechenden Sinne aufgetragen werden, mit dem Sinne der Uhrzeigerbewegung übereinstimmend gerichtet erscheinen.

Aus der Aequivalenz eines Rotationspaares mit einer Translationsgeschwindigkeit folgt unmittelbar, dass alle Rotationspaare von derselben Axenrichtung und demselben Momente einander äquivalent sind, dass man die Axen in ihrer Ebene verschieben und drehen, die Ebene des Paares parallel mit sich im System verlegen, sowie dass man den Abstand der Axen beliebig ändern kann, wenn nur zu gleicher Zeit die Winkelgeschwindigkeit im reciproken Verhältniss geändert wird. Wird die Axenrichtung des Paares in die entgegengesetzte verwandelt, so kehrt die dem Paare äquivalente Translationsgewindigkeit den Sinn um.

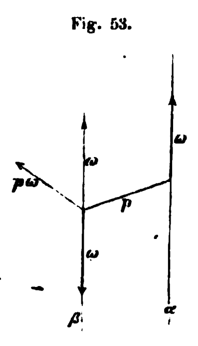
Ein spezieller Fall des obigen allgemeinen Satzes über die Aequivalenz zweier Winkelgeschwindigkeiten um parallele Axen tritt ein, sobald der Axenabstand sich auf Null reducirt. In diesem Falle fallen die Axen zusammen und addiren oder substrahiren sich die Winkelgeschwindigkeiten auf der mit ihnen gleichfalls zusammenfallenden Axe der resultirenden Winkelgeschwindigkeit, je nachdem sie gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind. Man folgert hieraus unmittelbar, dass beliebig viele Winkelgeschwindigkeiten um dieselbe Axe eine resultirende Winkelgeschwindigkeit um dieselbe Axe liefern, welche gleich der algebraischen Summe der einzelnen Winkelgeschwindigkeiten ist, wenn diese in dem einen Sinne der Axe als positiv, im entgegengesetzten als negativ angesehen werden.

Verschwindet der Axenabstand oder die Winkelgeschwindigkeit, also überhaupt das Moment eines Rotationspaares, so wird die ihm äquivalente Translationsgeschwindigkeit Null. Gleiche und entgegengesetzte

Winkelgeschwindigkeiten um dieselbe Axe sind daher ohne Einfluss auf den Bewegungszustand des Systems.

Es sei eine Winkelgeschwindigkeit ω um eine Axe α gegeben (Fig. 53.). Irgendwo im System ziehe man eine mit α parallele Axe β und ertheile dem System um diese zwei entgegengesetzt gleiche Winkelgeschwindigkeiten von der Grösse ω. Die eine von ihnen kann dann angesehen werden als die von α nach β verlegte Winkelgeschwindigkeit, während die andere mit der Winkelgeschwindigkeit um α ein Rotationspaar bildet, dessen Moment das Produkt aus ω und dem Abstande p beider Axen, also äquivalent einer Translationsgeschwindigkeit gleich diesem Momente ist, senkrecht zur Ebene $\alpha\beta$, von dem Sinne, wie er durch die Axenrichtung des Rotationspaares angegeben wird. Man kann daher jede Winkelgeschwindigkeit um eine Axe α ersetzen durch eine gleiche Winkelgeschwindigkeit desselben Sinnes um eine beliebige mit α parallele Axe β in Verbindung mit einem Rotationspaare, dessen Moment gleich dem Produkte aus dem Abstande beider Axen und der Winkelgeschwindigkeit ist. Die diesem Momente äquivalente Translationsgeschwindigkeit ist senkrecht zu der Ebene $\alpha\beta$ und von dem Sinne, wie er durch die Axenrichtung des Rotationspaares angegeben wird.

Fig. 53.

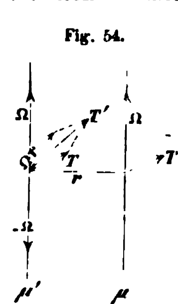


§. 5. Das System besitze zur Zeit t beliebig viele Winkelgeschwindigkeiten ω, ω', ω'', ... um die Axen (α, a), (α', a'), (α'', a'') ...., welche sämmtlich einander parallel laufen. Irgendwo im System nehmen wir eine mit ihnen gleichfalls parallele Axe μ an und ertheilen dem System um sie zwei gleiche und entgegengesetzte Winkelgeschwindigkeiten ω, $-\omega$, desgleichen zwei andere ω', $-\omega'$, zwei weitere ω'', $-\omega''$, u. s. f. Da diese zugefügten Winkelgeschwindigkeiten sich paarweise tilgen, so ist das System der Winkelgeschwindigkeiten ω um die Axen α äquivalent sich selbst in Verbindung mit diesen zugefügten Winkelgeschwindigkeiten. Nun kann man aber anders gruppiren. Die Winkelgeschwindigkeiten ω, ω', ω'' ... um μ liefern eine resultirende Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \Sigma\omega$ um dieselbe Axe; die Winkelgeschwindigkeit $-\omega'$ um μ bildet mit ω um α (wie Fig. 53.) ein Rotationspaar, dessen Moment $p\omega$ ist, wenn p den Axenabstand $\mu\alpha$ bedeutet; in ähnlicher Weise erhält man aus $-\omega'$ um μ und ω' um α' das Paar $p'\omega'$, aus $-\omega''$ um μ und ω'' um α'' das Paar $p''\omega''$ u. s. f. Da die Ebenen aller dieser Paare durch die Axe μ gehen, so sind ihre Axenrichtungen sämmtlich senkrecht zu μ und liefern die ihnen äquivalenten Translationsgeschwindigkeiten mit Hülfe eines ebenen Polygons eine resul-

tirende Translationsgeschwindigkeit $T = Res.\ (p\omega,\ p'\omega',\ p''\omega'',\ \ldots)$, welche man sofort auch in ein Rotationspaar umsetzen kann. Sie ist gleichfalls senkrecht zur Axe μ und die Ebene eines ihr äquivalenten Rotationspaares ist parallel μ. Hieraus erhellt, dass die sämmtlichen Winkelgeschwindigkeiten ω, ω', ω''... um die parallelen Axen α, α', α''... zusammen äquivalent sind einer resultirenden Winkelgeschwindigkeit Ω um eine beliebig wählbare mit den gegebenen Axen parallele Axe μ des Systems, gleich der algebraischen Summe aller ω, in Verbindung mit einem resultirenden Rotationspaare T, dessen Axenrichtung senkrecht zu μ ist. Tragen wir Ω auf μ auf mit dem Zeichen seines Sinnes und ziehen etwa durch den Anfangspunkt der Strecke, welche Ω darstellt, eine Strecke, welche T nach Grösse, Richtung und Sinn ausdrückt, so genügen diese beiden Symbole, um den Bewegungszustand des Systems zur Zeit t vollkommen zu charakterisiren.

Da die Axe μ willkührlich wählbar ist, so kann man diese Reduction der Winkelgeschwindigkeiten auf die Grössen Ω und T sich für sämmtliche Stralen μ des Parallelstralenwinkels von der Richtung der gegebenen Axen ausgeführt denken. Alle diese Reductionen haben dieselbe resultirende Winkelgeschwindigkeit Ω, nämlich die Summe aller mit sich parallel auf die Axe μ übertragenen Winkelgeschwindigkeiten, sie unterscheiden sich aber im Allgemeinen durch die Grösse und die Richtung von T, weil mit einer Aenderung der Lage der Axe μ eine Aenderung der Ebenen $\mu\alpha$, $\mu\alpha'$, $\mu\alpha''$, ... und eine Aenderung der Axenabstände p, p', p'', ... verbunden ist, von welchen beiderlei Dingen T abhängt. Indessen ist es leicht, den Zusammenhang dieser verschiedenen Rotationsarten zu erkennen, indem man die für irgend eine Axe μ ausgeführte Reduction auf jede beliebige andere Axe μ' übertragen kann. Sind nämlich Ω und T (Fig. 54.) die resultirende Winkelgeschwindigkeit und das Moment des resultirenden Rotationspaares für die Axe μ, so ertheile man dem System um die Axe μ' die gleichen und entgegengesetzten Winkelgeschwindigkeiten Ω und $-\Omega$. Die auf μ' aufzutragende Grösse Ω stellt alsdann bereits die resultirende Winkelgeschwindigkeit der Reduction für die Axe μ' dar. Um das Moment T' des ihr zugehörigen Rotationspaares zu finden, genügt es, mit T das Rotationspaar zu vereinigen, welches von den Winkelgeschwindigkeiten Ω um μ und $-\Omega$ um μ' gebildet wird. Sein Moment ist Ωr, wenn r den Abstand der Axen μ, μ' bezeichnet. Die Richtung der ihm äquivalenten Translationsgeschwindigkeit ist senkrecht zur Ebene $\mu\mu'$ und ihr Sinn nach der Seite dieser Ebene gerichtet, von wo aus gesehen die Pfeilspitzen des Rotationspaares die Uhrzeigerbewegung andeuten. Die beiden Translationsgeschwindigkeiten T und Ωr sind aber äquivalent einer

Fig. 54.



Translationsgeschwindigkeit T', welche die Diagonale des über ihnen als Seiten construirten Parallelogramms ist, und ist senkrecht zu μ'. Da Ω um μ' und T' zusammen äquivalent Ω um μ und T sind, diese selbst aber dem System der Winkelgeschwindigkeiten ω, ω', ω'' ... äquivalent waren, so stellen sie die resultirende Winkelgeschwindigkeit und das Rotationspaar der Reduction für die Axe μ' dar.

Ist $\Omega = \Sigma\omega = 0$, so reducirt sich das System der Winkelgeschwindigkeiten auf ein Rotationspaar T oder also auf eine Translationsgeschwindigkeit; dies Rotationspaar ist beliebig im System verlegbar bei parallel bleibender Axenrichtung. Ist aber Ω nicht Null, so lässt sich eine Axe finden von solcher Lage, dass die ihr entsprechende Reduction der Winkelgeschwindigkeiten eine resultirende Winkelgeschwindigkeit Ω liefert, welcher ein Rotationspaar $T = 0$ zugehört. Sind nämlich, wie oben, Ω und T für irgend eine der Axe μ entsprechende Reduction bekannt, so lege man durch μ senkrecht zu der Richtung der Translationsgeschwindigkeit T eine Ebene. Dieselbe zerfällt durch die Axe μ in zwei Felder; die Axen μ', parallel μ in dem einen Feld gelegen, veranlassen bei der Uebertragung der für die Axe μ ausgeführten Reduction auf sie ein Rotationspaar Ωr, dessen Axenrichtung mit der Axenrichtung von T auf dieselbe Seite der Ebene fällt und sich also mit T summirt, um T' zu bilden; die Axen des anderen Feldes dagegen liefern solche Ωr, deren Axenrichtungen der von T entgegengesetzt sind und folglich bei der Bildung von T' entgegengesetztes Zeichen mit T erhalten. Da nun der absolute Werth von Ωr mit dem Abstande der Axen μ' und μ ohne Grenze wächst, so lässt sich in dem letzteren Felde eine Axe in solchem Abstande r finden, dass $T - \Omega r = 0$ wird und in Folge dessen T' verschwindet.

Der Abstand r dieser Axe, welche die Eigenschaft besitzt, dass die Winkelgeschwindigkeit Ω um sie allein dem gegebenen Systeme der Winkelgeschwindigkeiten ω äquivalent ist, folgt aus der eben aufgestellten Bedingung, nämlich $r = \frac{T}{\Omega}$. — Diese Axe ergibt sich ebenso unter Anwendung des Satzes in §. 3.; sie ist die Momentanaxe der Bewegung des Systems. — Sind Ω und T beide Null, so ist das gegebene System der Winkelgeschwindigkeiten äquivalent der momentanen Ruhe.

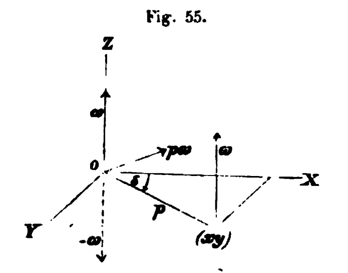
Gehen wir von der Momentanaxe aus und übertragen die Reduction auf irgend eine andere Axe, so tritt zu Ω ein Rotationspaar hinzu, dessen Moment Ωr mit dem Abstande r zunimmt, und welches für alle Axen, die denselben Abstand r von jener haben, denselben Werth besitzt. Die sämmtlichen Reductionsaxen gruppiren sich also in Bezug auf die Momente der bei ihnen auftretenden Rotationspaare symmetrisch um die Momentanaxe herum auf Cylinderflächen. Die Momentanaxe ist zugleich die Axe eines Ebenenbüschels, zu dessen Ebenen die Axen-

richtungen der Rotationspaare senkrecht sind; jede solche Ebene wird von der Momentanaxe in zwei Felder getheilt, für welche die Axenrichtungen der Rotationspaare entgegengesetzten Sinnes werden.

§. 6. Um die Reduction der Winkelgeschwindigkeiten um parallele Axen analytisch durchzuführen, legen wir der Betrachtung ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y, z zu Grunde, dessen xy-Ebene senkrecht zu der Richtung der Axen und für welches der positive Sinn der z-Axe mit der Axenrichtung derjenigen Winkelgeschwindigkeiten übereinkommt, durch welche die positive x-Axe im Sinne der Uhrzeigerbewegung durch eine Drehung um $\frac{1}{2}\pi$ in die Richtung der positiven y-Axe übergeführt werden kann.

Es sei nun ω irgend eine der Winkelgeschwindigkeiten, (α, a) ihre Axe und x, y die Coordinaten des Schnittpunktes dieser mit der xy-Ebene, ω selbst sei als Länge von diesem Schnittpunkte aus auf der Axe in dem entsprechenden Sinne aufgetragen (Fig. 55.). Wir ertheilen dem System um die mit der z-Axe zusammenfallende Gerade des Systems die beiden entgegengesetzten Winkelgeschwindigkeiten ω und $-\omega$ und tragen sie vom Ursprung O aus auf dieser Axe auf. Dadurch erhalten wir, wie früher für die Winkelgeschwindigkeit ω um α dieselbe Winkelgeschwindigkeit um die z-Axe und ein Rotationspaar $(\omega, -\omega)$, dessen Moment $p\omega$ ist, wo p den Abstand des Punktes xy vom Ursprung O bezeichnet. Die dem Momente $p\omega$ äquivalente Translationsgeschwindigkeit, welche parallel der xy-Ebene und senkrecht zur Ebene des Rotationspaares im Sinne der Axe desselben gerichtet ist, tragen wir an O auf und zerlegen sie in zwei Componenten, die eine parallel der x-Axe, die andere parallel der y-Axe. Ist ω auf α im Sinne der positiven z-Axe gerichtet, sind x, y beide positiv, welches der Normalfall ist, auf welchen alle anderen Fälle durch den Wechsel der Vorzeichen sich reduciren lassen und bildet die Länge p, von O nach xy gerichtet, mit der x-Axe im positiven Drehungssinne den Winkel ε, so bildet die Translationsgeschwindigkeit mit der x-Axe den Winkel $\frac{3}{2}\pi + \varepsilon$ und mit der y-Axe den Winkel $\pi + \varepsilon$ und sind folglich ihre Componenten $p\omega \sin \varepsilon$ und $-p\omega \cos \varepsilon$ oder, da $p \cos \varepsilon = x$, $p \sin \varepsilon = y$ ist: ωy in der Richtung der x-Axe und $-\omega x$ in der Richtung der y-Axe.

Fig. 55.



Führen wir dieselbe Construction für alle Winkelgeschwindigkeiten $\omega, \omega', \omega'', \ldots$, welche wir auf ihren Axen (α, a), (β, b), (γ, c) ... aufgetragen denken, aus, so erhalten wir 1) auf der z-Axe sämmtliche Winkelgeschwindigkeiten ω, deren Resultante die algebraische Summe $\Omega = \Sigma\omega$

ist und 2) längs der x- und y-Axe die Translationsgeschwindigkeiten $T_x = \Sigma\omega y$, $T_y = -\Sigma\omega x$, deren Resultante $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \sqrt{(\Sigma\omega y)^2 + (\Sigma\omega x)^2}$ mit der x-Axe einen Winkel a bildet, für welchen $tg\, a = \frac{T_y}{T_x} = -\frac{\Sigma\omega x}{\Sigma\omega y}$.

Um die vorstehende, für den Coordinatenursprung ausgeführte Reduction dahin zu verallgemeinern, dass der gewählte Reductionspunkt O ein beliebig annehmbarer werde, genügt eine Transformation der Coordinaten. Nehmen wir nämlich ein anderes, dem bisherigen paralleles Coordinatensystem an, in Bezug auf welches der Punkt O die Coordinaten x_1, y_1 besitze und bezeichnen wir in Bezug auf dieses die Coordinaten des Schnittpunktes der Axen α mit der xy-Ebene jetzt wiederum mit x, y, so treten an die Stelle der bisherigen Coordinaten x, y, in soweit sie nicht als Indices verwandt wurden, die Differenzen $x - x_1$ und $y - y_1$ und gehen unsere Formeln über in die folgenden:

$$\Omega = \Sigma\omega\,, \quad T_x = \Sigma\omega y - \Omega y_1\,, \quad T_y = -\Sigma\omega x + \Omega x_1$$

$$T^2 = T_x^2 + T_y^2, \quad tg\, a = \frac{T_y}{T_x}\,.$$

Für die Coordinaten x_1 y_1 des Schnittpunktes der Momentanaxe mit der xy-Ebene erhält man hieraus, indem man $T = 0$ setzt, welches die Gleichungen $T_x = 0$, $T_y = 0$ nach sich zieht:

$$\Omega x_1 = \Sigma\omega y$$
$$\Omega y_1 = \Sigma\omega x\,,$$

woraus man, wie oben, erkennt, dass, so lange $\Omega = \Sigma\omega$ nicht verschwindet, die Momentanaxe in endlicher Entfernung sich befindet. Ferner erhält man, indem man $\Omega = 0$ und $T = 0$ setzt, für die Bedingungen der gegenseitigen Tilgung der Winkelgeschwindigkeiten des Systems zur Zeit t (momentaner Stillstand des Systems):

$$\Sigma\omega = 0, \qquad \Sigma\omega y = 0, \qquad \Sigma\omega x = 0\,.$$

§. 7. Die Lehren der vorstehenden §§. setzen uns in den Stand, alles, was die Geschwindigkeiten in einem System betrifft, welches sich einer Ebene parallel bewegt, zu untersuchen. Die Elementarbewegung desselben zur Zeit t besteht nach Cap. III. §. 3. des I. Theils in einer Rotation um die Momentanaxe. Die Lage dieser Axe ergibt sich, indem man die Normalebenen auf die Bahnen zweier Systempunkte zum Durchschnitt bringt, zu ihrer Auffindung genügt mithin die Kenntniss der Richtungen der Geschwindigkeiten zweier Punkte. Die Grösse der Winkelgeschwindigkeit Ω um diese Axe erhält man aus der Geschwindigkeit v eines einzigen Systempunktes, indem man diese durch den Abstand des Punktes von der Momentanaxe dividirt. Denn da das System sich während des Zeitelementes dt um die Momentanaxe dreht, so beschreibt jener Punkt das Element seiner Bahn als das Element eines Kreises um den Fusspunkt des Perpendikels r, welches von ihm auf die Momentanaxe gefällt werden kann. Daher ist dies Element das Produkt

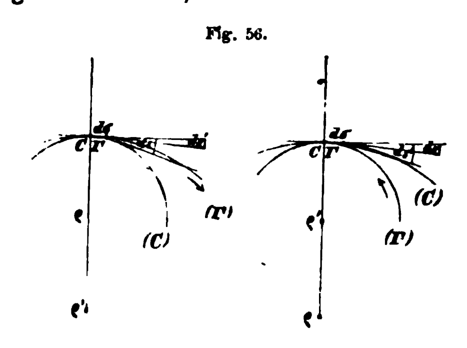
dieses Perpendikels und der Elementaramplitude der Rotation und folglich, indem man die Gleichung, welche dies ausspricht, durch dt dividirt, die Geschwindigkeit $v = r\Omega$, woraus $\Omega = \frac{v}{r}$ folgt. Die Geschwindigkeiten der einzelnen Systempunkte ergeben sich nach §. 2., indem man ihre Abstände von der Momentanaxe mit Ω multiplicirt.

§. 8. Ausser der Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe spielt bei der Bewegung unseres Systems noch eine andere Geschwindigkeit eine Rolle, nämlich die Geschwindigkeit U, mit welcher die Momentanaxe wechselt. Sie ist der unendlich kleine Abstand der der Zeit t entsprechenden Momentanaxe von der folgenden, der Zeit $t + dt$ entsprechenden, dividirt durch das Zeitelement dt. Dieser Abstand ist das Bogenelement $d\sigma$ der Curve (C) oder (Γ) (vgl. Cap. III, §. 2. im I. Thl.) und daher

$$U = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Diese Geschwindigkeit ist durch die Krümmung der Curven (C) und (Γ) mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe verknüpft. Sind nämlich $d\varepsilon$, $d\varepsilon'$ die Contingenzwinkel der Curven (C) und (Γ), und nehmen wir zunächst an, es liegen die Krümmungskreise der beiden Curven, die man für die Elementarbewegung den Curven selbst substituiren kann, da sie mit ihnen zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente gemein haben, auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente (Fig. 56.), so stellt $d\varepsilon - d\varepsilon'$ die Elementaramplitude $d\Theta$ der Rotation um die Momentanaxe nach Grösse und Sinn dar, wenn der positive Sinn der Drehung nach der Seite der gemeinschaftlichen Tangente hin angenommen wird, auf welcher die Krümmungskreise liegen. Nun ist

Fig. 56.



$$\Omega = \frac{d\Theta}{dt};$$

daher erhält man zunächst durch Division der vorigen Gleichung in diese:

$$\frac{\Omega}{U} = \frac{d\Theta}{d\sigma}.$$

$d\Theta$ kann man den relativen Contingenzwinkel der Curven (C), (Γ) und den Quotienten von $d\Theta$ durch das gemeinschaftliche Bogenelement $d\sigma$ die relative Krümmung derselben nennen. Demnach stellt das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe zur Wechselgeschwindigkeit derselben die relative Krümmung der Curven (C) und (Γ) dar, die während der Bewegung des Systems auf einander rollen. Das umgekehrte Verhältniss

$U:\Omega$ ist eine Länge, die als Radius der relativen Krümmung angesehen werden kann, wenn man die Analogie der gewöhnlichen Krümmung einer Curve mit der relativen Krümmung vollständig durchführen will. Durch die eben entwickelte Abhängigkeit von Ω und U erhellt, dass beide zusammen constant oder variabel sind, je nachdem es die relative Krümmung der Curve (C), (Γ) ist oder nicht ist und dass die eine aus der andern folgt, sobald diese Curven und ein Paar homologe Punkte derselben gegeben sind, nebst dem Sinne, in welchem längs der Curve (C) die Punkte der Curve (Γ) sich auflegen oder dem Sinne der Aufeinanderfolge der Momentanaxen. Die relative Krümmung kann positiv oder negativ oder Null sein und der verschiedenen Beschaffenheit ihres Vorzeichens entspricht ein positiver oder negativer Sinn der Winkelgeschwindigkeit Ω; dem Durchgang durch Null entspricht ein momentanes Verschwinden und eine Umkehrung des Sinnes dieser Grösse. Nun sind, wenn die Krümmungshalbmesser der Curven (C), (Γ) mit ϱ, ϱ' bezeichnet werden, die Krümmungen dieser Curven

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma}, \quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{d\varepsilon'}{d\sigma}$$

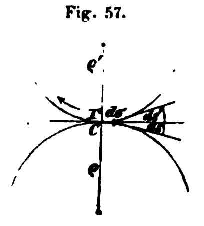
und mithin wird die relative Krümmung die Differenz dieser Krümmungen, nämlich

$$\frac{d\Theta}{d\sigma} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'},$$

also positiv, Null oder negativ, je nachdem der Krümmungshalbmesser der Curve (Γ) grösser, gleich oder kleiner, als der Krümmungshalbmesser der Curve (C) ist. So lange also der Krümmungsmittelpunkt der beweglichen Curve (Γ) auf der gemeinschaftlichen Normale in dem Aussenraume der Strecke zwischen dem Berührungspunkte der Curven und dem Krümmungsmittelpunkte der festen Curve (C) sich befindet, erfolgt die Rotation des Systems mit positiver, sobald er auf dieser Strecke selbst liegt, mit negativer Winkelgeschwindigkeit und der Durchgang derselben durch den Krümmungsmittelpunkt von (C) bezeichnet den Sinneswechsel derselben.

Fällt der Krümmungskreis der Curve (Γ) auf die entgegengesetzte Seite der gemeinsamen Tangente (Fig. 57.), so stellt $d\varepsilon + d\varepsilon'$ die Elementaramplitude $d\Theta$ dar und genügt also ein Zeichenwechsel von $d\varepsilon'$ und in Folge dessen von ϱ', um die entwickelten Formeln diesem Falle anzupassen. Hierbei liegt der Krümmungsmittelpunkt von (Γ) immer in dem Aussenraume jener Strecke und kann Ω das Zeichen nicht wechseln. Geht ϱ' mit Zeichenwechsel durch das Unendliche hindurch, so wechselt deswegen Ω nicht das Zeichen.

Fig. 57.



Die Combination der Formeln für $\frac{\Omega}{U}$ und $\frac{d\Theta}{d\sigma}$ liefert die Gleichung:

$$\frac{\Omega}{U} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'},$$

welche allgemein gilt, sobald ϱ' als von gleichem oder entgegengesetztem Zeichen mit ϱ angesehen wird, jenachdem die Krümmungsmittelpunkte beider Curven auf dieselbe oder auf entgegengesetzte Seiten der gemeinschaftlichen Tangente fallen.

§. 9. Einige Beispiele mögen zunächst die Anwendung der §§. 7. und 8. erläutern.

1. Die elliptische Hypocycloidenbewegung. (Vgl. Cap. III, §. 6. im I. Theil.). Für diese Bewegung sind die Curven (C), (Γ) Kreise von den Radien a und $\frac{1}{2}a$, mithin ist $\varrho = a$, $\varrho' = \frac{1}{2}a$ und hiermit wird $U = -a\Omega$. Es erfolge nun die Bewegung des Systems so, dass U fortwährend constant bleibt, d. h. es rolle der Kreis (Γ) gleichförmig auf der Innenseite des Kreises (C). Dann ist die Winkelgeschwindigkeit Ω ebenfalls constant und die Geschwindigkeit eines Systempunktes in der Entfernung r von der Momentanaxe $v = \Omega r$; sie ist veränderlich mit der Zeit, weil der Abstand r sich ändert, indem die Momentanaxe jeden Augenblick eine andere wird. Wir wollen deshalb r als Function der Zeit darstellen. Zu dem Ende seien ξ, η die Coordinaten des Systempunktes in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem (vgl. Fig. 15. S. 38). Da die Gerade OO', welche nach dem Momentancentrum führt, mit der Axe der x den Winkel ψ und mit der Axe der ξ den Winkel 2ψ bildet, so sind die Coordinaten des Momentancentrums oder des mit ihm zusammenfallenden Systempunktes Γ im beweglichen Coordinatensystem: $\frac{1}{2}a\cos 2\psi$, $\frac{1}{2}a\sin 2\psi$ und hiermit wird zunächst

$$r = \sqrt{(\xi - \tfrac{1}{2}a\cos 2\psi)^2 + (\eta - \tfrac{1}{2}a\sin 2\psi)^2}.$$

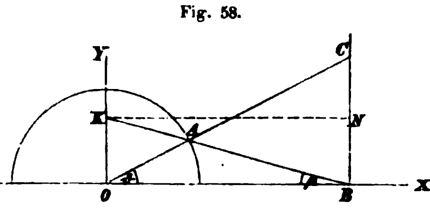
Nun ist aber das Bogenelement CC' der Curve (C) gleich $a\,d\psi$ und folglich $U = a\frac{d\psi}{dt}$ und indem man diese Gleichung mit $U = -a\Omega$ combinirt, wird $\frac{d\psi}{dt} = -\Omega$, woraus mit Rücksicht auf die constante Beschaffenheit von Ω folgt $\psi = -\Omega t$, wenn man die Bewegung mit $\psi = 0$ beginnen lässt. Hierdurch wird jetzt

$$v = \Omega\sqrt{(\xi - \tfrac{1}{2}a\cos 2\Omega t)^2 + (\eta + \tfrac{1}{2}a\sin 2\Omega t)^2}.$$

Für den Punkt A (Fig. 12), welcher sich auf der festen Geraden Ca bewegt, ist $\xi = \frac{1}{2}a$, $\eta = 0$, für ihn wird daher $v = a\Omega . \sin\Omega t$, wie man auch unmittelbar erkennt, da die Bewegung dieses Punktes die Projection der gleichförmigen Kreisbewegung des Momentancentrums C auf die Axe (a), mithin die oscillirende Bewegung Cap. I, §. 12. ist. Aehnliches gilt von allen Systempunkten, welche sich in Geraden bewegen.

2. **Die Kurbelbewegung** (Vgl. I. Thl. Cap. III. §. 7.) Es sei ω die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich der Radius OA des Kreises um O zur Zeit t dreht, gegeben, man soll die Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe und die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes, insbesondere die des Punktes B, welcher sich auf dem Durchmesser OX bewegt, darstellen. (Fig. 58).

Fig. 58.



Die Geschwindigkeit des Punktes A ist $\omega \cdot OA$ und wenn man diese als aus der Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe (C, Γ) hervorgehend ansieht, so besteht die Gleichung $\Omega \cdot CA = \omega \cdot OA$, aus welcher $\Omega = \omega \cdot \frac{OA}{CA}$ folgt. Die Geschwindigkeit eines Systempunktes D ist daher $v = \Omega \cdot CD = \omega \cdot OA \cdot \frac{CD}{CA}$. Für den Punkt B insbesondere wird $v = \omega \cdot OA \cdot \frac{CB}{CA}$. Diesen Ausdruck kann man vereinfachen, indem man das Verhältniss $\frac{CB}{CA}$ mit Hülfe der ähnlichen Dreiecke CBA und OKA durch das gleichbedeutende $\frac{OK}{OA}$ ersetzt, wobei K den Durchschnitt der Geraden AB mit dem zu OX senkrechten Durchmesser OY bedeutet. Dadurch wird nämlich $v = \omega \cdot OK = \omega \cdot BN$, wenn KN parallel OX. Die Geschwindignit des Punktes B ist demnach proportional OK und kann man über OX leicht die Curve construiren, deren Ordinaten BN, mit ω multiplicirt, die Geschwindigkeiten des Punktes B seinen verschiedenen Lagen entsprechend angeben.

Um den Ausdruck für v in der Rechnung etwas zweckmässiger zu gestalten, setzen wir Winkel $ABO = \beta$, Winkel $AOB = \vartheta$ und bemerken, dass aus dem Dreiecke OAK sich ergibt: $OK = OA \cdot \frac{\sin(\vartheta + \beta)}{\cos\beta} = OA\,(\sin\vartheta + \cos\vartheta \cdot tg\beta)$, oder wenn man $\frac{OA}{AB} = \frac{\sin\beta}{\sin\vartheta} = m$ setzt und OA mit r bezeichnet

$$OK = r\left(\sin\vartheta + m\,\frac{\sin\vartheta\,\cos\vartheta}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\vartheta}}\right)$$

und hiemit

$$v = \omega r\left(\sin\vartheta + m\,\frac{\sin\vartheta\,\cos\vartheta}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\vartheta}}\right)$$

wird.

Unter Voraussetzung eines constanten ω wollen wir mit Hülfe dieses Ausdruckes von v die mittlere Geschwindigkeit $\overset{*}{v}$ des Punktes B bestimmen. Der Mittelwerth einer Function $f(\vartheta)$ von ϑ zwischen den Grenzen ϑ_0 und ϑ_1 ist nach Cap. I, §. 8:

$$\frac{1}{\vartheta_1-\vartheta_0}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} f(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Da nun v für entgegengesetzte ϑ entgegengesetzt gleiche Werthe annimmt und in Bezug auf ϑ periodisch ist, so entsprechen alle verschiedenen Werthe von ϑ, welche überhaupt vorkommen, Winkeln ϑ zwischen 0 und π und wird demnach

$$\overset{*}{v} = \frac{\omega r}{\pi}\left(\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta + m\int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}}\right).$$

Das zweite Integral in diesem Ausdrucke verschwindet, da die Elemente desselben diesseits und jenseits des Argumentes $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ entgegengesetzt gleich sind; das erste Integral hat den Werth 2 und wird also schliesslich der gesuchte Mittelwerth

$$\overset{*}{v} = \frac{2}{\pi}\,\omega r;$$

derselbe ist unabhängig von m, dem Verhältniss des Kreisradius zum Abstande der Punkte A und B (Länge der Kurbelstange).

Für das Maximum der Geschwindigkeit des Punktes B findet man als Näherungswerth des ihm entsprechenden Winkels ϑ bis zu Grössen der Ordnung m^2 genau: $\vartheta = \frac{\pi}{2} - m$ und mit derselben Annäherung den Maximalwerth selbst: $v = \omega r$.

§. 10. Um Aufgaben, wie die beiden des vorigen §., analytisch durchführen zu können, bezieht man das bewegliche System auf ein festes (absolutes) Coordinatensystem der x, y und legt durch einen beliebigen Systempunkt O ein anderes, im System festes und mit ihm bewegliches Coordinatensystem, in Bezug auf welches die Systempunkte durch die Coordinaten x', y' dargestellt werden, welche während der Bewegung unveränderlich bleiben. Die Bewegung des Systems denken wir uns etwa dadurch bestimmt, dass die Coordinaten x_1, y_1 des beweglichen Ursprungs O in Bezug auf das feste System, sowie die Cosinusse a, b; a', b' der Winkel $(x'x)$, $(x'y)$, $(y'x)$, $(y'y)$ als Functionen der Zeit auftreten; andere Bestimmungsarten sind leicht auf diese zurückzuführen; diese Cosinus hängen durch drei Relationen von einander ab und sind also bekannt, sobald einer von ihnen bekannt ist. Bei rechtwinkligen Systemen sind diese Relationen: $a^2 + b^2 = 1$, $a'^2 + b'^2 = 1$, $aa' + bb' = 0$.

Für einen Systempunkt (x', y'), dessen absolute Coordinaten x, y sind, stellen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ die Componenten v_x, v_y der Geschwindigkeit parallel den festen Axen dar; projicirt man das Dreieck, welches sie mit der

Geschwindigkeit selbst bilden, auf die beweglichen Axen, so erhält man für die Componenten $v_{x'}$, $v_{y'}$ parallel diesen Axen

$$v_{x'} = a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt}$$

$$v_{y'} = a'\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt}.$$

Da aber die Coordinaten x, y; x', y'; x_1, y_1 durch die Gleichungen

$$x = x_1 + ax' + a'y'$$
$$y = y_1 + bx' + b'y'$$

mit einander verbunden sind, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass x', y' sich nicht mit der Zeit ändern,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + x'\frac{da}{dt} + y'\frac{da'}{dt}.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + x'\frac{db}{dt} + y'\frac{db'}{dt}.$$

Setzt man diese Werthe in die Ausdrücke für $v_{x'}$, $v_{y'}$, ein, so kommt zunächst:

$$v_{x'} = a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt} + \left(a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt}\right)x' + \left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt}\right)y'.$$

$$v_{y'} = a'\frac{dx_1}{dt} + b'\frac{dy_1}{dt} + \left(a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt}\right)x' + \left(a'\frac{da'}{dt} + b'\frac{db'}{dt}\right)y'.$$

Da aber aus den Relationen

$$a^2 + b^2 = 1 \quad a'^2 + b'^2 = 1 \quad aa' + bb' = 0$$

durch Differentation folgt:

$$a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt} = 0, \quad a'\frac{da'}{dt} + b'\frac{db'}{dt} = 0, \quad a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} = -\left(a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt}\right) = \Omega,$$

wo Ω vorläufig als eine Abkürzung der Bezeichnung gelten mag, so erhält man weiter:

$$v_{x'} = a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt} + \Omega y'.$$

$$v_{y'} = a'\frac{dx_1}{dt} + b'\frac{dy_1}{dt} - \Omega x'.$$

Die Coordinaten x_0', y_0' der Punkte, deren Geschwindigkeit zur Zeit t Null ist, liegen auf der Momentanaxe und genügen den Bedingungen $v_{x'} = 0$, $v_{y'} = 0$, d. h.

$$a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt} + \Omega y'_0 = 0$$

$$a'\frac{dx_1}{dt} + b'\frac{dy_1}{dt} - \Omega x'_0 = 0;$$

hierdurch ist die Lage der Geraden im System gegeben, welche mit der Momentanaxe zusammenfällt. Um die Lage der Momentanaxe im festen Coordinatensystem zu finden, hat man die aus diesen Gleichungen fol-

genden Werthe von x_0', y_0' für x', y' in die Gleichungen $x = x_1 + ax' + a'y'$, $y = y_1 + bx' + b'y'$ einzusetzen und erhält für die absoluten Coordinaten x_0, y_0 der Momentanaxe:

$$\Omega x_0 = \Omega x_1 + (ab' - a'b)\frac{dy_1}{dt}$$

$$\Omega y_0 = \Omega y_1 + (ba' - b'a)\frac{dx_1}{dt}$$

Es ist aber, wenn $a = \cos\alpha$ gesetzt wird, $b = \sin\alpha$, $a' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$, $b' = \cos\alpha$ und folglich $a'b - ab' = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; daher erhält man

$$\Omega x_0 = \Omega x_1 + \frac{dy_1}{dt}$$

$$\Omega y_0 = \Omega y_1 - \frac{dx_1}{dt}.$$

Subtrahirt man die Gleichungen, welche x_0', y_0' bestimmen, von den Gleichungen für $v_{x'}$, $v_{y'}$, ab, so ergibt sich

$$v_{x'} = \Omega(y' - y_0')$$
$$v_{y'} = -\Omega(x' - x_0')$$

und hieraus folgt durch Quadriren und Addiren, wenn die Entfernung des Punktes x', y' von der Momentanaxe mit r bezeichnet wird, für die Geschwindigkeit v dieses Punktes

$$v = r\Omega.$$

Es ist mithin Ω die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe.

IV. Capitel.

Aequivalenz der Winkelgeschwindigkeiten um Axen, welche sich in demselben Punkte schneiden. Geschwindigkeiten im System, welches um einen Punkt rotirt.

§. 1. Ein unveränderliches System besitze zur Zeit t zwei Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' um zwei Axen (α, a), (β, b), welche durch denselben Punkt O hindurchgehen. Vermöge der ersten würde dasselbe in dem nächstfolgenden Zeitelemente dt um α eine unendlich kleine Rotation $d\vartheta$, vermöge der zweiten um β eine unendlich kleine Rotation $d\vartheta'$ ausführen. Es ist daher

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \ \omega' = \frac{d\vartheta'}{dt}.$$

Nach Cap. IV, §. 2. im I. Thl. sind die beiden Rotationen $d\vartheta, d\vartheta'$ zusammen äquivalent einer einzigen unendlich kleinen Rotation $d\Theta$ um eine dritte in der Ebene $(\alpha\beta)$ liegende, gleichfalls durch O hindurchgehende Axe (c, γ), deren Richtung mit der Diagonale eines Parallelogramms zusammenfällt, dessen Seiten den Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ proportionale Längen sind und auf den Axen von O aus im Sinne derselben

aufgetragen werden. Mit Rücksicht auf die weiteren dortselbst gemachten Bemerkungen erhält man, wenn (s. Fig. 24.) $O\alpha' = \omega$, $O\beta' = \omega'$ genommen wird, den folgenden, dem dort ausgesprochenen analogen Satz:

Die gleichzeitige Verbindung zweier Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' eines unveränderlichen Systems um zwei sich in einem Punkte schneidende Axen (α, a), (β, b) ist äquivalent einer Winkelgeschwindigkeit Ω um eine dritte, in der Ebene $\alpha\beta$ liegende, durch den gemeinschaftlichen Schnittpunkt von α und β hindurchgehende Axe (c, γ). Diese Axe ist die Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten die auf den Axen α, β von dem Schnittpunkte aus in dem Sinne der Rotationen aufgetragenen Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' sind; die Diagonalstrecke dieses Parallelogramms gibt die Grösse und den Sinn der resultirenden Winkelgeschwindigkeit Ω an.

Zur Bestimmung der Lage der Axe c und der Grösse von Ω hat man daher die Relationen

$$\frac{\sin ac}{\omega'} = \frac{\sin bc}{\omega} = \frac{\sin ab}{\Omega}, \quad \Omega^2 = \omega^2 + \omega'^2 + 2\omega\omega' \cos(\alpha\beta)$$

Der vorstehende Satz, welcher den Namen des Satzes vom Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten führt, erweitert sich für drei Winkelgeschwindigkeiten, deren Axen sich in einem Punkte schneiden, zu einem Satze vom Parallelepiped und für beliebig viele zu einem Satze vom Polygon der Winkelgeschwindigkeiten.

Mit Hülfe desselben Satzes kann umgekehrt jede Winkelgeschwindigkeit um eine Axe in zwei oder mehrere Winkelgeschwindigkeiten zerlegt werden um Axen, welche mit der Axe jener ersten sich in einem Punkte schneiden. Sind die Axen dieser Componenten zu einander rechtwinklig, falls es ihrer zwei oder drei sind, so findet man die Grösse und den Sinn der Componenten, indem man die nach Grösse und Sinn auf ihrer Axe aufgetragene gegebene Winkelgeschwindigkeit auf jene Axen projicirt. Sind daher α, β, γ die Winkel, welche die Axe der Winkelgeschwindigkeit Ω, im Sinne dieser Winkelgeschwindigkeit genommen, mit drei zu einander rechtwinkligen, sich in einem Punkte O schneidenden Axen OX, OY, OZ bildet, so erhält man für die Componenten Ω_x, Ω_y, Ω_z von Ω um diese Axen:

$$\frac{\cos\alpha}{\Omega_x} = \frac{\cos\beta}{\Omega_y} = \frac{\cos\gamma}{\Omega_z} = \frac{1}{\Omega}.$$

und zugleich ist

$$\Omega^2 = \Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2.$$

§. 2. Das System besitze zur Zeit t Winkelgeschwindigkeiten $\omega, \omega', \omega'' \ldots$ in beliebiger Zahl um gegebene Axen, welche sich in demselben Punkte O schneiden. Um dieselben zu reduciren, d. h. die ihnen äquivalente Winkelgeschwindigkeit Ω nebst der Lage der Axe, um welche sie stattfindet, im System zu finden, legen wir durch O ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Axen Gerade des Systems und also mit ihm um O beweglich sind, aber ihre Lage im Systeme nicht ändern. Bildet nun die Winkelgeschwindigkeit ω, als Länge nach Grösse und Sinn auf ihrer Axe aufgetragen, mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ, so sind die ihr äquivalenten Componenten um die Coordinatenaxen $\omega_x = \omega \cos \alpha$, $\omega_y = \omega \cos \beta$, $\omega_z = \omega \cos \gamma$ und wenn wir in ähnlicher Weise sämmtliche ω durch ihre Componenten ersetzen, so erhalten wir drei Winkelgeschwindigkeiten

$$\Omega_x = \Sigma\omega_x\,, \quad \Omega_y = \Sigma\omega_y\,, \quad \Omega_z = \Sigma\omega_z$$

um die Coordinatenaxen, welche die gesuchte resultirende Winkelgeschwindigkeit bilden, deren Grösse Ω und Richtung (a, b, c) durch die Gleichungen

$$\Omega^2 = \Omega_x{}^2 + \Omega_y{}^2 + \Omega_z{}^2$$

$$\frac{\cos a}{\Omega_x} = \frac{\cos b}{\Omega_y} = \frac{\cos c}{\Omega_z} = \frac{1}{\Omega}$$

bestimmt ist. Die Axe der resultirenden Winkelgeschwindigkeit Ω ist die Momentanaxe, um welche das System sich zur Zeit t dreht. Man bemerke, dass dieselben Gesetze für die Zusammensetzung der Winkelgeschwindigkeiten eines Systems um sich in einem Punkte schneidende Axen gelten, wie für die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten eines Punktes, sobald die Winkelgeschwindigkeiten nach Grösse und Sinn auf den Axen aufgetragen werden.

Die Bedingungen des momentanen Stillstandes des Systems zur Zeit t sind:

$$\Sigma\omega_x = 0, \quad \Sigma\omega_y = 0, \quad \Sigma\omega_z = 0\,.$$

§. 3. Das Vorstehende reicht aus, um die Geschwindigkeiten der Punkte eines Systems zur Zeit t zu finden, welches um einen Punkt rotirt. Zunächst findet man die Momentanaxe des Systems, entsprechend dieser Zeit, indem man auf die Richtungen der Geschwindigkeiten zweier Punkte, nämlich auf die Tangenten ihrer sphärischen Bahnen die Normalebenen errichtet und ihre Durchschnittslinie aufsucht, welche durch das Rotationscentrum hindurchgeht. Sobald diese Axe bekannt ist, genügt die Geschwindigkeit v irgend eines Systempunktes, um die Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe zu finden; man erhält sie, indem man jene durch den Abstand r des Punktes von dieser Axe dividirt, nämlich $\Omega = \frac{v}{r}$. Die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes, dessen Abstand von der Momentanaxe ϱ ist, hat die Grösse $\Omega\varrho$

Neben der Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe ist noch eine andere Geschwindigkeit von Bedeutung, nämlich die Geschwindigkeit, mit welcher die Momentanaxe wechselt. Die Momentanaxen bilden im Raum eine feste Kegelfläche (C), auf welcher die Kegelfläche (Γ) des Systems hinrollt, deren Erzeugungslinien die Geraden sind, welche nach und nach mit den verschiedenen Momentanaxen zusammentreffen. Beide Kegelflächen enthalten das Rotationscentrum O und berühren sich zur Zeit t längs der Momentanaxe (C, Γ), d. h. sie haben die Flächenelemente $(CC', \Gamma\Gamma')$ gemein. Bezeichnen wir mit $d\sigma$ den unendlich kleinen Kreisbogen, welcher den Winkel (CC') oder $(\Gamma\Gamma')$ misst, so ist die Wechselgeschwindigkeit U der Momentanaxe:

$$U = \frac{d\sigma}{dt};$$

sie ist eine Winkelgeschwindigkeit um die in O errichtete gemeinschaftliche Normale der beiden Kegel, indem $d\sigma$ den unendlich kleinen Weg, den ein in der Entfernung gleich der Einheit befindlicher, aber dem System fremder Punkt im Zeitelement vermöge einer Rotation um diese Normale zurückzulegen haben würde, um aus der der Zeit t entsprechenden Lage der Momentanaxe in die nächfolgende, der Zeit $t + dt$ entsprechende Lage derselben einzutreten. Die Grösse U ist mit Ω durch eine Gleichung verbunden, ähnlich der in Cap. III. §. 8. entwickelten. Legen wir nämlich durch die beiden Kegelflächen (C) und (Γ) in der Entfernung gleich der Einheit einen ebenen Schnitt senkrecht zur Erzeugungslinie (C, Γ), längs welcher sie sich berühren und bezeichnen die Contingenzwinkel der beiden Schnittcurven, wie a. a. O. mit $d\varepsilon$ und $d\varepsilon'$, sowie die Krümmungshalbmesser derselben mit ϱ und ϱ', so stellt unter denselben Bedingungen, wie dort $d\varepsilon - d\varepsilon'$ die Amplitude der Elementarbewegung um die Momentanaxe dar und erhält man

$$\frac{\Omega}{U} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}.$$

Vermöge dieser Relation ist von den Grössen Ω, U, ϱ, ϱ' jedesmal eine zu finden, wenn die drei andern bekannt sind, auch bleibt dieselbe während der Bewegung constant, wenn jene constant bleiben. Sind die Kegel so beschaffen, dass die relative Krümmung $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}$ durchaus constant ist, so werden Ω und U einander proportional, sind also zusammen constant oder variabel.

§. 4. Als Beispiel zu den vorigen §§. wollen wir folgende, bereits im I. Thl. Cap. IV. §. 6. im Allgemeinen angedeutete Aufgabe behandeln.

Ein unveränderliches System rotirt um einen Punkt O (Fig. 59.), und zwar so, dass zwei seiner Geraden, OA, OB, welche durch O gehen, fortwährend auf zwei festen Ebenen

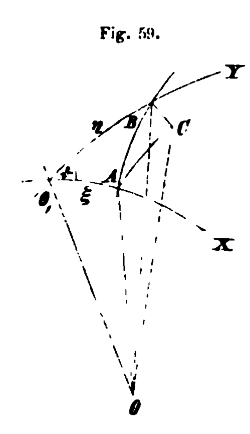


Fig. 59.

OO_1X und OO_1Y bleiben; die Geraden bilden mit einander einen rechten Winkel und ist die Winkelgeschwindigkeit ω bekannt, mit welcher die Gerade OA sich in der Ebene OO_1X um O zur Zeit t dreht, man soll die Momentanaxe, die Winkelgeschwindigkeit Ω der Elementarbewegung um sie und die Winkelgeschwindigkeit ω' bestimmen, mit welcher die Gerade OB in der Ebene OO_1Y sich dreht.

Die Lage der Momentanaxe OC ergibt sich als die Schnittlinie zweier Ebenen, welche durch OA und OB senkrecht zu den Ebenen OO_1X und OO_1Y geführt werden. Stellt nun die Figur einen Kugelschnitt des Systems um O vom Radius gleich der Einheit dar und bezeichnet man die Bogen O_1A und O_1B mit ξ und η, so besteht, weil $AB = \frac{1}{2}\pi$, zwischen ξ und η die Relation $\cos\xi \cos\eta + \sin\xi \sin\eta \cos\vartheta = 0$ oder

$$tg\,\xi\; tg\,\eta \cos\vartheta = -1.$$

Während des Zeitelementes dt beschreiben nun die Punkte A und B die Bogenelemente $d\xi$ und $d\eta$ und sind mithin

$$\omega = \frac{d\xi}{dt}, \quad \omega' = \frac{d\eta}{dt}.$$

Differentiirt man daher die vorige Gleichung, wodurch man erhält

$$\sin 2\xi \frac{d\eta}{dt} + \sin 2\eta \frac{d\xi}{dt} = 0,$$

so erhält man sofort das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten $\omega' : \omega$, nämlich

$$\frac{\omega'}{\omega} = -\frac{\sin 2\eta}{\sin 2\xi},$$

welches man als Function von ξ darstellen kann, indem man aus der Gleichung $tg\,\xi\; tg\,\eta \cos\vartheta = -1$ die Grösse $\sin 2\eta$ entwickelt und in das Verhältniss einführt. Man erhält zunächst

$$\sin 2\eta = -\frac{\cos\vartheta \sin 2\xi}{\cos^2\xi + \cos^2\vartheta \sin^2\xi}$$

und hiermit

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\cos\vartheta}{\cos^2\xi + \cos^2\vartheta \sin^2\xi}.$$

Ferner hat man, indem man die Geschwindigkeiten ω, ω' der Punkte A, B als durch die Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe erzeugt ansieht,

$$\omega = \Omega \sin(AC), \quad \omega' = \Omega \sin(BC)$$

und folglich ist das Sinusverhältniss der Winkelabstände der Momentanaxe von den Geraden OA, OB:

$$\frac{\sin(AC)}{\sin(BC)} = \frac{\omega}{\omega'} = \frac{\cos^2\xi + \cos^2\vartheta \sin^2\xi}{\cos\vartheta}.$$

Um endlich die Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe selbst darzustellen, ist noch $\sin(AC)$ durch ξ auszudrücken und hat man aus dem Dreieck ACB:

$$\sin(AC) = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos C = -\sin A \sin B,$$

sowie aus dem Dreieck OAB:

$$\sin A = \sin\vartheta \sin\eta$$
$$\sin B = \sin\vartheta \sin\xi,$$

wodurch man erhält:

$$\sin(AC) = \sqrt{\frac{1-\sin^2\vartheta \sin^2\xi}{1-\sin^4\vartheta \sin^2\xi \sin^2\eta}},$$

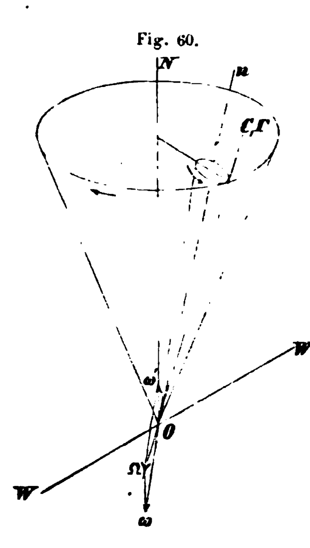
aus welcher Formel man den Winkel η mit Hilfe der Gleichung $tg\xi\, tg\eta \cos\vartheta = -1$ entfernen kann. Hiermit gelangt man schliesslich zu der gesuchten Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{\omega}{\sin(AC)} = \omega\sqrt{\frac{1-\sin^4\vartheta \sin^2\xi \sin^2\eta}{1-\sin^2\vartheta \sin^2\xi}}.$$

Die vorliegende Aufgabe ist von Wichtigkeit für die Behandlung des Universalgelenkes (auch Hook'scher Schlüssel genannt), einer sinnreichen Erfindung von Cardanus. Vgl. Redtenbacher, Maschinenbau, B. I. S. 357. und Taf. XXI, Fig. 12.

§. 5. Ein weiteres Beispiel entlehnen wir der Bewegung der Erde, nämlich die sogenannte Präcession der Nachtgleichen. Zerlegen wir die Bewegung der Erde in die Translationsbewegung, vermöge welcher ihr Mittelpunkt die Ecliptik beschreibt und die Rotation um ihren Mittelpunkt und betrachten wir letztere für sich. Dieselbe besteht in der Rotation um eine Momentanaxe (C, Γ), welche für die gewöhnlichen Bedürfnisse der Astronomie als fortwährend von derselben Richtung angesehen werden kann, unter einem Winkel von 23° 27′ 32″ gegen die Axe der Ecliptik geneigt. In Wirklichkeit besteht aber diese Bewegung in dem Rollen eines Kegels (Γ), dem System der Erde angehörig, auf einem andern Kegel (C), dessen Axe die Axe der Ecliptik ist, sodass die Momentanaxe, längs welcher beide Kegel sich berühren, fortwährend wechselt. Der Kegel (Γ) ist sehr schmal und kann deswegen näherungsweise als eine Gerade, die Erdaxe, angesehen werden; auch ist die Zeit sehr gross, in welcher er ein Umrollen in dem Kegel (C) vollendet, indessen äussert sich dieselbe doch sehr deutlich in der sogenannten Präcession der Nachtgleichen.

Es sei O (Fig. 60.) der Mittelpunkt der Erde (richtiger der Schwerpunkt derselben), On die Erdaxe im Sinne nach Norden genommen, ON die Axe der Ecliptik, gleichfalls im Sinne nach dem Nordpol der Ecliptik gerichtet, sodass Winkel $(nN) = 23^0\ 27'\ 32''$ ist. Während nun


Fig. 60.

die Erde sich gleichförmig um ihre Axe On umdreht, rückt diese Axe und mit ihr die Ebene Nn im entgegengesetzten Sinne fort, indem sie sich um die Axe der Ecliptik dreht. Die Rotation der Erde erfolgt von Westen nach Osten, der Sinn ihrer Winkelgeschwindigkeit ω ist also auf der Axe nach Süden aufzutragen, während der Sinn der Winkelgeschwindigkeit ω' um die Axe der Ecliptik nach Norden zeigt. Aus beiden Winkelgeschwindigkeiten ergibt sich nach dem Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten die Lage der Momentanaxe (C, Γ) und die Winkelgeschwindigkeit Ω, um sie. Die Axe (C, Γ) fällt in den Nebenwinkel von (Nn) und es rollt in Folge dessen der Kegel (Γ) auf der Innenseite des Kegels (C). Da aber die Winkelgeschwindigkeit ω' sehr klein ist, wie die Beobachtungen zeigen, so ist auch der Winkel $(n\Gamma)$ sehr klein und daher der bewegliche Kegel sehr schmal, sodass die Momentanaxe niemals sehr weit von der Erdaxe sich entfernt. Auf der Axe der Ecliptik steht die Ecliptik selbst, auf der Erdaxe der Erdäquator senkrecht; mithin ist ihre Durchschnittslinie WW', die Aequinoctiallinie, senkrecht zu beiden, d. h. senkrecht zur Ebene Nn und rückt daher gleichzeitig mit dieser fort, indem sie sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω' in der Ebene der Ecliptik dreht. Dieses Fortrücken der Linie WW', die Präcession der Nachtgleichen genannt, beträgt 50″ im Jahr und würde ein vollständiger Umlauf derselben 25868 Jahre erfordern (grosses Platonisches Jahr). Für einen Sterntag beträgt das Fortrücken 0,″136795. Die beiden Kegel (C) und (Γ) sind indessen nicht genau Kreiskegel, vielmehr findet eine sehr geringe periodische Schwankung der Erdaxe gegen die Axe der Ecliptik statt, die sogenannte **Nutation** der Erdaxe, die aber nur 9 Secunden Abweichung von der mittleren Lage beträgt und sehr langsam erfolgt (ihre Periode beträgt 18½ Jahr).

Nimmt man den Sterntag, die Zeit der Umdrehung der Erde, als Zeiteinheit, so ist $\omega = 2\pi$, $\omega' = \frac{0{,}136795}{180.60.60}.\pi$ und erhält man aus dem Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten

$$\frac{\omega}{\sin(\Gamma N)} = \frac{\omega'}{\sin(\Gamma n)} = \frac{\Omega}{\sin(Nn)}$$

und hieraus

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin(\Gamma N)}{\sin(\Gamma n)} = \frac{\sin(\Gamma n + Nn)}{\sin(\Gamma n)} = \sin(Nn)\cot g(\Gamma n) + \cos(Nn)$$

wodurch
$$tg\,(\Gamma n) = \frac{\omega' \sin\,(Nn)}{\omega - \omega' \cos\,(Nn)}$$
wird. Hiernach ergibt sich
$$(\Gamma n) = 0'',0087,$$
sodass also für gewöhnliche Bedürfnisse die Axe Γ als mit der Erdaxe zusammenfallend angesehen werden darf. Weiter folgt aus obiger Proportion:
$$\Omega = \frac{\sin\,(Nn)}{\sin\,(\Gamma N)}\,\omega,$$
woraus erhellt, dass Ω nur sehr wenig von der Winkelgeschwindigkeit ω der Erde um ihre Axe abweicht.

§. 6. Wir gehen jetzt über zu der analytischen Darstellung der Geschwindigkeiten in dem unveränderlichen System, welches um einen Punkt O rotirt. Zu dem Ende betrachten wir diesen Punkt als den gemeinsamen Ursprung zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme, von denen das eine, das der x', y', z', dem System angehört und sich daher mit diesem bewegt, während das andere, das der x, y, z, nicht an der Bewegung Theil nimmt. Die Coordinaten x', y', z' bestimmen demnach die Lage eines Punktes im System und sind nicht mit der Zeit veränderlich, da das System selbst unveränderlich ist, während die Coordinaten x, y, z die Lage desselben Punktes im absoluten Raume bestimmen und Functionen der Zeit sind, welche von der Art der Bewegung des Systems abhängen. Die Cosinusse der Winkel, welche die beweglichen Axen der x', y', z' mit den Axen der x, y, z bilden, seien a, b, c für die Axe der x', a', b', c' für die der y' und a'', b'', c'' für die der z'; sie sind gleichfalls mit der Zeit veränderlich und bestimmen die Lage des Systems im absoluten Raume. Zwischen den beiderlei Coordinaten eines Systempunktes bestehen nun die bereits Cap. VI, §. 6. des I. Theiles angeführten Relationen:
$$(1)\quad \begin{array}{lll} x = ax' + a'y' + a''z' & a^2 + b^2 + c^2 = 1 & aa' + bb' + cc' = 0 \\ y = bx' + b'y' + b''z' & a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \\ z = cx' + c'y' + c''z' & a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 & a''a + b''b + c''c = 0. \end{array}$$
Multiplicirt man die drei Gleichungen der ersten Gruppe der Reihe nach einmal mit a, b, c, das anderemal mit a', b', c', das drittemal mit a'', b'', c'' und addirt sie jedesmal, so erhält man mit Rücksicht auf die 6 letzten Relationen die weiteren:
$$(2)\quad \begin{array}{lll} x' = ax + by + cz & a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 & ab + a'b' + a''b'' = 0 \\ y' = a'x + b'y + c'z & b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 & bc + b'c' + b''c'' = 0 \\ z' = a''x + b''y + c''z & c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 & ca + c'a' + c''a'' = 0, \end{array}$$
von denen die in der zweiten und dritten Gruppe stehenden sich ergeben, indem man die der ersten Gruppe resp. mit a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' multiciplicirt und addirt und die erhaltenen Resultate mit der ersten Gruppe von (1) vergleicht.

Die directe Auflösung der Gleichungen (1) würde ergeben:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
\Delta\cdot x' &= (b'c''-b''c')\,x + (c'a''-c''a')\,y + (a'b''-a''b')\,z\\
\Delta\cdot y' &= (b''c-bc'')\,x + (c''a-ca'')\,y + (a''b-ab'')\,z\\
\Delta\cdot z' &= (bc'-b'c)\,x + (ca'-c'a)\,y + (ab'-a'b)\,z,
\end{aligned}
$$

wobei der gemeinschaftliche Nenner

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix} = a\,(b'c''-b''c') + a'\,(b''c-bc'') + a'\,(bc'-b'c)
$$

auftritt. Diese Determinante Δ hat den Werth $+1$ oder -1; denn ihr Quadrat ist nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten und mit Rücksicht auf die 6 letzten Gleichungen (1):

$$
\Delta^2 = \begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & aa'+bb'+cc' & aa''+bb''+cc''\\ a'a+b'b+c'c & a'^2+b'^2+c'^2 & a'a''+b'b''+c'c''\\ a''a+b''b+c''c & a''a'+b''b'+c''c' & a''^2+b''^2+c''^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1.
$$

Durch Vergleichung der Gleichungen (3) mit den Gleichungen (2) ergeben sich daher die weiteren Relationen

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
b'c''-b''c' &= \pm a & c'a''-c''a' &= \pm b & a'b''-a''b' &= \pm c\\
b''c-bc'' &= \pm a' & c''a-ca'' &= \pm b' & a''b-ab'' &= \pm c'\\
bc'-b'c &= \pm a'' & ca'-c'a &= \pm b'' & ab'-a'b &= \pm c'',
\end{aligned}
$$

wobei die Zeichen $(+)$ oder $(-)$ gelten, je nachdem Δ den Werth $+1$ oder den Werth -1 hat. Das doppelte Zeichen von Δ bezieht sich auf die besondere Beschaffenheit der beiden Coordinatensysteme. Sind dieselben so beschaffen, dass, wenn die positiven Axen der x' und und y' mit den positiven Axen der x, y zur Coincidenz gebracht werden, auch die positiven Axen der z' und z sich decken, so nennt man die Coordinatensysteme consentirend (congruent), fallen aber in dieser Lage die positive z'- und die negative z-Axe zusammen, so heissen sie dissentirend (symmetrisch). Im ersten Falle ist $\Delta = +1$, im letzten $\Delta = -1$. Im ersten Falle nehmen nämlich für diese Lage die 9 Cosinusse die Werthe an:

$$
a=1,\ b=0,\ c=0;\ a'=0,\ b'=1,\ c'=0;\\ a''=0,\ b''=0;\ c''=1
$$

und hiemit reducirt sich die Gleichung $ab'-a'b=\pm c''$ auf $1=\pm 1$ und kann also nur bei $\Delta=+1$ bestehen; im zweiten Falle dagegen hat man

$$
a=1,\ b=0,\ c=0;\ a'=0,\ b'=1,\ c'=0;\\ a''=0,\ b''=0,\ c''=-1
$$

und reducirt sich dieselbe Gleichung auf $-1=\pm 1$, welche nur mit $\Delta=-1$ harmonirt.

Wir wenden hier nur consentirende Coordinatensysteme an und brauchen also die obigen Formeln nur mit dem Zeichen (+), da die Vertauschung der positiven und negativen Axen eines der Systeme genügt, um von dem Consentiren derselben zum Dissentiren überzugehen.

§. 7. Die Geschwindigkeit v des Systempunktes $(x', y', z'; x, y, z)$ kann zerlegt werden parallel den beweglichen Axen der x', y', z' und parallel den Axen der x, y, z; ihre Componenten im ersten Sinne seien $v_{x'}, v_{y'}, v_{z'}$; die im letzteren Sinne genommenen v_x, v_y, v_z. Man hat

$$v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt},\quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

und erhält daher diese Grössen, indem man die Gleichungen (1) nach t differentiirt, dabei aber bemerkt, dass x', y', z' von t unabhängig sind. Die Ausführung dieser Differentiation liefert:

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
v_x &= \frac{dx}{dt} = x'\frac{da}{dt} + y'\frac{da'}{dt} + z'\frac{da''}{dt} \qquad & a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt} &= 0\\
v_y &= \frac{dy}{dt} = x'\frac{db}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{db''}{dt} \qquad & a'\frac{da'}{dt} + b'\frac{db'}{dt} + c'\frac{dc'}{dt} &= 0\\
v_z &= \frac{dz}{dt} = x'\frac{dc}{dt} + y'\frac{dc'}{dt} + z'\frac{dc''}{dt} \qquad & a''\frac{da''}{dt} + b''\frac{db''}{dt} + c''\frac{dc''}{dt} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt}\right) + \left(a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt}\right) = 0\\
&\left(a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt}\right) + \left(a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{dt'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt}\right) = 0\\
&\left(a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt}\right) + \left(a\frac{da''}{dt} + b\frac{dc''}{dt} + c\frac{dc''}{dt}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Die Componenten $v_{x'}, v_{y'}, v_{z'}$ der Geschwindigkeit parallel den beweglichen Axen erhält man nun, indem man den Linienzug der v_x, v_y, v_z und der im entgegengesetzten Sinn genommenen Geschwindigkeit v selbst auf die beweglichen Axen projicirt, nämlich:

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
v_{x'} &= av_x + bv_y + cv_z\\
v_{y'} &= a'v_x + b'v_y + c'v_z\\
v_{z'} &= a''v_x + b''v_y + c''v_z
\end{aligned}
$$

oder also mit Hilfe der eben entwickelten Werthe (1), wenn man nach x', y', z' ordnet:

$$
\begin{aligned}
v_{x'} = &\left(a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt}\right)x' + \left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt}\right)y'\\
&+ \left(a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt}\right)z'\\
v_{y'} = &\left(a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt}\right)x' + \left(a'\frac{da'}{dt} + b'\frac{db'}{dt} + c'\frac{dc'}{dt}\right)y'\\
&+ \left(a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt}\right)z'
\end{aligned}
$$

$$v_{z'} = \left(a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt}\right)x' + \left(a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{db'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt}\right)y'$$
$$+ \left(a''\frac{da''}{dt} + b''\frac{db''}{dt} + c''\frac{dc''}{dt}\right)z'.$$

Berücksichtigt man aber die 6 letzten Gleichungen (1) und setzt vorläufig zur Abkürzung

$$a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt} = -\left(a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt}\right) = -r$$
$$a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt} = -\left(a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{db'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt}\right) = -p$$
$$a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt} = -\left(a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt}\right) = -q,$$

so nehmen die Componenten $v_{x'}$, $v_{y'}$, $v_{z'}$ die Form an:

$$(4)\quad \begin{aligned} v_{x'} &= qz' - ry' \\ v_{y'} &= rx' - pz' \\ v_{z'} &= py' - qx'. \end{aligned}$$

Für die Systempunkte x', y', z', welche zur Zeit t auf der Momentanaxe liegen, ist $v = 0$, also auch $v_{x'} = v_{y'} = v_{z'} = 0$; daher sind

$$(5)\quad \begin{aligned} qz' - ry' &= 0 \\ rx' - pz' &= 0 \\ py' - qx' &= 0 \end{aligned}$$

oder in anderer Form

$$\frac{x'}{p} = \frac{y'}{q} = \frac{z'}{r}$$

die Gleichungen der Geraden (Γ) des Systems, welche zur Zeit t Momentanaxe ist, in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem. Hierdurch ist die Lage dieser Geraden im System bestimmt. Sie bildet mit den Axen der x', y', z' Winkel α', β', γ', für welche

$$\frac{\cos\alpha'}{p} = \frac{\cos\beta'}{q} = \frac{\cos\gamma'}{r} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

ist.

Für das Quadrat der Geschwindigkeit v des Symstempunktes (x', y', z') erhält man, da $v^2 = v_{x'}^2 + v_{y'}^2 + v_{z'}^2$ ist:

$$v^2 = (qz' - ry')^2 + (rx' - pz')^2 + (py' - qx')^2$$
$$= (p^2 + q^2 + r^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (px' + qy' + rz')^2.$$

Bezeichnet man die Entfernung des Punktes $(x' y' z')$ vom Rotationscentrum O mit d, den Winkel zwischen d und der Momentanaxe mit ε und setzt

$$p^2 + q^2 + r^2 = \Omega^2,$$

so wird

$$d^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad \cos\varepsilon = \frac{px' + qy' + rz'}{\Omega d}$$

und hiermit

$$v = \Omega d \sin\varepsilon$$

oder da $d \sin \varepsilon = \varrho$ den Abstand des Systempunktes von der Momentanaxe darstellt

$$v = \varrho \Omega .$$

Hieraus ersieht man, dass Ω nichts anders, als die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe und p, q, r ihre Componenten $\Omega_{x'}$, $\Omega_{y'}$, $\Omega_{z'}$ um die beweglichen Axen sind.

§. 8. Zu den Formeln (5) des vorigen §. für die Componenten der Geschwindigkeit eines Systempunktes parallel den beweglichen Axen kann man auf folgende Weise unmittelbar gelangen. Wir denken uns die Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe auf dieser nach Grösse und Sinn aufgetragen, zerlegen sie in ihre Componenten $\Omega_{x'} = p$, $\Omega_{y'} = q$, $\Omega_{z'} = r$, welche in die Axen der x', y', z' fallen und bestimmen die Bestandtheile, welche jede derselben zur Bildung der Geschwindigkeitscomponenten $v_{x'}$, $v_{y'}$, $v_{z'}$ liefert. Hiebei gelten, wie dies aus der Natur des Projicirens folgt, $\Omega_{x'}$, $\Omega_{y'}$, $\Omega_{z'}$ als positiv oder negativ, je nachdem ihr Sinn mit dem Sinne der positiven oder negativen Coordinatenaxen übereinstimmt, in deren Richtung sie fallen. Ein positives $\Omega_{x'}$ drückt demnach eine Winkelgeschwindigkeit um die x'-Axe aus, deren Sinn von der positiven x'-Axe aus gesehen in der $y'z'$-Ebene einer Drehung der positiven y'-Axe in die positive z'-Axe im Sinne der Uhrzeigerbewegung entspricht u. s. f.

Unter Voraussetzung dreier positiver Componenten von Ω, als des Normalfalles, auf welchen alle anderen Fälle mit Hülfe einer Zeichenänderung von selbst zurückkommen, sei nun zunächst $d\vartheta_{x'}$ die unendlich kleine Amplitude, um welche das System vermöge der Winkelgeschwindigkeit $\Omega_{x'}$ um die x'-Axe sich im Zeitelemente dt umdrehen würde; man hat dann

$$\Omega_{x'} = \frac{d\vartheta_{x'}}{dt} .$$

Die Richtung von $d\vartheta_{x'}$ ist die Richtung der Tangente eines in der Einheit der Entfernung um die x'-Axe beschriebenen Kreisbogens, dessen Ebene zu dieser Axe senkrecht ist; sie bildet mit den Coordinatenaxen der x', y', z' der Reihe nach Winkel, deren Cosinusse 0, $-\frac{z'}{\varrho'}$, $\frac{y'}{\varrho'}$ sind, wenn ϱ' die Entfernung des Systempunktes $(x'y'z')$ von der x'-Axe bedeutet. Die Geschwindigkeit, welche $\Omega_{x'}$ diesem Punkte ertheilt, ist $\varrho' \Omega_{x'}$ und ihre Componenten parallel den Coordinatenaxen sind daher:

$$0 \cdot \Omega_{x'}, \quad -z' \Omega_{x'}, \quad y' \Omega_{x'} .$$

Betrachtet man die Axen der x', y', z' in der Folge der Buchstaben als erste, zweite und dritte Axe, so ist das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke leicht zu übersehen. Sie sind alle proportional $\Omega_{x'}$, der Winkel-Geschwindigkeitscomponente um die erste Axe; die Componente der Geschwindigkeit v parallel der ersten Axe hat den Coefficienten Null,

die Componenten parallel der zweiten und dritten Axe haben zu Coefficienten die zweite und dritte Coordinate in verwechselter Folge und erhält dabei die der zweiten Axe entsprechende Componente das Zeichen (—), die der dritten entsprechende des Zeichen (+). Indem wir jetzt die Axen in der Ordnung y', z', x' als erste, zweite und dritte Axe ansehen, erhalten wir für die Componenten der Geschwindigkeit v, herrührend von $\Omega_{y'}$ parallel den Axen der x', y', z' nach demselben Bildungsgesetze

$$z'\Omega_{y'},\quad 0\cdot\Omega_{y'},\quad -x'\Omega_{y'}$$

und ebenso für die Ordnung z', x', y' die von $\Omega_{z'}$ herrührenden Componenten:

$$-y'\Omega_{z'},\quad x'\Omega_{z'},\quad 0\cdot\Omega_{z'}.$$

Sammeln wir daher jetzt alle denselben Axen parallelen Bestandtheile, so erhalten wir für die Componenten der Geschwindigkeit v des Systempunktes $(x'y'z')$ parallel den Axen der x', y', z':

$$\begin{aligned} v_{x'} &= \Omega_{y'}\,z' - \Omega_{z'}\,y' \\ v_{y'} &= \Omega_{z'}\,x' - \Omega_{x'}\,z' \\ v_{z'} &= \Omega_{x'}\,y' - \Omega_{y'}\,x', \end{aligned}$$

welche Ausdrücke wegen $\Omega_{x'} = p$, $\Omega_{y'} = q$, $\Omega_{z'} = r$ mit den Ausdrücken (5) des vorigen §. übereinstimmen.

§. 9. Um die Lage der Momentanaxe gegen die Axen der x, y, z, welche nicht an der Bewegung des Systems theilnehmen, zu bestimmen, projiciren wir den Linienzug der $\Omega_{x'}$, $\Omega_{y'}$, $\Omega_{z'}$ und des Ω, letztere Grösse in entgegengesetztem Sinne genommen auf die Axen der x, y, z. Dies liefert uns, wenn α, β, γ die Winkel sind, welche die Momentanaxe mit diesen Coordinatenaxen bildet:

$$\cos\alpha = \frac{a\Omega_{x'} + a'\Omega_{y'} + a''\Omega_{z'}}{\Omega}$$

$$\cos\beta = \frac{b\Omega_{x'} + b'\Omega_{y'} + b''\Omega_{z'}}{\Omega}$$

$$\cos\gamma = \frac{c\Omega_{x'} + c'\Omega_{y'} + c''\Omega_{z'}}{\Omega}.$$

Man kann übrigens diese Frage auch direct behandeln. Setzt man nämlich in den Gleichungen (1) des §. 7. $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$, so erhält man als Gleichungen zur Bestimmung der Lage der Momentanaxe

$$x'\frac{da}{dt} + y'\frac{da'}{dt} + z'\frac{da''}{dt} = 0$$

$$x'\frac{db}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{db''}{dt} = 0$$

$$x'\frac{dc}{dt} + y'\frac{dc'}{dt} + z'\frac{dc''}{dt} = 0$$

woraus man, wenn man x', y', z' durch die Formeln (2) des §. 6. eliminirt und dabei die daselbst angeführten Nebenrelationen, sowie die

sich aus diesen durch Differentiation ergebenden Folgerungen berücksichtigt, weiter erhält:

$$\left(b\frac{da}{dt}+b'\frac{da'}{dt}+b''\frac{da''}{dt}\right)y+\left(c\frac{da}{dt}+c'\frac{da'}{dt}+c''\frac{da''}{dt}\right)z=0\,,$$

$$\left(c\frac{db}{dt}+c'\frac{db'}{dt}+c''\frac{db''}{dt}\right)z+\left(a\frac{db}{dt}+a'\frac{db'}{dt}+a''\frac{db''}{dt}\right)x=0$$

$$\left(a\frac{dc}{dt}+a'\frac{dc'}{dt}+a''\frac{dc''}{dt}\right)x+\left(b\frac{dc}{dt}+b'\frac{dc'}{dt}+b''\frac{dc''}{dt}\right)y=0,$$

welche Gleichungen sich in Form der folgenden Proportion schreiben lassen:

$$\frac{x}{b\frac{dc}{dt}+b'\frac{dc'}{dt}+b''\frac{dc''}{dt}}=\frac{y}{c\frac{da}{dt}+c'\frac{da'}{dt}+c''\frac{da''}{dt}}=\frac{z}{a\frac{db}{dt}+a'\frac{db'}{dt}+a''\frac{db''}{dt}}\,.$$

Setzt man abkürzend

$$a\frac{db}{dt}+a'\frac{db'}{dt}+a''\frac{db''}{dt}=-\left(b\frac{da}{dt}+b'\frac{da'}{dt}+b''\frac{da''}{dt}\right)=R$$

$$b\frac{dc}{dt}+b'\frac{dc'}{dt}+b''\frac{dc''}{dt}=-\left(c\frac{db}{dt}+c'\frac{db'}{dt}+c''\frac{db''}{dt}\right)=P$$

$$c\frac{da}{dt}+c'\frac{da'}{dt}+c''\frac{da''}{dt}=-\left(a\frac{dc}{dt}+a'\frac{dc'}{dt}+a''\frac{dc''}{dt}\right)=Q,$$

so kann man die Gleichungen der Momentanaxe schreiben

$$\frac{x}{P}=\frac{y}{Q}=\frac{z}{R}\,.$$

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Momentanaxe mit den Axen der x, y, z bildet, so hat man $\frac{\cos\alpha}{P}=\frac{\cos\beta}{Q}=\frac{\cos\gamma}{R}=\frac{1}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$.

Die Grössen P, Q, R haben in Bezug auf die Axen der x, y, z eine ganz analoge Bedeutung, wie die Grössen p, q, r in Bezug auf die Axen der x', y', z'. Sie sind die Componenten der Winkelgeschwindigkeit um Axen, die zur Zeit t mit den Axen der x, y, z zusammenfallen. Führt man nämlich in die Gleichungen (1) des §. 7. für x', y', z' ihre Werthe in x, y, z sowie für die obenbezeichneten Combinationen der Grössen a, b, c, ... und ihrer Differentialquotienten die Grössen P, Q, R ein, so kommt, wenn man nach x, y, z ordnet:

$$v_x=\frac{dx}{dt}=Qz-Ry$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=Rx-Pz$$

$$v_z=\frac{dz}{dt}=Py-Qx\,.$$

Hieraus folgt

$$v^2=(Qz-Ry)^2+(Rx-Pz)^2+(Py-Qx)^2=(P^2+Q^2+R^2)(x^2+y^2+z^2)-(Px+Qy+Rz)^2$$

und wenn man

$$P^2+Q^2+R^2=V^2$$

setzt und den Winkel, welcher den Abstand $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ des Punktes $(x\,y\,z)$ vom Punkte O mit der Momentanaxe bildet, mit λ bezeichnet, sodass

$$\cos\lambda = \frac{Px + Qy + Rz}{V d}$$

wird, so folgt weiter:

$$v = V d \sin\lambda,$$

woraus man erkennt, dass V die Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe ist, und dass P, Q, R ihre oben bezeichneten Componenten sind.

§. 10. Es ist noch von Interesse, die Bedeutung der Differentialquotienten $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$, etc. kennen zu lernen. Nun hat man einerseits

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x'\frac{da}{dt} + y'\frac{da'}{dt} + z'\frac{da''}{dt}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = x'\frac{db}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{db''}{dt}$$
$$v_z = \frac{dz}{dt} = x'\frac{dc}{dt} + y'\frac{dc'}{dt} + z'\frac{dc''}{dt},$$

andrerseits erhält man dieselben Componenten der Geschwindigkeit v, indem man die Componenten $v_{x'}$, $v_{y'}$, $v_{z'}$ u. s. w. in (5) des §. 7. auf die Axen der x, y, z projicirt, nämlich

$$v_x = a\,(qz' - ry') + a'\,(rx' - pz') + a''\,(py' - qx')$$
$$v_y = b\,(qz' - ry') + b'\,(rx' - pz') + b''\,(py' - qx')$$
$$v_z = c\,(qz' - ry') + c'\,(rx' - pz') + c''\,(py' - qx').$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von x', y', z' erhält man daher:

$$\frac{da}{dt} = a'r - a''q, \quad \frac{da'}{dt} = a''p - ar, \quad \frac{da''}{dt} = aq - a'p,$$
$$\frac{db}{dt} = b'r - b''q, \quad \frac{db'}{dt} = b''p - br, \quad \frac{db''}{dt} = bq - b'p,$$
$$\frac{dc}{dt} = c'r - c''q, \quad \frac{dc'}{dt} = c''p - cr, \quad \frac{dc''}{dt} = cq - c'p.$$

Man kann diese Formeln auch auf geometrischem Wege finden, wenn man bedenkt, dass $-a$, $-a'$, $-a''$ die Coordinaten eines auf der x-Axe in der Einheit der Entfernung von O liegenden Punktes in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem ist, und dass also seine Geschwindigkeitscomponenten $-\frac{da}{dt}$, $-\frac{db}{dt}$, $-\frac{dc}{dt}$ nach Anleitung des §. 8. gefunden werden können.

§. 11. Die neun Cosinusse a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', welche die Lage des beweglichen Coordinatensystems bestimmen, sind nicht von einander unabhängig, vielmehr bestehen zwischen ihnen sechs Relationen, vermöge welcher sie auf drei reducirbar sind. Euler hat zuerst gezeigt, wie man dieselben durch die trigonometrischen Functionen dreier Winkel ausdrücken kann, welche hinreichen, um die Lage des beweg-

lichen Systems zu bestimmen. Diese Winkel sind: 1) der Winkel ψ, welchen die Knotenlinie der Ebenen der $x'y'$ und der xy mit der Axe der x bildet; 2) der Winkel ϑ, welchen diese beiden Ebenen oder also auch die beiden auf ihnen senkrechten Axen der z und z' mit einander einschliessen und 3) der Winkel φ, welcher von der Axe der x' und jener Knotenlinie gebildet wird. Den Sinn dieser Winkel wollen wir folgendermassen bestimmen. Wir denken uns das System der $x'\,y'\,z'$ zunächst zusammenfallend mit dem der $x\,y\,z$ und drehen dasselbe um die z-Axe im positiven, mit der Uhrzeigerbewegung von der positiven z-Axe aus gesehen übereinstimmenden Sinn, bis die positive x'-Axe mit dem beliebig wählbaren, aber ein für allemal fixirten positiven Sinn der Knotenlinie zusammenfällt, die Amplitude dieser Drehung ist der Winkel ψ und ihr Sinn der Sinn desselben; wir drehen hierauf das System um die Knotenlinie im positiven Sinne, bis die Ebene der $x'\,y'$ in ihre Lage gelangt; die Amplitude dieser Drehung ist der Winkel ϑ und der Sinn, in welchem dieser Winkel genommen wird, ist der Sinn dieser Drehung; wir drehen endlich das System um die z'-Axe in der Lage, welche sie nunmehr erlangt hat im positiven Sinne, bezeichnen die Amplitude dieser Drehung mit φ und nehmen diesen Winkel im Sinne dieser Drehung. Durch die Folge dieser drei Drehungen ist das System der x', y', z' in seine definitive, durch die Winkel φ, ϑ, ψ bestimmte Lage gelangt. Um die Abhängigkeit der obigen neun Cosinusse von den drei Winkeln φ, ϑ, ψ zu erkennen, denken wir um das Rotationscentrum O mit der Einheit als Radius eine Kugel beschrieben (Fig. 61.); auf ihr markiren die Axen der x, y, z die drei Ecken eines Octanten, die Axen der x', y', z' die eines zweiten Octanten, die erwähnte Knotenlinie einen Punkt K, den Schnittpunkt der Bogen xy und $x'y'$, welche die Ebenen der xy und $x'y'$ vorstellen. Man hat alsdann $xK = \psi$, $Kx' = \varphi$ und $zz' = \vartheta$ und erhält

Fig. 61.

aus den sphärischen Dreiecken

$a = \cos x'x$,	$b = \cos x'y$,	$c = \cos x'z$	$x'Kx$, $x'Ky$, $x'Kz$
$a' = \cos y'x$,	$b' = \cos y'y$,	$c' = \cos y'z$	$y'Kx$, $y'Ky$, $y'Kz$
$a'' = \cos z'x$,	$b'' = \cos z'y$,	$c'' = \cos z'z$	$z'Kx$, $z'Ky$, $z'Kz$,

nämlich

$$a = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta \qquad a' = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta$$
$$b = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta \qquad b' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta$$
$$c = \sin\varphi\sin\vartheta \qquad c' = \cos\varphi\sin\vartheta$$
$$a'' = \sin\psi\sin\vartheta$$
$$b'' = -\cos\psi\sin\vartheta$$
$$c'' = \cos\vartheta$$

§. 12. Man kann die Elementarbewegung des Systems um die Momentanaxe in drei unendlich kleine Rotationen um die Axen OK, Oz, Oz' auflösen; dadurch zerfällt die Winkelgeschwindigkeit Ω in drei Componenten Ω_ϑ, Ω_ψ, Ω_φ um diese Axen, deren Werthe sind:

$$\Omega_\vartheta = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \Omega_\psi = \frac{d\psi}{dt}, \quad \Omega_\varphi = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Indem man diese Winkelgeschwindigkeiten auf ihren Axen nach Grösse und Sinn aufträgt und den Linienzug derselben in Verbindung mit der auf der Momentanaxe aufgetragenen Winkelgeschwindigkeit Ω, diese in entgegengesetztem Sinne genommen, auf die Axen der x', y', z' projicirt, erhält man $\Omega_{x'}$, $\Omega_{y'}$, $\Omega_{z'}$ ausgedrückt durch Ω_ϑ, Ω_ψ, Ω_φ, nämlich:

$$\Omega_{x'} = \Omega_\vartheta \cos\varphi + \Omega_\psi \sin\varphi \sin\vartheta = \frac{d\vartheta}{dt}\cos\varphi + \frac{d\psi}{dt}\sin\varphi\sin\vartheta$$

$$\Omega_{y'} = -\Omega_\vartheta \sin\varphi + \Omega_\psi \cos\varphi \sin\vartheta = -\frac{d\vartheta}{dt}\sin\varphi + \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\vartheta$$

$$\Omega_{z'} = \Omega_\varphi + \Omega_\psi \cos\vartheta = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta.$$

Indem man diese Gleichungen nach Ω_ϑ, Ω_ψ, Ω_φ auflöst, oder auch, indem man den Linienzug der $\Omega_{x'}$, $\Omega_{y'}$, $\Omega_{z'}$, $-\Omega$ auf die Axen OK, Oz, Oz' projicirt, erhält man weiter Ω_ϑ, Ω_ψ, Ω_φ ausgedrückt durch $\Omega_{x'}$, $\Omega_{y'}$, $\Omega_{z'}$, nämlich:

$$\Omega_\vartheta = \Omega_{x'}\cos\varphi - \Omega_{y'}\sin\varphi$$

$$\Omega_\psi \sin\vartheta = \Omega_{x'}\sin\varphi + \Omega_{y'}\cos\varphi$$

$$\Omega_\varphi \sin\vartheta = \Omega_{z'}\sin\vartheta - \Omega_{x'}\sin\varphi\cos\vartheta - \Omega_{y'}\cos\varphi\cos\vartheta.$$

§. 13. Während des Zeitelementes dt beschreibt der Radiusvector $OM = \varrho$ eines Systempunktes M, welcher diesen Punkt mit dem Rotationscentrum O verbindet, einen unendlich kleinen Sector $OMM' = dS$; derselbe ist als ein unendlich kleines gleichschenkliges Dreieck anzusehen, dessen eine Seite das Bogenelement $MM' = ds$ der Bahn des Systempunktes ist, und dessen beiden andre Seiten die nach den Endpunkten M und M' dieses Elementes gezogenen Radienvectoren $OM = OM' = \varrho$ sind. Dieser Sector wird in einem mit dem Sinne, in welchem das Bogenelement durchlaufen wird, übereinstimmenden Sinne beschrieben. Die Fläche desselben, dividirt durch das Zeitelement, wird die **Sectorengeschwindigkeit** des Systempunktes M in Bezug auf das Rotationscentrum genannt. Bezeichnen wir sie mit η, sowie den unendlich kleinen Winkel MOM' der beiden Radienvectoren mit $d\vartheta$, so wird

$$\eta = \frac{dS}{dt} = \tfrac{1}{2}\varrho^2 \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Errichten wir in O senkrecht auf die Ebene des Sectors dS eine Gerade und zwar nach der Seite dieser Ebene, von welcher aus gesehen der Sector übereinstimmend mit der Uhrzeigerbewegung beschrieben erscheint, so soll diese Gerade die **Axe** der Sectoren-

geschwindigkeit heissen. In Bezug auf sie stellt $\frac{d\vartheta}{dt}$ eine Winkelgeschwindigkeit dar. Die Grösse η tragen wir auf dieser Axe in ihrem Sinne als Länge auf.

Bezeichnet r den Abstand des Punktes M von der Momentanaxe, so hat man

$$\varrho \frac{d\vartheta}{dt} = r\Omega$$

und besteht daher zwischen der Sectorengeschwindigkeit η des Punktes M, seinen Abständen ϱ und r vom Rotationscentrum und der Momentanaxe, sowie der Winkelgeschwindigkeit Ω um letztere oder auch der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ des Systempunktes die Gleichung

$$\eta = \tfrac{1}{2}\varrho r \Omega = \tfrac{1}{2}\varrho v.$$

Es wird demnach die Sectorengeschwindigkeit durch den Inhalt des Dreiecks dargestellt, welches die auf der Tangente der Bahn des Systempunktes aufgetragene Geschwindigkeit v als Basis mit dem Rotationscentrum als gegenüberliegende Ecke bildet.

Während einer endlichen Zeit beschreibt der Radiusvector ϱ eines Systempunktes M einen sphärischen Ausschnitt einer Kegelfläche, von welchem dS das Differential ist. Die Sectorengeschwindigkeit ist im Laufe der Bewegung nach Grösse und Axenrichtung im Allgemeinen veränderlich.

Projiciren wir das bewegliche System auf eine Ebene, welche an der Bewegung nicht Theil nimmt, z. B. auf die xy-Ebene, so wird das projicirte System im Allgemeinen ein veränderliches ebenes System sein. Die Projection m des Punktes M beschreibt im Zeitelement das Bogenelement mm' und die Projection ϱ_1 des Radiusvectors ϱ den unendlich kleinen Sector mOm', dessen Inhalt $\frac{1}{2}\varrho_1^2 d\vartheta_1$ ist, wenn $d\vartheta_1$ die Projection des unendlich kleinen Winkels $d\vartheta$ bezeichnet. Der Winkel ϑ_1, dessen Differential $d\vartheta_1$ ist, kann als der Winkel aufgefasst werden, den ϱ_1 mit der Axe der x bildet und es sind daher die Coordinaten x, y des Punktes m durch die Gleichungen $x = \varrho_1 \cos\vartheta_1$, $y = \varrho_1 \sin\vartheta_1$ bestimmt, aus welchen

$$tg\,\vartheta_1 = \frac{y}{x}, \quad \varrho_1^2 = x^2 + y^2$$

und hiermit weiter

$$d\vartheta_1 = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

und also

$$\varrho_1^2 d\vartheta_1 = xdy - ydx$$

folgt. Daher würde die Sectorengeschwindigkeit des Punktes m in der

xy-Ebene sein: $\frac{1}{2}\varrho_1^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$. Wir wollen nun mit dS_x, dS_y, dS_z die Projectionen des Elementarfactors dS auf die Ebenen der yz, zx und xy und die den drei Projectionsbewegungen von M in diesen Ebenen entsprechenden Sectorengeschwindigkeiten mit η_x, η_y, η_z bezeichnen. Unter Anwendung der symmetrischen Vertauschung der Buchstaben giebt uns dann die vorstehende Betrachtung sofort:

$$\eta_x = \frac{dS_x}{dt} = \frac{1}{2}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{2}(yv_z - zv_y)$$

$$\eta_y = \frac{dS_y}{dt} = \frac{1}{2}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \frac{1}{2}(zv_x - xv_z)$$

$$\eta_z = \frac{dS_z}{dt} = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2}(xv_y - yv_x).$$

Die Axen dieser drei Sectorengeschwindigkeiten sind die Axen der x, y, z. Bildet nun die Axe von η mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ, so wird nach bekannten Sätzen der Geometrie

$$\frac{\cos\alpha}{dS_x} = \frac{\cos\beta}{dS_y} = \frac{\cos\gamma}{dS_z} = \frac{1}{dS}$$

$$dS^2 = dS_x^2 + dS_y^2 + dS_z^2$$

und folglich auch

$$\frac{\cos\alpha}{\eta_x} = \frac{\cos\beta}{\eta_y} = \frac{\cos\gamma}{\eta_z} = \frac{1}{\eta}$$

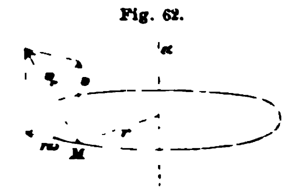
$$\eta^2 = \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2.$$

V. Capitel.

Aequivalenz der Translationsgeschwindigkeiten und der Winkelgeschwindigkeiten um gekreuzte Axen mit der Schraubengeschwindigkeit. Geschwindigkeiten im unveränderlichen System, welches die allgemeinste Art der Bewegung besitzt.

§. 1. Ein unveränderliches System besitze zur Zeit t eine Elementarschraubenbewegung um die Axe (α, a) (Fig. 62.), deren Componenten die unendlich kleine Rotatation $d\vartheta$ um diese Axe und die unendlich kleine Translation $d\tau$ parallel derselben sind. Indem man diese beiden Grössen durch das Zeitelement dt dividirt, in welchem die Schraubenbewegung erfolgt, erhält man für die Winkelgeschwindigkeit ω des Systems um die Axe a und die Translationsgeschwindigkeit v derselben parallel zu ihr:

Fig. 62.



$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad v = \frac{d\tau}{dt}.$$

Durch ω und v kann die Geschwindigkeit v_r eines beliebigen Systempunktes M, welcher die Entferung r von der Axe α besitzt, dargestellt werden. Dieselbe hat zwei Componenten, von denen die eine, $r\omega$, von der Winkelgeschwindigkeit herrührend, senkrecht zur Axe ist und die Richtung der Tangente des Kreises hat, welchen M in Folge der Rotation um die Axe α beschreiben würde, während die andere die Translationsgeschwindigkeit v ist. Demnach erhält man, da beide Componenten rechtwinklig zu einander sind:

$$v_r^2 = v^2 + r^2\omega^2.$$

Die Neigung ψ der Geschwindigkeit v_r gegen die Axe folgt aus der Gleichung:

$$tg\,\psi = \frac{r\omega}{v}.$$

Sie wächst proportional der Entfernung des Systempunktes von der Axe und die Richtung der Geschwindigkeit nähert sich daher mit wachsendem r immer mehr der rechtwinkligen Kreuzung mit der Axe.

Die Geschwindigkeit der Systempunkte in der Einheit der Entfernung von der Axe hat die Grösse $\sqrt{v^2 + \omega^2}$; wir nennen dieselbe die Schraubengeschwindigkeit um die Axe α und ω und v ihre Rotations- und Translationscomponenten.

§. 2. Das System besitze zur Zeit t eine Winkelgeschwindigkeit ω um eine Axe (α, a) und eine gegen diese Axe unter einem Winkel $\frac{1}{2}\pi - \lambda$ geneigte Translationsgeschwindigkeit v. Vermöge der ersteren würde dasselbe im nächstfolgenden Zeitelemente dt eine unendlich kleine Rotation $d\vartheta$, vermöge der letzteren eine unendlich kleine Translation $d\tau$ in der Richtung von v erleiden, für welche beiden Bewegungen die Gleichungen bestehen:

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad v = \frac{d\tau}{dt}.$$

Nach Cap. V, §. 6. No. 1. im I. Theil sind diese beiden Bewegungen zusammen äquivalent einer unendlich kleinen Schraubenbewegung um eine zu α parallele Axe β. Diese Axe fällt in eine Ebene, welche senkrecht ist zu der durch α und die Richtung von v bestimmten Ebene und liegt in ihr auf derjenigen Seite von α, nach welcher hin die Rotation erfolgt. Die Amplitude und die Translation dieser Schraubenbewegung sind $d\vartheta$ und $d\tau \sin\lambda$ und daher werden die Rotationscomponente Ω und die Translationscomponente V der Schraubengeschwindigkeit

$$\Omega = \omega, \quad V = v \sin\lambda,$$

und der Abstand der Axe β von α, wenn man v und ω statt $d\tau$ und $d\vartheta$ in die dort für denselben aufgestellte Formel einführt:

$$d = \frac{v}{\omega} \cos \lambda .$$

§. 3. Das System besitze zur Zeit t zwei Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' um zwei sich kreuzende Axen (α, a), (β, b); durch dieselben erleidet es im nächstfolgenden Zeitelemente dt um diese Axen die unendlich kleinen Rotationen $d\vartheta$, $d\vartheta'$, welche mit ω, ω' durch die Gleichungen

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \omega' = \frac{d\vartheta'}{dt}$$

verbunden sind. Nach Cap. V, §. 6. No. 2. im I. Theile sind $d\vartheta$, $d\vartheta'$ zusammen einer unendlich kleinen Schraubenbewegung um eine Axe γ äquivalent, welche senkrecht ist zu dem kürzesten Abstande d der Axen α, β. Die Amplitude $d\Theta$ und die Translation $d\tau$ dieser Schraubenbewegung, sowie die Neigungen der Axe γ gegen die Axen α, β ergeben sich aus den Gleichungen

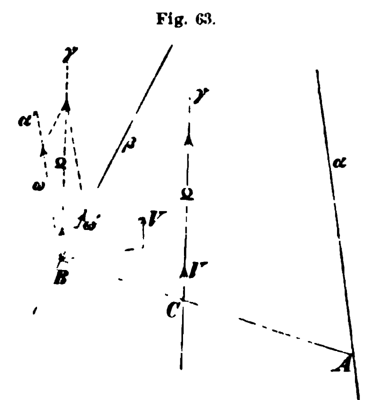
$$\frac{\sin \gamma\alpha}{d\vartheta'} = \frac{\sin \gamma\beta}{d\vartheta} = \frac{\sin \alpha\beta}{d\Theta}, \quad d\Theta^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 + 2 d\vartheta\, d\vartheta' \cos \alpha\beta,$$

$$d\tau = \frac{d \cdot d\vartheta\, d\vartheta' \sin \alpha\beta}{d\Theta},$$

das Verhältniss der Abstände der Axe γ von den Axen α und β ist gleich dem Verhältniss der Tangenten ihrer Neigungen gegen diese Axen. Indem man in diese Gleichungen an die Stelle von $d\vartheta$, $d\vartheta'$, $d\Theta$, $d\tau$ die Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' um die Axen α, β, die Rotationscomponente Ω und die Translationscomponente V der den beiden Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' äquivalenten Schraubengeschwindigkeit einführt, gehen sie über in die folgenden:

$$\frac{\sin \gamma\alpha}{\omega'} = \frac{\sin \gamma\beta}{\omega} = \frac{\sin \alpha\beta}{\Omega}, \quad \Omega^2 = \omega^2 + \omega'^2 + 2\omega\omega' \cos \alpha\beta, \quad V = \frac{d\omega\omega'}{\Omega} \sin \alpha\beta.$$

Fig. 63.



Sie liefern uns folgenden Satz (s. Fig. 63. in Verbindung mit Fig. 31, S. 78.):

Die gleichzeitige Verbindung zweier Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' eines unveränderlichen Systems um zwei parallele Axen (α, a), (β, b) ist äquivalent einer Schraubengeschwindigkeit um eine dritte, die Linie des kürzesten Abstandes beider Axen rechtwinklig schneidende Axe γ, welche gegen die Axen α, β unter Winkeln

geneigt ist, deren Sinusse sich umgekehrt wie die ihnen entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten verhalten und Abstände von ihnen besitzt, deren Verhältniss gleich dem Verhältniss der Tangenten dieser Winkel ist. Die Richtung dieser Axe, die Grösse und der Sinn der Rotationscomponenten Ω der Schraubengeschwindigkeit werden durch die Richtung, Länge und den Sinn der Diagonalen des Parallelogramms der Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' angegeben, ihre Translationscomponente V aber wird erhalten, indem man das Produkt der Winkelgeschwindigkeiten, des kürzesten Abstandes der Axen α, β und des Sinus ihrer Neigung $(\alpha\beta)$ durch die Rotationscomponente Ω dividirt.

Es ist nicht ohne Interesse, den Inhalt dieses Satzes in einige Spezialfälle hinein zu verfolgen. Wir wollen zu dem Ende die Axe β sich um ihren Schnittpunkt B mit dem kürzesten Abstande AB beider Axen drehen lassen und zusehn, welchen Einfluss dies auf die resultirende Schraubengeschwindigkeit hat.

Ist zunächst Winkel $(\alpha\beta) = 0$, so wird γ der gemeinschaftlichen Richtung von α und β parallel und $\Omega = \omega + \omega'$ stimmt dem Sinne nach mit dem gemeinschaftlichen Sinne von ω und ω' überein; weiter ist $\sin\gamma\alpha : \sin\gamma\beta = \omega' : \omega$ und da $\cos\gamma\alpha : \cos\beta = 1$, so wird das Verhältniss der Abstände der Axe γ von α und β, nämlich $tg\,\gamma\alpha : tg\,\gamma\beta = \omega' : \omega$; endlich ist $V = 0$. Es kommen, wie man sieht, alle Umstände des Cap. III. §. 4. behandelten Falles zum Vorschein unter der Voraussetzung, dass ω und ω' gleichen Sinnes sind.

Bildet β mit α einen Winkel $(\alpha\beta) < \frac{\pi}{2}$, so ist V nicht Null und fällt der Schnittpunkt C der Axe γ mit der Richtung des kürzesten Abstandes auf die Strecke AB selbst, die er im Verhältniss $tg\,\gamma\alpha : tg\,\gamma\beta$ theilt. Um dies Verhältniss durch ω, ω' und α darzustellen, erhalten wir

$\sin\gamma\alpha = \frac{\omega'}{\Omega}\sin\alpha\beta$, $\sin\gamma\beta = \frac{\omega}{\Omega}\sin\alpha\beta$ und wegen $\Omega^2 = \omega^2 + \omega'^2 + 2\omega\omega'\cos\alpha\beta$

$$\cos\gamma\alpha = \frac{\omega + \omega'\cos\alpha\beta}{\Omega}, \quad \cos\gamma\beta = \frac{\omega\cos\alpha\beta + \omega'}{\Omega}$$

und folglich

$$tg\,\gamma\alpha : tg\,\gamma\beta = \frac{\omega'}{\omega} \cdot \frac{\omega\cos\alpha\beta + \omega'}{\omega + \omega'\cos\alpha\beta}.$$

Der Werth von V wird positiv und fällt der Sinn von V mit dem Sinne der Linie zusammen, welche Ω auf der Axe γ darstellt; die Elementarbewegung des Systems besteht daher in einer Schraubenbewegung nach der Seite der Axe hin, nach welcher die Pfeilspitze von Ω zeigt

Es sei weiter $(\alpha\beta) = \frac{1}{2}\pi$; in diesem Falle wird
$$\frac{\sin\gamma\alpha}{\omega'} = \frac{\sin\gamma\beta}{\omega} = \frac{1}{\Omega},\ \Omega^2 = \omega^2 + \omega'^2,\ tg\,\gamma\alpha : tg\,\gamma\beta = \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2,\ V = \frac{d\,\omega\omega'}{\Omega}.$$

Für $(\alpha\beta) = \pi$ erhalten wir den Fall Cap. III. §. 4. für die Voraussetzung, dass ω und ω' entgegengesetzten Sinnes sind. Der Schnittpunkt C fällt ausserhalb der Strecke AB; es wird $\frac{\sin\gamma\alpha}{\omega'} = \frac{\sin\gamma\beta}{\omega} = \frac{0}{\Omega}$, $\Omega = \omega - \omega'$, $V = 0$, $tg\,\gamma\alpha : tg\,\gamma\beta = -\frac{\omega'}{\omega}$. Ist hierbei $\omega = \omega'$, so erhält man ein Rotationspaar.

Für einen Winkel $(\alpha\beta) > \pi$ wird V negativ und erfolgt die Schraubenbewegung also nach der Seite der Axe hin, welche der Pfeilspitze von Ω entgegengesetzt ist.

§. 4. Das System besitze zur Zeit t beliebig viele Winkelgeschwindigkeiten $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ um die Axen (α, a), (α', a'), $(\alpha'', a'')\ldots$, welche beliebige Lagen im System und im absoluten Raume haben mögen. Wir denken alle Winkelgeschwindigkeiten auf den betreffenden Axen nach Grösse und Sinn als Längen aufgetragen. Da etwaige Translationsgeschwindigkeiten des Systems immer durch Rotationspaare dargestellt werden können, so genügt die Annahme blos von Winkelgeschwindigkeiten, um den allgemeinsten Bewegungszustand des Systems zu charakterisiren. Ziehen wir nun durch irgend einen Systempunkt O eine Parallele α_1 zur Axe α und ertheilen dem System um sie zwei gleiche und entgegengesetzte Winkelgeschwindigkeiten ω und $-\omega$, die wir gleichfalls auf dieser Geraden als Längen aufgetragen denken, so erhalten wir an Stelle der Winkelgeschwindigkeit ω um α als ihr äquivalent dieselbe Winkelgeschwindigkeit ω um die Axe α_1 in Verbindung mit einem Rotationspaare $(\omega, -\omega)$, dessen Arm das von O auf die Axe α gefällte Perpendikel p ist. Das Moment $p\omega$ dieses Paares stellt eine Translationsgeschwindigkeit dar, welche nach Richtung und Sinn durch die Axe des Paares bezeichnet wird, auf welches wir das Moment als Länge auftragen. Indem wir dieselbe Construction in Bezug auf sämmtliche Winkelgeschwindigkeiten $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ ausführen, erhalten wir statt ihrer und ihnen äquivalent 1) ein System derselben Winkelgeschwindigkeiten um Axen, parallel den ursprünglichen, welche sämmtlich durch den Punkt O hindurchgehen und 2) ein System von Rotationspaaren $p\omega, p'\omega', p''\omega'', \ldots$ Mit Hülfe des Polygons der Winkelgeschwindigkeiten ergibt sich nun leicht eine Winkelgeschwindigkeit Ω um eine bestimmte Axe μ, welche dem Systeme 1) äquivalent ist, und ebenso unter Anwendung eines Polygons für die Translationsgeschwindigkeiten oder Rotationspaare 2) ein ihnen äquivalentes Rotationspaar (eine Translationsgeschwindigkeit) vom Momente T und bestimmter Axenrichtung. Die beiden Grössen Ω und T, die wir die resultirende

Winkelgeschwindigkeit und das resultirende Rotationspaar der gegebenen Winkelgeschwindigkeiten bei der Reduction für den Punkt O nennen, sind dem ganzen System der Winkelgeschwindigkeiten äquivalent und die beiden Linien Ω, T im Punkte O construirt, welche diese Grössen nach Werth, Richtung und Sinn darstellen, liefern uns ein Symbol, welches jeden Augenblick den Bewegungszustand des Systems uns zu vergegenwärtigen sehr geeignet ist. Die Bewegung, welche das System im folgenden Zeitelemente dt erleidet, hat daher zu Componenten 1) eine unendlich kleine Rotation von der Amplitude $d\theta = \Omega\, dt$ um die Axe μ in dem durch die Pfeilspitze von Ω angedeuteten Sinne und 2) eine unendlich kleine Translation $d\tau = T\, dt$ von der Richtung und dem Sinne der Linie T. Beide Componenten zusammen sind äquivalent der Elementarschraubenbewegung um die Momentanaxe, wovon nachher die Rede sein wird.

Der Punkt O war ein beliebig gewählter Systempunkt; wir können daher die Reduction der Winkelgeschwindigkeiten auf eine resultirende Winkelgeschwindigkeit und ein resultirendes Rotationspaar für alle Punkte des Raumes ausgeführt denken. Alle diese Reductionen haben etwas Gemeinsames, nämlich die Richtung der Axe μ, die Grösse und den Sinn der resultirenden Winkelgeschwindigkeit Ω. Die sämmtlichen, den verschiedenen Reductionen entsprechenden Polygone, welche zur Auffindung von Ω dienen, sind nämlich offenbar einander congruent und parallel. Es gibt daher ein Parallelstralenbündel (μ) von bestimmter Richtung, dessen Stralen die Axen der resultirenden Winkelgeschwindigkeit für die verschiedenen Reductionen sind; für alle Punkte O eines solchen Strales ist die Reduction dieselbe, da die Lage des Punktes O auf einem solchen Strale auch für die Bildung von T von keinem Belang ist und dieses also für alle Punkte O längs eines solchen Strales nach Grösse, Richtung und Sinn dasselbe bleibt. Es fragt sich daher blos noch, wie sich die Reductionen, welche den verschiedenen Parallelstralen μ jenes Büschels entsprechen, hinsichtlich des resultirenden Rotationspaares T von einander unterscheiden. Diese Frage erledigt sich, indem man, wie folgt, die Reduction von einem Strale μ auf einen andern μ' überträgt.

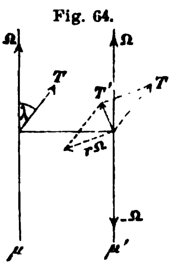


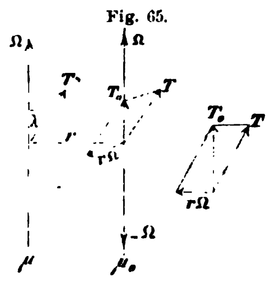
Fig. 64.

Hierzu ist nur nöthig (Fig. 64.), dass man dem System um den Stral μ' zwei weitere gleiche und entgegengesetzte Winkelgeschwindigkeiten Ω und $-\Omega$ ertheilt. Die erstere von ihnen ist die der Axe μ' entsprechende resultirende Winkelgeschwindigkeit, die zweite bildet mit der resultirenden Winkelgeschwindigkeit Ω des Strales μ, für welchen wir die Reduction auf Ω und T als gegeben ansehen, ein Rotationspaar $(\Omega, -\Omega)$, von dem Moment $r\Omega$, wo r den Abstand beider Stralen μ, μ'

bezeichnet, welches auf der Axe des Paares nach Grösse und Sinn aufgetragen, sich mit T durch ein Parallelogramm zu dem resultirenden Rotationspaare T' verbindet, welches dem Strale μ' entspricht und mit Ω längs dieses Strales die Reduction der Winkelgeschwindigkeiten darstellt.

Das resultirende Rotationspaar T ändert im Allgemeinen beim Uebergange von der einem Strale μ entsprechenden Reduction zu der Reduction für einen andern Stral μ' sowohl sein Moment, als auch die Neigung λ seiner Axe gegen den Stral. Es gibt aber in dem Parallelstralenbündel eine ausgezeichnete Axe μ_0, für welche die Axe von T parallel μ_0 wird. Diese Axe ist die Momentanaxe des Systems, indem für sie Ω und T_0 zusammen Rotations- und Translationscomponente der Schraubenbewegung werden. Um diese Axe aufzufinden, genügt folgende Betrachtung, wobei wir von einer Reduction Ω, T ausgehen, welche der Axe μ entspricht. Soll nämlich für die zu suchende Axe μ_0 (Fig. 65.)

Fig. 65.



die Axe des Rotationspaares T_0 parallel μ_0 werden, so muss die Ebene des Parallelogramms, dessen Diagonale T_0 liefert und welches die Richtungen von T und $r\Omega$ enthält, auch die Richtung der Stralen des Parallelbündels enthalten, d. h. ihnen parallel sein. Nun steht die Axe von $r\Omega$ senkrecht auf der Axenebene des Rotationspaares (Ω, $-\Omega$), welche die Ebene ($\mu\mu$ ist. Hieraus folgt, dass die Ebene ($\mu\mu_0$) senkrecht zur Ebene des Winkels λ sein muss. Hiernach ist also der Ort der Axe μ_0 auf die durch μ gehende, zur Ebene von λ senkrechte Ebene beschränkt. Die Axe μ theilt diese Ebene in zwei Felder und es muss zunächst die Frage entschieden werden, in welchem von beiden die Axe μ_0 liegen wird. Diese Felder unterscheiden sich aber dadurch von einander, dass für das eine der Sinn der Axe des Rotationspaares $r\Omega$ nach der einen, für das andere nach der andern Seite dieser Ebene zeigt. Soll aber T_0 die Richtung von μ_0 erhalten, so muss μ in den Winkel fallen, den T und $r\Omega$ mit einander bilden; diess ist aber nur für einen bestimmten Sinn von $r\Omega$ möglich und wird also durch diesen die Wahl des Feldes entschieden, in welchem μ_0 allein liegen kann. Um endlich auch noch den Abstand r der Axe μ_0 von μ zu bestimmen, genügt die Bemerkung, dass das Parallelogramm durch die Seite T, durch deren Richtung und die Richtungen der andern Seite $r\Omega$ und der Diagonale μ bereits bestimmt ist. Da $r\Omega$ senkrecht zu μ_0 ist, so hat man also T auf die Richtung μ und eine zu ihr senkrechten Ebene zu projiciren, um T_0 und $r\Omega$ zu erhalten. Es ist demnach

$$T_0 = T \cos\lambda, \quad r\Omega = T \sin\lambda$$

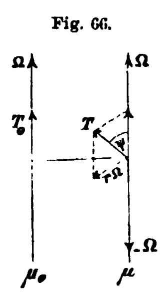
und aus der letzteren Gleichung folgt der Abstand r der Momentanaxe μ_0 von μ, nämlich

$$r = \frac{T}{\Omega} \sin \lambda .$$

Der Inhalt der bisher geführten Untersuchung, welche Poinsot ursprünglich für die Reduction der Kräfte gegeben hat und auf welche wir uns in der Theorie der Kräfte mit wenigen Worten beziehen werden, kann in folgenden Sätzen ausgesprochen werden:

Die gleichzeitige Verbindung einer beliebigen Menge von Winkelgeschwindigkeiten $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ eines unveränderlichen Systems um Axen von irgendwelchen Lagen ist äquivalent einer resultirenden Winkelgeschwindigkeit Ω und einem resultirenden Rotationspaare T (einer Translationsgeschwindigkeit) und zwar auf unendlich viele Arten. Für alle diese Reductionen bleibt die Axenrichtung, die Grösse und der Sinn von Ω constant, so dass die sämmtlichen Axen von Ω ein Parallelstralenbündel (μ) von bestimmter Richtung bilden. Das Rotationspaar ändert für die verschiedenen Reductionen im Allgemeinen die Grösse und Axenrichtung. Unter den Axen des Bündels (μ) ist eine ausgezeichnete, die Momentanaxe des Systems, für welche die Axe des Rotationspaares der Axe μ parallel wird. Das Moment T_0 des Rotationspaares für diese Axe ist die Projection des Momentes T des irgend einer beliebigen Reduction entsprechenden Rotationspaares auf die Richtung μ und haben die T sämmtlicher Reductionen gleiche Projectionen für diese Richtung. Die Ebenen, welche durch die Axen μ senkrecht zu den Ebenen der Winkel λ geführt werden können, welche die Richtungen von T mit diesen Axen bilden, gehen durch die Momentanaxe hindurch. Der Abstand r der Momentanaxe von einer Axe μ wird erhalten, wenn man die Projection des der Axe μ entsprechenden Momentes T auf eine zu μ senkrechte Ebene durch die resultirende Winkelgeschwindigkeit Ω dividirt.

Fig. 66.



Gehen wir jetzt von der Reduction (Ω, T_0) der Winkelgeschwindigkeiten für die Momentanaxe μ_0 (Fig. 66.) aus, so ergibt sich die Reduction (Ω, T) für jede andere Axe μ, welche den Abstand r von der Momentanaxe besitzt, indem wir mit T_0 das zu μ senkrechte Rotationspaar $r\Omega$ verbinden; die Grösse T und die Neigung ψ ihrer Richtung gegen die Axe μ sind daher durch die Gleichungen gegeben:

$$T^2 = T_0^2 + r^2 \Omega^2, \quad tg\, \psi = \frac{r\Omega}{T_0} .$$

Hieraus folgt:

Unter allen Rotationspaaren T, welche den verschiedenen Reductionen der Winkelgeschwindigkeiten entsprechen, ist das der Momentanaxe entsprechende das kleinste; alle Axen μ, welche denselben Abstand von der Momentanaxe besitzen, haben gleiches Moment des Rotationspaares und gleiche Neigung seiner Axenrichtung gegen μ; mit wachsendem Abstande einer Axe μ von der Momentanaxe nähert sich die Neigung der Axe des zugehörigen Rotationspaares immer mehr der Rechtwinkligkeit.

§. 5. Als besondere Fälle der Reduction der Winkelgeschwindigkeiten heben wir folgende hervor.

1. Es sei $T_0 = 0$; die sämmtlichen Winkelgeschwindigkeiten sind einer einzigen Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe äquivalent. Aus $T_0 = T \cos\lambda$ folgt, da T nicht Null sein kann, indem es mit T_0 durch die Gleichung $T^2 = T_0^2 + r^2\Omega^2$ verbunden ist, dass $\cos\lambda = 0$ sein muss, d. h. bei einer beliebigen Reduction muss in dem vorliegenden Falle die Axe des resultirenden Rotationspaares senkrecht zur Axe der resultirenden Winkelgeschwindigkeit sein. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so reduciren sich die Winkelgeschwindigkeiten auf eine blosse resultirende Winkelgeschwindigkeit ohne Rotationspaar und ist die Elementarbewegung des Systems während des folgenden Zeitelementes dt eine blosse Rotation, nicht eine eigentliche Schraubenbewegung.

2. Ist $\Omega = 0$, so sind die Winkelgeschwindigkeiten äquivalent einem Rotationspaare, welches sich bei jeder Reduction unverändert an Moment und Axenrichtung wiederfindet; es wird nämlich jedes $T = T_0$.

3. Ist sowohl $T_0 = 0$, als auch $\Omega = 0$, so befindet sich das System im Zustande des momentanen Stillstandes; bei jeder Reduction ergibt sich $T = 0$, $\Omega = 0$.

4. Liegen sämmtliche Axen der verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten in einer Ebene, so ist T senkrecht zu dieser Ebene, in welche auch die Axe von Ω fällt und reduciren sich also alle, wenn Ω nicht Null ist, auf eine blosse Winkelgeschwindigkeit, wenn aber $\Omega = 0$ ist, auf ein Rotationspaar.

5. Sind sämmtliche Axen parallel, so läuft auch die Axe von Ω mit ihnen parallel und wird T zu Ω senkrecht; auch in diesem Falle bleibt eine blosse Winkelgeschwindigkeit, wie wir bereits Cap. III. §. 5 gezeigt haben. Laufen alle Axen durch einen Punkt, so wird $T = 0$ und bleibt gleichfalls eine blosse Winkelgeschwindigkeit, wie ebendaselbst sich fand.

§. 6. Die sämmtlichen Winkelgeschwindigkeiten sind zusammen äquivalent zwei Winkelgeschwindigkeiten um zwei Axen, welche im Allgemeinen nicht in dieselbe Ebene

fallen, und zwar auf unendlich viele Arten. Reducirt man nämlich dieselben für irgend einen Stral μ des Parallelbündels auf Ω und T, so kann das Rotationspaar T, da es einer Translationsgeschwindigkeit äquivalent ist, deren Richtung die Axe derselben ist, beliebig parallel mit sich verlegt und in seiner Axenebene gedreht werden ohne Aenderung des Bewegungszustandes des Systems. Verlegen wir dasselbe nun so, dass eine seiner Axen die Axe μ von Ω schneidet und setzen die Winkelgeschwindigkeit dieser Axe mit Ω nach dem Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten zu einer Winkelgeschwindigkeit S zusammen, so bildet diese mit der noch übrig bleibenden zweiten Winkelgeschwindigkeit des Paares T zusammen ein System zweier Winkelgeschwindigkeiten, welche Ω und T und mithin auch den gegebenen Winkelgeschwindigkeiten äquivalent sind, deren Axen aber im Allgemeinen nicht in eine Ebene fallen; vielmehr findet dies nur statt, wenn die Axenebene von T dem Strale μ parallel läuft und also die Axe von T senkrecht zu μ ist, in welchem Falle nach §. 5. die sämmtlichen Winkelgeschwindigkeiten einer einzigen resultirenden Winkelgeschwindigkeit äquivalent sind. Da diese Betrachtung für jede Reduction der Winkelgeschwindigkeiten gilt und ausserdem bei jeder solchen Reduction das Rotationspaar auf unendlich viele Arten darstellbar ist, so erhellt, dass die fragliche Aequivalenz auf unzählige Arten möglich ist. Alle diese Arten haben aber etwas Charakteristisches gemein, nämlich:

Wie auch immer die gegebenen Winkelgeschwindigkeiten auf zwei Winkelgeschwindigkeiten reducirt werden mögen, das Tetraeder, welches diese beiden nach Grösse und Richtung als Strecken auf ihre Axen aufgetragenen Winkelgeschwindigkeiten zu Gegenkanten hat, ist von constantem Volumen.

Dieser Satz folgt einfach aus dem Cap. V. §. 4. im I. Theil entwickelten Satze von Rodrigues, wenn man denselben auf unendlich kleine Amplituden anwendet und zu den ihnen proportionalen Längen die Winkelgeschwindigkeiten selbst wählt; er schliesst sich aber auch unmittelbar an die oben ausgeführte Reduction an. Es sei (Fig. 67.) Ω und T irgend eine Reduction der Winkelgeschwindigkeiten und T durch das Paar $(\omega, -\omega)$ dargestellt, dessen Ebene senkrecht zu T ist. Das Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten liefert uns S als die Resultante von Ω und ω. Um nun den Inhalt des aus S und $-\omega$ als Gegenkanten gebildeten Tetraeders zu finden, dient die Bemerkung, dass die dreieckige Basis das halbe Moment $\frac{1}{2}T$ und die Höhe $\Omega \cos \lambda$ ist, wenn λ den Winkel bedeutet, den die Linien Ω und T einschliessen. Daher ist das Volumen des Tetraeders $\frac{1}{6}\Omega\, T \cos \lambda$, oder

Fig. 67.

weil $T \cos \lambda = T_0$ ist, $\frac{1}{6} \Omega T_0$, also constant, da Ω mit der Wahl der Axe μ nicht variirt.

Der vorliegende Satz wird in der Theorie der Kräfte wieder auftreten; in Bezug auf diese wurde er 1828 zuerst von Chasles Gergonne ohne Beweis mitgetheilt, der ihn in seinen Annales de mathém. publicirte und einen Beweis dazu gab. Später erfuhr der Satz durch Möbius (Crelle's Journal, B. IV. S. 179) eine neue Begründung und wesentliche Erweiterung.

§. 7. Wir wollen jetzt die in den §§. 5. und 6. durchgeführte Reduction der Winkelgeschwindigkeiten analytisch einkleiden. Hierzu wählen wir einen beliebigen Punkt O des Systems, durch welchen die Axe μ der resultirenden Winkelgeschwindigkeit Ω hindurchgehen soll, zum Ursprung eines rechtwinkligen, dem System angehörigen Coordinatensystems der x, y, z und zerlegen die Winkelgeschwindigkeit ω um die Axe α in drei Componenten ω_x, ω_y, ω_z um drei den Coordinatenaxen parallele Axen, welche wir durch einen beliebig auf der Axe α gewählten Punkt $(x\, y\, z)$ hindurchlegen. Indem wir nun dem System um die Axe der x zwei gleiche und entgegengesetzte Winkelgeschwindigkeiten ω_x und $-\omega_x$ ertheilen und sie mit der Componente ω_x von ω combiniren, erhalten wir an der Stelle von ω_x dieselbe Winkelgeschwindigkeit um die Axe der x und ein Rotationspaar $(\omega_x, -\omega_x)$, dessen Arm das vom Punkte (xyz) auf die Axe der x gefällte Perpendikel ist und welches eine Translationsgeschwindigkeit respräsentirt senkrecht zu der Ebene der Axen dieses Paares. Aehnliches thun wir in Bezug auf die Componenten ω_y und ω_z und führen dieselbe Construction für sämmtliche Winkelgeschwindigkeiten ω, ω', ω'', ... des Systems aus.

Dadurch erhalten wir nun zunächst drei Aggregate von Winkelgeschwindigkeiten um die Coordinatenaxen, nämlich

$$\Omega_x = \Sigma \omega_x, \quad \Omega_y = \Sigma \omega_y, \quad \Omega_z = \Sigma \omega_z,$$

aus welchen nach dem Satze vom Parallelepiped der Winkelgeschwindigkeiten die resultirende Winkelgeschwindigkeit Ω nebst der Richtung (a, b, c) ihrer Axe μ hervorgeht, nämlich:

$$\Omega^2 = \Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2$$

$$\frac{\cos a}{\Omega_x} = \frac{\cos b}{\Omega_y} = \frac{\cos c}{\Omega_z} = \frac{1}{\Omega}.$$

Hierbei gelten Winkelgeschwindigkeiten um die Coordinatenaxen als positiv oder negativ, je nachdem ihr Sinn mit dem positiven oder negativen Sinn der Coordinatenaxen übereinstimmt.

Wir erhalten weiter drei Systeme von Rotationspaaren, deren Axenebenen durch die Axen der x, y, z hindurchgehen und Translationsgeschwindigkeiten darstellen, welche parallel den Ebenen der yz, zx, xy sind. Indem wir dieselben nach den Coordinatenaxen zerlegen, ähnlich

wie wir Cap. III. §. 6. in Bezug auf ein System, dessen Axenebenen durch die z-Axe gingen, gethan haben, und die denselben Axen entsprechenden Bestandtheile sammeln, erhalten wir drei Aggregate von Rotationspaaren, deren Axen in die Axen der x, y, z fallen, nämlich:

$$T_x = \Sigma(y\,\omega_z - z\,\omega_y), \quad T_y = \Sigma(z\,\omega_x - x\,\omega_z), \quad T_z = \Sigma(x\,\omega_y - y\,\omega_x),$$

welche das resultirende Rotationspaar nach Grösse T und Richtung $(\lambda\mu\nu)$ seiner Axe durch die Gleichungen bestimmen:

$$T^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2$$

$$\frac{\cos\lambda}{T_x} = \frac{\cos\mu}{T_y} = \frac{\cos\nu}{T_z} = \frac{1}{T}.$$

Der Winkel ψ zwischen der Axe von Ω und T bestimmt sich durch die Formel:

$$\cos\psi = \frac{\Omega_x T_x + \Omega_y T_y + \Omega_z T_z}{\Omega T},$$

aus welcher sich weiter ergibt

$$(\Omega T \sin\psi)^2 = (\Omega_y T_z - \Omega_z T_y)^2 + (\Omega_z T_x - \Omega_x T_z)^2 + (\Omega_x T_y - \Omega_y T_x)^2,$$

wenn man den bekannten Satz für irgend 6 Grössen α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 anwendet:

$$(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)^2 + (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 =$$
$$(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2)^2.$$

Diese Reduction der Winkelgeschwindigkeiten für die Axe μ kann leicht für einen beliebigen Stral des Parallelbündels (μ) verallgemeinert werden. Man kann diese Uebertragung durch eine Transformation der Coordinaten, wie Cap. III, §. 6. bewirken. Die Coordinaten des Punktes O in Bezug auf irgend ein anderes, dem bisherigen paralleles Coordinatensystem seien wie dort x_1, y_1, z_1; dann treten an die Stelle von x, y, z der obigen Untersuchung jetzt $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, wobei x, y, z sich auf den neuen Ursprung beziehen. Der erste Theil der Untersuchung, Ω betreffend, bleibt ungeändert, der zweite, welcher die Bestimmung von T angeht, nimmt die Form an:

$$T_x = \Sigma(y\,\omega_z - z\,\omega_y) - (y_1\Omega_z - z_1\Omega_y)$$
$$T_y = \Sigma(z\,\omega_x - x\,\omega_z) - (z_1\Omega_x - x_1\Omega_z)$$
$$T_z = \Sigma(x\,\omega_y - y\,\omega_x) - (x_1\Omega_y - y_1\Omega_x)$$
$$T^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2$$
$$\frac{\cos\lambda}{T_x} = \frac{\cos\mu}{T_y} = \frac{\cos\nu}{T_z} = \frac{1}{T}.$$

Die Grössen $\Sigma(y\,\omega_z - z\,\omega_y)$, $\Sigma(z\,\omega_x - x\,\omega_z)$, $\Sigma(x\,\omega_y - y\,\omega_x)$ stellen die Componenten des Rotationspaares dar, welches sich bei der Reduction der Winkelgeschwindigkeiten für den jetzigen Coordinaten-

ursprung ergibt. Wir wollen sie im Folgenden abkürzend mit $\mathfrak{T}_x, \mathfrak{T}_y, \mathfrak{T}_z$ und ihre Resultante mit $\mathfrak{T}$ bezeichnen. Die Ausdrücke $-(y_1 \Omega_z - z_1 \Omega_y)$, $-(z_1 \Omega_x - x_1 \Omega_z)$, $-(x_1 \Omega_y - y_1 \Omega_x)$ sind die Componenten des Paares $(-\Omega, \Omega)$, welches beim Uebergang von der Reduction für den jetzigen Coordinatenursprung zur Reduction für den beliebigen Stral zu $\mathfrak{T}$ hinzutreten muss.

Soll die Axe μ die Momentanaxe μ_0 werden, deren T, λ, μ, ν wir mit $T^{(0)}$, λ_0, μ_0, ν_0 bezeichnen, so treten zu den Gleichungen

$$T_x^{(0)} = \mathfrak{T}_x - (y_1 \Omega_z - z_1 \Omega_y)$$
$$T_y^{(0)} = \mathfrak{T}_y - (z_1 \Omega_x - x_1 \Omega_z)$$
$$T_z^{(0)} = \mathfrak{T}_z - (x_1 \Omega_y - y_1 \Omega_x)$$
$$T^{(0)2} = T_x^{(0)2} + T_y^{(0)2} + T_z^{(0)2}$$
$$\frac{\cos \lambda_0}{T_x^{(0)}} = \frac{\cos \mu_0}{T_y^{(0)}} = \frac{\cos \nu_0}{T_z^{(0)}} = \frac{1}{T^{(0)}}$$

noch die Bedingungen

$$\cos \lambda_0 = \cos a, \quad \cos \mu_0 = \cos b, \quad \cos \nu_0 = \cos c$$

hinzu, wobei

$$\frac{\cos a}{\Omega_x} = \frac{\cos b}{\Omega_y} = \frac{\cos c}{\Omega_z} = \frac{1}{\Omega}$$

ist.

Um nun zunächst die Gleichungen der Momentanaxe zu entwickeln, erhalten wir durch Combination der Gleichungen, welche die Richtungselemente a, b, c; λ_0, μ_0, ν_0 enthalten, indem wir sie in einander dividiren

$$\frac{\Omega_x}{T_x^{(0)}} = \frac{\Omega_y}{T_y^{(0)}} = \frac{\Omega_z}{T_z^{(0)}} = \frac{\Omega}{T^{(0)}}.$$

Den vierten dieser Ausdrücke können wir weglassen, da seine Gleichheit mit den Uebrigen sich sofort von selbst ergibt. Setzt man nämlich den gemeinsamen Werth der drei ersten gleich G, so wird $\Omega_x = G T_x$, $\Omega_y = G T_y$, $\Omega_z = G T_z$, also auch $\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2 = G^2 (T_x^{(0)2} + T_y^{(0)2} + T_z^{(0)2})$ oder $\Omega^2 = G^2 T^{(0)2}$, woraus $\frac{\Omega}{T^{(0)}} = G$ folgt.

Die Gleichungen:

$$\frac{\Omega_x}{T_x^{(0)}} = \frac{\Omega_y}{T_y^{(0)}} = \frac{\Omega_z}{T_z^{(0)}}$$

stellen nun die Gleichungen der Momentanaxe in x_1, y_1, z_1 als laufenden Coordinaten dar, sobald wir $T_x^{(0)}$, $T_y^{(0)}$, $T_z^{(0)}$ eliminiren. Bilden wir aus ihnen der grösseren Symmetrie wegen die drei folgenden Verbindungen, von denen jede die Folge der übrigen ist, von denen also zwei beliebige zur Darstellung der Momentanaxe ausreichen:

$$\Omega_y T_z^{(0)} - \Omega_z T_y^{(0)} = 0, \quad \Omega_z T_x^{(0)} - \Omega_x T_z^{(0)} = 0, \quad \Omega_x T_y^{(0)} - \Omega_y T_x^{(0)} = 0,$$

so ergibt die Einsetzung der Werthe für $T_x^{(0)}$, $T_y^{(0)}$, $T_z^{(0)}$, wenn wir die Glieder, welche x_1, y_1, z_1 enthalten, von den übrigen trennen und resp. $\Omega_x^2 x_1$, $\Omega_y^2 y_1$, $\Omega_z^2 z_1$ addiren und subtrahiren:

$$\Omega^2 x_1 - \Omega_x(\Omega_x x_1 + \Omega_y y_1 + \Omega_z z_1) = \Omega_y \Sigma(x\omega_y - y\omega_x) - \Omega_z \Sigma(z\omega_x - x\omega_z)$$
$$= \Omega_y \mathfrak{T}_z - \Omega_z \mathfrak{T}_y$$
$$\Omega^2 \cdot y_1 - \Omega_y(\Omega_x x_1 + \Omega_y y_1 + \Omega_z z_1) = \Omega_z \Sigma(y\omega_z - z\omega_y) - \Omega_x \Sigma(x\omega_y - y\omega_x)$$
$$= \Omega_z \mathfrak{T}_x - \Omega_x \mathfrak{T}_z$$
$$\Omega^2 \cdot z_1 - \Omega_z(\Omega_x x_1 + \Omega_y y_1 + \Omega_z z_1) = \Omega_x \Sigma(z\omega_x - x\omega_z) - \Omega_y \Sigma(y\omega_z - z\omega_y)$$
$$= \Omega_x \mathfrak{T}_y - \Omega_y \mathfrak{T}_x.$$

Setzen wir die rechten Seiten dieser Gleichungen gleich $\Omega^2 x_0$, $\Omega^2 y_0$, $\Omega^2 z_0$, so dass

$$\Omega_y \mathfrak{T}_z - \Omega_z \mathfrak{T}_y = \Omega^2 \cdot x_0$$
$$\Omega_z \mathfrak{T}_x - \Omega_x \mathfrak{T}_z = \Omega^2 \cdot y_0$$
$$\Omega_x \mathfrak{T}_y - \Omega_y \mathfrak{T}_x = \Omega^2 \cdot z_0$$

wird, so können die Gleichungen auf die Form gebracht werden:

$$\frac{x_1 - x_0}{\Omega_x} = \frac{y_1 - y_0}{\Omega_y} = \frac{z_1 - z_0}{\Omega_z} = \frac{\Omega_x \cdot x_1 + \Omega_y \cdot y_1 + \Omega_z \cdot z_1}{\Omega^2}.$$

Es genügen dann

$$\frac{x_1 - x_0}{\Omega_x} = \frac{y_1 - y_0}{\Omega_y} = \frac{z_1 - z_0}{\Omega_z}$$

zur Darstellung der Momentanaxe. Es ist leicht die Bedeutung des Punktes zu sehen, dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0 sind; er ist der Fusspunkt des Perpendikels, welches vom Coordinatenursprung auf die Momentanaxe gefällt werden kann. Dass er auf der Momentanaxe liegt, zeigen die Gleichungen derselben unmittelbar, indem sie für $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$ identisch erfüllt werden. Quadrirt man nun andrerseits die drei Gleichungen, welche die Grössen x_0, y_0, z_0 definiren und addirt sie, so erhält man

$$\Omega^4(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = (\Omega_y \mathfrak{T}_z - \Omega_z \mathfrak{T}_y)^2 + (\Omega_z \mathfrak{T}_x - \Omega_x \mathfrak{T}_z)^2 + (\Omega_x \mathfrak{T}_y - \Omega_y \mathfrak{T}_x)^2$$
$$= (\Omega \mathfrak{T} \sin\psi)^2$$

wenn ψ den Winkel $(\Omega, \mathfrak{T})$ bedeutet. Hieraus folgt aber

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \left(\frac{\mathfrak{T}}{\Omega} \sin\psi\right)^2$$

und diese Gleichung sagt aus, dass der Abstand des Punktes $(x_0\ y_0\ z_0)$ vom Ursprung die Projection der Länge $\frac{\mathfrak{T}}{\Omega}$ auf eine zur Richtung der Axe von Ω also auch zur Richtung der Momentanaxe senkrechte Ebene ist. Demnach ist dieser Abstand selbst die Länge des Perpendikels und $(x_0\ y_0\ z_0)$ also sein Fusspunkt.

Das Moment $T^{(o)}$ des der Momentanaxe entsprechenden Rotationspaares (die Translationsgeschwindigkeit parallel derselben) erhält man folgendermassen. Man schreibe die Gleichung

$$T^{(o)2} = T_x^{(o)2} + T_y^{(o)2} + T_z^{(o)2}$$

so:
$$T^{o} = T_x^{(o)} \cdot \frac{T_x^{(o)}}{T^{(o)}} + T_y^{(o)} \cdot \frac{T_y^{(o)}}{T^{(o)}} + T_z^{(o)} \cdot \frac{T_z^{(o)}}{T^{(o)}}$$

und ersetze rechts die Quotienten $\frac{T_x^{(o)}}{T^{(o)}}$, $\frac{T_y^{(o)}}{T^{(o)}}$, $\frac{T_z^{(o)}}{T^{(o)}}$ durch die gleichbedeutenden $\frac{\Omega_x}{\Omega}$, $\frac{\Omega_y}{\Omega}$, $\frac{\Omega_z}{\Omega}$, so wird zunächst

$$T^{(o)} = \frac{\Omega_x T_x^{(o)} + \Omega_y T_y^{(o)} + \Omega_z T_z^{(o)}}{\Omega}.$$

Weiter multiplicire man die drei Gleichungen

$$T_x^{(o)} = \mathfrak{T}_x - (y_1 \Omega_z - z_1 \Omega_y)$$
$$T_y^{(o)} = \mathfrak{T}_y - (z_1 \Omega_x - x_1 \Omega_z)$$
$$T_z^{(o)} = \mathfrak{T}_z - (x_1 \Omega_y - y_1 \Omega_x)$$

der Reihe nach mit Ω_x, Ω_y, Ω_z und addire sie, so hebt sich rechts alles weg, was x_1, y_1, z_1 enthält und folgt

$$\Omega_x T_x^{(o)} + \Omega_y T_y^{(o)} + \Omega_z T_z^{(o)} = \Omega_x \mathfrak{T}_x + \Omega_y \mathfrak{T}_y + \Omega_z \mathfrak{T}_z.$$

Hiermit erhält man

$$T^{(o)} = \frac{\Omega_x \mathfrak{T}_x + \Omega_y \mathfrak{T}_y + \Omega_z \mathfrak{T}_z}{\Omega} = \mathfrak{T}_x \cos a + \mathfrak{T}_y \cos b + \mathfrak{T}_z \cos c.$$

Diese Gleichung drückt nichts anderes aus, als dass $T^{(o)}$ die Projection von $\mathfrak{T}$ auf die Richtung der Axe von Ω ist, wie bereits §. 4. geometrisch sich ergab.

Soll das System der Winkelgeschwindigkeiten sich auf eine blosse resultirende Winkelgeschwindigkeit Ω reduciren, so muss $T^{(o)} = 0$ sein, d. h. es muss die Gleichung bestehen

$$\Omega_x \mathfrak{T}_x + \Omega_y \mathfrak{T}_y + \Omega_z \mathfrak{T}_z = 0;$$

sie drückt, wenn man sie mit $\Omega \mathfrak{T}$ dividirt, aus, dass $\mathfrak{T}$ und Ω zu einander senkrechte Gerade sein müssen.

Die sämmtlichen Winkelgeschwindigkeiten sind einem Rotationspaare äquivalent, wenn $\Omega = 0$ d. h.

$$\Sigma\omega_x = 0, \quad \Sigma\omega_y = 0, \quad \Sigma\omega_z = 0.$$

Die Bedingungen des momentanen Stillstandes des Systems sind: $\Omega = 0$, $T = 0$ oder ausführlicher

$$\Sigma\omega_x = 0, \quad \Sigma\omega_y = 0, \quad \Sigma\omega_z = 0$$
$$\Sigma(y\omega_z - z\omega_y) = 0, \quad \Sigma(z\omega_x - x\omega_z) = 0, \quad \Sigma(x\omega_y - y\omega_x) = 0.$$

Als speciellen Fall wollen wir noch den erwähnen, dass sämmtliche Axen der Winkelgeschwindigkeiten ω, ω', ω''... einander parallel sind. Ist $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ die gemeinsame Richtung aller Axen in ein und demselben Sinn genommen, wobei die Grössen ω positiv oder negativ sein können, so werden $\omega_x = \omega \cos\alpha$, $\omega_y = \omega \cos\beta$, $\omega_z = \omega \cos\gamma$ und folglich

$$\Omega_x = \cos\alpha\, \Sigma\omega, \; \Omega_y = \cos\beta\, \Sigma\omega, \; \Omega_z = \cos\gamma\, \Sigma\omega, \; \Omega = \Sigma\omega$$

$$\frac{\cos a}{\cos\alpha} = \frac{\cos b}{\cos\beta} = \frac{\cos c}{\cos\gamma} = 1$$

$$\mathfrak{T}_x = \cos\gamma\,\Sigma\omega y - \cos\beta\,\Sigma\omega z,$$
$$\mathfrak{T}_y = \cos\alpha\,\Sigma\omega z - \cos\gamma\,\Sigma\omega x,$$
$$\mathfrak{T}_z = \cos\beta\,\Sigma\omega x - \cos\alpha\,\Sigma\omega y$$
$$T_0 = 0.$$

Die Gleichungen der Momentanaxe lassen sich in die Form bringen:

$$\frac{x_1\Omega - \Sigma\omega x}{\cos\alpha} = \frac{y_1\Omega - \Sigma\omega y}{\cos\beta} = \frac{z_1\Omega - \Sigma\omega z}{\cos\gamma},$$

woraus man ersieht, dass die Momentanaxe durch den Punkt des Systems

$$x_1 = \frac{\Sigma\omega x}{\Omega},\quad y_1 = \frac{\Sigma\omega y}{\Omega},\quad z_1 = \frac{\Sigma\omega z}{\Omega}$$

hindurchgeht, welches auch immer die Richtung $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ sei. Man schliesst daraus Folgendes. 1. Wenn $\Sigma\omega$ nicht Null ist, so reduciren sich die Winkelgeschwindigkeiten auf eine blosse resultirende Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \Sigma\omega$ um eine mit den Axen der gegebenen Winkelgeschwindigkeiten parallele Axe; die Axe von Ω geht durch einen bestimmten Punkt des Systems, wie auch immer die gegebenen Axen um die Punkte $(x\,y\,z)$ gedreht werden mögen. 2. Wenn $\Omega = 0$, so sind die sämmtlichen Winkelgeschwindigkeiten einem Rotationspaare äquivalent. (Vgl. Cap. III. §. 5.)

§. 8. Der bis hieher entwickelte Inhalt dieses Capitels setzt uns in den Stand, Untersuchungen über die Geschwindigkeiten in dem unveränderlichen System anzustellen, welches die allgemeinste Art der Bewegung besitzt. Die Elementarbewegung derselben ist eine Schraubenbewegung um die Momentanaxe. Die Lage derselben kann mit Hülfe der Geschwindigkeiten dreier Punkte bestimmt werden. Hiezu ist nur nöthig, in der Construction des Cap. V. §. 10. im I. Theil an die Stelle der unendlich kleinen Bahnelemente Oa, Ob, Oc die diesen proportionalen Geschwindigkeiten der drei Punkte eintreten zu lassen. Man ziehe also durch irgend einen Punkt O des Raumes drei Gerade parallel und gleich den gegebenen Geschwindigkeiten dreier Punkte und lege durch ihre Endpunkte eine Ebene; die Normale dieser Ebene ist die Richtung der Momentanaxe; hierauf ziehe man durch zwei der drei Punkte mit dieser Richtung Parallelen und lege durch sie Ebenen senkrecht zu den durch die Geschwindigkeitsrichtungen und diese Parallelen bestimmten Ebenen, ihr Durchschnitt bestimmt die Lage der Momentanaxe. Die Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe und die Translationsgeschwindigkeit V parallel derselben ergeben sich, indem man die Geschwindigkeit v eines der drei Punkte als die Geschwindigkeit einer Schraubenbewegung um die Momentanaxe auffasst. Bildet die Richtung von v mit der Momentanaxe den Winkel λ und ist r der Abstand des Punktes von ihr, so wird

$$\Omega = \frac{v}{r}\sin\lambda,\quad V = v\cos\lambda.$$

Sobald Ω und V bekannt sind, ergeben sich die Geschwindigkeiten aller Systempunkte nach §. 1. dieses Capitels.

§. 9. Ausser der Schraubengeschwindigkeit um die Momentanaxe hat man für die Bewegung des Systems oft noch die Wechselgeschwindigkeit der Momentanaxe in Betracht zu ziehen. Sie ist die Schraubengeschwindigkeit, mit welcher die Momentanaxe aus der Lage, welche der Zeit t entspricht in die der Zeit $t + dt$ entsprechende Lage übergeht. Die Axe derselben ist der kürzeste Abstand beider Lagen, die Elementartranslation parallel dieser Axe ist der kürzeste Abstand de und die Elementaramplitude der unendlich kleine Winkel $d\sigma$ beider Lagen. Daher sind die Translations- und Rotationscomponenten der Wechselgeschwindigkeit:

$$U = \frac{de}{dt}, \quad \Psi = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Für die Bewegung des Systems parallel einer Ebene ist $d\sigma = 0$, also $\Psi = 0$, für die Rotation um einen Punkt ist $de = 0$, also $U = 0$.

Die Grösse U heisst auch die Orthogonalgeschwindigkeit des Systems. Die Betrachtungen des §. 8. im Cap. III. können auf den hier vorliegenden Fall der Bewegung des Systems unmittelbar übertragen werden.

§. 10. Um Untersuchungen über die Geschwindigkeiten im unveränderlichen System, welches die allgemeinste Art der Bewegung besitzt, analytisch durchzuführen, bezieht man dasselbe auf ein absolutes Coordinatensystem der x, y, z und ein zweites, dem System angehöriges, mit ihm bewegliches der x', y', z'. Sind x_1, y_1, z_1 die absoluten Coordinaten des beweglichen Ursprungs O', so hängen die beiderlei Coordinaten eines Systempunktes durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= a\xi + b\eta + c\zeta & \qquad & \xi = x - x_1 \\ y' &= a'\xi + b'\eta + c'\zeta & \text{wo} \qquad & \eta = y - y_1 \\ z' &= a''\xi + b''\eta + c''\zeta & & \zeta = z - z_1, \end{aligned}$$

zusammen in ähnlicher Weise wie im vorigen Capitel, nur durch Vermittelung der Grössen ξ, η, ζ. Diese Hülfsgrössen ξ, η, ζ sind Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf ein drittes Coordinatensystem, dessen Ursprung O' ist, welches aber unabhängig von dem beweglichen System eine blosse Translationsbewegung besitzt, vermöge deren die Axen der ξ, η, ζ fortwährend den absoluten Axen der x, y, z parallel bleiben. Indem man nun die Elementarbewegung des Systems für jeden Augenblick zerlegt in eine Elementarrotation um eine durch den beweglichen Ursprung O' gehende, zur Momentanaxe parallele Axe und eine Elementartranslation, welche durch die Bewegung des Punktes O' angegeben wird, wird auch der Geschwindigkeitszustand des Systems dar-

gestellt durch die Winkelgeschwindigkeit Ω um die zur Momentanaxe parallele Axe des Punktes O' und eine Translationsgeschwindigkeit gleich und parallel der Geschwindigkeit dieses Punktes. Alles, was wir im vorigen Cap. in den §§. 6—13. entwickelt haben, lässt sich unmittelbar auf die vorliegende Bewegung übertragen, wenn an die Stelle der dortigen Coordinaten x, y, z die Hülfscoordinaten ξ, η, ζ eintraten. Zu einer in diesem Sinne durchgeführten Untersuchung treten aber hinzu die Folgerungen, welche sich an die Gleichungen

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}$$

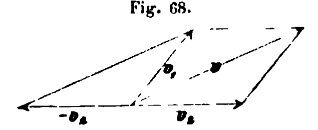
knüpfen und durch welche die Grössen $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ eliminirt werden können. Durch die Einführung von ξ, η, ζ wird die ganze Untersuchung in eine Form eingekleidet, deren Bedeutung das folgende Capitel näher darlegen wird.

VI. Capitel.

Die relative Geschwindigkeit.

§. 1. Die Geschwindigkeit der relativen Bewegung eines Punktes heisst dessen relative Geschwindigkeit; man erhält sie, indem man das Bogenelement der relativen Bahn durch das Zeitelement dividirt und ihre Richtung ist die Tangente der relativen Bahn. Nach Cap. II. §. 1. ist die absolute Geschwindigkeit v eines Punktes die Resultante aus seiner relativen Geschwindigkeit v_1 und der Geschwindigkeit v_2 des mit ihm zusammenfallenden Systempunktes und wird aus beiden mit Hülfe des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten gefunden. (Fig. 68.) Trägt man nun v_2 im entgegengesetzten Sinne auf, so ergibt sich ein zweites Parallelogramm, in welchem die relative Geschwindigkeit v_1 Diagonale ist, während v und $-v_2$ Seiten sind. Man erhält daher folgenden auch aus Cap. VI. §. 2. des I. Theils sich ergebenden Satz:

Fig. 68.



Die relative Geschwindigkeit eines Punktes ist die Resultante aus der absoluten Geschwindigkeit desselben und der im entgegengesetzten Sinn genommenen Geschwindigkeit des mit ihm zusammenfallenden Punktes des Systems, auf welches die relative Bewegung sich bezieht.

Projicirt man das erstere der beiden Parallelogramme auf irgend eine Axe, so wird mit Rücksicht auf den Sinn der Linien die Projection der absoluten Geschwindigkeit durch die Summe der Projectionen der relativen Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Systempunktes dargestellt. Hieraus folgt, dass die Projection der relativen Geschwindigkeit auf irgend eine Axe gleich ist der Differenz zwischen der Projection der absoluten Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Systempunktes, oder, was auf dasselbe hinauskommt, gleich der Summe der Projectionen der absoluten Geschwindigkeit und der im entgegengesetzten Sinne genommenen Geschwindigkeit des Systempunktes. Sind also v_x, v_y, v_z; $v_x^{(1)}$, $v_y^{(1)}$, $v_z^{(1)}$; $v_x^{(2)}$, $v_y^{(2)}$, $v_z^{(2)}$ die Projectionen von v, v_1, v_2 auf irgend drei Coordinatenaxen, so hat man:

$$v_x^{(1)} = v_x - v_x^{(2)}$$
$$v_y^{(1)} = v_y - v_y^{(2)}$$
$$v_z^{(1)} = v_z - v_z^{(2)}.$$

§. 2. Für die analytische Darstellung der relativen Geschwindigkeit sind die Formeln in Cap. VI. §. 6. des I. Theils, welche den Zusammenhang der absoluten Coordinaten x, y, z, der relativen x', y', z' und der Coordinaten x_1, y_1, z_1 des beweglichen Ursprungs mit den Richtungscosinussen der beweglichen Axen aussprechen, zu differentiiren. Unter Festhaltung der dort zu Grunde gelegten Eintheilung erhalten wir

1. für den Fall, dass das bewegliche System blos eine Translation besitzt, die Componenten $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ der relativen Geschwindigkeit durch die Formeln

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}$$
$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}$$
$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt},$$

welche dasselbe sagen, wie die Formeln des vorigen §.

2. Besitzt das System eine Rotation um den Coordinatenursprung, so erhält man durch Differentiation der Formeln unter No. 2. a. a. O.:

$$\frac{dx'}{dt} = \left(a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt}\right) + \left(x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt}\right)$$
$$\frac{dy'}{dt} = \left(a'\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + c'\frac{dz}{dt}\right) + \left(x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{dc'}{dt}\right)$$
$$\frac{dz'}{dt} = \left(a''\frac{dx}{dt} + b''\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt}\right) + \left(x\frac{da''}{dt} + y\frac{db''}{dt} + z\frac{dc''}{dt}\right).$$

In diesen Gleichungen bedeuten die Glieder

$$a\frac{dx}{dt}+b\frac{dy}{dt}+c\frac{dz}{dt}$$

$$a'\frac{dx}{dt}+b'\frac{dy}{dt}+c'\frac{dz}{dt}$$

$$a''\frac{dx}{dt}+b''\frac{dy}{dt}+c''\frac{dz}{dt}$$

die Projectionen der Componenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ der absoluten Geschwindigkeit auf die beweglichen Axen der x', y', z', d, h. die Componenten der absoluten Geschwindigkeit parallel diesen Axen. Die übrigen Glieder, nämlich

$$x\frac{da}{dt}+y\frac{db}{dt}+z\frac{dc}{dt}$$

$$x\frac{da'}{dt}+y\frac{db'}{dt}+z\frac{dc'}{dt}$$

$$x\frac{da''}{dt}+y\frac{db''}{dt}+z\frac{dc''}{dt}$$

bedeuten, wie wir sogleich zeigen werden, die Componenten der Geschwindigkeit des Systempunktes parallel den beweglichen Axen, im umgekehrten Sinn genommen. Zu dem Ende gestalten wir sie etwas um, indem wir x, y, z in denselben mit Hülfe der Gleichungen

$$x = ax' + a'y' + a''z'$$
$$y = bx' + b'y' + b''z'$$
$$z = cx' + c'y' + c''z'$$

durch x', y', z' ausdrücken, sie hierauf nach x', y', z' ordnen und die Relationen

$$a\frac{da}{dt}+b\frac{db}{dt}+c\frac{dc}{dt}=0$$

$$a'\frac{da'}{dt}+b'\frac{db'}{dt}+c'\frac{dc'}{dt}=0$$

$$a''\frac{da''}{dt}+b''\frac{db''}{dt}+c''\frac{dc''}{dt}=0$$

$$a\frac{da'}{dt}+b\frac{db'}{dt}+c\frac{dc'}{dt}=-\left(a'\frac{da}{dt}+b'\frac{db}{dt}+c'\frac{dc}{dt}\right)$$

$$a'\frac{da''}{dt}+b'\frac{db''}{dt}+c'\frac{dc''}{dt}=-\left(a''\frac{da'}{dt}+b''\frac{db'}{dt}+c''\frac{dc'}{dt}\right)$$

$$a''\frac{da}{dt}+b''\frac{db}{dt}+c''\frac{dc}{dt}=-\left(a\frac{da''}{dt}+b\frac{db''}{dt}+c\frac{dc''}{dt}\right)$$

zur Vereinfachung benutzen, wie dies bereits Cap. VI. §. 7. geschehen ist. Hierdurch nehmen sie folgende Gestalt an:

$$-\left(a\frac{da'}{dt}+b\frac{db'}{dt}+c\frac{dc'}{dt}\right)y'-\left(a\frac{da''}{dt}+b\frac{db''}{dt}+c\frac{dc''}{dt}\right)z'$$
$$-\left(a'\frac{da''}{dt}+b'\frac{db''}{dt}+c'\frac{dc''}{dt}\right)z'-\left(a'\frac{da}{dt}+b'\frac{db}{dt}+c'\frac{dc}{dt}\right)x'$$
$$-\left(a''\frac{da}{dt}+b''\frac{db}{dt}+c''\frac{dc}{dt}\right)x'-\left(a''\frac{da'}{dt}+b''\frac{db'}{dt}+c''\frac{dc'}{dt}\right)y'.$$

Für den Systempunkt, welcher mit dem Punkte $(x\,y\,z)$ zur Zeit t zusammenfällt, sind x', y', z' nach t constant, weil er seine Lage im System nicht ändert; daher erhält man für ihn die Componenten der Geschwindigkeit parallel den unbeweglichen Axen durch Differentiation der Gleichungen

$$x=ax'+a'y'+a''z'$$
$$y=bx'+b'y'+b''z'$$
$$z=cx'+c'y'+c''z',$$

indem man darin blos a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' als veränderlich ansieht. Dieselben sind:

$$x'\frac{da}{dt}+y'\frac{da'}{dt}+z'\frac{da''}{dt}$$
$$x'\frac{db}{dt}+y'\frac{db'}{dt}+z'\frac{db''}{dt}$$
$$x'\frac{dc}{dt}+y'\frac{dc'}{dt}+z'\frac{dc''}{dt}.$$

Indem man sie auf die beweglichen Axen projicirt, d. h. sie resp. mit a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' multiplicirt und addirt, erhält man die Componenten der Geschwindigkeit des Systempunktes parallel den beweglichen Axen, nämlich:

$$\left(a\frac{da'}{dt}+b\frac{db'}{dt}+c\frac{dc'}{dt}\right)y'+\left(a\frac{da''}{dt}+b\frac{db''}{dt}+c\frac{dc''}{dt}\right)z'$$
$$\left(a'\frac{da''}{dt}+b'\frac{db''}{dt}+c'\frac{dc''}{dt}\right)z'+\left(a'\frac{da}{dt}+b'\frac{db}{dt}+c'\frac{dc}{dt}\right)x'$$
$$\left(a''\frac{da}{dt}+b''\frac{db}{dt}+c''\frac{dc}{dt}\right)x'+\left(a''\frac{da'}{dt}+b''\frac{db'}{dt}+c''\frac{dc'}{dt}\right)y'.$$

Dies sind aber genau die entgegengesetzten von den oben gefundenen Werthen, wodurch die Behauptung erwiesen ist.

3. Besitzt endlich das System die allgemeinste Art der Bewegung,

so erhält man die Componenten der relativen Geschwindigkeit durch Differentiation der Gleichungen Cap. VI. §. 6. No. 3. im I. Th., nämlich:

$$\frac{dx'}{dt} = \left(a\frac{d\xi}{dt} + b\frac{d\eta}{dt} + c\frac{d\zeta}{dt}\right) + \left(\xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{db}{dt} + \zeta\frac{dc}{dt}\right)$$
$$\frac{dy'}{dt} = \left(a'\frac{d\xi}{dt} + b'\frac{d\eta}{dt} + c'\frac{d\zeta}{dt}\right) + \left(\xi\frac{da'}{dt} + \eta\frac{db'}{dt} + \zeta\frac{dc'}{dt}\right)$$
$$\frac{dz'}{dt} = \left(a''\frac{d\xi}{dt} + b''\frac{d\eta}{dt} + c''\frac{d\zeta}{dt}\right) + \left(\xi\frac{da''}{dt} + \eta\frac{db''}{dt} + \zeta\frac{dc''}{dt}\right),$$

worin

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}.$$

Die Grössen $\xi = x - x_1$, $\eta = y - y_1$, $\zeta = z - z_1$ stellen die relativen Coordinaten in Bezug auf ein bewegliches System dar, dessen Axen der ξ, η, ζ fortwährend parallel den festen Axen der x, y, z bleiben und $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ sind die Componenten der relativen Geschwindigkeit des Punktes in Bezug auf diese Axen.

§. 3. Nach Cap. VI. §. 2. des I. Theils wird die relative Elementarschraubenbewegung eines Systems Σ' in einem andern Systeme Σ'' erhalten, indem man dem Systeme Σ' zu seiner absoluten Elementarschraubenbewegung die entgegengesetzte absolute Elementarschraubenbewegung des Systems Σ'' um dessen Momentanaxe ertheilt; die aus beiden Bewegungen resultirende Bewegung ist die relative Elementarbewegung; ihre Axe die relative Momentanaxe und der Ort aller relativen Momentanaxen eine gewisse relative Fläche (C) im System Σ'', welches in Bezug auf die relative Bewegung des Systems Σ' als ruhend angesehen werden kann. Mit der relativen Momentanaxe fällt eine gewisse Gerade des Σ' zusammen und sämmtliche Geraden der Art bilden eine gewisse relative Fläche (Γ), welche über die Fläche (C) hinrollt und gleitet, um die relative Bewegung von Σ' gegen Σ'' wie eine absolute Bewegung zu bestimmen. Die relative Geschwindigkeit des Systems Σ' in Bezug auf das System Σ'' wird durch zwei Componenten dargestellt: 1) durch die Winkelgeschwindigkeit um die relative Momentanaxe und 2) durch die Translationsgeschwindigkeit parallel dieser Axe. Nach dem eben Bemerkten lässt sich die relative Momentanaxe, sowie die Winkelgeschwindigkeit und Translationsgeschwindigkeit, die ihr entsprechen, aus den Winkelgeschwindigkeiten und den Translationsgeschwindigkeiten der absoluten Bewegungen der beiden

Systeme um ihre Momentanaxen leicht bestimmen. Die vorhin erwähnten beiden Flächen haben eine doppelte Bedeutung. Während nämlich für die relative Bewegung des Systems Σ' in Bezug auf Σ'' die Fläche (C) ruht und (Γ) sich über sie hinbewegt, ruht für die relative Bewegung des Systems Σ'' in Bezug auf Σ' jene und bewegt sich diese über sie hin, aber in entgegengesetztem Sinn. Sind nämlich C', C'' die Momentanaxen und Ω', V'; Ω'', V'' die Winkelgeschwindigkeiten und Translationsgeschwindigkeiten der absoluten Elementarbewegungen um sie, so liefern Ω', V' um C' und $-\Omega''$, $-V''$ um C'' zusammen die Momentanaxe μ' und die Geschwindigkeitscomponenten der relativen Bewegung von Σ' in Σ''; $-\Omega'$, $-V'$ um C' und Ω'', V'' um C'' aber die Momentanaxe μ'' und die Geschwindigkeitscomponenten der relativen Bewegung von Σ'' in Σ'. Die beiden Translationsgeschwindigkeiten V' und $-V''$ im ersten Falle und $-V'$ und V'' im zweiten haben aber Resultanten von derselben Richtung und Grösse, aber entgegengesetztem Sinn; Ω' und $-\Omega''$ einerseits und $-\Omega'$, Ω'' andrerseits erzeugen nach dem Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten Resultanten ebenfalls von derselben Axenrichtung und entgegengesetztem Sinn und fallen die Axen μ', μ'' derselben zusammen, da sie den kürzesten Abstand der Axen C', C'' nach demselben Verhältniss theilen. Es ist also die Gerade des Systems Σ', welche mit der Momentanaxe μ' zusammenfällt, hinsichtlich der relativen Bewegung von Σ' in Σ'' zugleich die Momentanaxe μ'' für die relative Bewegung von Σ'' in Σ' und fällt mit ihr die Gerade des Systems Σ'' zusammen, welche für die erstere relative Bewegung die Momentanaxe μ' darstellt.

§. 4. Wir wollen diese Betrachtungen an einigen einfachen Beispielen erläutern.

1. Zwei Systeme Σ', Σ'' rotiren fortwährend um zwei parallele Axen, Σ' um C', Σ'' um C''; der Abstand dieser Axen sei a und es besitze zur Zeit t das System Σ' die Winkelgeschwindigkeit ω' um C', Σ'' die Winkelgeschwindigkeit ω'' um C''. Man verlangt: 1. die Lage und die Winkelgeschwindigkeit für die relative Momentanaxe von Σ' in Bezug auf Σ'', 2. dasselbe für die relative Bewegung von Σ'' in Bezug auf Σ' und 3. die Beschaffenheit der relativen Flächen (C) und (Γ) für den Fall, dass das Verhältniss $\omega:\omega'$ der Winkelgeschwindigkeiten während der Dauer der Bewegung constant bleibt.

C', C'' sind die absoluten Momentanaxen, die Translationsgeschwindigkeiten parallel zu denselben sind im vorliegenden Falle Null. Um die relative Momentanaxe von Σ' gegen Σ'' und ihre Winkelgeschwindigkeit Ω' zu finden, haben wir die Resultante zu ziehen von ω' um C' und von $-\omega''$ um C''; dieselbe ist $\Omega' = \omega' - \omega''$, ihre Axe fällt in die

Ebene $C'C''$, ist parallel mit C' und C'' und stehen ihre Abstände von diesen Axen im Verhältniss $\omega'':\omega'$. Sind ω' und ω'' gleichen Sinnes, so fällt die Momentanaxe in den an den Parallelstreifen $C'C''$ angrenzenden Aussenraum, welcher der Axe der grösseren Winkelgeschwindigkeit anliegt; sind sie entgegengesetzten Sinnes, so fällt sie in den Parallelstreifen selbst. Für letzteren Fall wird $\Omega = \omega' + \omega''$. Soll das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten während der Bewegung fortwährend constant bleiben, so behält auch die Momentanaxe fortwährend constante Abstände a', a'' von C', C'', für welche

$$\frac{a'}{\omega''} = \frac{a''}{\omega'}$$

ist, und sind daher die Orte der relativen Momentanaxen und der Geraden des Systems Σ', welche nach und nach in diese eintreten, zwei Kreiscylinder um C', C'' mit den Radien a', a'', welche sich längs der Momentanaxe berühren. Haben ω' und ω'' gleichen Sinn, liegt also die relative Momentanaxe in dem Aussenraume, so wird, wenn ω' die grössere Winkelgeschwindigkeit bezeichnet:

$$a'' - a' = a$$

und folglich

$$a' = \frac{\omega''}{\omega' - \omega''}\, a, \quad a'' = \frac{\omega'}{\omega' - \omega''}\, a$$

und berühren sich die Cylinder auf derselben Seite ihrer gemeinschaftlichen Tangentenebene; haben aber ω' und ω'' entgegengesetzten Sinn, so liegt die Momentanaxe im Parallelstreifen und wird also:

$$a'' + a' = a,$$

$$a' = \frac{\omega''}{\omega' + \omega''}\, a, \quad a'' = \frac{\omega'}{\omega' + \omega''}\, a;$$

Die Cylinder berühren sich auf entgegengesetzten Seiten ihrer gemeinschaftlichen Tangentenebene.

Für die relative Bewegung von Σ'' in Bezug auf Σ' erhält man dieselben Axen und Cylinder, sie vertauschen nur ihre Rollen und die relative Winkelgeschwindigkeit Ω'' wird $\Omega'' = \omega'' - \omega'$.

2. Dieselbe Aufgabe für den Fall, dass die beiden Axen C', C'' sich in einem Punkte O unter einem Winkel α schneiden.

Trägt man auf C' die Winkelgeschwindigkeit ω', auf C'' aber $-\omega''$ nach Grösse und Sinn von O aus auf, so stellt die Diagonale des über ihnen construirten Parallelogramms die relative Momentanaxe c von Σ' in Bezug auf Σ'' nebst ihrer Winkelgeschwindigkeit Ω', letztere nach Grösse und Sinn dar. Diese Axe fällt in den Nebenwinkel des von den Axen C', C'' im Sinne ihrer Winkelgeschwindigkeiten genommen, gebildeten Winkels α und bildet mit diesen Axen Winkel, deren Sinusse im Verhältniss $\omega'':\omega'$ stehen. Man hat daher, wenn Winkel $cC' = \alpha'$,

$cC' = \alpha''$ gesetzt wird, diese Winkel in demselben Drehungssinne gerechnet,

$$\frac{\sin \alpha'}{\omega''} = \frac{\sin \alpha''}{\omega'}, \quad \alpha'' - \alpha' = \alpha,$$

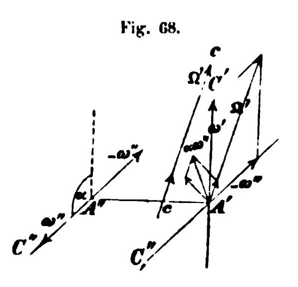
$$\Omega'^2 = \omega'^2 + \omega''^2 - 2\omega\omega' \cos \alpha.$$

Bleibt das Verhältniss $\omega' : \omega''$ während der Dauer der Bewegung constant, so behält auch die Momentanaxe fortwährend dieselbe Lage gegen die Axen C', C'' und sind daher die Orte der relativen Momentanaxen und der Geraden des Systems Σ', welche in diese eintreten, zwei Rotationskegel um C', C'' als Axen mit den halben Oeffnungen α' und α'', welche sich längs der Momentanaxe berühren. Bildet die relative Momentanaxe mit beiden absoluten Momentanaxen C', C'' spitze oder stumpfe Winkel, so berühren sich die Kegel auf entgegengesetzten Seiten ihrer gemeinschaftlichen Tangentenebenen, bildet sie mit einer der Axen einen rechten Winkel, so geht ein Kegel in eine Ebene über, bildet sie mit einer Axe einen spitzen, mit der andern einen stumpfen Winkel, so berühren sie sich auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangentenebene.

3. **Dieselbe Aufgabe für den Fall, dass die beiden Axen C', C'' sich im Raume kreuzen.**

Wir tragen die Winkelgeschwindigkeiten ω', ω'' nach Grösse und Sinn auf den absoluten Momentanaxen, deren Kreuzungswinkel α sei, von den Fusspunkten A', A'' des kürzesten Abstandes $A'A'' = a$ beider Axen auf. (Fig. 68.) Um nun die relative Winkelgeschwindigkeit Ω' des Systems Σ' gegen Σ'' zu bestimmen, haben wir $-\omega''$ um C'' mit ω' um C' zu verbinden. Dabei verfahren wir nach Cap. III, §. 3 indem wir $-\omega''$ parallel mit sich in eine durch A' gehende Axe C_1'' verlegen und die zugehörige Translationsgeschwindigkeit $a\omega''$ zufügen, welche senkrecht zur Ebene $C''C_1''$ ist. Das Parallelogramm aus ω' um C' und $-\omega''$ um C_1'' liefert nunmehr die Winkelgeschwindigkeit Ω' und deren Axenrichtung, welche senkrecht zu dem kürzesten Abstande a ist. Die Translationsgeschwindigkeit $a\omega''$, welche parallel der Ebene des Parallelogramms ist, zerlegen wir in zwei Componenten, von denen die eine parallel der Axenrichtung von Ω', die andere senkrecht zu ihr ist. Letztere liefert mit Ω' zusammen die definitive Lage der Axe c der relativen Winkelgeschwindigkeit Ω', welche den kürzesten Abstand in einem Punkte c schneidet, dessen Abstände von A' und A'' im Verhältniss der Tangenten der Winkel stehen, welche die Axe c mit den Axen C' und C'' bildet. Die erstere Componente ist

Fig. 68.



die Translationsgeschwindigkeit der relativen Schraubenbewegung von Σ' gegen Σ''.

Für die Berechnung der hier in Frage kommenden Elemente dient Folgendes. Der Winkel des Parallelogramms ist $\pi-\alpha$; nennen wir β' und β'' die Winkel, welche die Diagonale desselben mit den Seiten ω' und ω'' bilden, so erhalten wir

$$\frac{\sin\beta'}{\omega''}=\frac{\sin\beta''}{\omega'}=\frac{\sin\alpha}{\Omega},\quad \alpha+\beta'+\beta''=\pi,\ \Omega'^2=\omega'^2+\omega''^2-2\omega'\omega''\cos\alpha$$

und hieraus weiter

$$\operatorname{cotg}\beta'=\frac{\omega'-\omega''\cos\alpha}{\omega''\sin\alpha},\quad \operatorname{cotg}\beta''=\frac{\omega''-\omega'\cos\alpha}{\omega'\sin\alpha}$$

und folglich

$$\frac{tg\,\beta'}{tg\,\beta''}=\frac{\omega''}{\omega'}\cdot\frac{\omega''-\omega'\cos\alpha}{\omega'-\omega''\cos\alpha}.$$

Die Abstände a', a'' der relativen Momentanaxe c von C' und C'' stehen in diesem Verhältniss und ergeben sich daher aus den Gleichungen

$$\frac{a'}{tg\,\beta'}=\frac{a''}{tg\,\beta''},\qquad a'+a''=a$$

nach einer leichten Transformation, nämlich:

$$a'=\frac{\sin\beta'\cos\beta''}{\sin\alpha}\cdot a,\qquad a''=\frac{\sin\beta''\cos\beta'}{\sin\alpha}\cdot a.$$

Sind die Axen C', C'' zu einander rechtwinklig, so wird

$$\frac{a'}{a''}=\frac{tg\,\beta'}{tg\,\beta''}=\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)^2.$$

Die Translationsgeschwindigkeit $a\omega''$ bildet mit der Diagonale des Parallelogramms den Winkel $\frac{1}{2}\pi-\beta''$; daher ist die zur Momentanaxe parallele Componente derselben $a\omega''\sin\beta''$ und die zu ihr senkrechte $a\omega''\cos\beta''$, oder da

$$\sin\beta''=\frac{\omega'}{\Omega'}\sin\alpha,\qquad \cos\beta''=\frac{\omega'\sin\alpha}{\omega''-\omega'\cos\alpha},$$

so werden diese beiden Grössen

$$\frac{a\omega'\omega''}{\Omega'}\sin\alpha\,\sin\beta'',\qquad \frac{a\omega'\omega''\sin\alpha}{\Omega'(\omega''-\omega'\cos\alpha)}.$$

Bleibt während der ganzen Dauer der Bewegung das Verhältniss $\omega':\omega''$ der Winkelgeschwindigkeiten der Systeme um die absoluten Axen C', C'' constant, so geht die Momentanaxe fortwährend durch denselben Punkt des kürzesten Abstandes und bleiben ihre Neigungen gegen die Axen C', C'' gleichfalls dieselben; der Ort der Geraden im System Σ', welche nach und nach in die Momentanaxe eintreten, ist daher ein einfaches Rotationshyperboloid um die Axe C', dessen Kehlkreis den Radius a' hat. Ebenso ist der entsprechende Ort für die re-

lative Bewegung des Systemes Σ'' in Bezug auf Σ' ein einfaches Rotationshyperboloid um die Axe C'' mit dem Kehlradius a''. Diese zweite Fläche ist zugleich der Ort der relativen Momentanaxen für die relative Bewegung des Systems Σ', auf welchem das erste Hyperboloid rollt und gleitet, und die erste Fläche spielt dieselbe Rolle bezüglich der relativen Bewegung von Σ'' in Bezug auf Σ'. Beide Hyperboloide berühren sich also während der Bewegung der Systeme beständig längs einer Erzeugungslinie.

Die drei vorstehenden Aufgaben sind von Wichtigkeit für die Theorie der Zahneingriffe cylindrischer, conischer und hyperboloidischer Räder. (Vgl. hierüber z. B. Belanger, Traité de cinématique S. 91, 129 und 144 u. folg. und insbesondere die Abhandlung von Pützer: „Ueber den spiraloidischen Zahneingriff" in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure Bd. IV. (1860), S. 234 u. 251.)

Dritter Theil.

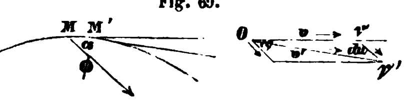
Die Beschleunigung der Bewegung.

I. Capitel.

Die Beschleunigung der Bewegung eines Punktes. Projectionen und Componenten der Beschleunigung. Arbeit der Beschleunigung. Sectorenbeschleunigung.

§. 1. Die Geschwindigkeit eines Punktes ändert sich im Laufe der Bewegung continuirlich und zwar im Allgemeinen in doppelter Hinsicht, sowohl ihrer Grösse, als auch ihrer Richtung nach. Damit diese doppelte Aenderung erfolge, ist erforderlich, dass zu der vorhandenen Geschwindigkeit in jedem Momente eine verschwindend kleine Geschwindigkeitscomponente in einer bestimmten, von der Richtung jener abweichenden Richtung hinzutrete, welche mit ihr die nach Grösse und Richtung geänderte Geschwindigkeit des folgenden Momentes bildet. Um diese zu bestimmen, seien (Fig. 69.) M, M' die den Zeiten t und $t + \Delta t$ entsprechenden Lagen des beweglichen Punktes auf seiner Bahn und v, v' seine Geschwindigkeit zu diesen Zeiten. Zieht man nun durch irgend einen Punkt O des Raumes zwei Gerade parallel den Tangenten in M, M' und trägt auf ihnen die Längen $AV = v$, $AV' = v'$ übereinstimmend mit dem Sinne dieser Geschwindigkeiten auf, so stellt nach dem Satze vom Parallelogramme der Geschwindigkeiten die Verbindungslinie VV' ihrer Endpunkte die Geschwindigkeitscomponente dar, welche zu v hinzutreten müsste, um v' zu bilden, d. h. um v nach Grösse und Richtung so abzuändern, dass es in v' übergeht. Lässt man nun Δt ohne Ende abnehmen, wodurch der Punkt M' sich fortwährend dem Punkte M nähert, so verschwindet der Winkel VOV' der beiden Tangenten als der Contingenzwinkel der Bahn im Punkte M, die Differenz von v' und v und die Componente VV', letztere jedoch in einer bestimmten, von dem Verhältnisse jener beiden

Fig. 69.



verschwindenden Grössen abhängigen Richtung. Die verschwindend kleine Geschwindigkeitscomponente, VV', die zur Zeit t zu der Geschwindigkeit v des beweglichen Punktes hinzutritt, um die der Zeit $t + dt$ entsprechende Geschwindigkeit v' nach Grösse und Richtung zu bilden, heisst die Elementarbeschleunigung des Punktes zur Zeit t. Die geänderte Geschwindigkeit v', entsprechend der Zeit $t + dt$ ist mithin die Resultante der Geschwindigkeit v zur Zeit t und der Elementarbeschleunigung. Wir wollen die Elementarbeschleunigung mit du bezeichnen. Würde nicht blos zur Zeit t, sondern in jedem Zeitelemente der auf t folgenden Zeiteinheit in der Richtung von du dieselbe unendlich kleine Geschwindigkeitscomponente von neuem hinzutreten, so würde der Quotient $\frac{du}{dt}$ die totale Aenderungscomponente der Geschwindigkeit während der auf die Zeit t folgenden Zeiteinheit darstellen, wenn die Geschwindigkeit während dieser fortwährend in derselben Weise sich änderte, wie im Zeitelemente dt, welches auf t folgt. Diese auf die Zeiteinheit bezogene Aenderungscomponente der Geschwindigkeit heisst die Beschleunigung des beweglichen Punktes zur Zeit t. Bezeichnen wir die Beschleunigung mit φ, so besteht demnach die Gleichung

$$\varphi = \frac{du}{dt}$$

und folgt aus ihr die Elementarbeschleunigung $du = \varphi dt$. Die Richtung der Beschleunigung ist die Richtung der Elementarbeschleunigung.

Bereits im I. Cap. §. 4. des I. Theils haben wir auf die Wichtigkeit des Begriffs der geometrischen Summe und Differenz hingedeutet; in demselben Sinne spricht man consequent auch von geometrischem Differential und geometrischer Derivirten, in welchen Ausdrücken die Beziehungen der Grösse, der Richtung und des Sinnes zugleich enthalten sind. Hiernach ist die Geschwindigkeit v' zur Zeit $t + dt$ die geometrische Summe der Geschwindigkeit v und der Elementarbeschleunigung du und können die Definitionen der Elementarbeschleunigung und der Beschleunigung kürzer so gefasst werden: Die Elementarbeschleunigung eines Punktes ist das geometrische Differential seiner Geschwindigkeit, die Beschleunigung ist die geometrische Derivirte der Geschwindigkeit in Bezug auf die Zeit.

Die Richtung der Beschleunigung, durch den beweglichen Punkt gezogen gedacht, fällt in die Ebene der beiden auf einander folgenden Tangenten, d. h. in die Schmiegungsebene der Bahn, welcher die Ebene des unendlich schmalen Parallelogramms AV' parallel ist. Der Sinn der Beschleunigung zeigt in der Schmiegungsebene nach der Seite der

Tangente hin, auf welcher der Krümmungsmittelpunkt liegt. Da nämlich die Elementarbeschleunigung die Richtung der Tangente der Bahn ändert, so zeigt ihr Sinn und mithin auch der Sinn der Beschleunigung selbst nach der Seite hin, nach welcher sich die Tangente wendet; dies ist aber die Seite des Krümmungsmittelpunktes.

Die Grösse des Winkels α, welchen die Beschleunigung mit der Tangente bildet und das Wachsthum oder die Abnahme der Geschwindigkeit sind von einander abhängig. Dieser Winkel ist nämlich der Aussenwinkel bei V in dem unendlich kleinen Dreieck OVV' und als solcher gleich der Summe des Winkels $OV'V$ und des Contingenzwinkels VOV'. Da letzterer unendlich klein ist, so ist α mit $OV'V$ von derselben Art, d. h. gleichzeitig spitz, stumpf oder ein Rechter und folglich Winkel OVV' gleichzeitig stumpf, spitz oder ein Rechter. Es ist mithin $v' \gtreqless v$, je nachdem $\alpha \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$.

§. 2. Wir wollen einige spezielle Fälle hinsichtlich der Art und Weise betrachten, wie die Beschleunigung die Geschwindigkeit ändert und welche Art der Beschleunigung eine bestimmte Art der Aenderung der Geschwindigkeit voraussetzt.

1. Es ändere zur Zeit t die Geschwindigkeit v bloss ihre Grösse, nicht aber ihre Richtung; die folgende Tangente fällt dann in die Richtung von v, die Elementarbeschleunigung VV' gleichfalls, also hat auch die Beschleunigung die Richtung der Geschwindigkeit und ist der Winkel α gleich Null oder gleich π, je nachdem der Sinn der Beschleunigung mit dem Sinne der Geschwindigkeit übereinstimmt oder ihm entgegengesetzt ist. Im ersten Falle wächst die Grösse der Geschwindigkeit, im letzten nimmt sie ab; in jenem wird die Bewegung zur Zeit t im eigentlichen Sinne beschleunigt, in diesem verzögert. Behält die Geschwindigkeit während einer endlichen Zeit fortwährend dieselbe Richtung, d. h. ist die Bahn während derselben gradlinig, so fällt die Beschleunigung immer in deren Richtung. Die Elementarbeschleunigung du ist im vorliegenden Falle gleich dem Differentiale dv der Geschwindigkeit im gewöhnlichen Sinne, ebenso ist die Beschleunigung $\varphi = \frac{dv}{dt}$ d. h. gleich der Derivirten von v im gewöhnlichen Sinne.

2. Es ändere die Geschwindigkeit zur Zeit t ihre Richtung, nicht aber ihre Grösse. In diesem Falle ist das Dreieck OVV' wegen $v' = v$ gleichschenklig und die Richtung der Elementarbeschleunigung VV' und der Beschleunigung φ normal zur Bahn des Punktes. Die Bewegung ist zwei Zeitelemente hindurch gleichförmig dieselbe. Aendert die Geschwindigkeit während einer endlichen Zeit blos ihre Richtung, nicht aber ihre Grösse, ist also die Bewegung durchweg gleichförmig während dieser Zeit, so ist die Beschleunigung in allen Punkten normal zur

Bahn und da ihre Richtung in die Schmiegungsebene fällt, so hat sie die Richtung der Hauptnormalen der Bahn und geht mithin durch den Krümmungsmittelpunkt.

3. Die Geschwindigkeit sei während einer endlichen Zeit unveränderlich, sowohl nach Grösse als nach Richtung; die Bewegung ist dann gleichförmig und geradlinig.

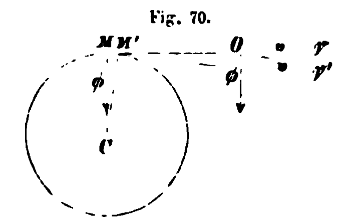
Die Veränderung, welche die Geschwindigkeit im Laufe der Bewegung erleidet, kann man sehr zweckmässig durch eine Curve darstellen, welche von Hamilton, ihrem Erfinder, der Hodograph genannt wird. (Vgl. *Hamilton, elements of Quaternions*, London 1866. S. 100 u. 718.) Zieht man nämlich von irgend einem Punkte O aus Radiusvectoren gleich, parallel und dem Sinne nach übereinstimmend mit den Geschwindigkeiten des beweglichen Punktes, so bilden die Endpunkte aller dieser Geraden diese Curve. Das Bogenelement derselben stellt die Elementarbeschleunigung dar; die Richtungen der Radienvectoren bilden eine Kegelfläche, deren Tangentenebenen den Schmiegungsebenen der Bahn des Punktes parallel sind. Ist die Bahn eine ebene Curve, so ist auch der Hodograph eben, ist die Bewegung gleichförmig, so schneidet der Hodograph seine Radienvectoren rechtwinklig und wird bei der Abwickelung der Kegelfläche ein Kreis.

§. 3. Wir wollen für die Bestimmung der Beschleunigung eines Punktes vorläufig einige leichte Beispiele behandeln.

1. Ein Punkt beschreibt mit constanter Geschwindigkeit einen Kreis vom Radius r, man soll seine Beschleunigung nach Grösse und Richtung bestimmen.

Da die Geschwindigkeit v constant ist, so ist das unendlich kleine Dreieck OVV' (Fig. 70.) gleichschenklig und mithin VV' senkrecht zur Richtung der Geschwindigkeit. Daher ist die Beschleunigung normal zu dem Kreise und fortwährend nach dem Mittelpunkte desselben gerichtet. Hinsichtlich der Grösse φ der Beschleunigung erhält man aus jenem Dreiecke zunächst die Elementarbeschleunigung $du = \varphi dt = OV.(VOV')$ oder da der Winkel VOV' der Contingenzwinkel des Kreises und gleich dem Winkel MCM' der beiden Normalen in den Endpunkten M, M' des Bogenelementes $MM' = ds$, also gleich $\frac{ds}{r}$ ist, $\varphi dt = v \cdot \frac{ds}{r}$. Es ist aber weiter $\frac{ds}{dt} = v$ und somit erhält man für die Beschleunigung den Ausdruck:

Fig. 70.



$$\varphi = \frac{v^2}{r}.$$

Denkt man sich den beweglichen Punkt als einem System angehörig, welches um eine durch den Mittelpunkt gehende zur Kreisebene senkrechte Axe gleichförmig rotirt und bezeichnet die Winkelgeschwindigkeit dieser Rotation mit ω, so wird $v = \omega r$ und lässt sich mithin die Beschleunigung auch durch den Ausdruck

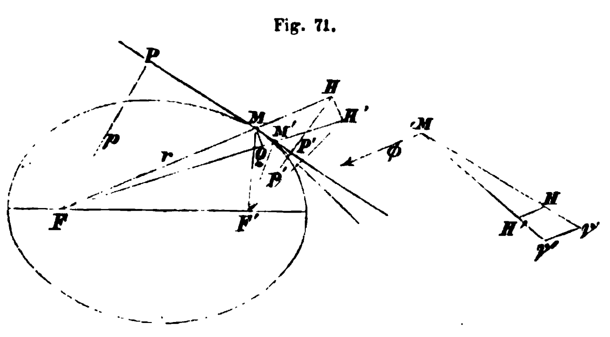
$$\varphi = \omega^2 r$$

darstellen. Man erhält dadurch also den Satz: Die Beschleunigung der gleichförmigen Kreisbewegung eines Punktes ist fortwährend nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtet; sie ist die dritte Proportionale zum Radius und der Geschwindigkeit und kann durch das Produkt des Radius und des Quadrats der Winkelgeschwindigkeit dargestellt werden; der Hodograph ist ein Kreis von einem Radius gleich der Geschwindigkeit.

2. Ein Punkt beschreibt eine Ellipse und zwar so, dass der Sector, welchen der von einem der beiden Brennpunkte nach dem beschreibenden Punkte gezogene Radiusvector während der Bewegung durchläuft, der Zeit proportional wächst, welches ist die Grösse und Richtung der Beschleunigung für diese Bewegung?

Wir leiten zunächst einen Ausdruck für die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes aus der Bedingung der Bewegung ab. Ist nämlich (Fig. 71.) $MM' = ds = v\,dt$ das im Zeitelemente dt mit der Geschwindigkeit v beschriebene Bogenelement der Bahn und das von dem Brennpunkte F, welcher Ursprung der Radienvectoren ist, auf die Tangente in M gefällte Perpendikel $FP = p$, so wird der Inhalt des Sectors MFM', welcher das Bogenelement zur Basis hat, gleich $\frac{1}{2}pv\,dt$ und folglich die Sectorengeschwindigkeit gleich $\frac{1}{2}pv$ (Vgl. Cap. IV, §. 13 im II. Theile). Nach der Bedingung der Aufgabe ist diese Sectorengeschwindigkeit eine Constante c; daher ist $\frac{1}{2}pv = c$ und folglich die gesuchte Geschwindigkeit

Fig. 71.



$$v = \frac{2c}{p}.$$

Dieselbe ist von der speziellen Natur der Bahn unabhängig und kann daher der Inhalt dieser Gleichung in dem Satze ausgesprochen werden: Bei jeder Bewegung eines Punktes, für welche die Sectorengeschwindigkeit des von einem festen Punkte nach dem beschreibenden Punkte gezogenen Radiusvectors constant und der von diesem durchlaufene Sector also der Zeit proportional ist, in welcher er durchlaufen wird, ist die Geschwindigkeit des Punktes umgekehrt proportional ihrem Abstande vom festen Punkte und wird erhalten, wenn man die doppelte Sectorengeschwindigkeit oder den doppelten in der Zeiteinheit durchlaufenen Sector durch diesen Abstand dividirt.

Denkt man sich den Radiusvector als einem um den Brennpunkt F rotirenden System angehörig, so kann man leicht für die Winkelgeschwindigkeit ω dieser Rotation einen Ausdruck finden. Fällt man nämlich von M auf den Radiusvector FM' des folgenden Punktes M' das Perpendikel MQ, so werden die Dreiecke MQM' und FPM ähnlich, weil wegen $FMQ = \frac{1}{2}\pi$ die Winkel QMM' und FMP complementär sind. Es besteht daher die Proportion: $MQ : MM' = FP : FM$, in welcher, wenn $FM = r$ gesetzt wird, $MQ = r\omega\,dt$, $MM' = v\,dt$ ist; aus ihr zieht man daher $vp = \omega r^2$ oder mit Rücksicht auf $vp = 2c$:

$$\omega = \frac{2c}{r^2},$$

d. h. **die Winkelgeschwindigkeit des Radiusvectors um den Brennpunkt ist umgekehrt proportional dem Quadrate des Radiusvectors.**

Um nun die Beschleunigung φ zu erhalten, wollen wir den Ausdruck für v ein wenig umgestalten. Fällen wir auch an dem zweiten Brennpunkt F' ein Perpendikel $F'P' = p'$ auf die Tangente in M und bringen dasselbe zum Durchschnitt H mit dem Radiusvector FM, so ist, weil die Tangente eines Kegelschnittes den Winkel der Radienvectoren halbirt, $F'H = 2p'$ und da ferner das Produkt der beiden von den Brennpunkten auf die Tangente gefällten Perpendikel eine Constante, nämlich das Quadrat der halben kleinen Axe b, also $pp' = b^2$ ist, so nimmt die obige Formel für v die Gestalt an:

$$v = \frac{c}{b^2} \cdot 2p' = \frac{c}{b^2} \cdot F'H,$$

d. h. es ist die Geschwindigkeit proportional dem doppelten Perpendikel, welches von dem Brennpunkte, welcher nicht Spitze des der Zeit proportionalen Sectors ist, auf die Tangente gefällt werden kann. Indem wir dieselbe Betrachtung für die Tangente des Punktes M', in welchem die Geschwindigkeit v' sei, wiederholen, erhalten wir für v' den analogen Ausdruck:

$$v' = \frac{c}{b^2} \cdot F'H',$$

worin $F'H'$ für die Tangente in M' dieselbe Bedeutung, wie $F'H$ für die Tangente in M hat. Die beiden Perpendikel $F'H$ und $F'H'$ bilden miteinander denselben Winkel, wie die Tangenten in M und M', auf welchen sie senkrecht stehen. Sie bilden mit HH' ein unendlich kleines Dreieck, in welchem zwei Seiten, nämlich $F'H$ und $F'H'$ den Geschwindigkeiten v und v' in den Punkten M, M' proportional sind. Zieht man daher durch den Punkt M, ausser der Tangente noch eine Gerade parallel zur Tangente des Punktes M' und trägt auf diese beiden Linien die Geschwindigkeiten v, v' als Längen MV, MV' auf, so erhält man ein weiteres Dreieck MVV', welches dem Dreieck $F'HH'$ ähnlich ist und zwar ist das Verhältniss der Seiten $\frac{c}{b^2}$. Die unendlich kleine Linie VV' des Dreiecks MVV' ist aber die Elementarbeschleunigung $du = \varphi dt$ für den Punkt M und erhält man daher

$$\varphi dt = \frac{c}{b^2} \cdot HH'.$$

Mit Rücksicht darauf, dass $F'H = F'M + MF'$ die grosse Axe $2a$ der Ellipse darstellt, wird nun $HH' = 2a\omega dt$ und hiermit

$$\varphi = \frac{2ac}{b^2} \cdot \omega$$

oder mit Hülfe des obigen Ausdruckes für die Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\varphi = \frac{4ac^2}{b^2 r^2}.$$

Diesem Ausdrucke kann man noch eine etwas andre Form geben, indem man die Constante c durch die Umlaufszeit T darstellt. Es ist nämlich, da die Sectoren der Zeit proportional sind, $cT = \pi ab$, nämlich gleich dem Inhalt der ganzen Ellipse; hieraus erhält man

$$c = \frac{\pi ab}{T},$$

wodurch φ die Form annimmt:

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Nachdem hiermit die Grösse der Beschleunigung gefunden ist, bleibt nur noch ihre Richtung zu bestimmen übrig. Da $FH = FH' = 2a$, so ist das unendlich schmale Dreieck FHH' gleichschenklig und steht also HH' in der Grenze senkrecht auf der Richtung des Radiusvectors FM. Lässt man daher das Dreieck $F'HH'$ um den Winkel $\frac{1}{2}\pi$ sich umdrehen, so wird HH' parallel FM; da aber alsdann die Seiten des Dreiecks $F'HH'$ den homologen Seiten des Dreiecks MVV' parallel liegen, so folgt, dass die Richtung von VV' parallel zu FM ist und mithin die Beschleunigung in die Richtung des Radiusvectors fällt und nach dem Brennpunkte hinzeigt. Demnach ist das Hauptresultat unserer Untersuchung folgendes.

Bei der vorliegenden elliptischen Bewegung ist die Beschleunigung fortwährend nach dem Brennpunkte hin gerichtet, welcher die Spitze des der Zeit proportionalen Sectors ist und ist dieselbe umgekehrt proportional dem Quadrate des Radiusvectors.

§. 4. Wird die Bewegung eines Punktes M (vgl. Fig. 69.) auf eine Axe X rechtwinklig projicirt, so ist nach Cap. I. §. 9 im II. Theile die Geschwindigkeit v_x der geradlinigen Projectionsbewegung (der Bewegung der Projection m des Punktes M auf die Axe) gleich der Projection der Geschwindigkeit v der Hauptbewegung. Da die Geschwindigkeit dieser Projectionsbewegung ihre Richtung nicht ändert, so fällt nach §. 2. die Elementarbeschleunigung derselben in die nämliche Richtung und ist sie das Differential von v_x. Daher erhält man die Beschleunigung φ_x der Projectionsbewegung durch die Gleichung

$$\varphi_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

Projicirt man nun das Dreieck OVV', in welchem VV' die Elementarbeschleunigung der Hauptbewegung darstellt, auf die Axe, so erhält man als Projection seines Umfanges die Folge dreier Strecken ov, ovv', ov' in gerader Linie, so dass $v = v_x$, $ov' = v'_x$ und $vv' = dv_x$ wird, wobei v'_x die Geschwindigkeit des Punktes m zur Zeit $t + dt$ bezeichnet und wenn α der Winkel ist, welchen die Richtung der Beschleunigung φ der Hauptbewegung mit der Axe X bildet, so wird $vv' = VV' \cdot \cos\alpha$ d. h. $dv_x = du \cdot \cos\alpha$. Hieraus folgt

$$\varphi_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \cos\alpha = \varphi \cos\alpha$$

d. h. die Beschleunigung der Projectionsbewegung ist die Projection der Beschleunigung der Hauptbewegung auf die Axe und wird durch die Derivirte der Projection der Geschwindigkeit auf die Axe, nach der Zeit genommen, dargestellt.

Ist x die Abscisse des Projectionspunktes m, von irgend einem Anfangspunkte in der Axe X an gerechnet, so ist nach Cap. I. §. 9 des II. Theiles $v_x = \frac{dx}{dt}$ und folglich mit Rücksicht auf die eben entwickelte Gleichung

$$\varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2},$$

d. h. die Beschleunigung der Projectionsbewegung ist die zweite Derivirte der auf der Axe gerechneten Abscisse des beweglichen Projectionspunktes in Bezug auf die Zeit.

§. 5. Projiciren wir eine in der Ebene erfolgende Bewegung eines Punktes M auf zwei rechtwinklige Coordinatenaxen der x, y in dieser Ebene, so erhalten wir, wenn x, y die Coordinaten des beweglichen Punktes sind, nach dem vorigen Paragraphen für die Beschleunigungen der Projectionsbewegungen in den Coordinatenaxen die Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi_y$$

und dabei ist, wenn α den Neigungswinkel der Beschleunigung φ der Hauptbewegung gegen die x-Axe bezeichnet,

$$\varphi \cos\alpha = \varphi_x, \quad \varphi \sin\alpha = \varphi_y$$

$$\varphi^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2, \quad tg\,\alpha = \frac{\varphi_y}{\varphi_x}.$$

Construirt man den Hodographen der ebenen Bewegung des Punktes M so, dass man vom Coordinatenursprung aus die Radienvectoren gleich und parallel den Geschwindigkeiten zieht, so entspricht dem Punkte M (x, y) der Punkt m des Hodographen, dessen Radiusvector

$$r' = v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

ist und dessen Coordinaten x', y' durch die Gleichungen

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}$$

bestimmt werden. Das Bogenelement ds' des Hodographen, welches die Elementarbeschleunigung darstellt, ist

$$ds' = dt\sqrt{\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2} = dt\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

und erhält man daher für die Beschleunigung φ den Ausdruck

$$\varphi = \frac{ds'}{dt} = \sqrt{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2}},$$

übereinstimmend mit der Bedeutung der obigen Formel $\varphi^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$.

Ebenso hat man für die Projectionen einer räumlichen Bewegung auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen der x, y, z, wenn die Beschleunigung φ mit den Axen die Winkel α, β, γ bildet und φ_x, φ_y, φ_z die Beschleunigungen der drei Projectionsbewegungen sind:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \varphi_z$$

$$\frac{\cos\alpha}{\varphi_x} = \frac{\cos\beta}{\varphi_y} = \frac{\cos\gamma}{\varphi_z} = \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2.$$

Die Gleichungen des Hodographen sind:

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt},$$

sein Bogenelement, welches die Elementarbeschleunigung darstellt, ist

$$ds' = dt\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Der Gebrauch, den man von dem vorstehenden Formelsystem machen kann, ist ein sehr mannigfaltiger. Ist z. B. die Bewegung eines Punktes M insofern gegeben, als die Coordinaten x, y, z desselben als Functionen der Zeit bekannt sind, so dass man etwa hat:

$$x = \psi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \varpi(t),$$

so genügt eine einmalige Differentiation um die Projectionen der Geschwindigkeit auf die Axen, diese selbst und ihre Richtung zu bestimmen, indem

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \psi'(t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \chi'(t), \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \varpi'(t)$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

und die Richtungscosinusse von v durch die Grössen $\frac{v_x}{v}$, $\frac{v_y}{v}$, $\frac{v_z}{v}$ angegeben werden; eine wiederholte Differentiation führt zur Kenntniss der Projectionen der Beschleunigung, der Beschleunigung selbst und ihrer Richtungscosinusse, nämlich:

$$\varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \psi''(t), \quad \varphi_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \chi''(t), \quad \varphi_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \varpi''(t)$$

$$\varphi^2 = \varphi_x^2 + \psi_y^2 + \varphi_z^2$$

$$\frac{\cos\alpha}{\varphi_x} = \frac{\cos\beta}{\varphi_y} = \frac{\cos\gamma}{\varphi_z} = \frac{1}{\varphi}$$

und im Falle einer ebenen Bewegung reduciren sich diese Ausdrücke, indem eine der Coordinaten und ihre Differentialquotienten gleich Null gesetzt werden können, wenn man die Ebene der Bewegung selbst zu einer Coordinatenebene wählt.

Ist aber die Bewegung des Punktes M nicht selbst gegeben, sondern sind blos φ_x, φ_y, φ_z bekannte Functionen, so stellen die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \varphi_z$$

ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar, deren erste Integrale zu den Componenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ der Geschwindigkeit und deren zweite Integrale zu den Coordinaten des beweglichen Punktes als Functionen der Zeit hinführen, wie späterausführlich erörtert werden wird. Man nennt sie die Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes.

§. 6. Wird eine Bewegung auf eine Ebene projicirt, so ist die Geschwindigkeit der Projectionsbewegung die Projection der Geschwindigkeit der Hauptbewegung auf diese Ebene nach Grösse und Richtung. Projicirt man daher das Dreieck OVV' (Fig. 69.) auf die Ebene, so erhält man ein anderes Dreieck, dessen Seiten für die Projectionsbewegung dieselbe Bedeutung haben, wie die des ersteren für die Hauptbewegung; insbesondere stellt die Projection von VV' die Elementarbeschleunigung und folglich, wenn sie noch mit dem Zeitelemente dividirt wird, die Beschleunigung der Projectionsbewegung dar. Die Beschleunigung der Projection einer Bewegung auf eine Ebene ist also die Projection der Beschleunigung auf dieselbe Ebene.

§. 7. Zur Erläuterung des Inhaltes der §§. 4—6. sollen folgende Beispiele dienen.

1. Die gleichförmige Kreisbewegung (Vgl. Cap. I, §. 12 im II. Th. wird auf eine Gerade, z. B. auf einen Durchmesser, projicirt, man soll die Beschleunigung der gradlinigen oscillatorischen Projectionsbewegung finden.

Ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung, r der Radius des Kreises, so ist nach §. 3. die Beschleunigung $\varphi = \omega^2 r$ und nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtet. Bezeichnet also ψ den Winkel M_0CM, welchen (s. Fig. 44.), der Radius CM, welcher nach dem beweglichen Punkte M geht, mit der Richtung CM_0 der Projectionsaxe bildet, so ist $\pi - \psi$ der Winkel der Beschleunigung φ mit dieser Axe und folglich die Beschleunigung der Projectionsbewegung $\varphi_x = -\omega^2 r \cos\psi$, oder wenn die Abscisse des Punktes M, nämlich $Cm = x$ gesetzt wird, $\varphi_x = -\omega^2 x$. Dieselbe ist nach dem Kreismittelpunkte gerichtet. Man hat daher für die oscillatorische Bewegung die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \text{oder}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich durch Differentiation der Cap. II. §. 12. II. Theile aufgestellten Formel für die Geschwindigkeit dieser Bewegung, nämlich $v_x = -r\omega \sin \omega t$, da $\psi = \omega t$ ist. Man erhält daher den Satz:

Für die geradlinige oscillatorische Bewegung eines Punktes, welche die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung ist, ist die Beschleunigung dem Abstande des beweglichen Punktes von einem festen Punkte der Geraden, nämlich von der Projection des Kreismittelpunktes, proportional und fortwährend nach diesem Punkte hin gerichtet; sie wechselt den Sinn, so oft der bewegliche Punkt

durch das feste Centrum hindurchgeht und ist unabhängig von der Oscillationsweite.

Umgekehrt kann jede geradlinige Bewegung, für welche die Beschleunigung nach einem festen Punkte der Geraden gerichtet und der Entfernung von diesem proportional, nämlich $\Phi_x = \varkappa x$ ist, als die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung um den festen Punkt als Mittelpunkt angesehen werden. Die Winkelgeschwindigkeit derselben ist $\omega = \sqrt{\varkappa}$ und die Oscillationsdauer $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Der Durchmesser des Kreises ist der Abstand der beiden äussersten Lagen, welche der Punkt während seiner Bewegung erreicht.

Projicirt man die gleichförmige Kreisbewegung auf zwei zu einander rechtwinklige Axen der x, y, welche sich im Mittelpunkte schneiden, so hat man für die beiden Projectionsbewegungen die Gleichungen

$$x = r \cos \omega t, \qquad y = r \sin \omega t,$$

aus welchen die Geschwindigkeiten derselben

$$v_x = - \omega r \sin \omega t, \qquad v_y = \omega r \cos \omega t,$$

sowie deren Beschleunigungen

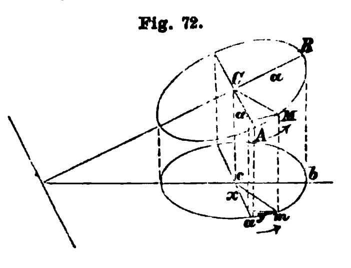
$$\varphi_x = - \omega^2 x, \qquad \varphi_y = - \omega^2 y$$

folgen. Beide Bewegungen sind an sich identisch, nur sind ihre Perioden so verschoben, dass die Maxima der Abstände, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen (im absoluten Sinne genommen) der einen mit den Minimis der entsprechenden Abstände, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gleichzeitig eintreten.

2. Die gleichförmige Kreisbewegung eines Punktes wird auf eine Ebene projicirt, man soll die Beschleunigung der Projectionsbewegung finden.

Die Projection der kreisförmigen Bahn des Punktes M ist (Fig. 72.) die elliptische Bahn des Projectionspunktes m, der Mittelpunkt c derselben die Projection des Mittelpunktes C jener; die grosse Axe $2a$ der Ellipse liegt parallel der Schnittlinie der Ebenen beider Curven und ist gleich dem Durchmesser $2a$ des Kreises, die kleine Axe $2b$ fällt in die Ebene des Neigungswinkels α beider Ebenen und ist daher $b = a \cos \alpha$. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung, so ist $v = a\omega$ die Geschwindigkeit des Punktes M und $\varphi = a\omega^2$ seine Beschleunigung und diese hat die Richtung MC nach dem Kreismittelpunkt. Die Beschleunigung ψ der elliptischen Bewegung ist die Projection von φ und folglich nach dem Mittelpunkte c der Ellipse gerichtet und hat die Grösse $\psi = \varphi \cos(\varphi, \psi) = r\omega^2$, wenn der Radiusvector cm der Ellipse mit r bezeichnet wird; sie ist der Entfernung vom Mittelpunkte proportional.

Fig. 72.



Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist die Sectorengeschwindigkeit für den Mittelpunkt des Kreises als Ursprung der Sectoren constant und gleich dem Sector, welcher der Zeiteinheit entspricht; sie ist also $c = \frac{\pi a^2}{T}$, wenn T die Umlaufszeit bedeutet, welche durch die Winkelgeschwindigkeit ω mit Hülfe der Formel $\omega T = 2\pi$ ausgedrückt werden kann. Da der Sector der Kreisbewegung, welcher in einer endlichen oder unendlich kleinen Zeit beschrieben wird, dieser Zeit proportional ist und die Sectoren der Ellipse die Projectionen der Sectoren

des Kreises sind, so sind auch diese der Zeit proportional und ist auch für die elliptische Bewegung die Sectorengeschwindigkeit constant, nämlich $c' = c \cos \alpha$. Da die Umlaufszeit für beide Bewegungen gleich gross ist, so hat man ferner $c'T = \pi ab$. Man kann daher dem Ausdruck für die Beschleunigung ψ auch noch die Formen geben:

$$\psi = \frac{4\pi^2}{T} \cdot r = \frac{4c'^2}{a^2 b^2} \cdot r = \frac{4c^2}{a^4} \cdot r.$$

Wählt man die Hauptaxenrichtungen ca und cb der Ellipse als Axen der x, y, so sind die Coordinaten des Punktes m leicht als Functionen der Zeit zu erhalten. Ist nämlich M zur Zeit $t = 0$ in A, so wird $AM = a\omega t$ und der Inhalt des Dreiecks ACM gleich $\frac{1}{2}a^2 \sin \omega t$, der seiner Projection ist aber $\frac{1}{2}ay$, daher erhält man die Gleichung $y = b \sin \omega t$, zu welcher man $x = a \cos \omega t$ aus der Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ der Ellipse findet. Für die Polarcoordinaten $cm = r$ und $\sphericalangle acm = \vartheta$ des Punktes m erhält man $r^2 = a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t$, $tg\, \vartheta = \frac{b}{a}\, tg\, \omega t$.

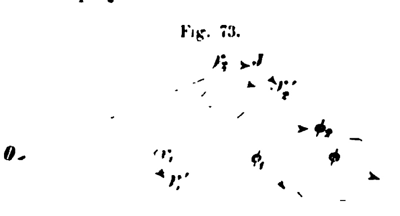
Aus dem Vorstehenden schliesst man leicht umgekehrt, dass, wenn ein Punkt eine Ellipse beschreibt unter Einfluss einer nach dem Mittelpunkt gerichteten Beschleunigung, diese dem Radiusvector proportional und dass die Sectorengeschwindigkeit der Bewegung constant sein muss. Denn es giebt immer einen Kreis, dessen Projection die Ellipse ist und in ihm eine Bewegung, welche der elliptischen Bewegung folgt; für diese ist alsdann die Beschleunigung nach dem Mittelpunkt gerichtet und dem Radius proportional, folglich die Geschwindigkeit der Kreisbewegung constant.

§. 8. Ist die Bewegung eines Punktes aus zwei anderen Bewegungen zusammengesetzt, so kann die Beschleunigung leicht aus den Beschleunigungen jener mit Hülfe des folgenden Satzes gebildet werden. Nennt man die Beschleunigung der zusammengesetzten Bewegung die Resultante der Beschleunigungen der beiden Bewegungen, aus welchen diese hervorgeht, so heisst derselbe:

Die Resultante zweier Beschleunigungen wird nach Grösse und Richtung durch die Diagonale des Parallelogramms dargestellt, welches über jenen als Seitenlängen und Seitenrichtungen construirt werden kann.

Sind nämlich von irgend einem Punkte O aus construirend, OV_1 und V_1V_2 zwei Linien, welche nach Grösse und Richtung die Geschwindigkeiten darstellen, welche der bewegliche Punkt in Folge der beiden Bewegungen zur Zeit t besitzt, so stellt OV_2 die Resultante derselben, d. h. die absolute Geschwindigkeit des Punktes zu derselben Zeit dar. Sind ebenso OV_1' und $V_1'V_2'$ die Geschwindigkeiten jener Bewegungen zur Zeit $t + dt$, so ist OV_2' die absolute Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit $t + dt$. Zieht man nun V_1J parallel $V_1'V_2'$ und JV_2' parallel V_1V_1', so stellt

Fig. 73.



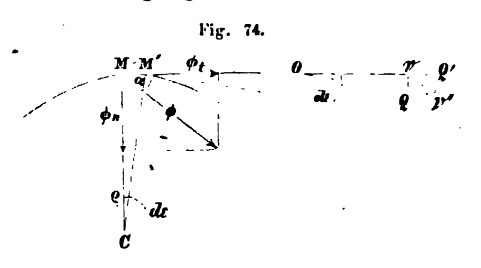
$JV_2' = V_1V_1'$ die Elementarbeschleunigung der einen, V_2J die der anderen Bewegung, V_2V_2' aber die Elementarbeschleunigung der zusammengesetzten Bewegung dar. Dieselben sind $\varphi_1 dt$, $\varphi_2 dt$, φdt, wenn φ_1, φ_2, φ die Beschleunigungen der drei Bewegungen bedeuten, sind also diesen letzteren proportional. Daher lässt sich aus φ_1, φ_2, φ als Seiten ein Dreieck construiren, welches dem unendlich kleinen Dreieck der Elementarbeschleunigungen ähnlich ist, mithin auch ein Parallelogramm, dessen Diagonale die Beschleunigung φ nach Grösse und Richtung darstellt.

Der vorstehende Satz, welcher den Namen des Satzes vom Parallelogramm der Beschleunigungen führt, kann leicht für drei und mehr Beschleunigungen erweitert werden (Parallelepiped und Polygon der Beschleunigungen), ganz ebenso, wie wir früher den Satz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten, vom Parallelogramm der Translationen, der Rotationen u. s. w. erweitern konnten.

Derselbe Satz dient auch zur Zerlegung einer Beschleunigung in zwei oder mehrere andere, welche als die Beschleunigungen von ebensoviel Bewegungen angesehen werden können, in welche die gegebene Bewegung zerfällt werden kann.

§. 9. Eine besonders wichtige Zerlegung der Beschleunigung φ ist die Zerlegung derselben nach der Tangente und der Hauptnormalen der Bahn oder die Zerlegung in die Tangential- und die Normalbeschleunigung. Ist nämlich α der Neigungswinkel der Beschleunigung φ gegen die Tangente der Bahn, so sind die Tangential- und Normalcomponente, welche φ_t und φ_n heissen mögen:

Fig. 74.



$$\varphi_t = \varphi \cdot \cos\alpha, \quad \varphi_n = \varphi \cdot \sin\alpha.$$

Fällt man nun in dem unendlich schmalen Dreieck OVV', dessen Seiten OV, OV', VV' die Geschwindigkeiten, entsprechend den Zeiten t und $t + dt$ und die Elementarbeschleunigung $\varphi \cdot dt$ sind, von V das Perpendikel VQ (unendlich kleiner Kreisbogen aus O mit OV als Radius) auf die Seite OV', so hat dies die Richtung der Hauptnormalen MC und zerfällt die Elementarbeschleunigung VV' in zwei Componenten, eine tangentielle $VQ' = QV'$ und eine normale VQ und da die verschwindend kleine Zerlegungsfigur im Verschwinden der endlichen Zerlegungsfigur von φ in φ_t und φ_n ähnlich ist, so hat man

$$\varphi_t = \frac{QV'}{dt}, \quad \varphi_n = \frac{VQ}{dt}.$$

Hiebei ist nun $QV' = OV' - OV = dv$, nämlich das Differential der Geschwindigkeit im gewöhnlichen Sinn und folglich

$$\varphi_t = \frac{dv}{dt},$$

und wenn der Contingenzwinkel VOV' mit $d\varepsilon$ bezeichnet wird $QV = v d\varepsilon$, mithin

$$\varphi_n = v \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Der Contingenzwinkel ist zugleich der Winkel der beiden auf einander folgenden Normalen MC, $M'C$ und stellt $\frac{d\varepsilon}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Punktes um den Krümmungsmittelpunkt C dar. Dem Ausdrucke für φ_n kann man noch zwei andere Formen geben, wenn man die bekannte Beziehung zwischen Bogenelement, Contingenzwinkel und Krümmungshalbmesser in Verbindung mit dem Ausdrucke für die Geschwindigkeit heranzieht, nämlich:

$$\varrho = \frac{ds}{d\varepsilon}, \qquad v = \frac{ds}{dt}$$

woraus folgt:

$$\frac{d\varepsilon}{td} = \frac{v}{\varrho}.$$

Dadurch erhält man für φ_n:

$$\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho}$$

und wenn man den vorhin aufgestellten Ausdruck für φ_n mit ϱ dividirt und multiplicirt und für $\frac{v}{\varrho}$ die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varepsilon}{dt}$ einsetzt, weiter:

$$\varphi_n = \varrho \cdot \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2.$$

Man hat daher den Satz:

Die Beschleunigung eines Punktes kann jeden Augenblick in zwei Componenten zerfällt werden, in die Tangentialbeschleunigung und die Normalbeschleunigung, erstere längs der Tangente, letztere längs der Hauptnormale nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gerichtet. Die Tangentialbeschleunigung ist die Derivirte der Geschwindigkeit nach der Zeit, die Normalbeschleunigung ist der Quotient aus dem Quadrate der Geschwindigkeit durch den Krümmungshalbmesser, oder, was hiermit gleichbedeutend ist, das Produkt aus dem Krümmungshalbmesser und dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit um den Krümmungsmittelpunkt.

Die Normalbeschleunigung heisst auch die Centripetalbeschleunigung, weil sie nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gerichtet ist.

§. 10. Die Zerlegung der Beschleunigung in ihre tangentielle und normale Componente ist vorzugsweise deswegen so wichtig, weil sie den Antheil, welchen die Beschleunigung an der Aenderung der Richtung der Geschwindigkeit hat, von dem trennt, den sie an der Aenderung ihrer Grösse nimmt. Der Ausdruck der Tangentialbeschleunigung enthält nichts, was sich auf die Krümmung der Bahn und mithin nichts, was sich auf die Abweichung der Tangente bezieht, dagegen enthält die Normalbeschleunigung das die Krümmung der Bahn bestimmende Element. Die Tangentialbeschleunigung beschleunigt daher den Punkt in seiner Bahn allein, d. h. verändert die Geschwindigkeit hinsichtlich der Grösse allein, die Normalbeschleunigung krümmt die Bahn, ohne Einfluss auf die Aenderung der Grösse der Geschwindigkeit zu haben. Ist daher eine Gleichung gegeben, welche φ_t als Funktion der Zeit oder des Abstandes ausdrückt, so kann man die Bewegung des Punktes in der Bahn unabhängig von der Kenntniss der Bahn untersuchen und bleibt dieselbe unverändert dieselbe, wenn die Normalbeschleunigung sich so ändert, dass die Bahn sich anders krümmt. Andererseits hängt aber die Normalbeschleunigung nicht blos von der Krümmung der Bahn, sondern auch von der Art der Bewegung des Punktes in der Bahn ab, denn ihr Ausdruck enthält neben dem Krümmungshalbmesser auch die Geschwindigkeit.

Ist die Bahn geradlinig, so wird $\varrho = \infty$, mithin $\varphi_t = \frac{dv}{dt} = \varphi$, $\varphi_n = 0$, $\alpha = 0$. Die Beschleunigung reducirt sich auf die Tangentialbeschleunigung.

Ist die Bewegung gleichförmig, also v constant, so wird $\varphi_t = 0$, $\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho} = \varphi$, $tg\alpha = \infty$. Die Richtung der Beschleunigung ist normal zur Bahn (§. 2.).

§. 11. Aus den Gleichungen $\varphi_n = \varphi \sin\alpha = \frac{v^2}{\varrho}$ folgt $\varphi\varrho \sin\alpha = v^2$. Es ist aber $\varrho \sin\alpha$ die halbe Sehne, welche die Richtung der Beschleunigung, durch den beweglichen Punkt gezogen, in dem Krümmungskreise bestimmt, und wenn wir diese Sehne mit c bezeichnen, so erhalten wir die Gleichung:

$$v^2 = \tfrac{1}{2} c\varphi,$$

d. h. die Geschwindigkeit ist die mittlere Proportionale zwischen der Beschleunigung und der halben Sehne, welche die Richtung derselben im Krümmungskreise der Bahn bestimmt. Beschreibt man daher (Fig. 75.) einen Kreis, welcher die Tangente MV in dem Endpunkte V der Geschwindigkeit $MV = v$ berührt und durch die Mitte D der Sehne c geht, so schneidet die Richtung der Beschleunigung denselben in einem zweiten Punkte F, so, dass $MF = \varphi$ wird. Beschreibt man um M mit v einen weiteren Kreis,

so schneidet dieser die Richtung der Beschleunigung in zwei Punkten A, B so, dass A, B, D, F vier harmonische Punkte und A, B einerseits, D, F andrerseits zugeordnet sind. Die Punkte D, F sind daher conjugirte Pole in Bezug auf diesen Kreis.



§. 12. Während der bewegliche Punkt von M aus, wo er sich zur Zeit t befindet, mit veränderlicher Geschwindigkeit seine Bahn beschreibt und nach der Zeit $t + \vartheta$ in einem weiteren Punkte M' angelangt sein wird (S. Fig. 77.), wollen wir gleichzeitig einen zweiten Punkt von M abgehen lassen, welcher sich mit constanter Geschwindigkeit, nämlich mit der Geschwindigkeit v, welche der Hauptpunkt zur Zeit t in M besitzt, auf der Tangente bewegt und zur Zeit $t + \vartheta$ die Lage N erreicht haben mag. Die Verbindungslinie NM' beider Punkte, welche nach Grösse und Richtung mit ϑ veränderlich ist, und mit ϑ verschwindet, steht mit der Beschleunigung φ in der doppelten Beziehung, dass 1) die Richtung von NM' bei abnehmendem ϑ sich der Richtung der Beschleunigung φ als ihrer Grenzlage nähert und 2) der Quotient des Abstandes NM' durch das halbe Quadrat von ϑ in der Grenze in die Grösse der Beschleunigung übergeht. Die verschwindend kleine Strecke NM', welche die Abweichung des beweglichen Punktes von der Tangente in der Richtung der Beschleunigung misst, wird die Deviation δ des beweglichen Punktes genannt.

Zum Beweise des eben ausgesprochenen Satzes genügt es, die Bewegungen der beiden Punkte während zweier auf t folgender Zeitelemente dt zu verfolgen. Während der ersten derselben beschreiben beide Punkte das Element $Mm = ds = v\,dt$, (Fig. 76.), welches die Tangente mit dem Krümmungskreise gemein hat. Während des zweiten Zeitelementes dt durchläuft der Hauptpunkt das Bahnelement $mM' = (v + dv)\,dt$, welches zugleich der zweiten Tangente und dem Krümmungskreise angehört, während der zweite Punkt auf der ersten Tangente das Element $mN = v\,dt = Mm$ zurücklegt. In dem unendlich kleinen Dreiecke mNM' sind also die Seiten mN und mM' den Geschwindigkeiten v und $v + dv$ proportional, welche der bewegliche Punkt zu den Zeiten t und $t + dt$ besitzt und haben diese Seiten zugleich die Richtungen dieser Geschwindigkeiten. Construirt man daher das Dreieck mVV', welches die Geschwindigkeiten $mV = v$ und $mV' = v + dv$, sowie die Elementarbeschleunigung $VV' = \varphi\,dt$

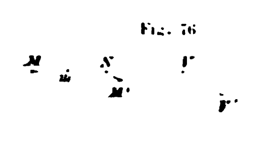


Fig. 76.

zu Seiten hat (s. §. 1.), so folgt, dass $\triangle\, mNM' \backsim \triangle\, mVV'$ und da beide Dreiecke zwei Seiten parallel haben, so folgt, dass NM' parallel der Elementarbeschleunigung VV' ist, womit der erste Theil des obigen Satzes erwiesen ist. — Die Linie NM' schneidet nun den Krümmungskreis zum zweitenmale in einem Punkte F und besteht daher, weil mN den Krümmungskreis berührt, die Relation

$$\overline{mN}^2 = \delta \cdot \overline{NF}.$$

Da aber NF nach dem eben bewiesenen ersten Theile unseres Satzes die Richtung der Beschleunigung hat, so geht es in der Grenze in die Sehne c über, welche diese Richtung im Krümmungskreise bestimmt und da $mN = v\,dt$ ist, so liefert hiermit die vorstehende Relation

$$v^2 dt^2 = \delta \cdot c$$

oder weil nach §. 11. $v^2 = \frac{1}{2} c \varphi$ ist

$$\varphi = \frac{\delta}{\frac{1}{2}\, dt^2}$$

womit auch der zweite Theil der Behauptung erwiesen ist, weil die abnehmende Zeit ϑ nichts anderes als das Zeitdifferential dt ist.

Bringen wir die eben entwickelte Gleichung in die Form

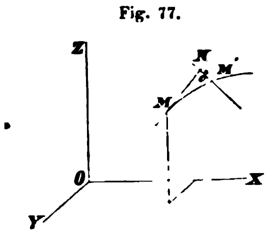
$$\delta = \frac{1}{2}\, \varphi\, dt^2,$$

so sagt sie aus, dass die Deviation des beweglichen Punktes ein unendlich Kleines zweiter Ordnung ist, und erhalten wird, indem man die halbe Beschleunigung mit dem Quadrate des Zeitelementes multiplicirt. Ein Punkt, welcher in der Richtung der Beschleunigung ohne Anfangsgeschwindigkeit sich während des Zeitelementes mit constanter Beschleunigung φ bewegen würde, würde in dieser Zeit den Weg δ zurücklegen. Denn bezeichnet ξ seinen Abstand von M zur Zeit τ, so wäre seine Beschleunigung $\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \varphi$, mithin seine Geschwindigkeit $\frac{d\xi}{dt} = \varphi \cdot \tau$ und sein Abstand $\xi = \frac{1}{2} \varphi \tau^2$, mithin für $\tau = dt$ derselbe gleich $\frac{1}{2}\, \varphi\, dt^2$, d. h. gleich δ. Man kann daher die Bewegung eines Punktes auf der krummlinigen Bahn während des Zeitelementes ansehen als aus zwei andern Bewegungen zusammengesetzt, nämlich einer gleichförmigen längs der Tangente von der Geschwindigkeit v, wie sie der Punkt zu Anfang des Zeitelementes besitzt, und einer gleichförmig veränderlichen in der Richtung der Beschleunigung, deren Beschleunigung mit der Beschleunigung zu Anfang des Zeitelementes nach Grösse und Richtung übereinstimmt. Hierauf kann man eine Infinitesimalconstruction der Bahn des Punktes gründen mit Hülfe der kleinen Wege, welche der Punkt in den Richtungen der Tangente und der Beschleunigung beschreiben würde, wenn er längs

diesen die eben erläuterten Bewegungen während sehr kleiner Zeiträume verfolgen könnte.

§. 13. Um den vorstehenden Satz analytisch zu erweisen, seien x, y, z die Coordinaten des beweglichen Punktes M (Fig. 77.) zur Zeit t. Aus ihnen erhält man die Coordinaten des Punktes M', d. h. des Ortes des beweglichen Punktes zur Zeit $t + \vartheta$, indem man in x, y, z an die Stelle von t die Grösse $t + \vartheta$ treten lässt. Da der Satz nun ϑ bloss für sehr kleine Werthe in Anspruch nimmt, so kann man die Coordinaten des Punktes M' nach dem Taylor'schen Satze in Reihen entwickeln, welche nach ganzen Potenzen von ϑ fortschreiten, wodurch man erhält

Fig. 77.



$$x + \frac{dx}{dt} \cdot \vartheta + \tfrac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vartheta^2 + \tfrac{1}{6} \frac{d^3x}{dt^3} \cdot \vartheta^3 + \ldots.$$

$$y + \frac{dy}{dt} \cdot \vartheta + \tfrac{1}{2} \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vartheta^2 + \tfrac{1}{6} \frac{d^3y}{dt^3} \cdot \vartheta^3 + \ldots.$$

$$z + \frac{dz}{dt} \cdot \vartheta + \tfrac{1}{2} \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vartheta^2 + \tfrac{1}{6} \frac{d^3z}{dt^3} \cdot \vartheta^3 + \ldots.$$

Die Coordinaten des Punktes N erhält man durch die Bemerkung, dass die Differenzen zwischen ihnen und den gleichnamigen Coordinaten des Punktes M die Projectionen der Tangentenstrecke $MN = v\vartheta$ auf die Coordinatenaxen und demnach die Coordinaten von N selbst gleich den Summen von x, y, z und diesen Projectionen sind. Bildet nun die Tangente, im Sinne der Bewegung genommen, mit den Axen die Winkel α, β, γ, so sind $v\vartheta \cos\alpha$, $v\vartheta \cos\beta$, $v\vartheta \cos\gamma$ diese Projectionen; sie gehen aber, da $v \cos\alpha$, $v \cos\beta$, $v \cos\gamma$ die Componenten der Geschwindigkeit parallel den Axen, nämlich die Grössen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ darstellen, über in $\frac{dx}{dt} \cdot \vartheta$, $\frac{dy}{dt} \cdot \vartheta$, $\frac{dz}{dt} \cdot \vartheta$ und demnach sind die Coordinaten des Punktes N:

$$x + \frac{dx}{dt} \cdot \vartheta, \quad y + \frac{dy}{dt} \cdot \vartheta, \quad z + \frac{dz}{dt} \cdot \vartheta.$$

Subtrahirt man diese Coordinaten von den obigen Coordinaten des Punktes M', so erhält man die Projectionen der Linie NM' auf die Axen, nämlich:

$$\tfrac{1}{2} \vartheta^2 \left[\frac{d^2x}{dt^2} + \tfrac{1}{3} \frac{d^3x}{dt^3} \vartheta + \ldots.\right]$$

$$\tfrac{1}{2} \vartheta^2 \left[\frac{d^2y}{dt^2} + \tfrac{1}{3} \frac{d^3y}{dt^3} \vartheta + \ldots.\right]$$

$$\tfrac{1}{2} \vartheta^2 \left[\frac{d^2z}{dt^2} + \tfrac{1}{3} \frac{d^3z}{dt^3} \vartheta + \ldots.\right],$$

deren Quadratsumme das Quadrat von NM' bildet. Hieraus folgt sofort beim Grenzenübergange für abnehmende ϑ:

$$lim \left(\frac{NM'}{\frac{1}{2}\vartheta^2}\right) = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

also

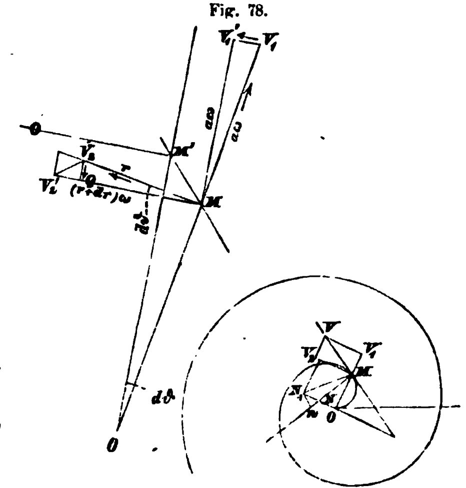
$$lim \left(\frac{NM'}{\frac{1}{2}\vartheta^2}\right) = \varphi.$$

Die Cosinusse der Neigung von NM' gegen die Axen sind proportional den Projectionen von NM' auf diese Axen, also in der Grenze proportional den Grössen $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ d. h. den Componenten der Beschleunigung φ parallel diesen Axen. Daher hat NM' in der Grenzlage die Richtung der Beschleunigung.

§. 14. Von der Normalbeschleunigung kann man eine interessante Anwendung auf die Bestimmung des Krümmungshalbmessers der Curven machen. Man betrachtet zu diesem Ende die Curve als von einem beweglichen Punkte beschrieben, dessen Bewegung man öfter selbst in mehrere andere Bewegungen auflöst, bestimmt die Geschwindigkeit und Beschleunigung desselben, sowie die Normalcomponente der letztern. Das Quadrat der Geschwindigkeit durch diese Normalcomponente dividirt, gibt den Krümmungshalbmesser. Vgl. über diese Methode: Bresse, *Mémoire sur un théorème nouveau concernant les mouvements plans et sur l'application de la cinématique à la détermination des rayons de courbure. Journ. de l'école polytechn. T. XX. p.* 104. (*a.* 1853.). — Resal, *traité de cinématique pure, p.* 55. Wir wollen diese Methode an einigen Beispielen erläutern.

1. **Krümmungshalbmesser der archimedischen Spirale.** Nach Cap. II. §. 7. Nr. 1. im II. Theile zerfällt die Geschwindigkeit v des beschreibenden Punktes in zwei Componenten, $v_1 = a\omega$ längs des Radiusvectors r und $v_2 = r\omega$ senkrecht zu ihm, wenn ω die constante Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ des Radiusvectors und a die Polarsubnormale der Curve bedeutet, deren Gleichung $r = a\vartheta$ ist. Wir bestimmen nun zunächst die jeder dieser Componenten entprechende Beschleunigung. Die constante Componente $v_1 = MV_1$ (Fig. 78.) ändert blos ihre Richtung, daher ist ihre Elementarbeschleunigung $V_1V_1' = v_1 d\vartheta$

Fig. 78.



$= a\omega\, d\vartheta = a\omega^2 dt$ und mithin ihre Beschleunigung $\varphi_1 = a\omega^2$ und deren Richtung

senkrecht zum Radiusvector, dem Sinne nach übereinstimmend mit ω. Die Componente v_2 ist nach Grösse und Richtung veränderlich; daher besitzt ihre Elementarbeschleunigung V_2V_2' zwei Componenten, $V_2Q = r\omega\,d\vartheta = r\omega^2 dt$ parallel dem Radiusvector und nach dem Pole hin gerichtet und $QV_2' = dr \cdot \omega = a d\vartheta \cdot \omega = a\omega^2 dt$ senkrecht zum Radiusvector im Sinne von ω. Daher hat auch die Beschleunigung φ_2 von v_2 zwei Componenten, nämlich $r\omega^2$ parallel dem Radiusvector und $a\omega^2$ senkrecht zu ihm. Die letztere Componente verbindet sich mit φ_1 und zerfällt daher die Gesammtbeschleunigung φ des beweglichen Punktes in die Componenten $r\omega^2$ längs des Radiusvectors und $2a\omega^2$ senkrecht zu ihm, deren Verhältniss demnach gleich $r:2a$ ist. Construiren wir daher über $MO = r$ und $ON_1 = 2 \cdot ON = 2a$ ein Parallelogramm und ziehen dessen Diagonale MN_1, so ist $\varphi = MN_1 \cdot \omega^2$ und wenn wir die Diagonale auf die Richtung der Normalen MN projiciren, so erhalten wir die Normalbeschleunigung φ_n aus der Projection Mn durch die Gleichung $\varphi_n = Mn \cdot \omega^2$. Nun ist aber allgemein, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser bedeutet, $\varrho\varphi_n = v^2$ und da aus der a. a. O. gegebenen Construction $v = MV \cdot \omega^2$ folgt, so erhält man für ϱ die Gleichung

$$\varrho \cdot \overline{Mn} = \overline{MV}^2.$$

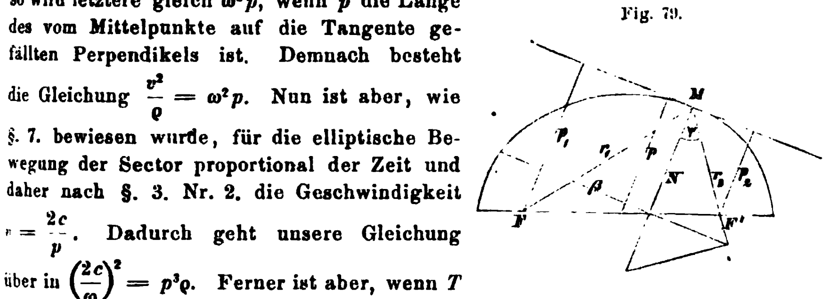
Um ϱ zu finden hat man also blos über Mn als Durchmesser einen Kreis zu beschreiben, in diesen MV als Sehne zu übertragen und deren Projection auf den Durchmesser zu nehmen.

2. Nach derselben Methode kann man den Krümmungshalbmesser jeder Polarcurve $r = f(\vartheta)$ bestimmen. Denn die Componente $v_1 = \frac{dr}{dt}$ der Geschwindigkeit längs des Radiusvectors besitzt eine Beschleunigung, welche im Allgemeinen in zwei Componenten zerfällt, nämlich eine gleichfalls längs des Radiusvectors gleich $\frac{dv_1}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$ und eine andere senkrecht zu ihm gleich $v_1 \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}$. Die Componente $v_2 = r\frac{d\vartheta}{dt}$ der Geschwindigkeit aber, welche senkrecht zum Radiusvector ist, hat eine Beschleunigung, von deren Componenten die eine, längs des Radiusvectors gerichtet, den Werth $r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$, die andere, senkrecht zum Radiusvector, aber den Werth $\frac{d\left(r\frac{d\vartheta}{dt}\right)}{dt}$ besitzt. Die beiden Bestandtheile der Beschleunigung, welche in die Richtung des Radiusvectors fallen, haben entgegengesetzten Sinn, $\frac{d^2r}{dt^2}$ abgewandt, $r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ dem Pole zugewandt; sie liefern daher als Gesammtbeschleunigungscomponente längs des Radiusvectors die Differenz $\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$. Die beiden Beschleunigungsbestandtheile, deren Richtung senkrecht zum Radiusvector ist, nämlich $\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}$ und $\frac{d\left(r\frac{d\vartheta}{dt}\right)}{dt}$ haben gleichen Sinn und liefern als Gesammtcomponente der Beschleunigung senkrecht zum Radiusvector die Summe $2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)$. Indem man nun beide Beschleunigungscomponenten, die in der Richtung des Radiusvectors fallende, sowie die zu ihm senkrechte auf die Normale der Curve projicirt, erhält man wie oben φ_n, welches nebst dem nach Cap. II. §. 7. Nr. 2. zu bestimmenden Werthe von v in die Gleichung $\varrho\varphi_n = v^2$ einzuführen ist, um den Krümmungshalbmesser ϱ zu finden.

3. **Krümmungshalbmesser der Ellipse.** Betrachten wir die Ellipse

deren Halbaxen a, b seien, als die Projection eines Kreises vom Radius a, wie §. 7. dieses Capitels und denken sie von einem Punkte beschrieben, dessen Bewegung die Projection der gleichförmigen Kreisbewegung von der Winkelgeschwindigkeit ω ist, so ist die Beschleunigung der elliptischen Bewegung proportional dem Radiusvector r, welcher vom Mittelpunkt der Ellipse nach dem beschreibenden Punkte gezogen werden kann und nach dem Mittelpunkte hin gerichtet. Sie ist demnach $\varphi = \omega^2 r$. Zerlegen wir sie in ihre Tangential- und Normalcomponente (Fig. 79.), so wird letztere gleich $\omega^2 p$, wenn p die Länge des vom Mittelpunkte auf die Tangente gefällten Perpendikels ist. Demnach besteht die Gleichung $\frac{v^2}{\varrho} = \omega^2 p$. Nun ist aber, wie §. 7. bewiesen wurde, für die elliptische Bewegung der Sector proportional der Zeit und daher nach §. 3. Nr. 2. die Geschwindigkeit $v = \frac{2c}{p}$. Dadurch geht unsere Gleichung über in $\left(\frac{2c}{\omega}\right)^2 = p^3 \varrho$. Ferner ist aber, wenn T die der Kreisbewegung und der elliptischen Bewegung gemeinschaftliche Umlaufszeit bezeichnet, $\omega T = 2\pi$ und $\pi ab = cT$, aus welchen Gleichungen durch Elimination von T folgt: $\frac{2c}{\omega} = ab$. Daher wird der Krümmungshalbmesser

Fig. 79.



$$\varrho = \frac{a^2 b^2}{p^3}.$$

Man kann diesem Ausdrucke eine für die Construction bequemere Gestalt geben, indem man den zum Radiusvector r conjugirten Semidiameter β einführt. Da nämlich das Parallelogramm conjugirter Semidiameter constant ist, so ist der Inhalt des aus r und β gebildeten Parallelogramms, nämlich $p\beta = ab$. Hiermit wird

$$\varrho = \frac{\beta^2}{p},$$

d. h. der Krümmungshalbmesser der Ellipse ist die dritte Proportionale zum Abstande p der Tangente des Curvenpunktes vom Mittelpunkte und dem zur Tangente parallelen Semidiameter β.

Mit Hülfe bekannter Sätze über die Radienvectoren r_1, r_2, welche von den Brennpunkten nach dem Curvenpunkte gezogen werden können, die Normalstrecke N, welche zwischen dem Curvenpunkte und der grossen Axe enthalten ist, und die Perpendikel p_1, p_2, welche von den Brennpunkten auf die Tangente gefällt werden können, kann man diesem Ausdrucke noch weitere Formen geben. Zieht man z. B. die Sätze $r_1, r_2 = \beta^2$, $pN = b^2 = p_1 p_2$ heran, so nimmt ϱ die Form an

$$\varrho = \frac{r_1 r_2}{p_1 p_2} \cdot N.$$

Nun sind aber $\frac{p_1}{r_1}$ und $\frac{p_2}{r_2}$ die Cosinusse der beiden gleichen Winkel ψ, welche die Normale mit den Radienvectoren bildet. Daher wird

$$\varrho = \frac{N}{\cos^2 \psi}.$$

Hiernach wird die Normalstrecke N durch zweimalige Projection des Krümmungshalbmessers $\varrho = MC$ auf den Radiusvector und zurück auf die Normale erhalten; dies liefert eine sehr einfache Construction des Krümmungshalbmessers, welche, da keine Mittelpunktselemente erforderlich sind, auf alle drei Kegelschnitte gleichmässige Anwendung findet.

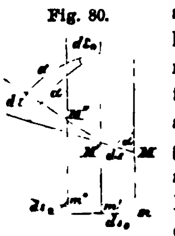
4. **Krümmungshalbmesser der Cycloide.** Zerlegen wir, wie Cap. II. §. 7. Nr. 5. im II. Theile die Geschwindigkeit des beschreibenden Punktes in die beiden gleichen Componenten, die eine parallel der Basis der Cycloide, die andere tangentiell an den rollenden Kreis, und nehmen an, der Kreis rolle mit constanter Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$, so hat die erstere Componente gar keine Beschleunigung, weil sie weder ihre Grösse noch ihre Richtung ändert, die zweite aber besitzt, als die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Kreisbewegung eine Beschleunigung $a\omega^2$ nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtet, wenn a dessen Radius bezeichnet. Diese Grösse stellt daher die Gesammtbeschleunigung der Bewegung dar und wenn wir sie auf die Normale MC projiciren, so ergibt sich für die Normalbeschleunigung: $\frac{1}{2}\overline{MC} \cdot \omega^2$. Da ferner die Geschwindigkeit $v = \overline{MC} \cdot \omega$ ist, so besteht die Gleichung $\frac{\overline{MC}^2 \cdot \omega^2}{\varrho} = \frac{1}{2}\overline{MC} \cdot \omega^2$, aus welcher folgt, dass der Krümmungshalbmesser $\varrho = 2 \cdot MC$, d. h. gleich der doppelten Normalen ist.

5. **Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie eines Cylinders.** Die Schraubenlinie eines beliebigen Cylinders ist die Curve, deren Tangenten constanten Neigungswinkel α mit den Erzeugungslinien bilden. Ein Punkt beschreibe diese Curve mit constanter Geschwindigkeit a; wir zerlegen dieselbe in zwei Componenten, eine eine, $a \cos\alpha$ längs der Erzeugungslinie und eine andre, $a \sin\alpha$ senkrecht zu ihr. Beide sind constant und da die erstere von ihnen auch ihre Richtung nicht ändert, so ist die Gesammtbeschleunigung der Bewegung die Beschleunigung der zweiten Componente. Diese ist aber die Beschleunigung für die Bewegung eines Punktes auf dem zu der Erzeugungslinie senkrechten Cylinderschnitt und da sie blos ihre Richtung, nicht aber ihre Grösse ändert, so ist sie normal zu diesem Schnitt und hat den Werth $\frac{a^2 \sin^2\alpha}{\varrho_0}$, wenn ϱ_0 den Krümmungshalbmesser dieses Schnittes darstellt. Da die Geschwindigkeit für die Bewegung auf der Schraubenlinie constant ist, so ist diese Grösse zugleich die Normalbeschleunigung dieser Bewegung, also gleich $\frac{a^2}{\varrho}$, wenn ϱ der Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie ist. Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke ergibt sich daher

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sin^2\alpha}$$

d. h. **der Krümmungshalbmesser jeder Cylinderschraubenlinie wird erhalten, wenn man den Krümmungshalbmesser des zu den Erzeugungslinien senkrechten Cylinderschnitts durch das Quadrat des Sinus des constanten Winkels dividirt, welchen die Tangente der Curve mit der Erzeugungslinie des Cylinders bildet.** Es ist übrigens sehr leicht, den Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie unabhängig von der Theorie der Beschleunigung zu bestimmen. Sind nämlich M, M', M'' und m, m', m'' (Fig. 80.) drei aufeinander folgende Punkte der Schraubenlinie und des erwähnten Cylinderschnitts, welche paarweise auf denselben Erzeugungslinien liegen, so besteht zwischen den Bogenelementen $MM' = ds$ $mm_1 = ds_0$ die Beziehung $ds \cdot \sin\alpha = ds_0$. Aus dem sphärischen Dreieck aber, welches die Tangenten in M und M' mit der durch M' gehenden Erzeugungslinie an der Ecke M' bilden, erhält man den Contingenzwinkel $d\varepsilon$ der Schraubenlinie, nämlich: $d\varepsilon = d\varepsilon_0 \sin\alpha$,

Fig. 80.



indem man bedenkt, dass der Winkel derselben, welcher $d\varepsilon$ gegenüberliegt, der Winkel zweier aufeinanderfolgender Tangentenebenen des Cylinders und folglich auch der Contingenzwinkel $d\varepsilon_0$ des Cylinderschnitts ist und zwei Seiten des Dreiecks gleich α sind. Beide Gleichungen geben combinirt

$$\frac{ds}{d\varepsilon} \sin^2 \alpha = \frac{ds_0}{d\varepsilon_0}$$

oder

$$\varrho \sin^2 \alpha = \varrho_0 ,$$

wie oben.

§. 15. Wir haben bereits oben bemerkt, dass die Tangentialbeschleunigung die Bewegung des Punktes in der Bahn allein bestimmt. Es war nämlich für sie

$$\frac{dv}{dt} = \varphi_t .$$

Ist nun φ_t als Function der Zeit bekannt, so folgt hieraus, indem man zwischen den Grenzen t und t_0 integrirt, denen die Werthe v_0 und v der Geschwindigkeit entsprechen mögen:

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} \varphi_t \cdot dt$$

d. h.

Die Aenderung, welche die Geschwindigkeit während irgend eines Zeitintervalles erleidet, ist gleich dem Integrale der Tangentialbeschleunigung, ausgedehnt über dasselbe Zeitintervall, d. h. gleich der Summe aller tangentiellen Elementarbeschleunigungen in dieser Zeit.

Ist die Bewegung geradlinig, so tritt φ an die Stelle von φ_t, da in diesem Falle $\varphi_n = 0$ ist.

§. 16. Combinirt man die Gleichungen $\frac{dv}{dt} = \varphi_t$ und $\frac{ds}{dt} = v$, indem man dt eliminirt, so kommt $v\frac{dv}{ds} = \varphi_t = \varphi \cdot \cos\alpha$, oder

$$\frac{d \cdot \frac{1}{2} v^2}{ds} = \varphi \cos \alpha ,$$

oder auch

$$d \cdot \tfrac{1}{2} v^2 = \varphi \cos \alpha \cdot ds$$

und wenn man zwischen den Grenzen s_0, s integrirt, welchen die Werthe v_0, v der Geschwindigkeit entsprechen:

$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = \int_{s_0}^{s} \varphi \cos \alpha \; ds .$$

Das Produkt aus der Tangentialbeschleunigung $\varphi \cos \alpha$ und dem Wege ds des Punktes im Zeitelemente, welches Produkt das Element des Integrales auf der rechten Seite dieser Gleichung bildet, wollen wir der Analogie mit späteren Begriffen wegen, die wir in der Theorie

der Kräfte finden werden, die *Elementararbeit der Beschleunigung* und das Integral selbst als die Summe dieser Elementararbeiten die *totale Arbeit* oder kurz die *Arbeit der Beschleunigung* längs des Weges $s - s_0$ nennen. Demnach enthält die Gleichung den Satz:

Die Aenderung, welche das halbe Quadrat der Geschwindigkeit beim Uebergang des Punktes aus einer ersten in eine zweite Lage erleidet, ist gleich der Arbeit der Beschleunigung längs des durchlaufenen Weges.

Man kann die Definition der Arbeit der Beschleunigung φ auch etwas anders fassen. Da sie nämlich als das Produkt $\varphi \cos \alpha \, ds$ erscheint, so kann der Factor $\cos \alpha$ zu ds gezogen werden und kann man die Projection $ds \cos \alpha$ des Elementarweges auf die Richtung der Beschleunigung in die Definition aufnehmen und sagen: „*Die Elementararbeit der Beschleunigung ist das Produkt aus der Beschleunigung und der Projection des Elementarweges auf die Richtung derselben.*“ Man pflegt sogar den Begriff der Elementararbeit noch dahin zu erweitern, dass an die Stelle des im Zeitelemente wirklich durchlaufenen Elementes ds eine andere unendlich kleine Linie irgend welcher Richtung, um welche der bewegliche Punkt ganz abgesehen von den wirklichen Umständen seiner Bewegung verschoben gedacht werden kann, tritt. Eine solche gedachte Verschiebung nennt man eine *virtuelle Verschiebung* und die ihr entsprechende Elementararbeit *virtuelle Elementararbeit*. Man hat darunter demnach zu verstehen das Produkt aus der Beschleunigung und der Projection der virtuellen Verschiebung auf ihre Richtung oder, was nach der eben gegebenen Erläuterung dasselbe ist, das Produkt aus der virtuellen Verschiebung und der Projection der Beschleunigung auf ihre Richtung. Die Bezeichnung „virtuell“ (von *virtus*, die Fähigkeit, Möglichkeit) soll ausdrücken, dass diese Verschiebungen nur als möglich gedacht werden, nicht wirklich erfolgende sind. Statt „virtuelle Verschiebung“ ist vielfach der weniger passende Ausdruck „*virtuelle Geschwindigkeit*“ üblich.

Ist Fig. 81. MN eine wirkliche oder virtuelle Verschiebung des Punktes M in dem Sinne MN und α der Winkel, welchen sie mit der Richtung der Beschleunigung φ bildet, so ist die Elementararbeit: $\varphi \cdot \overline{MN} \cdot \cos\alpha = \varphi \cdot MQ = MQ' \cdot MN$. Dieselbe ist positiv, Null oder negativ, je nachdem $\alpha < \frac{1}{2}\pi$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ oder $\alpha > \frac{1}{2}\pi$ ist. Im ersten Falle haben die Verschiebung und die Componente $\overline{MQ'}$ der Beschleu-

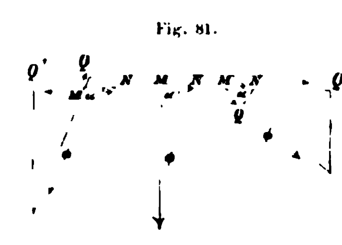


Fig. 81.

nigung gleichen Sinn und erleidet der Punkt eine Beschleunigung im Sinne seiner Verschiebung, im letzten Falle haben beide entgegengesetzten Sinn und wird M im entgegengesetzten Sinn der Verschiebung beschleunigt; oder mit Zugrundelegung der Ausdrucksform $\varphi \cdot \overline{MQ}$: im ersten Falle fällt die Projection des Wegelementes MN auf die Richtung der Beschleunigung im Sinne dieser aus, im letzteren im entgegengesetzten.

Bei der wirklichen Bewegung nennt man die Elementararbeit, wenn sie positiv ist, bewegende Arbeit, wenn sie negativ ist, widerstehende Arbeit; im ersten Falle wird der Punkt in seiner Bahn beschleunigt, d. h. wächst seine Geschwindigkeit, im zweiten Falle wird er verzögert, nimmt die Geschwindigkeit ab.

Man kann sich diese Beziehungen an dem Beispiele der jährlichen Bewegung der Erde verdeutlichen. Abgesehen von der Axendrehung und den Dimensionen der Erde beschreibt der Mittelpunkt derselben im Laufe des Jahres eine Ellipse, von deren Brennpunkten der eine der Sonnenmittelpunkt ist. Die Bewegung in dieser Ellipse befolgt die Gesetze der in §. 3. erläuterten elliptischen Bewegung und ist die Beschleunigung fortwährend nach jenem Brennpunkte gerichtet. In den Endpunkten der grossen Axe (Perihelium und Aphelium) ist die Richtung der Beschleunigung senkrecht gegen die Richtung der Tangente, in welche der Elementarweg fällt und während die Erde vom Perihelium zum Aphelium geht, ist der Winkel beider Richtungen stumpf, während sie vom Aphelium zum Perihelium zurückkehrt, ist er spitz. Im Perihelium und Aphelium ist die Elementararbeit der Beschleunigung Null, längs der Bahn vom Perihelium zum Aphelium ist sie negativ und nimmt folglich die Geschwindigkeit ab, längs der Bahn vom Aphelium zum Perihelium ist sie positiv und wächst also die Geschwindigkeit. Dies stimmt überein mit dem Satze, nach welchem die Geschwindigkeit umgekehrt proportional ihrem Abstande von dem Brennpunkte ist, nach welchem die Beschleunigung gerichtet ist.

§. 17. Ist $\varphi \cos \alpha$ constant, so ist die totale Arbeit der Beschleunigung längs des Weges $s - s_0$ gleich $\int_{s_0}^{s} \varphi \cos \alpha \, ds = (s - s_0)\, \varphi \cos \alpha$, nämlich gleich dem Produkte aus der constanten tangentiellen Beschleunigungscomponente und dem Wege des Punktes.

Ist die Beschleunigung ihrer Grösse nach constant, so ist die Arbeit $\int_{s_0}^{s} \varphi \cos \alpha \, ds = \varphi \int_{s_0}^{s} \cos \alpha \cdot ds$ d. h. gleich dem Produkte aus der constanten Beschleunigung und der Projection des Weges auf die Richtung derselben. Es ist nämlich $\cos \alpha \cdot ds$ die Projection des Bogenelementes auf diese Richtung und das Integral die Summe aller solcher Projectionen.

Indem man $\varphi \cos\alpha$ als die Ordinate einer Curve für s als Abscisse construirt, kann man die totale Arbeit als den über der Basis $s - s_0$ stehenden Flächenraum dieser Curve erhalten, sei es durch directe Integration oder durch die mechanische Quadratur. Den mittleren Werth $\overset{*}{\varphi}_t$ der Beschleunigungscomponente $\varphi \cos\alpha$ erhält man den Betrachtungen in Thl. II. Cap. III. §. 3. zufolge durch die Gleichung:

$$(s - s_0) \cdot \overset{*}{\varphi}_t = \int_{s_0}^{s} \varphi \cos\alpha \, ds.$$

§. 18. Besitzt ein Punkt mehrere Beschleunigungen, so ist die Resultante derselben die Schlusslinie eines Polygonalzuges der übrigen. Projicirt man daher dies Polygon auf die Richtung irgend einer wirklichen oder virtuellen Verschiebung, so ist die Projection der Resultanten gleich der Summe der Projectionen der Componenten und wenn man die Gleichung, welche dies ausdrückt, beiderseits mit der Verschiebung multiplicirt, so ergibt sich der Satz:

Die Elementararbeit der Resultanten mehrerer Beschleunigung längs irgend eines wirklichen oder virtuellen Elementarweges ist gleich der Summe der Elementararbeiten ihrer Componenten längs desselben. Zerlegt man z. B. die Beschleunigung φ eines Punktes $(x\,y\,z)$ in drei Componenten φ_x, φ_y, φ_z parallel dreien rechtwinkligen Coordinatenaxen, so sind die Projectionen des Bahnelementes ds auf die Richtungen der Componenten dx, dy, dz und folglich sind $\varphi_x\,dx$, $\varphi_y\,dy$, $\varphi_z\,dz$ die Elementararbeiten der Componenten; daher ist die Elementararbeit der Beschleunigung φ gleich $\varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + \varphi_z\,dz$.

Als spezieller Fall des Satzes ist hervorzuheben der folgende:

Ist die Resultante mehrerer Beschleunigungen Null, so ist die Summe der Elementararbeiten derselben längs jedes beliebigen Elementarweges gleich Null und ist diese Summe für jeden beliebigen Elementarweg Null, so ist auch die Resultante Null.

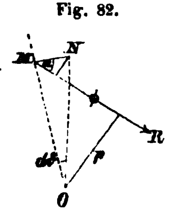
Ist die Elementarbewegung eines Punktes aus anderen zusammengesetzt, so ist sein Elementarweg die Schlusslinie eines unendlich kleinen Polygons, gebildet aus den Elementarwegen, welche der Punkt vermöge der einzelnen Bewegungen durchlaufen würde. Projicirt man dies Polygon auf die Richtung der Beschleunigung, so ergibt sich, wenn man die Gleichung, welche ausdrückt, dass die Projection der Resultanten gleich der Summe der Projectionen der Componenten ist, mit der Beschleunigung multiplicirt:

Wenn die Bewegung eines Punktes aus mehreren anderen Bewegungen zusammengesetzt ist, so ist die Elementararbeit der Beschleunigung längs des Elementarwegs der

Bewegung gleich der Summe ihrer Elementararbeiten längs den Elementarwegen der einzelnen Bewegungen, aus denen sie resultirt.

§. 19. Die Arbeit der Beschleunigung steht mit einem anderen Begriffe in sehr naher Beziehung, den wir jetzt erläutern wollen, nämlich mit dem Momente der Beschleunigung in Bezug auf einen Punkt. Ist nämlich (Fig. 82.) $MR = \varphi$ eine Beschleunigung des Punktes M und O irgend ein Punkt des Raumes, so versteht man unter dem Momente derselben in Bezug auf diesen Punkt das Produkt φp aus der Beschleunigung und dem Perpendikel p, welches von O auf ihre Richtung gefällt werden kann. Errichtet man auf der Ebene, welche die Beschleunigung und den Punkt O enthält, ein Perpendikel, aber nach der Seite der Ebene gerichtet, von welcher aus gesehen die Figur mit der Uhrzeigerbewegung harmonirt, so heisst dasselbe die Axe des Momentes; auf ihr kann analog mit früherem Gebrauche das Moment als Länge aufgetragen werden nebst der Bezeichnung des Sinnes durch eine angefügte Pfeilspitze. Rückt der Punkt O auf die Richtung der Beschleunigung selbst, so wird das Moment Null, tritt er auf die andere Seite derselben über, so wechselt das Moment den Sinn und damit das Zeichen, kehrt die Beschleunigung den Sinn um, so tritt gleichfalls ein Wechsel des Sinnes des Momentes ein, tritt beides zugleich ein, so behält das Moment den ursprünglichen Sinn bei.

Fig. 82.



Es sei nun MN irgend eine unendlichkleine Verschiebung des Punktes M, welche mit der Beschleunigung φ den Winkel α bildet und also $\varphi \cdot \overline{MN} \cdot \cos\alpha$ die Elementararbeit der Beschleunigung. Ziehen wir nun durch M in der Ebene des Winkels α eine Gerade senkrecht auf die Richtung der Verschiebung MN und nehmen den Punkt O auf dieser Geraden irgendwo an, so kann MN als ein aus O mit dem Radius MO beschriebener unendlich kleiner Kreisbogen angesehen werden und wenn der unendlichkleine Winkel MON, unter welchem MN von O aus gesehen, erscheint, mit $d\vartheta$ bezeichnet wird, so wird $MN = MO \cdot d\vartheta$ und damit die Elementararbeit gleich $\varphi \cdot \overline{MO} \cos\alpha \cdot d\vartheta$. Je nachdem nun O mit MN auf entgegengesetzter oder auf derselben Seite von φ liegt, bildet MO mit φ einen Winkel $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ oder $\frac{1}{2}\pi + \alpha$ und stellt demnach $\overline{MO} \cos\alpha$ das Perpendikel p, welches von O auf φ gefällt werden kann, mit positivem oder negativem Zeichen dar. Daher wird die Elementararbeit $\varphi p d\vartheta$ im einen und $-\varphi p d\vartheta$ im andern Ealle. Im letzteren Falle hat aber das Moment φp der Beschleunigung auch das entgegengesetzte Zeichen, so dass also mit Rücksicht auf die Vorzeichen der Momente, welche mit dem Sinne der Axe derselben über-

einkommend gewählt werden sollen, in allen Fällen $\varphi p d\vartheta$ die Elementararbeit darstellt. Man kann daher den Satz aufstellen:

Die Elementararbeit der Beschleunigung eines Punktes, entsprechend einer unendlichkleinen Verschiebung desselben ist gleich dem Momente der Beschleunigung in Bezug auf irgend einen Punkt der zur Verschiebung senkrechten, durch den beweglichen Punkt in der Ebene des Winkels zwischen Beschleunigung und Verschiebung gezogenen Geraden, multiplicirt mit dem unendlichkleinen Winkel, unter welchem, von jenem Punkte aus gesehen, die Verschiebung erscheint. Geometrisch bedeutet das Moment φp der Beschleunigung den doppelten Inhalt des Dreiecks, welches die Beschleunigung φ zur Basis und den Perpendikel p zur Höhe hat.

Ueber die Momente mehrerer Beschleunigungen beweist man leicht folgenden Satz:

Das Moment der Resultanten mehrerer Beschleunigungen in Bezug auf irgend einen Punkt ist gleich der Summe der Momente der Componenten in Bezug auf denselben Punkt, vorausgesetzt, dass die Beschleunigungen sämmtlich mit dem Punkte in eine Ebene fallen.

Verbindet man nämlich den Punkt, in Bezug auf welchen die Momente genommen werden, mit dem beweglichen Punkte durch eine Gerade und zieht senkrecht zu ihr eine unendlichkleine Verschiebung des beweglichen Punktes, so ist in Bezug auf deren Richtung die Summe der Projectionen der Componenten gleich der Projection der Resultanten und wenn man die Gleichung, welche dies ausdrückt, beiderseits mit der Verschiebung multiplicirt, die Summe der Elementararbeiten der Componenten gleich der Elementararbeit der Resultanten. Diese Elementararbeiten stelle man nun aber sämmtlich dar, indem man die Projection der Verschiebung auf die Richtungen der Beschleunigungen mit diesen multiplicirt. Diese Projectionen, welche Produkte aus der Verschiebung und den Cosinussen ihrer Richtung mit den Beschleunigungen sind, gehen aber über Produkte aus den Perpendikeln, von dem Punkte, in Bezug auf welchen die Momente genommen werden, auf die Beschleunigungen gefällt, und dem unendlichkleinen Winkel, unter welchem von ihm aus die Verschiebung erscheint. Da dieser Winkel als gemeinschaftlicher Factor aus der Gleichung herausfällt, so folgt der Satz. Als Corollar ergibt sich noch:

Die Summe der Momente der Componenten in Bezug auf irgend einen Punkt der Resultanten ist Null.

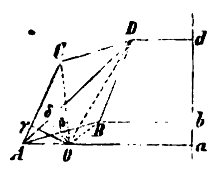
§. 20. Die vorstehenden Sätze sind nicht spezifische Sätze über Beschleunigungen, sie werden nur an diesen demonstrirt des Zusammen-

hanges mit den früheren Lehren wegen. Sie sind rein geometrische Sätze für Streckenbeziehungen, denen die Zusammensetzung mit Hülfe des Parallelogramms zu Grunde liegt. Sie gelten ebenso für Geschwindigkeiten, für Kräfte u. s. w.

Man würde ohne Mühe in die Mechanik einen besondern Abschnitt einfügen können, welcher alle diese Lehren zu einer rein geometrischen Theorie vereinigte und selbständig ausbildete. Derselbe würde die Grundsätze der geometrischen Addition, Subtraction, des geometrischen Differentiirens und Integrirens, die Theorie der Momente und den Zusammenhang aller dieser Lehren mit der Geometrie des Imaginären entwickeln. Für den Unterricht scheint es heute noch zweckmässiger zu sein, diese Trennung nur anzudeuten, ohne sie auszuführen. Einen rein geometrischen Beweis des vorigen Satzes kann man folgendermassen führen.

Es sei (Fig. 83.) AD die Resultante von AB und AC, O der Punkt, in Bezug auf welchen die Momente dieser drei Linien zu nehmen sind und zeige die Stellung der Buchstaben, welche die Länge der Linien ausdrücken, z. B. AB zugleich den Sinn (von A nach B) an, in welchem die Linien gedacht werden sollen. Fällt man von O die drei Perpendikel $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ auf AB, AC, AD, so sind die Momente: $AB \cdot O\beta$, $AC \cdot O\gamma$, $AD \cdot O\delta$ und drücken die doppelten Inhalte der Dreiecke OAB, OAC, OAD aus. Dabei ist auf den Sinn der Momente zu achten und in Folge dessen das Zeichen eines Dreieckes umzukehren, sobald die Folge der Ecken sich umkehrt. Projicirt man nun das Dreieck ABD auf eine zu AO senkrechte Axe, so besteht zwischen den Projectionen der Seiten mit Rücksicht auf Sinn und Vorzeichen der Linien folgende für alle Lagen der Projectionen der Ecken gültige Relation:

Fig. 83.



$$ab + bd + da = 0$$

und wenn man sie mit OA multiplicirt, so geht sie über in:

$$\triangle OAB + \triangle OAC + \triangle ODA = 0 \text{ oder } \triangle OAB + \triangle OAC - \triangle OAD = 0$$

weil ab, bd, da die Höhen dieser drei Dreiecke darstellen. Die doppelten Inhalte dieser Dreiecke sind aber auch: $AB \cdot O\beta$, $AC \cdot O\gamma$, $AD \cdot O\delta$ und daher wird

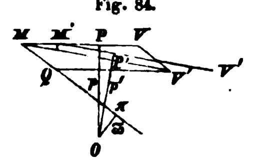
$$AB \cdot O\beta + AC \cdot O\gamma = AD \cdot O\delta.$$

Die Ausdehnung des Satzes auf die Resultante von mehr als zwei Linien folgt von selbst.

§. 21. Wir wenden jetzt diesen Satz auf die Geschwindigkeit v eines beweglichen Punktes M zur Zeit t, die Geschwindigkeit v' desselben Punktes zur Zeit $t + dt$ und seine Elementarbeschleunigung φdt

an, von welchen drei Grössen die zweite die Resultante der ersten und dritten ist. Construiren wir das betreffende Parallelogramm im Punkte M (Fig. 84.), so dass also $MV = v$, $MV' = v'$, $VV' = MQ = \varphi dt$ wird, ziehen aber in M', der Lage des beweglichen Punktes zur Zeit $t + dt$, die Tangente, und tragen auf ihr $M'V' = v'$ auf. Von einem beliebigen Punkte O in der Schmiegungsebene der Bahn, welche zugleich die Ebene des Parallelogramms ist, fällen wir auf MV, $M'V'$ und MQ die Perpendikel $OP = p$, $OP' = p'$, $O\Pi = \varpi$. Das Perpendikel, welches von O auf die Diagonale MV' gefällt werden kann, weicht nun von p' nur um ein Unendlichkleines zweiter Ordnung ab, nämlich um den Abstand $ds\,d\varepsilon$ des Punktes M' von der Diagonale (wo $MM' = ds$ und der Contingenzwinkel $M'MV' = d\varepsilon$ gesetzt ist). Dem vorigen Satze zufolge ist daher $v'(p' \pm ds\,d\varepsilon) = vp + \varphi\varpi dt$ oder $v'p' - vp = \varphi\varpi dt \mp ds\,d\varepsilon$, oder weil $v'p' - vp = d(vp)$ ist und $ds\,d\varepsilon$ verschwindet

Fig. 84.



$$\frac{d(vp)}{dt} = \varphi\varpi, \qquad d(vp) = \varphi\varpi\,dt,$$

d. h. **Das Moment der Beschleunigung in Bezug auf irgend einen Punkt in der Schmiegungsebene der Bahn ist die Derivirte und das Moment der Elementarbeschleunigung ist das Differential des Momentes der Geschwindigkeit für denselben Punkt, nach der Zeit genommen.**

Ist die Bahn eine ebene Curve, so liegt der Punkt O in allen Schmiegungsebenen, in diesem Falle kann die Gleichung integrirt werden und erhält man

$$vp - v_0 p_0 = \int_{t_0}^{t} \varphi\varpi\,dt,$$

d. h.

Bei jeder ebenen Bewegung ist die Aenderung des Momentes der Geschwindigkeit in Bezug auf irgend einen Punkt der Ebene der Bahn, welche dieselbe innerhalb des Zeitintervalles $t - t_0$ erleidet, gleich dem Integrale des Momentes der Elementarbeschleunigung ausgedehnt über dasselbe Zeitintervall.

Geht die Beschleunigung insbesondere fortwährend durch ein und denselben Punkt, so ist, wenn man diesen als Punkt O betrachtet, $\varpi = 0$ und folglich

$$vp = v_0 p_0, \qquad v = \frac{v_0 p_0}{p},$$

d. h.

Bei jeder ebenen Bewegung, bei welcher die Beschleu-

nigung fortwährend nach einem festen Punkte gerichtet ist, bleibt das Moment der Geschwindigkeit in Bezug auf diesen Punkt constant und ist mithin die Geschwindigkeit umgekehrt proportional dem Abstande der Tangente von diesem Punkte. Ein Beispiel hiezu bot die elliptische Bewegung, welche wir §. 3. behandelten, dar.

Berührt die Richtung der Beschleunigung fortwährend einen Kreis, so ist für dessen Mittelpunkt als Mittelpunkt der Momente ϖ constant und geht die obige Gleichung über in $vp - v_0 p_0 = \varpi \int_{t_0}^{t} \varphi\, dt$,

§. 22. Das Moment vp der Geschwindigkeit lässt sich noch etwas anders deuten. Setzt man nämlich für v seinen Werth $\frac{ds}{dt}$, so wird dasselbe $vp = \frac{p\,ds}{dt}$. Es ist aber $p\,ds$ der doppelte Inhalt des unendlich schmalen Sectors OMM' (Fig. 85.), welchen der Radiusvector OM im Zeitelemente durchläuft und wenn man denselben mit $2\,dS$ bezeichnet, wo S den endlichen, in der Zeit $t - t_0$ durchlaufenen Sector bezeichnen soll, so erhält man nach §. 21.

Fig. 85.

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = \tfrac{1}{2} \varphi \varpi$$

und hieraus durch Integration

$$\frac{dS}{dt} - \left(\frac{dS}{dt}\right)_{t_0} = \tfrac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \varphi \varpi\, dt.$$

Analog dem Begriffe der Geschwindigkeit eines Punktes, als dem Quotienten aus dem unendlichkleinen, dem Zeitelemente entsprechenden Wege, dividirt durch das Zeitelement, haben wir bereits Cap. IV. §. 13. im II. Theile den Quotienten aus dem während des Zeitelementes von dem Radiusvector des beweglichen Punktes durchlaufenen Sector und dem Zeitelemente die Sectorengeschwindigkeit des Radiusvectors genannt. Bezeichnen wir sie wie dort mit η, nämlich

$$\eta = \frac{dS}{dt},$$

so wird die Grösse

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{d\eta}{dt}.$$

Wir wollen diese Grösse, nämlich die Derivirte der Sectorengeschwindigkeit nach der Zeit genommen, die Sectorenbeschleu-

nigung nennen und sie mit ψ bezeichnen. Sie wird also definirt durch die Gleichung:

$$\psi = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}.$$

Beide Begriffe, die Sectorengeschwindigkeit, wie die Sectorenbeschleunigung, beziehen sich immer auf einen bestimmten Punkt O, den wir das Centrum derselben nennen wollen. Demnach können wir den Inhalt der Gleichung zu Anfang dieses §. so ausdrücken:

Die Aenderung der Sectorengeschwindigkeit während eines Zeitintervalls ist gleich dem Integrale des halben Momentes der Beschleunigung, ausgedehnt über dasselbe Zeitintervall.

Aus den beiden Gleichungen $\psi = \frac{d\eta}{dt}$, $\eta = \frac{dS}{dt}$ folgt durch Elimination von dt

$$\frac{d \cdot \frac{1}{2}\eta^2}{dS} = \psi$$

und hieraus weiter

$$d \cdot \tfrac{1}{2}\eta = \psi dS,$$

sowie

$$\tfrac{1}{2}\eta^2 - \tfrac{1}{2}\eta_0^2 = \int_{S_0}^{S} \psi dS,$$

eine Gleichung, welche der Gleichung $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{s_0}^{s} \varphi ds$ als Analogon zur Seite steht. ψdS dürfte die Elementararbeit der Sectorenbewegung genannt werden.

Ist die Beschleunigung fortwährend nach einem festen Punkte gerichtet, so ist für diesen als Centrum, wegen $\varpi = 0$,

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{dS}{dt}\right)_{t_0},$$

d. h. bei jeder ebenen Bewegung, für welche die Beschleunigung fortwährend nach einem festen Centrum gerichtet ist, ist in Bezug auf dieses die Sectorengeschwindigkeit constant.

Aus dieser Gleichung folgt weiter, wenn diese Constante mit c bezeichnet wird

$$S - S_0 = c\,(t - t_0) \quad \text{d. h.}$$

Bei derselben Bewegung ist der in irgend einem Zeitraume von dem Radiusvector, welcher vom festen Centrum nach dem beweglichen Punkte gezogen werden kann, durchlaufene Sector dieser Zeit proportional. Die constante Sectorengeschwindigkeit gibt den in der Zeiteinheit durchlaufenen Sector an.

Der letztere Satz führt den Namen des Princips der Flächen. Er kann umgekehrt werden, nämlich:

Ist bei einer ebenen Bewegung der vom Radiusvector durchlaufene Sector der Zeit proportional, so ist die Beschleunigung nach dem Ursprunge der Radienvectoren gerichtet.

Denn aus der Bedingung $S - S_0 = c(t - t_0)$ folgt $\frac{dS}{dt} = c$, $\frac{d^2S}{dt^2} = 0$, mithin $\frac{1}{2}q\varpi = 0$ d. h. $\varpi = 0$.

Von den vorstehenden Sätzen werden wir später sehr nützliche Anwendungen machen; vorzugsweise werden sie auf die Projectionen räumlicher Bewegungen auf Ebenen Anwendung finden.

II. Capitel.

Probleme der geradlinigen Bewegung eines Punktes.

§. 1. Ist die Normalbeschleunigung φ_n der Bewegung eines Punktes gleich Null und reducirt sich folglich die totale Beschleunigung φ auf die Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = \frac{dv}{dt}$, so ist die Bewegung geradlinig und der Hodograph gleichfalls eine gerade Linie, parallel der Bahn des Punktes. Für jede geradlinige Bewegung bestehen daher unabhängig von der individuellen Natur der Bewegung zwischen den vier Grössen s, v, φ, t, nämlich zwischen dem Abstande des beweglichen Punktes von irgend einem Punkte seines Weges, der Geschwindigkeit, der Beschleunigung und der Zeit die beiden Gleichungen: $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = \varphi$. Tritt hiezu noch eine weitere Gleichung $\Phi(s, v, \varphi, t) = 0$ zwischen denselben Grössen hinzu, welche die individuelle Natur der Bewegung bestimmt, so dient das System der drei Gleichungen

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \varphi$$

$$\Phi(s, v, \varphi, t) = 0$$

dazu, um drei dieser Grössen als Functionen der vierten zu finden. Durch dasselbe kann also die Aufgabe gelöst werden: die Beschaffenheit der durch die Gleichung $\Phi = 0$ definirten geradlinigen Bewegung analytisch zu erforschen. Die Lösung dieser Aufgabe kommt im Allgemeinen auf die Integration einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwischen zwei Variabeln zurück; eliminirt man nämlich aus dem Gleichungssystem die Grössen v und φ, so bleibt die Gleichung $\Phi\left(s, \frac{ds}{dt}, \frac{d^2s}{dt^2}, t\right) = 0$ und nur in dem beson-

deren Falle, dass die dritte Gleichung die Beschleunigung φ nicht enthält, wird dieselbe von der ersten Ordnung oder geht in eine algebraische Gleichung über, wenn in ihr ausser φ auch die Geschwindigkeit v fehlt. Die Integration dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung oder des Systems der drei Gleichungen führt zwei willkührliche Constanten ein und um diese zu bestimmen, müssen noch zwei weitere spezielle Bedingungen gegeben sein. Diese findet man darin, dass für irgend eine Zeit t_0, deren Werth in den meisten Fällen gleich Null angenommen werden kann, die Werthe s_0, v_0 von s, v bekannt sind. Hat man nach Ausführung der Integration mit ihrer Hülfe diese Constanten bestimmt, so ist die Aufgabe über die Bewegung des Punktes als gelöst zu betrachten.

Die Gleichung $\Phi = 0$ umfasst 11 Spezialfälle, welche sich in drei Gruppen bringen lassen, je nachdem nämlich in ihr nur 2, oder 3 oder alle 4 Grössen s, v, φ, t vorkommen. Die erste dieser Gruppen enthält 6 Einzelfälle, da zwei der vier Grössen auf 6 Arten mit einander verbunden werden können, die zweite 4 solche, da vier Grössen 4 Combinationen zu dreien bilden können, die dritte Gruppe enthält blos einen Fall. Diese Gruppen sind:

I. Gruppe:	II. Gruppe:	III. Gruppe:
1. $\Phi(\varphi, t) = 0$	1. $\Phi(\varphi, s, t) = 0$	1. $\Phi(\varphi, v, s, t) = 0$.
2. $\Phi(\varphi, s) = 0$	2. $\Phi(\varphi, v, t) = 0$	
3. $\Phi(\varphi, v) = 0$	3. $\Phi(\varphi, s, v) = 0$	
4. $\Phi(v, t) = 0$	4. $\Phi(s, v, t) = 0$	
5. $\Phi(v, s) = 0$		
6. $\Phi(s, t) = 0$		

Jeder dieser 11 Spezialfälle entspricht einer bestimmten Aufgabe, über deren analytische Behandlung wir folgende Bemerkungen zufügen.

I. Gruppe.

1. Fall. Aus der Gleichung $\Phi(\varphi, t) = 0$ ziehen wir $\varphi = F(t)$. Das zu integrirende Gleichungssystem:

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \qquad \varphi = F(t)$$

löst die Aufgabe: Wenn für eine geradlinige Bewegung die Beschleunigung φ als Function der Zeit gegeben ist, die Geschwindigkeit v und den Abstand s des beweglichen Punktes von einem beliebigen festen Anfangspunkte der Bahn als Functionen der Zeit zu finden.

Aus der 2. und 3. Gleichung erhält man $\frac{dv}{dt} = F(t)$, mithin $v - v_0 = \int_{t}^{t_0} F(t)\,dt$, wenn v_0, t_0 ein Paar zusammengehörige Werthe

von v und t sind. Indem man diese Gleichung mit der ersten verbindet, erhält man $\frac{ds}{dt} = v_0 + \int_{t_0}^{t} F(t)\,dt$ und folglich $s - s_0 = v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} F(t)\,dt$, wenn s_0 der der Zeit t_0 entsprechende Werth von s ist.

Auch kann man unmittelbar die Gleichung $\frac{d^2s}{dt^2} = F(t)$ behandeln, die durch Elimination von v und dv sich ergibt, was auf dasselbe hinauskommt.

2. **Fall.** Aus der Gleichung $\Phi(\varphi, s) = 0$ entnehmen wir $\varphi = F(s)$, so dass das zu integrirende Gleichungssystem:

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \qquad \varphi = F(s)$$

die Aufgabe zum Gegenstande hat: **Wenn für eine geradlinige Bewegung die Beschleunigung φ als Function des Abstandes s des beweglichen Punktes von einem Punkte der Bahn gegeben ist, die Geschwindigkeit, welche der Punkt in dem Abstande s besitzt und die Zeit, welche derselbe gebraucht, um diesen Abstand zu erreichen, zu finden.**

Um die Geschwindigkeit v als Function von s zu finden, eliminiren wir dt, so dass $\frac{d \cdot \frac{1}{2}v^2}{ds} = F(s)$ und folglich $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{s_0}^{s} F(s)\,ds$ wird, wo v_0 und s_0 zusammengehörige Werthe von v und s sind. Diese Gleichung ist nichts anderes als der Satz über die Arbeit der Beschleunigung längs des Weges $s - s_0$. Aus derselben folgt v und mit dessen Hülfe aus der ersten, nämlich $\frac{ds}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} F(s)\,ds}$

sofort $t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} F(s)\,ds}}$, wenn t_0 und s_0 zusammengehörige Werthe von t und s sind. Aus dieser letzten Gleichung folgt noch durch Umkehrung s als Function von t und hiermit auch v als Function dieser Grösse. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung wäre in diesem Falle $\frac{d^2s}{dt^2} = F(s)$. Man reducirt sie auf die erste Ordnung durch die Substitution $\frac{ds}{dt} = v$, wodurch sie die Form $\frac{dv}{dt} = F(s)$ annimmt, welche durch Elimination von dt in $\frac{vdv}{ds} = F(s)$ übergeht, was mit Obigem übereinkommt.

3. **Fall.** Die Gleichung $\Phi(\varphi, v) = 0$ liefert $\varphi = F(v)$ und hiermit das System

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \qquad \varphi = F(v),$$

dessen Integration die Aufgabe löst: Wenn für eine geradlinige Bewegung die Beschleunigung als Function der Geschwindigkeit bekannt ist, die Abhängigkeit von Zeit und Abstand von der Geschwindigkeit darzustellen.

Man erhält zunächst durch Elimination von φ die Gleichung $\frac{dv}{dt} = F(v)$ und hieraus $t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)}$. Um s zu finden, eliminirt man dt, welches gibt $\frac{v\,dv}{ds} = F(v)$ und mithin $s - s_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{F(v)}$; auch ist es leicht, hiermit v und s als Functionen von t zu finden. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung des Problems wäre: $\frac{d^2 s}{dt^2} = F\left(\frac{ds}{dt}\right)$.

4. Fall. Die Gleichung $\Phi(v, t) = 0$ liefert $v = F(t)$. Es ist in diesem Falle das Gleichungssystem

$$\frac{ds}{dt} = F(t), \qquad F'(t) = \varphi, \qquad v = F(t)$$

und bleibt also blos s als Function von t zu finden. Dies ist: $s - s_0 = \int_{t_0}^{t} F(t)\,dt$. Die Beschleunigung ergibt sich durch Differentiation. — Das Gleichungssystem löst die Aufgabe: Wenn für eine geradlinige Bewegung die Geschwindigkeit als Function der Zeit gegeben ist, den Abstand s und die Beschleunigung φ gleichfalls als Functionen der Zeit zu finden.

5. Fall. Die Gleichung $\Phi(v, s) = 0$ gibt $v = F(s)$ und hiermit

$$\frac{ds}{dt} = v = F(s), \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi$$

und der Sinn der Aufgabe ist: Wenn für eine geradlinige Bewegung die Geschwindigkeit als Function des Abstandes gegeben ist, die Beschleunigung und Zeit als Functionen desselben darzustellen.

Man hat $t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{F(s)}$ und $\varphi = F'(s) \cdot F(s)$. — Kann man aus der Gleichung $\Phi(v, s) = 0$ leichter $s = \psi(v)$ ziehen, so hat man das System

$$s = \psi(v), \qquad \frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi$$

zu behandeln. Hierzu erhielte man aus den beiden ersten Gleichungen $\psi'(v)\frac{dv}{dt} = v$, also $t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{\psi'(v)\,dv}{v}$ u. s. w.

6. Fall. Die Gleichung $\Phi(s, t) = 0$ gibt $s = F(t)$ und das Gleichungssystem

$$s = F(t), \qquad \frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi$$

erfordert blos die Differentiation, um v und φ als Functionen der Zeit darzustellen.

II. Gruppe.

1. Fall. $\Phi(\varphi, s, t) = 0$. Das zu integrirende Gleichungssystem

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \qquad \Phi(\varphi, s, t) = 0$$

löst die Aufgabe: Wenn für eine geradlinige Bewegung eine Relation zwischen der Beschleunigung, dem Abstande und der Zeit gegeben ist, die Natur der Bewegung zu untersuchen. Indem man φ eliminirt, gelangt man zu der Differentialgleichung zweiter Ordnung $\Phi\left(\frac{d^2 s}{dt^2}, s, t\right) = 0$, durch deren einmalige Integration eine Gleichung der Form $F\left(\frac{ds}{dt}, s, t\right) = C$ gefunden wird. Die Constante bestimmt sich durch die Bedingung, dass $v = \frac{ds}{dt}$ in v_0 und s in s_0 für $t = t_0$ übergeht, so dass also $F(v_0, s_0, t_0) = C$. Die zweite Integration liefert hierauf ein Resultat von der Form $\psi(s, t, C) = C'$ und wird der Werth von C' auf dieselbe Weise, wie der von C bestimmt, es wird nämlich $\psi(s_0, t_0, C) = C'$. Im Allgemeinen gehört der vorliegende Fall zu den schwierigeren, da es keine allgemeinen Reductionsmittel gibt, welche die Gleichung der zweiten Ordnung auf die erste Ordnung zurückführen, wenn in derselben ausser der unabhängigen Variabeln t auch die zu bestimmende Function s selbst vorkommt.

2. Fall. $\Phi(\varphi, v, t) = 0$. Das Gleichungssystem

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \qquad \Phi(\varphi, v, t) = 0,$$

dessen Sinn die Lösung der Aufgabe verlangt: Wenn für eine geradlinige Bewegung eine Relation zwischen der Beschleunigung, der Geschwindigkeit und der Zeit gegeben ist, die Beschaffenheit der Bewegung zu erforschen, liefert durch Elimination von φ und v die Gleichung $\Phi\left(\frac{d^2 s}{dt^2}, \frac{ds}{dt}, t\right) = 0$, welche immer auf die erste Ordnung zurückgeführt wird, indem man den niedrigsten Differentialquotienten als neue Variabele einführt, weil nämlich eine der Grössen s, t, hier s, fehlt. Diese Gleichung erster Ordnung, die man auch aus dem System erhält, indem man nicht φ und v, sondern nur φ elimimirt, ist: $\Phi\left(\frac{dv}{dt}, v, t\right) = 0$. Sie liefert

$F(v, t) = C$, wobei $F(v_0, t_0) = C$ und weiter, indem man $v = \frac{ds}{dt}$ setzt und abermals integrirt: $\psi(s, t, C) = C'$, wobei $\psi(s_0, t_0, C) = C'$.

3. Fall. $\Phi(\varphi, s, v) = 0$. Das Gleichungssystem

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \qquad \Phi(\varphi, v, s) = 0$$

kann ähnlich, wie beim vorigen Falle behandelt werden. Die Gleichung zweiter Ordnung $\Phi\left(\frac{d^2s}{dt^2}, \frac{ds}{dt}, s\right) = 0$ sinkt auf die erste Ordnung herab, indem man $v = \frac{ds}{dt}$ als Variabele einführt, nämlich $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$ setzt. Die so zu gewinnende Gleichung, welche auch aus dem System erhalten wird, indem man φ und t eliminirt, ist: $\Phi\left(v\frac{dv}{ds}, v, s\right) = 0$. Alles weitere wie bei den vorigen Fällen.

4. Fall. $\Phi(v, s, t) = 0$. Das Gleichungssystem

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \qquad \Phi(v, s, t) = 0$$

erfordert blos die Integration der Differentialgleichung erster Ordnung $\Phi\left(\frac{ds}{dt}, s, t\right) = 0$, das in dem Gleichungssystem ausgesprochene Problem also auch nur die Bestimmung einer Constanten, welche mit Hülfe von s_0, t_0 erfolgt. Die Bestimmung der Beschleunigung nimmt blos die Differentiation in Anspruch.

III. Gruppe.

Der einzige hier vorliegende Fall $\Phi(\varphi, v, s, t) = 0$, welcher das Gleichungssystem

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \qquad \Phi(\varphi, v, s, t) = 0$$

bestimmt, behandelt die Frage: **Wenn für eine geradlinige Bewegung zwischen der Beschleunigung, der Geschwindigkeit, dem Abstande und der Zeit eine Relation gegeben ist, die Bewegung zu untersuchen.** Die Gleichung zweiter Ordnung, nämlich das Resultat der Elimination von v und φ, ist $\Phi\left(\frac{d^2s}{dt^2}, \frac{ds}{dt}, s, t\right) = 0$. Sie ist im Allgemeinen nicht unmittelbar auf die erste Ordnung reducirbar, doch gibt es grössere Gruppen von Gleichungsformen dieser Art, wie die linearen und die homogenen Gleichungen, deren Integration nach bestimmten Principien geleistet werden kann. Die Bestimmung der beiden Integrationsconstanten erfolgt, wie früher.

§. 2. Wir wenden uns jetzt der speziellen Behandlung einer Reihe einzelner Probleme über die geradlinige Bewegung zu, welche an sich zwar als sehr geeignete Beispiele zur Erläuterung der vorstehenden allgemeinen Lehren dienen können, welche aber vorzugsweise ihrer Bedeutung in den Anwendungen der Mechanik wegen hier einen Platz finden müssen.

1. Die Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung sei fortwährend Null. Das System $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = \varphi$, $\varphi = 0$ liefert $v = v_0$, $s - s_0 = v_0 t$. Die Bewegung ist gleichförmig.

2. Die Beschleunigung sei constant, gleich α und habe mit der Geschwindigkeit v_0 zur Zeit t_0 gleichen Sinn. Das Gleichungssystem ist $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = \varphi$, $\varphi = \alpha$ und man erhält, indem man diesen Fall nach Gruppe I, Fall 1. behandelt, $v - v_0 = \alpha(t - t_0)$, $s - s_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$. Die Bewegung ist mithin eine gleichförmig beschleunigte. Die Elimination von t liefert $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \alpha(s - s_0)$; die von α gibt $s - s_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)(t - t_0)$. Unbeschadet der Allgemeinheit kann man $t_0 = 0$ setzen, d. h. die Zeit von dem Momente an zählen, wo $v = v_0$ ist oder unter v_0 die sogenannte Anfangsgeschwindigkeit verstehen. Die Formeln werden alsdann etwas einfacher, nämlich, wenn man zugleich auch noch die Abstände s von dem Punkte M_0 an zählt, in welchem sich der bewegliche Punkt zur Zeit $t = 0$ befindet (Anfangslage), wodurch $s_0 = 0$ wird:

$$v = v_0 + \alpha t, \quad s = v_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \quad s = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t, \quad \tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \alpha s.$$

Ist insbesondere noch $v_0 = 0$, d. h. geht der Punkt von M_0 ohne Anfangsgeschwindigkeit ab, so ist

$$v = \alpha t, \quad s = \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \quad s = \tfrac{1}{2}vt, \quad \tfrac{1}{2}v^2 = \alpha s.$$

Die Bewegung ist durch folgende Umstände charakterisirt: Die Geschwindigkeit wächst der Zeit proportional, ihre Zunahme beträgt für jede Zeiteinheit α; die Geschwindigkeitscurve ist eine gegen die Axe der t unter einem Winkel $arctg\,\alpha$ geneigte Gerade. Der Abstand s wird durch den Inhalt des Trapezes gemessen, welches von der Geschwindigkeitslinie, der Axe der t und den beiden Ordinaten v_0 und v gebildet wird; die Curve der Abstände s ist eine Parabel. Geht der Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit ab, so wachsen die Abstände dem Quadrate der Zeit proportional und die in den aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten durchlaufenen Räume wie die ungeraden Zahlen, es sind nämlich die Räume, welche resp. in der 1., 2., 3., ..t^{ten} Zeiteinheit durchlaufen werden $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{3}{2}\alpha$, $\frac{5}{2}\alpha$..... $\frac{2t-1}{2}\alpha$. Die Arbeit der Beschleunigung längs des Weges s ist αs.

Die Physik lehrt, dass die Punkte der Körper, welche mit Translationsbewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit im luftleeren Raume aus mässigen Höhen zur Erde fallen, eine Bewegung besitzen, deren Projection auf die Vertikale des Ortes, von dem sie ausgehen, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ist, und dass die Beschleunigung α derselben im Mittel 9,81 Meter beträgt. Ein Punkt, welcher von dieser nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten Beschleunigung afficirt wird, heisst ein schwerer Punkt, weil die Ursache des Fallens zur Erde die Schwere heisst. Die Beschleunigung 9,81 heisst die Beschleunigung der

Schwere und ihr Werth wird im Allgemeinen mit g bezeichnet. Derselbe variirt etwas mit der Erhebung über die Erdoberfläche oder vielmehr mit der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde und in Folge dessen mit der geographischen Breite, da die Erde keine Kugel ist. In der Theorie der Kräfte wird hiervon ausführlicher gehandelt werden. Für den fallenden schweren Punkt sind obige Formeln $v = v_0 + gt$, $s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$, $v^2 - v_0^2 = 2gs$ oder spezieller $v = gt$, $s = \frac{1}{2}gt^2$, $v^2 = 2gs$. An diese Gleichungen, von denen jede als eine Folge der beiden andern angesehen werden kann, knüpfen sich folgende leichte Aufgaben zwischen den 4 Elementen g, t, v, s an:

Gegeben:	t, g	v, g	s, g	t, v	t, s	v, s
Gesucht:	v, s	t, s	t, v	s, g	v, g	t, g

sowie die weiteren zwischen den 5 Elementen g, v_0, t, v, s:

Gegeben:	g, v_0, t	g, v_0, v	g, v_0, s	g, t, v	g, t, s	g, v, s	v_0, t, v	v_0, t, s	v_0, v, s	t, v, s
Gesucht:	v, s	s, t	v, t	v_0, s	v_0, v	v_0, t	g, s	g, v	t, g	v_0, g

3. Die Beschleunigung eines geradlinig sich bewegenden Punktes sei constant, aber von entgegengesetztem Sinne mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0. Um einen bestimmten Fall zu behandeln, sei der Punkt schwer, also $\alpha = g$ und v_0 vertikal aufwärts gerichtet. Für diese vertikal aufsteigende Bewegung hat man das Gleichungssystem: $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = \varphi$, $\varphi = -\alpha$ und es sei ferner $v = v_0$ für $t = 0$, $s = 0$ für $t = 0$. Aus demselben erhält man: $v - v_0 = -gt$, $s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$, $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = -gs$; die Bewegung ist eine gleichförmig verzögerte, es nimmt die Geschwindigkeit in jeder Zeiteinheit um g ab und wechselt nach einer gewissen Zeit den Sinn; der durchlaufene Raum s wird erhalten, wenn man von dem Raume $v_0 t$, welchen der Punkt mit der Geschwindigkeit v_0 gleichförmig in t Zeiteinheiten zurücklegen würde, den Raum $\frac{1}{2}gt^2$ abzieht, den er in derselben Zeit vertikal durchfallen würde. Die Arbeit der Beschleunigung ist während des Aufsteigens negativ, nämlich $-gs$. Hieran knüpfen sich folgende Fragen: *a*) Wie lange steigt der Punkt auf, d. h. wann wird seine Geschwindigkeit Null? Die Zeit T des Aufsteigens folgt aus $v_0 - gT = 0$, nämlich $T = \frac{v_0}{g}$ wie sich von selbst versteht, da die Geschwindigkeit in jeder Zeiteinheit um g abnimmt, also nach $\frac{v_0}{g}$ Zeiteinheiten erschöpft ist. *b*) Wie hoch steigt der Punkt? Die Steighöhe H folgt aus $\frac{1}{2}v_0^2 - gH = 0$, ist also $H = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2}v_0 T$, d. h. der Punkt steigt nur auf die Hälfte der Höhe, welche er in der Zeit T mit constanter Geschwindigkeit v_0 erreichen würde. Nach der Zeit T fällt der Punkt wieder, da ihn die Beschleunigung g fortwährend vertikal abwärts afficirt, von diesem Momente an befolgt also die Bewegung die in Nr. 2. behandelten Gesetze. *c*) Wenn der Punkt, nachdem er $T = \frac{v_0}{g}$ Zeiteinheiten gestiegen, hierauf T Zeiteinheiten gefallen ist, welche Tiefe hat er erreicht? Ist sie H', so folgt $H' = \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}v_0 T = H$. Er ist mithin an dem Punkte wieder angelangt, von dem er ausging. *d*) Wenn er, nachdem er die Höhe H erstiegen, um H hierauf gefallen ist, welche Zeit ist während des Fallens verflossen? u. s. w. — Hieran lässt sich ein ähnliches

Schema für Aufgaben über v_0, g, s, v, t und v_0, g, H, T anreihen, wie oben unter Nr. 2.

Die Formel $H = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$ gibt Veranlassung zu einer vielfach üblichen Benennung. Vermöge derselben kann man nämlich zu jeder Geschwindigkeit die Höhe finden, welche ein Punkt mit ihr als Anfangsgeschwindigkeit ersteigen kann, oder was dasselbe ist, von welcher er ohne Anfangsgeschwindigkeit herabgefallen sein müsste, um jene Geschwindigkeit durch die Beschleunigung der Schwere zu erlangen. Man nennt diese Höhe die Geschwindigkeitshöhe. Die Geschwindigkeitshöhe ist demnach der Quotient aus dem Quadrate der Geschwindigkeit durch die doppelte Beschleunigung der Schwere.

4. Ein Punkt sei zwei Beschleunigungen unterworfen, welche beide in die Richtung der Vertikalen fallen, die eine sei die Beschleunigung g der Schwere, welche ihn abwärts treibt, die andere ψ sei vertikal aufwärts gerichtet und sei dem Quadrate der Geschwindigkeit des Punktes proportional (Beschleunigung eines Widerstandes). Wenn nun der Punkt keine Anfangsgeschwindigkeit besitzt, welche Bewegung wird er annehmen?

Da die Beschleunigung des Widerstandes dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, so hat man $\psi = \varepsilon v^2$. Um ε durch g auszudrücken, sei k der Werth von v, bei welchem $\psi = g$ werden würde, so dass also $g = \varepsilon k^2$ ist. Durch Elimination von ε erhält man dann $\psi = g\frac{v^2}{k^2}$. Die Resultante beider Beschleunigungen ist, wenn ihr positiver Sinn vertikal abwärts gerechnet wird: $\varphi = g - \psi = g - g\frac{v^2}{k^2} = g \cdot \frac{k^2 - v^2}{k^2}$ und hiermit ist also das Gleichungssystem des Problems:

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \qquad \varphi = g\frac{k^2 - v^2}{k^2}.$$

Aus diesem suchen wir: 1. die Geschwindigkeit v als Function der Zeit, 2. den durchlaufenen Raum s als Function der Zeit und 3. denselben Raum als Function der Geschwindigkeit.

Für die Beantwortung der ersten dieser Fragen folgt durch Elimination von φ die Gleichung: $\frac{dv}{dt} = g\frac{k^2 - v^2}{k^2}$ oder etwas zweckmässiger geschrieben: $\frac{2g}{k}\frac{dt}{dv} = \frac{2k}{k^2 - v^2} = \frac{k - v + k + v}{k^2 - v^2} = \frac{1}{k + v} + \frac{1}{k - v}$ und hieraus mit Rücksicht darauf, dass $v = 0$ für $t = 0$ ist, durch Integration

$$t = \frac{k}{2g}\, l \cdot \frac{k + v}{k - v}.$$

Entnimmt man hieraus $\frac{k + v}{k - v} = e^{\frac{2g}{k}t}$, so erhält man leicht durch Addition und Subtraktion von 1, nachherige Division der Resultate in einander und schliessliche Multiplication mit $e^{-\frac{g}{k}t}$ im Zähler und Nenner

$$v = k \cdot \frac{e^{\frac{g}{k}t} - e^{-\frac{g}{k}t}}{e^{\frac{g}{k}t} + e^{-\frac{g}{k}t}}.$$

Hinsichtlich der zweiten Frage erhält man mit diesem Werthe von v den Raum s aus der Gleichung $\frac{ds}{dt} = v$. Die Formel für v zeigt aber die Eigenthümlichkeit, dass ihr Zähler bis auf den Faktor $\frac{g}{k}$ der Differentialquotient des Nenners ist; setzt man daher diesen Faktor zu und multiplicirt mit dem reciproken Werthe $\frac{k}{g}$ desselben, so kann man sie schreiben:

$$v = \frac{k^2}{g} \frac{d}{dt} l \left(e^{\frac{g}{k}t} + e^{-\frac{g}{k}t} \right)$$

und erhält alsdann mit ihrer Hülfe, da $s = 0$ für $t = 0$:

$$s = \frac{k^2}{g} l \cdot \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{g}{k}t} + e^{-\frac{g}{k}t}\right).$$

Um endlich die gesuchte dritte Gleichung zu erlangen, würde man aus den beiden eben gefundenen t eliminiren können, allein man gelangt dazu ebenso leicht, wenn man aus dem gegebenen Gleichungssystem dt eliminirt und die dadurch erhaltene Gleichung $\frac{ds}{dv} = \frac{k^2}{2g} \cdot \frac{2v}{k^2 - v^2}$ mit Rücksicht auf die Nebenbedingung $v = 0$ für $t = 0$ integrirt. Dies Verfahren liefert

$$s = \frac{k^2}{2g} l \cdot \frac{k^2}{k^2 - v^2}.$$

Aus den gewonnenen Gleichungen zieht man nun nachstehende Folgerungen:

Da die Exponentialgrösse $e^{-\frac{g}{k}t}$ mit wachsender Zeit sich der Null nähert, so nähert sich die Geschwindigkeit der Grösse k als Grenze und da k constant ist, so folgt, dass die Bewegung im weiteren Verlaufe sich immer mehr der gleichförmigen Beschaffenheit nähert. Es wurde oben k als die Geschwindigkeit eingeführt, bei welcher die Beschleunigung ψ des Widerstandes gleich g werden würde. Soll dies eintreten, so muss $\varphi = g - \psi = 0$, d. h. die Bewegung gleichförmig werden. Die geführte Untersuchung zeigt, dass dieser Zustand nicht wirklich erreicht wird, sondern nur eine asymptotische Annäherung an ihn stattfindet.

Für sehr grosse t findet man einen Näherungswerth für s, indem man $e^{-\frac{g}{k}t}$ der Null gleich setzt. Dadurch nimmt die Formel für s die Gestalt an

$$s = kt - \frac{k^2}{g} l2.$$

Ein Punkt, welcher sich mit der Geschwindigkeit k gleichzeitig von demselben Anfangspunkte aus wie der gegebene bewegte, würde in der Zeit t den Raum kt durchlaufen, dieser Punkt wäre nach einer sehr grossen Zeit dem gegebenen Punkte um die Strecke $\frac{k^2}{g} l2$ vorausgeeilt.

Die Gleichung $\varphi = g \cdot \frac{k^2 - v^2}{k^2} = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)$ zeigt, dass für $k = \infty$ die hier vorliegende Bewegung in die Fallbewegung eines schweren Punktes übergehen muss, indem $\varphi = g$ wird. Es ist daher nicht uninteressant zu sehen, wie die Formeln für v und s in diesem Falle sich auf $v = gt$ und $s = \frac{1}{2}gt^2$ reduciren. Was zunächst v betrifft, welches für $k = \infty$ die unbestimmte Form $\infty \cdot 0$

annimmt, so hat man, da der Nenner sich der Grenze 2 nähert, blos zu suchen: $\lim\left\{k\left(e^{\frac{g}{k}t}-e^{-\frac{g}{k}t}\right)\right\}$. Dies ist aber identisch mit

$$gt\cdot\lim\frac{e^{\frac{g}{k}t}-e^{-\frac{g}{k}t}}{\frac{g}{k}t}=gt\lim\frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{\omega},\quad \lim\omega=0\,.$$

Die Differentiation von Zähler und Nenner zeigt, dass der Werth des Ausdruckes unter dem Zeichen *lim.* die Zahl 2 ist; daher ist der Werth des ganzen Ausdruckes $2gt$ und damit reducirt sich v auf gt. Zu demselben Resultate führt auch die Gleichung $t=\frac{k}{2g}\,l\left(\frac{k+v}{k-v}\right)$; indem man sie nämlich auf die Form bringt: $gt=\frac{1}{2}l\frac{\left(1+\frac{v}{k}\right)^k}{\left(1-\frac{v}{k}\right)^k}$ u. bedenkt, dass für wachsende k der Grenzwerth $\lim\left(1\pm\frac{v}{k}\right)^k=e^{\pm v}$ ist.

Der Ausdruck für s als Function von t nimmt für $k=\infty$ gleichfalls die Form $\infty\cdot 0$ an, man findet aber seine Grenze leicht folgendermassen.

Man hat nämlich, indem man mit gt^2 multiplicirt und dividirt

$$\lim s=gt^2\cdot\lim\frac{l\,.\,\frac{1}{2}\left(e^{\frac{g}{k}t}+e^{-\frac{g}{k}t}\right)}{\left(\frac{g}{k}t\right)^2}=gt^2\cdot\lim\frac{l\,.\,\frac{1}{2}\left(e^{\omega}+e^{-\omega}\right)}{\omega^2},\ \lim\omega=0.$$

Der wahre Werth des Bruches unter dem Zeichen *lim.* ist aber $\frac{1}{2}$ und daher ergibt sich schliesslich $s=\frac{1}{2}gt^2$.

Auch die dritte Gleichung kann leicht zur Grenze für wachsende k übergeführt werden. Schreibt man sie nämlich so:

$$2gs=l\,.\,\frac{1}{\left(1+\frac{-v^2}{k^2}\right)^{k^2}}$$

und bedenkt, dass $\lim\left(1+\frac{u}{\omega}\right)^{\omega}=e^u$ ist, so erhält man: $2gs=l\cdot\frac{1}{e^{-v^2}}$, oder $2gs=v^2$.

Die Arbeit der Beschleunigung $\varphi=g\,\frac{k^2-v^2}{k^2}$ ergibt sich aus der Gleichung $s=\frac{k^2}{2g}\,l\,\frac{k^2}{k^2-v^2}$, welche liefert: $\frac{k^2-v^2}{k^2}=e^{-\frac{2gs}{k^2}}=\frac{1}{g}\cdot\varphi$ als: $\int_0^s\varphi\,ds=g\int_0^s e^{-\frac{2g}{k^2}s}\,ds=\frac{1}{2}k^2\left(1-e^{-\frac{2g}{k^2}s}\right)$. Da die Arbeit der Beschleunigung der Schwere gs ist, so ist die des Widerstandes $\frac{1}{2}k^2\left(1-e^{-\frac{2g}{k^2}s}\right)-gs$. Die Arbeit von φ nähert sich mit wachsendem s der Grenze $\frac{1}{2}k^2$.

Es ist bekannt, dass, wenn ein Körper sich in einem flüssigen oder gasförmigen Mittel bewegt, seine Bewegung durch den Einfluss des Mittels modificirt wird und eine andere ist, als sie sein würde, wenn das Mittel nicht vorhanden wäre. Wenn der Körper als ein unveränderliches System angesehen wird, so besteht seine Bewegung jeden Augenblick aus einer Elementarschraubenbewegung, welche in die Translation eines seiner Punkte und eine Rotation um eine zur Schraubenaxe parallele, durch jenen Punkt gehende Axe zerfällt werden kann. Spätere Untersuchungen werden zeigen, dass man mit Vortheil einen be-

stimmten Punkt des Systems zu jenem Punkte wählt, den sogenannten Schwerpunkt, oder Mittelpunkt der Massen und dass derselbe sich so bewegt, als ob an ihm sämmtliche, die verschiedenen Punkte des Systems afficirenden Beschleunigungen vereinigt wären und er die Masse des ganzen Systems enthielte. Wenn nun der Einfluss des widerstehenden Mittels den verschiedenen Punkten der Oberfläche verschiedene Beschleunigungen ertheilt, so setzen sich diese dennoch an jenem Punkte zu einer Resultanten zusammen und von dieser ist die Rede, wenn man von der Beschleunigung des Widerstandes redet. Uebrigens gelten diese Betrachtungen auch noch, wenn der Körper immer kleiner und kleiner angenommen und schliesslich zu einem Punkte wird. Diese Beschleunigung ist stets dem Sinne der Geschwindigkeit entgegengesetzt und wirkt also verzögernd. Sorgfältige Experimente haben gezeigt, dass dieselbe der Dichtigkeit ϱ des Mittels, d. h. der in der Volumeneinheit enthaltenen Menge Materie und einer Function Ω der Geschwindigkeit proportional ist, welche für nicht sehr langsame und sehr rasche Bewegungen v^2 ist, so dass die Beschleunigung ψ des Widerstandes durch $\psi = a\varrho\Omega$ ausgedrückt wird, worin der Coefficient a den Werth von ψ für $\varrho = 1$ und $\Omega = 1$ ausdrückt. Newton fand, dass für Kugeln dieser Coefficient der Oberfläche proportional ist und da diese selbst dem Quadrate ihres Radius r proportional ist, durch $a = br^2$ dargestellt werden kann, wodurch $\psi = br^2\varrho\Omega$ wird. Der Coefficient b hängt übrigens von der physischen Beschaffenheit der Kugel ab und ist umgekehrt proportional der Masse derselben, d. h. der Menge Materie, welche sie enthält. Ist daher δ die Menge Materie einer Volumeneinheit, so wäre $b = \frac{\beta}{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \delta}$, oder wenn man noch mit g multiplicirt und dividirt und $\beta g = \lambda$ setzt, $b = \frac{3\lambda}{4\delta g \pi r^3}$. Hiermit wird $\psi = \frac{3}{4}\frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{\varrho}{g\delta r} \cdot \Omega = \frac{\gamma\varrho}{g\delta r}\Omega$, wenn $\gamma = \frac{3}{4}\frac{\lambda}{\pi}$ und endlich $\psi = \frac{\Omega}{g\frac{\delta r}{\varrho\gamma}}$ oder $\psi = \frac{\Omega}{k^2}$, wenn $k = \sqrt{g\frac{\delta r}{\varrho\gamma}}$. Die letzte Gleichung gibt den Ausdruck für k, welcher in der obigen Untersuchung eine Rolle spielt; die Annahme $k = \infty$, welche die Fallbewegung im widerstehenden Mittel in die freie Fallbewegung im luftleeren Raume überführte, entspricht, wie man hieraus sieht, dem Werthe $\varrho = 0$, d. h. der Annahme, dass in jeder Volumeneinheit des Mediums keine Materie enthalten sei.

5. Ein schwerer Punkt steige mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 im widerstehenden Mittel vertikal auf; die Beschleunigung des Widerstandes ist dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, welche Bewegung wird der Punkt annehmen?

In diesem Falle haben die Beschleunigungen der Schwere und des Widerstandes gleichen, aber mit der Geschwindigkeit entgegengesetzten Sinn. Wird also der positive Sinn vertikal aufwärts gerechnet, so ist $\varphi = -g - g\frac{v^2}{k^2} = -g\frac{k^2+v^2}{k^2}$ und hiermit das zu integrirende Gleichungssystem:

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \varphi = -g\frac{k^2+v^2}{k^2}.$$

Wir behandeln zunächst wieder die drei Fragen der vorigen Aufgabe. Um die Geschwindigkeit als Function der Zeit darzustellen, hat man aus $\frac{dv}{dt} = -g\frac{k^2+v^2}{k^2}$ die Gleichung $\frac{g}{k}t = k\int_v^{v_0}\frac{dv}{k^2+v^2}$ d. h. $\frac{g}{k}t = Arc\,tg\frac{v_0}{k} - Arc\,tg\frac{v}{k}$ und hieraus

$Arc\,tg\frac{v}{k} = Arc\,tg\frac{v_0}{k} - \frac{g}{k}t$ und folglich wenn man von beiden Seiten Tangenten nimmt: $\frac{v}{k} = tg\left\{Arc\,tg\frac{v_0}{k} - \frac{g}{k}t\right\} = \frac{\frac{v_0}{k} - tg\frac{g}{k}t}{1 + \frac{v_0}{k}tg\frac{g}{k}t}$ und hiermit, indem man die $tg\frac{g}{k}t$ in $sin\frac{g}{k}t$ und $cos\frac{g}{k}t$ auflöst:

$$v = k\cdot\frac{v_0 cos\frac{g}{k}t - k\,sin\frac{g}{k}t}{v_0 sin\frac{g}{k}t + k\,cos\frac{g}{k}t}.$$

Um s als Function von t zu finden, bemerke man, dass der eben gefundene Ausdruck für v auch geschrieben werden kann:

$$v = \frac{k^2}{g}\cdot\frac{d}{dt}\,l\left(v_0\,sin\frac{g}{k}t + k\,cos\frac{g}{k}t\right).$$

Mit Hülfe dieser Bemerkung liefert die Gleichung $\frac{ds}{dt} = v$ sofort:

$$s = \frac{k^2}{g}l\cdot\frac{1}{k}\left(v_0\,sin\frac{g}{k}t + k\,cos\frac{g}{k}t\right).$$

Den Ausdruck für s als Function von v erhält man durch die Gleichung $\frac{v\,dv}{ds} = -g\frac{k^2+v^2}{k^2}$; nämlich $2gs = k^2\int_v^{v_0}\frac{d\cdot v^2}{k^2+v^2}$ d. h.

$$s = \tfrac{1}{2}\frac{k^2}{g}\,l.\frac{k^2+v_0^2}{k^2+v^2}.$$

An diese Formeln lässt sich die Beantwortung folgender Fragen anknüpfen: *a*) Wie lange steigt der Punkt? Für die Zeit T des Aufsteigens ist in der ersten Gleichung, welche v als Function von t liefert, nämlich in $\frac{g}{k}t = Arc\,tg\frac{v^0}{k} - Arc\,tg\frac{v}{k}$ die Geschwindigkeit $v = 0$ zu setzen; dies liefert $T = \frac{k}{g}\cdot Arc\,tg\frac{v_0}{k}$. *b*) Bis zu welcher Höhe H steigt der Punkt auf? Man findet aus der Gleichung $s = \frac{1}{2}\frac{k^2}{g}l.\frac{k^2+v_0^2}{k^2+v^2}$ für $v = 0$ die Höhe $H = \frac{1}{2}\frac{k^2}{g}l\cdot\frac{k^2+v_0^2}{k^2}$. *c*) Wenn der Punkt, auf der Höhe H angelangt, wieder zu fallen beginnt, mit welcher Geschwindigkeit v_1 langt er am Fusse der Höhe H an und welches ist das Verhältniss $\frac{v_1}{v}$? Der Formel $s = \frac{k^2}{2g}l.\frac{k^2}{k^2-v^2}$ in Nr. 4. gemäss hat man hierfür $H = \frac{k^2}{2g}l\cdot\frac{k^2}{k^2-v_1^2}$, woraus v_1 folgt. Durch Vergleichung dieses und des vorigen Ausdruckes für H ergibt sich für das Verhältniss der Geschwindigkeiten: $\frac{v_1}{v_0} = \frac{k}{\sqrt{v_0^2+k^2}}$, es ist mithin $v_1 < v_0$ und kommt also der Punkt, nachdem er zur Höhe H aufgestiegen, am Fusse derselben mit einer kleineren Geschwindigkeit an, als die ist, mit welcher er von dort aufstieg. *c*) Welche Zeit T' braucht der Punkt, um die Höhe H zu durchfallen? Setzt man in der Formel $t = \frac{k}{2g}l\cdot\frac{k+v}{k-v}$ in Nr. 4. für v den Werth $v_1 = \frac{v_0 k}{\sqrt{v_0^2+k^2}}$

ein, so ergiebt sich aus derselben $T' = \frac{k}{g}\, l \cdot \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + k^2}}{k}$. Hiernach ist die ganze Zeit $\mathfrak{T}$, nach welcher der Punkt zu seinem Ausgangspunkte zurückgekehrt sein wird: $\mathfrak{T} = T + T' = \frac{k}{g}\left\{Arc\,tg\frac{v_0}{g} + l \cdot \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + k^2}}{k}\right\}$. *d*) Welche Arbeit leistet die Beschleunigung φ längs des Weges s? u. s. w.

Die Vergleichung der Formeln für die Beschleunigung φ bei der vorliegenden und der vorigen Aufgabe, nämlich

$$\varphi = -g\frac{k^2 + v^2}{k^2}, \qquad \varphi = g\frac{k^2 - v^2}{k^2}$$

zeigt, dass man die eine Untersuchung in die Form der andern einkleiden kann, wenn man $k\sqrt{-1}$ für k setzt und den Sinn der Beschleunigung umkehrt, welches letztere erreicht wird, indem man $-g$ an die Stelle von g treten lässt. Die Exponentialfunctionen setzen sich dann in goniometrische, und diese in jene um, die Logarithmen in Kreisfunctionen und umgekehrt. Durch Einführung der Gudermann'schen hyperbolischen Functionen kann dieses Umschlagen der Functionen in einander präciser ausgedrückt werden.

6. **Ein beweglicher Punkt wird von einer Beschleunigung afficirt, welche fortwährend nach einem festen Centrum gerichtet und dem Quadrate seines Abstandes von diesem umgekehrt proportional ist. Der Punkt hat keine Anfangsgeschwindigkeit, welches ist seine Bewegung?**

Fig. 86.

Ist $M_0C = a$ (Fig. 86.) die Entfernung des Punktes vom Centrum zur Zeit t und $M_0M = s$ der in der Zeit t durchlaufene Weg, so wird $\varphi = \frac{\varepsilon}{(a-s)^2}$. Die Constante ε kann durch den Werth von φ, welcher einer gegebenen Entfernung entspricht, ausgedrückt werden. Ist φ in der Entfernung $AC = r$ gleich g, so dass $g = \frac{\varepsilon}{r^2}$, so folgt durch Elimination von ε mit Hülfe der Division: $\varphi = g \cdot \frac{r^2}{(a-s)^2}$. Daher ist das Gleichungssystem des Problems:

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \qquad \varphi = g \cdot \frac{r^2}{(a-s)^2}.$$

Durch Elimination von dt, oder, was dasselbe ist, durch Anwendung des Satzes von der Arbeit der Beschleunigung erhält man $d \cdot \frac{1}{2}v^2 = gr^2\frac{ds}{(a-s)^2}$ und folglich, da $v = 0$ für $s = 0$ ist: $\frac{1}{2}v^2 = gr^2\int_0^s \frac{ds}{(a-s)^2}$ d. h.

$$v^2 = \frac{2gr^2}{a} \cdot \frac{s}{a-s}.$$

Hieraus folgt z. B. für die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt in A ankommt, indem man $s = a - r = M_0A = h$ setzt:

$$v = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{r}{a}}.$$

Ist daher die Entfernung h nicht beträchtlich, so ist a nur wenig von r und $\sqrt{\frac{r}{a}}$ nur wenig von der Einheit verschieden, es ist dann die Geschwindigkeit

nahezu gleich $\sqrt{2gh}$, also ebenso gross, als wenn die Beschleunigung φ constant gleich g wäre.

Um die Relation zwischen s und t zu finden, hat man mit Hülfe der Gleichung $\frac{ds}{dt} = v$:

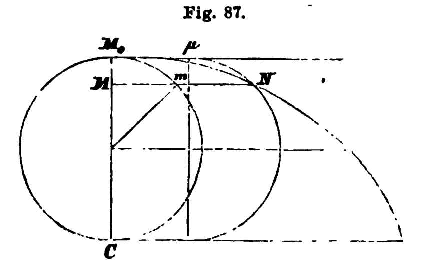
$$\sqrt{\frac{2gr^2}{a}} \cdot dt = ds\sqrt{\frac{a-s}{s}} = ds \cdot \frac{a-s}{\sqrt{s(a-s)}} = \frac{(\frac{1}{2}a - s)\,ds}{\sqrt{as - s^2}} + \frac{\frac{1}{2}a\,ds}{\sqrt{as-s^2}}$$

$= d \cdot \sqrt{as-s^2} + \frac{1}{2}a \cdot d \cdot Arc\cos\frac{\frac{1}{2}a - s}{\frac{1}{2}a}$ und folglich, da $s = 0$ für $t = 0$ ist:

$$\sqrt{\frac{2gr^2}{a}} \cdot t = \frac{1}{2}a\,Arc\cos\frac{\frac{1}{2}a - s}{\frac{1}{2}a} + \sqrt{as - s^2}\,.$$

Diese Gleichung ist nicht auflösbar nach s, doch kann man durch folgende geometrische Construction zu jedem t das zugehörige s finden. Beschreibt man nämlich über dem Anfangsabstande $M_0C = a$ (Fig. 87.) als Durchmesser einen Kreis und errichtet im Endpunkte M von $M_0M = s$ auf M_0C das Perpendikel Mm, so ist dessen Länge: $Mm = \sqrt{s(a-s)}$ und der Bogen $M_0m = \frac{1}{2}a \cdot Arc\cos\frac{\frac{1}{2}a - s}{\frac{1}{2}a}$, so dass also, wenn der Kreis senkrecht zu M_0C um die Strecke $M_0\mu =$ Bog. Am parallel mit sich verschoben wird, wodurch der Punkt m nach N gelangt, $MN = \frac{1}{2}a\,Arc\cos\frac{\frac{1}{2}a - s}{\frac{1}{2}a} + \sqrt{as - s^2}$ wird.

Fig. 87.



Führt man diese Construction für alle s aus, so erhält man eine Curve AN, welche offenbar von dem Punkte m beschrieben wird, wenn der Kreis sich um seinen Mittelpunkt dreht und parallel mit sich fortschreitet, oder was dasselbe ist, auf dem in C auf CM_0 errichteten Perpendikel rollt. Die Curve ist demnach eine Cycloïde und wenn die zur Abcisse $M_0M = s$ gehörige Ordinate MN mit y bezeichnet wird, so ist $\sqrt{\frac{2gr^2}{a}} \cdot t = y$ die Länge, welche in die Figur einzutragen ist, um die der Zeit t entsprechende Strecke s zu bestimmen.

Die Newton'sche Theorie der Anziehung und die Beobachtung haben übereinstimmend gezeigt, dass die Beschleunigung der Schwere bei der Erhebung über die Oberfläche der Erde mit dem Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkte derselben abnimmt. Unsere Aufgabe behandelt daher den Fall eines schweren Punktes im leeren Raume von beträchtlichen Höhen. Für den Fall des Punktes ins Innere der Erde gilt jedoch diese Entwickelung nicht, denn hierfür ist die Beschleunigung des fallenden Punktes nicht mehr umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkte, sondern vielmehr direkt proportional der ersten Potenz dieser Entfernung, wie später gezeigt werden wird.

7. Die Beschleunigung eines Punktes sei fortwährend nach einem festen Centrum gerichtet und der Entfernung des Punktes von demselben proportional; wenn nun der Punkt zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = 0$ und den Abstand a von dem Centrum besitzt,

welches wird seine Bewegung sein? Ist x (Fig. 88.) der Abstand vom Centrum zur Zeit t, so ist, wenn die Geschwindigkeit und Beschleunigung in der Richtung M_0C nach dem Centrum hin von der Anfangslage aus als positiv gerechnet werden: $\varphi = k^2x$, wobei k gegeben ist, und leicht durch die Beschleunigung g der Schwere ausgedrückt werden könnte. Das Gleichungssystem der Aufgabe ist daher, wenn $M_0M = s$:

Fig. 88.

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \varphi = k^2x, \text{ wobei } s + x = a.$$

Eliminirt man φ und v, so kommt zunächst $\frac{d^2s}{dt^2} = kx$, oder da $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} = 0$ ist:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

Wir wollen die Integration dieser Gleichung auf doppelte Weise ausführen. Da sie lineär ist und constante Coefficienten besitzt, so genügt ihr als Particulärlösung $x = e^{\alpha t}$, wenn α eine Wurzel der quadratischen Gleichung $\alpha^2 + k = 0$ ist, welche Gleichung sich durch Einsetzen der Exponentialfunction in die gegebene Differentialgleichung ergibt. Hieraus folgt $\alpha = \pm ki$ und mithin sind e^{kit} und e^{-kit} Partikulärlösungen. Aus beiden bildet sich daher das allgemeine Integral $x = Ce^{kti} + C'e^{-kti}$ mit den beiden Integrationsconstanten C, C'. Dasselbe kann, indem man die Exponentialfunctionen durch die gleichbedeutenden Verbindungen der geometrischen Functionen ersetzt, unter der Form $x = A\cos kt + B\sin kt$ dargestellt werden. Daher erhält man

$$s = a - (A\cos kt + B\sin kt)$$
$$v = \quad Ak\sin kt - Bk\cos kt$$

und die Bedingungsgleichungen für die Constanten sind, weil $v = 0$ und $s = 0$ für $t = 0$:

$$0 = a - A$$
$$0 = Bk.$$

Daher ist endlich:

$$s = a - a\cos kt, \quad x = a\cos kt, \quad v = ak\sin kt.$$

Die Bewegung ist die bereits im II. Thl. Cap. I. §. 9 erläuterte oscillirende Bewegung, welche die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung ist. Ihren Gesetzen würde ein Punkt folgen, welcher etwa durch eine enge Oeffnung im Innern der Erde eindringen könnte.

Man kann die Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ auch auf folgende Art integriren. Multiplicirt man sie mit $2\frac{dx}{dt}$ und bedenkt, dass $2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ und $2x\frac{dx}{dt} = \frac{d\cdot x^2}{dt}$ ist, so kommt $\frac{d\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{dt} + k^2\frac{d\cdot x^2}{dt} = 0$ und folglich $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + k^2x^2 = C$ oder $(-v)^2 + k^2x^2 = C$. Für $x = a$ ist aber $v = 0$, mithin $C = a^2k^2$ und daher

$$v = k\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Hiermit erhält man weiter, wegen $v = \frac{ds}{dt} = -\frac{dx}{dt}$ aus $-\frac{dx}{dt} = \sqrt{a^2 - x^2}$

$$kt = \int_a^x \frac{-d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = Arc\cos\cdot\frac{x}{a},$$

d. h.

$$x = a\cos kt.$$

§. 3. Unter den Aufgaben, welche hierher gehören und deren man eine reiche Auswahl in dem vortrefflichen Werke von Jullien: *Problèmes de mécanique rationelle*, p. 222—248 findet, sind von besonderem Interesse die, welche dem Falle $\Phi(s, v, \varphi) = 0$ der zweiten Gruppe angehören. In diese Kategorie gehören viele Probleme über die geradlinige Bewegung eines Punktes im widerstehenden Mittel, für welches die Beschleunigung des Widerstandes eine bekannte Function der Geschwindigkeit ist. Für den besonderen Fall, dass $\varphi = f(s) + \Omega(s)\cdot v^2$ ist, wo $f(s)$ und $\Omega(s)$ beliebige Functionen des Abstandes sind, ist die Differentialgleichung zweiter Ordnung des Problems, nämlich

$$\frac{d^2s}{dt^2} = f(s) + \Omega(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

immer auf eine lineäre Differentialgleichung erster Ordnung reducirbar und folglich integrabel. Für $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = u$ wird sie nämlich

$$\frac{du}{ds} - 2\Omega(s)\cdot u - f(s) = 0.$$

Um dieselbe unmittelbar zu integriren, genügt es zu bedenken, dass man eine Function $\psi(s)$ so wählen kann, dass, nachdem man mit ihr die Gleichung multiplicirt hat, die beiden ersten Terme

$\psi(s)\frac{du}{ds} + u\cdot\left(-2\Omega(s)\cdot\psi(s)\right)$ die Form des Differentialquotienten eines Produkts annehmen. Es ist nämlich $\frac{d(UV)}{ds} = V\frac{dU}{ds} + U\frac{dV}{ds}$. Nimmt man also $U = u$, $V = \psi(s)$, so ist $\psi(s)$ so zu bestimmen, dass

$$\psi'(s) = -2\Omega(s)\cdot\psi(s) \text{ d. h. } \frac{d\cdot l\psi s}{ds} = -2\Omega(s),$$

also $\psi(s) = Ce^{-2\int\Omega(s)ds}$ wird. Dann ist die Differentialgleichung

$$\frac{d[u\cdot\psi(s)]}{ds} = f(s)\cdot\psi(s),$$

mithin

$$u\psi(s) = \int f(s)\,\psi(s)\,ds + C'$$

d. h.

$$u\,e^{-2\int\Omega(s)ds} - u_0 e^{-2\cdot 0} = \int_s^s f(s)\,ds\,e^{-2\int\Omega(s)ds} = 0,$$

oder also
$$u = e^{2\int_{s_0}^{s} \Omega(s)\,ds} \left(u_0 + \int_{s_0}^{s} f(s)\,ds\, e^{-2\int \Omega(s)\,ds} \right)$$
und hiermit v^2, bestimmt u. s. w.

§. 4. Man kann noch weit allgemeinere Probleme bezeichnen, deren Behandlung heutzutage keinen Schwierigkeiten unterliegt. So kann die Gleichung
$$\frac{d^2 s}{dt^2} + f(t)\frac{ds}{dt} + F(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0$$
nach einer Bemerkung von Liouville (*Journal des Mathém. 1. Serie, T. VII, p.* 134) mit Hülfe der Variation der Constanten immer integrirt werden.

Man suche nämlich zunächst ein erstes Integral der Gleichung ohne das Glied $F(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, nämlich ein erstes Integral von
$$\frac{d^2 s}{dt^2} + f(t)\frac{ds}{dt} = 0.$$

Ein solches ist, da die Gleichung lineär ist,
$$\frac{ds}{dt} = C\, e^{-\int f(t)\,dt}.$$
Nun bestimme man C als Function von s so, dass der allgemeinen Gleichung genügt wird. Indem man
$$\frac{d^2 s}{dt^2} = e^{-\int f(t)\,dt}\left\{\frac{dC}{ds}\frac{ds}{dt} - Cf(t)\right\} = \frac{1}{C}\frac{ds}{dt}\left\{\frac{dC}{ds}\frac{ds}{dt} - Cf(t)\right\}$$
$$= \frac{1}{C}\frac{dC}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - f(t)\frac{ds}{dt}$$
einsetzt, erhält man zur Bestimmung von C die Differentialgleichung
$$\frac{1}{C}\frac{dC}{ds} + F(s) = 0,$$
aus welcher folgt:
$$C = A e^{-\int F(s)\,ds}.$$
Hiermit erhält man also weiter
$$\frac{ds}{dt} = A\, e^{-\int F(s)\,ds} \cdot e^{-\int f(t)\,dt}$$
und folglich als allgemeines Integral der vorgelegten Gleichung
$$\int e^{\int F(s)\,ds}\, ds = A\int e^{-\int f(t)\,dt}\, dt + B.$$

Eine weitere Bemerkung von Jacobi ist von hoher Wichtigkeit. Wenn nämlich das erste Integral einer Gleichung von der Form $\frac{d^2 s}{dt^2} = f(s, t)$ gefunden ist, so kann für die zweite Integration stets ein integrirender Factor angegeben werden. Es ist dies nämlich der

einfachste Fall, welcher unter das von Jacobi entdeckte Princip des letzten Multiplicators fällt.

Unabhängig von der allgemeinen Theorie des letzten Multiplicators kann man diesen Satz, wie folgt, beweisen. Es sei $\frac{ds}{dt} = \varphi(s, t, C)$ das bekannte erste Integral der genannten Gleichung und also dieses, welches wir unter der Form

$$ds - \varphi dt = 0$$

darstellen wollen, wenn φ statt $\varphi(s, t, C)$ gesetzt ist, nochmals zu integriren. Man kann zeigen, dass $\frac{d\varphi}{dC}$ ein integrirender Factor dieser Gleichung, also

$$\frac{d\varphi}{dC}(ds - \varphi dt)$$

ein vollständiges Differential und in Folge dessen

$$\int \frac{d\varphi}{dC}(ds - \varphi dt) = C'$$

das gesuchte vollständige zweite Integral ist. Die Bedingung dafür, dass $\frac{d\varphi}{dC}$ integrirender Factor wird, ist nämlich

$$\frac{d^2\varphi}{dt\, dC} + \frac{d\varphi}{dC}\frac{d\varphi}{ds} + \varphi\frac{d^2\varphi}{ds\, dC} = 0.$$

Dieselbe ist aber identisch erfüllt, denn aus der Gleichung $\frac{ds}{dt} = \varphi$ folgt

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + \varphi\frac{d\varphi}{ds}$$

und indem man dies in die gegebene Gleichung $\frac{d^2s}{dt^2} = f(s, t)$ einsetzt, erhält man

$$\frac{d\varphi}{dt} + \varphi\frac{d\varphi}{ds} = f(s, t)$$

und weiter durch eine nochmalige Differentiation nach C

$$\frac{d^2\varphi}{dt\, dC} + \frac{d\varphi}{dC}\frac{d\varphi}{ds} + \varphi\frac{d^2\varphi}{ds\, dC} = 0,$$

welches genau die obige Bedingung für den integrirenden Factor ist. — Der hier gegebene Beweis rührt von Liouville her.

Die Gesetze der geradlinigen, wie der krummlinigen Bewegung eines Punktes wurden bereits 1686 von Newton in seinem Werke „*Principia philosophiae naturalis*“ mit Hülfe einer geometrischen Methode entwickelt. Das Gleichungssystem $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = \varphi$, welches Aufgaben über die geradlinige Bewegung zu lösen geeignet ist, mit den gleichbedeutenden Formeln $\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi$, $\frac{d\cdot\frac{1}{2}v^2}{dt} = \varphi$ findet sich zuerst bei

Varignon (*Mém. de l'Acad. des sciences de Paris, année* 1700 p. 20). Die letztgenannte Formel, nach welcher die Beschleunigung der Derivirten des halben Quadrates der Geschwindigkeit gleich ist, wurde von Daniel Bernoulli angezweifelt, welcher annahm, dass die Beschleunigung der Derivirten einer anderen Potenz der Geschwindigkeit, als der zweiten proportional sein könne (*Commentarii Academ. Petropol. a.* 1727, p. 136). Euler widerlegte in seiner *Mechanica*, T. I, p. 62 seqq. diese irrige Ansicht.

III. Capitel.

Probleme der krummlinigen Bewegung eines Punktes.

§. 1. Für die Projectionen einer beliebigen Bewegung eines Punktes auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen bestehen die Relationen $\frac{dx}{dt} = v_x$, $\frac{dy}{dt} = v_y$, $\frac{dz}{dt} = v_z$; $\frac{dv_x}{dt} = \varphi_x$, $\frac{dv_y}{dt} = \varphi_y$, $\frac{dv_z}{dt} = \varphi_z$. Treten zu diesen noch drei Gleichungen hinzu, durch welche die Grössen x, y, z, t, v_x, v_y, v_z, φ_x, φ_y, φ_z den individuellen Bedingungen der Bewegung gemäss beschränkt werden, so dient das System von Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \qquad \frac{dy}{dt} = v_y, \qquad \frac{dz}{dt} = v_z$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \varphi_x, \qquad \frac{dv_y}{dt} = \varphi_y, \qquad \frac{dv_z}{dt} = \varphi_z$$

$$\Phi_1 (x, y, z, t, v_x, v_y, v_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = 0$$

$$\Phi_2 (x, y, z, t, v_x, v_y, v_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = 0$$

$$\Phi_3 (x, y, z, t, v_x, v_y, v_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = 0$$

dazu, die Beschaffenheit der durch die Gleichungen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ näher bestimmten Bewegung analytisch zu untersuchen. Indem man die Grössen v_x, v_y, v_z, φ_x, φ_y, φ_z eliminirt, erhält man drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

vorausgesetzt, dass die Gleichungen $\Phi_x = 0$, ... nach den Componenten der Beschleunigung auflösbar sind. In diesen sind X, Y, Z als drei aus den Bedingungen der Bewegung abzuleitende Functionen von

$x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ anzusehen. Man nennt diese drei Gleichungen die Gleichungen der Bewegung des Punktes und gelangt durch ihre Integration zu den Componenten der Geschwindigkeit und den Coordinaten des beweglichen Punktes als Functionen der Zeit, während sie selbst die Componenten der Beschleunigung bestimmen. Die Integration dieser Gleichungen führt aber 6 willkührliche Constanten ein und wenn die Lösung der Aufgabe vollkommen allgemein sein soll, so muss sie dieselben nothwendig enthalten. Für die Bestimmung dieser Constanten müssen daher noch 6 numerische Bedingungen gegeben sein; dieselben findet man, sobald für irgend eine Zeit t_0 die Werthe der Coordinaten x_0, y_0, z_0 des beweglichen Punktes, also sein Ort und die Componenten seiner Geschwindigkeit $v_x^{(0)}, v_y^{(0)}, v_z^{(0)}$ bekannt sind. Gewöhnlich ist $t_0 = 0$ und sind also $x_0\, y_0\, z_0, v_x^{(0)}, v_y^{(0)}, v_z^{(0)}$ die Elemente, welche den sogenannten Anfangszustand der Bewegung bestimmen. Es kann der Fall eintreten, dass die Functionen X, Y, Z selbst noch unbekannte Bestandtheile enthalten; in diesen Fällen müssen noch weitere Bestimmungen vorhanden sein; derartige Fälle, zu welchen die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Bahn oder auf einer gegebenen Fläche gehören, schliessen wir hier vorläufig aus, weil wir wenigstens die beiden eben bezeichneten von ihnen in zwei besonderen Capiteln behandeln werden.

§. 2. Um die Nothwendigkeit der 6 Integrationsconstanten darzuthun, wollen wir das System der Differentialgleichungen zweiter Ordnung bilden, welchem durch 3 Gleichungen mit 6 Constanten $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ von der Form:

$$F_1\,(x, y, z, t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3) = 0$$
$$F_2\,(x, y, z, t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3) = 0$$
$$F_3\,(x, y, z, t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3) = 0$$

genügt wird. Denkt man diese Gleichungen nach x, y, z aufgelöst, wodurch sie die Form annehmen

$$x = f_1\,(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3)$$
$$y = f_2\,(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3)$$
$$z = f_3\,(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3),$$

so liefert eine zweimalige Differentiation derselben

$$\frac{dx}{dt} = f_1'\ (t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3)$$
$$\frac{dy}{dt} = f_2'\ (t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3)$$
$$\frac{dz}{dt} = f_3'\ (t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_1''(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = f_2''(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = f_3''(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3).$$

Aus diesen 6 und den drei ursprünglichen Gleichungen kann man nun aber die 6 Constanten C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3 eliminiren und es bleiben alsdann drei Gleichungen von der Form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Psi_1\left(x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \Psi_2\left(x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \Psi_3\left(x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

welche jene Grössen nicht mehr enthalten und die Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind, welchen die gegebenen Gleichungen als Integrale entsprechen. Hieraus erhellt also zunächst, dass die Integrale eines Systems dreier Differentialgleichungen der zweiten Ordnung sechs willkührliche Constanten enthalten können. Mehr als sechs können sie nicht enthalten, weil man aus 9 Gleichungen nur 6 Grössen eliminiren kann, wenn drei Gleichungen übrig bleiben sollen, welche frei von diesen sind und weil die Differentialgleichungen, welche durch die Combination der 9 Gleichungen wieder erhalten werden müssen, von ihnen frei sind. Weniger können sie auch nicht enthalten, weil sie sonst nicht die allgemeinen Lösungen darstellen würden, da eben bewiesen wurde, dass die Integrale 6 solche Constante enthalten können. Da die ursprünglichen Functionen F_1, F_2, F_3 willkührlich waren, so sind es folglich auch die aus ihnen abgeleiteten Functionen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 und ist der Beweis allgemein, da die Existenz der Integrale der Differentialgleichungen anderweitig feststeht.

§. 3. Um nun das System der Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

zu integriren, sucht man aus ihnen solche Combinationen zu bilden, welche die Form haben $\frac{d \cdot \psi}{dt} = 0$, d. h. deren eine Seite Null ist, während die andere ein vollständiges Differential einer Function von

$x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ enthält. Gesetzt, man habe drei solche Combinationen ψ_1, ψ_2, ψ_3 gefunden, für welche also

$$\frac{d \cdot \psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d \cdot \psi_2}{dt} = 0, \quad \frac{d \cdot \psi_3}{dt} = 0,$$

so können sie die gegebenen Bewegungsgleichungen vertreten und liefern durch ihre Integration die sogenannten drei ersten Integrale derselben, nämlich:

$$\psi_1 = D_1, \quad \psi_2 = D_2, \quad \psi_3 = D_3.$$

Aus ihnen würde man ziehen können:

$$\frac{dx}{dt} = \Psi_1 (x, y, z, t, D_1, D_2, D_3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \Psi_2 (x, y, z, t, D_1, D_2, D_3)$$

$$\frac{dz}{dt} = \Psi_3 (x, y, z, t, D_1, D_2, D_3)$$

Diese Gleichungen enthalten bereits 3 der willkührlichen Constanten. Bildet man nun aus ihnen drei neue Combinationen Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 von derselben Beschaffenheit, wie vorher, nämlich so, dass

$$\frac{d \cdot \Xi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d \cdot \Xi_2}{dt} = 0, \quad \frac{d \cdot \Xi_3}{dt} = 0,$$

so können sie diese drei ersten Integrale ersetzen und liefern durch ihre Integration die drei zweiten Integrale der Bewegungsgleichungen, nämlich:

$$\Xi_1 = C_1, \quad \Xi_2 = C_2, \quad \Xi_3 = C_3,$$

welche jetzt die 6 willkührlichen Constanten enthalten. Für die Bestimmung der Constanten hat man die Gleichungen:

$$\psi_1 (x_0, y_0, z_0, t_0, v_x^0, v_y^0, v_z^0) = D_1$$

$$\psi_2 (x_0, y_0, z_0, t_0, v_x^0, v_y^0, v_z^0) = D_2$$

$$\psi_3 (x_0, y_0, z_0, t_0, v_x^0, v_y^0, v_z^0) = D_3$$

$$\Xi_1 (x_0, y_0, z_0, t_0, D_1, D_2, D_3) = C_1$$

$$\Xi_2 (x_0, y_0, z_0, t_0, D_1, D_2, D_3) = C_2$$

$$\Xi_3 (x_0, y_0, z_0, t_0, D_1, D_2, D_3) = C_3 .$$

Die Hauptschwierigkeit der Integration der Bewegungsgleichungen beruht in der Auffindung der Functionen $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3$. Hierfür dienen in vielen Fällen einige Sätze, welche den Namen der „Principe der Bewegung“ führen. Diese Principe sind: 1) das Princip der Flächen, 2) das Princip der lebendigen Kraft, 3) das Princip des letzten Multiplicators. Die beiden ersten sind nichts anderes als analytische Einkleidungen spezieller Fälle der Sätze über die Flächen und die Arbeit der Beschleunigung, welche wir im I. Cap.

entwickelt haben, das dritte ist weit allgemeinerer Natur und von Jacobi gefunden worden. Diesen Principen kann man ein weiteres anreihen, welches aber kein Integral der Bewegungsgleichungen, sondern nur einen anderen Ausdruck derselben gibt, das von Maupertuis bemerkte, mit dem nicht zu rechtfertigenden Namen belegte „Princip der kleinsten Wirkung".

Es braucht kaum erinnert zu werden, dass man die drei Bewegungsgleichungen auch ersetzen kann durch die andern

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi_{,}, \quad \frac{v^2}{\varrho} = \varphi_{,,},$$

welchen man die Ausdrücke für ϱ und die Richtungen der Tangente und Hauptnormale zuzufügen hat. Auf diese Weise behandelte man früher die Bewegungsprobleme, bevor Maclaurin die oben gegebenen Gleichungen $\frac{d^2x}{dt^2} = X$, u. s. w. aufstellte (*Treatise of Fluxions*, 1742.).

Endlich bemerken wir noch, dass für den Fall einer ebenen Bewegung, wenn man die Ebene derselben zu einer Coordinatenebene wählt, die drei Gleichungen der Bewegung sich auf zwei reduciren. Wählt man z. B. die Ebene der Bewegung zur xy-Ebene, so ist die dritte Bewegungsgleichung von selbst erfüllt, indem die Beschleunigung in der Richtung der z-Axe keine Componente besitzt und z zu jeder Zeit Null ist.

§. 4. Um zu dem Princip der Flächen zu gelangen, combinirt man die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

so mit einander, dass man die zweite mit z und die dritte mit y multiplicirt und die Resultate subtrahirt, ebenso die dritte mit x und die erste mit z multiplicirt und hierauf von einander subtrahirt und endlich mit der ersten und zweiten nach der Multiplication mit y und x ebenso verfährt. So erhält man

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = yZ - zY$$
$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = zX - xZ$$
$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = xY - yX.$$

In diesen Gleichungen, welche rechts und links des Gleichheitszeichens die Determinantenbildungen

$$\begin{vmatrix} y & z \\ \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z & x \\ \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{d^2x}{dt^2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}$$

zeigen, sind die linken Seiten vollständige Differentialquotienten, so dass sich die Gleichungen auch so schreiben lassen:

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = yZ - zY$$

$$\frac{d}{dt}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = zX - xZ$$

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = xY - yX.$$

Ist nun die Beschleunigung φ so beschaffen, dass zwischen den Coordinaten x, y, z und ihren Componenten X, Y, Z eine oder zwei oder drei der Gleichungen

$$yZ - zY = 0$$

$$zX - xZ = 0$$

$$xY - yX = 0$$

erfüllt sind, so liefert die Integration jener Gleichungscombinationen unmittelbar ein oder zwei oder drei erste Integrale der Bewegungsgleichungen, nämlich

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = D_1$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = D_2$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = D_3\,.$$

Jene drei Bedingungsgleichungen sind nicht von einander unabhängig, vielmehr ist jede eine Folge der beiden andern; so ist z. B. die dritte eine Folge der beiden ersten, wie man sieht, wenn man die erste mit x, die zweite mit y multiplicirt und sie hierauf von einander subtrahirt. Daher erhält man durch die fragliche Combination der Bewegungsgleichungen entweder ein oder zwei erste Integrale. Die Bedeutung der Bedingungsgleichungen liegt am Tage. Die dritte z. B. ist identisch mit der Proportion:

$$\frac{X}{Y} = \frac{x}{y}$$

und spricht eine Eigenschaft der Projection der Bewegung auf die xy-Ebene aus. Die Projection φ_{xy} der Beschleunigung φ, deren Componenten X, Y, Z sind, auf diese Ebene ist nämlich die Diagonale eines Parallelogramms von den Seiten X, Y; ebenso ist die Projection des Radiusvectors vom Ursprung der Coordinaten auf die xy-Ebene die Diagonale des über den Coordinaten x, y construirten Parallelogramms.

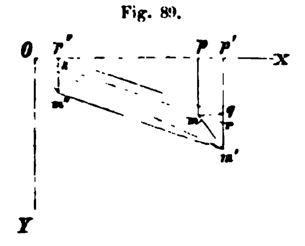
Die vorliegende Bedingung drückt daher aus, dass beide Linien zusammenfallen, d. h. dass die Projection der Beschleunigung auf die xy-Ebene durch den Coordinatenursprung hindurchlaufe und also die Richtung der Beschleunigung φ fortwährend die z-Axe schneide. Aehnliches bedeutet jene der beiden anderen Bedingungsgleichungen und sieht man ein, wie es kommt, dass, wenn zwei von ihnen erfüllt sind, die dritte gleichfalls erfüllt ist. Denn wenn die Projection der Beschleunigung auf zwei Coordinatenebenen durch den Ursprung geht, so geht auch ihre Projection auf die dritte Coordinatenebene durch denselben Punkt. Sind zwei, also alle drei der Bedingungen erfüllt, so geht die Richtung der Beschleunigung selbst durch den Ursprung, d. h. also überhaupt durch einen festen Punkt und ist die Bewegung eine sogenannte Centralbewegung. In diesem Falle ist die Bahn des beweglichen Punktes immer eine ebene Curve, deren Ebene durch das Centrum hindurchgeht. Dies erhellt, wenn man die drei ersten Integrale der Bewegungsgleichungen mit x, y, z der Reihe nach multiplicirt und addirt, wodurch man erhält

$$D_1 x + D_2 y + D_3 z = 0,$$

welches die Gleichung einer Ebene ist, welche von den Coordinaten x, y, z des beweglichen Punktes unabhängig von der Zeit erfüllt wird, in welcher Ebene sich mithin dieser Punkt bewegen muss. Hieraus erhellt zugleich die Bedeutung der drei Constanten D_1, D_2, D_3, welche in den ersten Integralen der Bewegungsgleichungen vorkommen. Sie sind proportional den Cosinussen der Winkel, welche die Normale auf die Ebene der Bewegung mit den Coordinatenaxen bildet.

Es ist leicht, die Bedeutung der ersten Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung in unserem Falle vollständig zu erkennen. Das dritte dieser Integrale z. B. lässt sich so schreiben: $x dy - y dx = D_3 dt$ und wenn (Fig. 89.) die Punkte m, m' die Projectionen des beweglichen Punktes M auf die xy-Ebene zu den Zeiten t und $t + dt$ darstellen, also $Op = x$, $pm = y$, $Op' = x + dx$, $p'm' = y + dy$ ist, so ergänze man den unendlichkleinen dreieckigen Sektor omm', welcher von den Projectionen der Radienvectoren OM, OM' und der Projection des Bogenelementes MM' gebildet wird, zu dem Parallelogramm $Omm'm''$ und ziehe $m''p''$ parallel der y-Axe. Dann stellt $xdy = Op \cdot qm' = p'p'' \cdot qm'$ den Inhalt des Parallelogramms $m''p''qm'$ dar; in ähnlicher Weise bedeutet $ydx = mp \cdot pp' = mp \cdot Op''$ den Inhalt des Parallelogramms $Op''qm$, das an Grösse mit dem Parallelogramme $sp''qr$ übereinkommt. Daher ist $xdy - ydx = m''p''qm' - sp''qr = m''srm' = Omm'm''$, d. h. es ist

Fig. 89.



$$xdy - ydx = 2 \cdot \triangle Omm'$$

und stellt also diese Grösse den doppelten Sector dar, welchen die Projection des Radiusvectors auf die xy-Ebene in dem Zeitelemente durchstreift. Ist daher $S - S_0$ der in der Zeit $t - t_0$ von dem Radiusvector selbst durchlaufene Sector, ist dS das Differential desselben und bedeuten dS_z, dS_x, dS_y die Projectionen von dS auf die xy-, yz- und zx-Ebene, welche selbst Differentialien der Projectionen $S_z - S_z^{(0)}$, $S_x - S_x^{(0)}$, $S_y - S_y^{(0)}$ von $S - S_0$ sind, so kann man die drei ersten Integrale der Bewegungsgleichungen so schreiben:

$$\frac{dS_x}{dt} = \tfrac{1}{2} D_1$$
$$\frac{dS_y}{dt} = \tfrac{1}{2} D_2$$
$$\frac{dS_z}{dt} = \tfrac{1}{2} D_3 .$$

Sie drücken also aus, dass, wenn für die Projection der Bewegung auf eine Ebene die Beschleunigung durch einen festen Punkt geht, die Sectorengeschwindigkeit der Projectionsbewegung (Vgl. Cap. IV, §. 13 im II. Thle.) in Bezug auf diesen Punkt constant ist. Findet dies für die Projectionen auf zwei Coordinatenebenen statt, so folgt es von selbst für die dritte und da $dS^2 = dS_x^2 + dS_y^2 + dS_z^2$ ist, so gilt dasselbe für die Hauptbewegung selbst, so dass

$$\frac{dS}{dt} = \tfrac{1}{2}\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2} .$$

Die Grössen D_1, D_2, D_3 bedeuten ausserdem die doppelten in der Zeiteinheit von den Projectionen des Radiusvectors durchlaufenen Sectoren.

Aus den so interpretirten Gleichungen erhält man nun auch zweite Integrale der Bewegungsgleichungen, nämlich:

$$S_x = C_1 + \tfrac{1}{2} D_1 t$$
$$S_y = C_2 + \tfrac{1}{2} D_2 t$$
$$S_z = C_3 + \tfrac{1}{2} D_3 t,$$

deren Constanten C_1, C_2, C_3 für $t = t_0$ mit Hülfe der Sectorenwerthe $S_x^{(0)}$, $S_y^{(0)}$, $S_z^{(0)}$ bestimmt werden, so dass also schliesslich

$$S_x - S_x^{(0)} = \tfrac{1}{2} D_1 (t - t_0)$$
$$S_y - S_y^{(0)} = \tfrac{1}{2} D_2 (t - t_0)$$
$$S_z - S_z^{(0)} = \tfrac{1}{2} D_3 (t - t_0)$$

und

$$S - S_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2} \cdot (t - t_0)$$

wird. Die zweiten Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung bedeuten also in dem vorliegenden Falle, dass der von der Projection des Radiusvectors durchlaufene Sector der Zeit proportional ist, in welcher er beschrieben wird.

Aus diesen Entwickelungen geht hervor, dass der Satz:

„Wenn für die Bewegung eines Punktes zwischen den Componenten X, Y, Z seiner Beschleunigung parallel drei rechtwinkligen Axen und den Coordinaten x, y, z desselben eine oder zwei der drei Relationen $yZ - zY = 0$, $zX - xZ = 0$, $xY - yX = 0$ bestehen, so können ebensoviel Integrale der Bewegungsgleichungen gefunden werden"
mit Recht den Namen des „Princips der Flächen" führt.

Umgekehrt kann man zeigen, dass, wenn für die Projection der Bewegung auf eine Ebene das Princip der Flächen gilt, die Projection der Beschleunigung auf diese Ebene durch den Coordinatenursprung geht. Denn ist z. B. $S_z - S_z^{(0)} = \alpha(t - t_0)$, so folgt durch Differentiation

$$x\,dy - y\,dx = \alpha\,dt \text{ und } x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \text{ d. h. } \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{d^2y}{dt^2}} = \frac{x}{y}, \text{ oder}$$

$\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y} = \dfrac{x}{y}$, woraus das Behauptete hervorgeht.

§. 5. Um zu dem Princip der lebendigen Kraft zu gelangen, combiniren wir die Differentialgleichungen der Bewegung $\frac{d^2x}{dt^2} = X$, $\frac{d^2y}{dt^2} = Y$, $\frac{d^2z}{dt^2} = Z$ dadurch, dass wir sie der Reihe nach mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ multipliciren und addiren; dies liefert uns

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber der Differentialquotient nach t von

$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = \tfrac{1}{2}v^2,$$

daher kann man die Gleichung so schreiben:

$$\frac{d\cdot\frac{1}{2}v^2}{dt} - \left\{X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right\} = 0.$$

Ist nun U irgend eine Function von x, y, z und sind diese Variabeln selbst wieder Functionen von t, während U die Grösse t selbst nicht explicit enthält, so liefert die Differentiation von U nach t

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Diese Form hat der in unserer Gleichung enthaltene Ausdruck

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt};$$

enthalten also die Componenten X, Y, Z blos die Coordinaten x, y, z

nicht aber die Zeit explicit und sind X, Y, Z die Differentialquotienten ein und derselben Function U, partiell genommen nach x, y, z, so dass

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

so wird

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

und mithin geht unsere Combination der Bewegungsgleichungen über in

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}v^2 - U\right)}{dt} = 0.$$

Sie liefert daher ein Integral derselben, nämlich

$$\tfrac{1}{2}v^2 - U = h$$

worin die Constante h durch die Werthe v_0, U_0 bestimmt wird, welche die Geschwindigkeit v und die Function U für die Coordinaten x_0, y_0, z_0 irgend einer Stelle der Bahn des beweglichen Punktes annehmen. Hiernach ist

$$\tfrac{1}{2}{v_0}^2 - U_0 = h$$

und folglich das gefundene Integral mit bestimmter Constante

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}{v_0}^2 = U - U_0.$$

Wir haben daher den überaus wichtigen Satz:

Wenn die Componenten X, Y, Z die Zeit nicht explicit enthalten und eine Function U existirt, von welcher sie die partiellen Differentialquotienten resp. nach den Coordinaten x, y, z genommen sind, so stellt die Gleichung $\frac{1}{2}v^2 = U + h$ ein Integral der Bewegungsgleichungen dar.

Die Bedingungen der Existenz der Function U sind bekanntlich

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$$

und sie selbst wird gefunden als das Integral des vollständigen Differentiales $Xdx + Ydy + Zdz$.

Die Bedeutung des gewonnenen Integrales liegt auf der Hand. Es sind dx, dy, dz die Projectionen des Elementarweges ds des beweglichen Punktes auf die Richtungen der Beschleunigungscomponenten X, Y, Z, daher sind Xdx, Ydy, Zdz die Elementararbeiten derselben und mithin ist $Xdx + Ydy + Zdz$ die Elementararbeit ihrer Resultanten, d. h. die Elementararbeit der Beschleunigung φ. Es ist aber $Xdx + Ydy + Zdz = dU$, daher ist U die Function, deren totales Differential in Bezug auf die Coordinaten x, y, z die Elementararbeit der Beschleunigung darstellt, folglich ist $U - U_0$ selbst die totale Arbeit der Beschleunigung längs des Weges, auf welchem der Punkt von der Stelle $(x_0\ y_0\ z_0)$ zu der Stelle (x, y, z) gelangt. Demnach drückt das Integral in der Form $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}{v_0}^2 = U - U_0$ nichts anderes aus, als den in Cap. I. §. 15. entwickelten Satz über die Arbeit der Beschleunigung.

Die Function U wird mit Rücksicht auf ihre Bedeutung für die Theorie der Kräfte die **Kräftefunction** genannt. In Folge einer nicht gerade sehr glücklich gewählten Bezeichnung von **Leibnitz**, deren Sinn gleichfalls erst in der Theorie der Kräfte erläutert werden wird, führt der obige Satz den Namen des **Princips der lebendigen Kraft**; zweckmässiger dürfte er das „**Princip der Arbeit**" heissen.

In dem besonderen Falle, dass $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ ist, welcher eintritt, wenn entweder die Beschleunigung Null, also $X = Y = Z = 0$ oder normal zur Bahn des Punktes ist, reducirt sich U auf eine Constante und bleibt in Folge dessen die Geschwindigkeit constant; in diesem Falle nennt man das Princip vielfach „**Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.**"

§. 6. Die Kräftefunction U ist eine Function der Coordinaten x, y, z; denkt man sich die Coordinaten aller Punkte des Raumes in sie eingesetzt, so nimmt sie verschiedene Werthe an; der Werth derselben, welcher den Coordinaten eines bestimmten Punktes entspricht, heisst der Werth der Kräftefunction in jenem Punkte. Im Allgemeinen ändert dieselbe ihren Werth von Punkt zu Punkt. Alle Punkte des Raumes, in welchen die Kräftefunction U denselben Werth c besitzt, liegen auf einer Fläche $U = c$, welche eine **Niveaufläche** heisst. Lässt man die Constante c nach und nach alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhält man die ganze Schaar der Niveauflächen des Problems. Die Flächen dieser Schaar schneiden sich im Allgemeinen nicht, weil sonst für die gemeinschaftlichen Punkte zweier solcher Flächen U zwei verschiedene Werthe annehmen müsste, nämlich den Werth c, welcher der ersten und den Werth $c + \varDelta c$, welcher der zweiten entspricht. Das System der Niveauflächen erzeugt daher keine Enveloppe und sind zwei unmittelbare Flächen desselben als parallele Flächen anzusehen. Durch jeden Punkt des Raumes geht im Allgemeinen eine solche Niveaufläche und durch sie wird die Beschleunigung eines beweglichen Punktes an jenem Orte bestimmt; denn die Componenten derselben sind die Werthe, welche die partiellen Differentialquotienten der Kräftefunction U in jenem Orte annehmen. Sind also x, y, z die Coordinaten des Punktes, so ist die Beschleunigung

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

und ihre Richtung (lmn) wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{\cos l}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\cos m}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\cos n}{\frac{\partial U}{\partial z}} = \frac{1}{\varphi}.$$

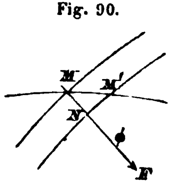
Dies sind aber die Gleichungen für die Richtung der Normalen der

Niveaufläche $U = c$, welche durch den Punkt x, y, z geht. Daher besteht der Satz:

Bei jeder Bewegung eines Punktes, für welche eine Kräftefunction existirt, ist die Beschleunigung des beweglichen Punktes in jedem Punkte der Bahn normal zu der Niveaufläche, welche durch denselben hindurchgeht.

Während der bewegliche Punkt seine Bahn beschreibt, geht er continuirlich von einer Niveaufläche zur anderen über, die Richtung seiner Geschwindigkeit trifft dabei die Niveaufläche im Allgemeinen unter veränderlichem Winkel, aber die Richtung der Beschleunigung ist immer senkrecht zu der jedesmaligen Niveaufläche. Es sei (Fig. 90.) $MM' = ds$ das Bogenelement der Bahn zwischen zwei unendlich nahen Niveauflächen, MF die Richtung der Normalen in M und N deren Schnittpunkt mit der zweiten Niveaufläche und stelle die Länge MF die Beschleunigung φ dar. Das unendlichkleine Dreieck MNM' ist bei N rechtwinklig, mithin ist MN die Projection des Bogenelementes MM' auf die Richtung der Beschleunigung und folglich $MF \cdot MN$ die Elementararbeit der Beschleunigung. Daher ist

Fig. 90.



$$d \cdot \tfrac{1}{2} v^2 = \varphi \cdot \overline{MN} = dU,$$

d. h. Beim Uebergange des Punktes von einer Niveaufläche zur unmittelbar folgenden ist die Aenderung des halben Quadrates der Geschwindigkeit proportional der Dicke der Schicht zwischen beiden Niveauflächen, gemessen in der Richtung der Normalen des Punktes, von welchem aus der Uebergang erfolgt; diese Aenderung ist von der Richtung, in welcher der Punkt die Schicht durchdringt, unabhängig. Die Elementararbeit der Beschleunigung ist der Dicke der Schicht direct, die Beschleunigung ihr umgekehrt proportional.

Die Gleichung
$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = U - U_0$$
zeigt, dass die Geschwindigkeit v jedesmal denselben Werth annimmt, sobald dies mit der Kräftefunction der Fall ist. So oft daher der bewegliche Punkt im Laufe seiner Bewegung dieselbe Niveaufläche erreicht, hat er auch immer dieselbe Geschwindigkeit. Wenn also der Punkt von einer Stelle M_0 zu einer Stelle M gelangt, so ist die erlangte Geschwindigkeit von der Länge und der Form des Weges, auf welchem er dahin gelangt, unabhängig.

§. 7. Man kann eine Reihe von Fällen von vornherein bezeichnen, in welchen eine Kräftefunction existirt, also $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollständiges Differential ist. Sie sind folgende:

1) Wenn die Richtung der Beschleunigung zu einer festen Ebene senkrecht und ihre Grösse eine Function der Entfernung des beweglichen Punktes von dieser Ebene ist. Sind nämlich α, β, γ die Winkel, welche die Beschleunigungsrichtung mit den Axen bildet und ist ϱ der Abstand des Punktes x, y, z von der gegebenen Ebene $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$ so hat man $X = f(\varrho) \cos\alpha$, $Y = f(\varrho) \cos\beta$, $Z = f(\varrho) \cos\gamma$, mithin

$$Xdx + Ydy + Zdz = f(\varrho)\left\{\cos\alpha \cdot dx + \cos\beta \cdot dy + \cos\gamma \cdot dz\right\}.$$

Es ist aber $-\varrho = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p$, mithin $\cos\alpha \cdot dx + \cos\beta \cdot dy + \cos\gamma \cdot dz = - d\varrho$ und daher weiter $Xdx + Ydy + Zdz = - f(\varrho)\, d\varrho$ ein vollständiges Differential von $U = -\int f(\varrho)\, d\varrho = \Phi(\varrho) + h$. Die Niveauflächen sind in dem vorliegenden Falle Ebenen, parallel der gegebenen Ebene. Denn aus $\Phi(\varrho) + h = Const.$ folgt $\varrho = C$ d. h. $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = C$.

2) Ein spezieller Fall des vorigen allgemeineren verdient besondere Erwähnung, nämlich der Fall, dass die Beschleunigung constant ist nach Richtung und Grösse, wie dies bei der Beschleunigung der Schwere eintritt. Wählt man die Richtung der Beschleunigung zur Richtung der positiven z-Axe und bezeichnet ihre Grösse mit g, so wird $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$, $dU = gdz$, $U = gz + h$, $U - U_0 = g(z - z_0)$, $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = g(z - z_0)$. Die Niveauflächen sind Ebenen $z = c$.

3) Die Beschleunigung ist fortwährend nach einem festen Centrum gerichtet und eine Function der Entfernung des beweglichen Punktes von diesem. Sind die Coordinaten jenes Centrums a, b, c, die des beweglichen Punktes x, y, z und ist r die Entfernung beider, so dass $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$, so wird $Xdx + Ydy + Zdz$ $= - F(r) \left\{\frac{x - a}{r} dx + \frac{y - b}{r} dy + \frac{z - c}{r} dz\right\}$, oder da $r dr = (x - a) dx$ $+ (y - b) dy + (z - c) dz$ ist, $X dx + Y dy + Z dz = F(r) dr$, $U = - \int F(r) dr = \Phi(r) + h$. Die Niveauflächen sind Kugeln $r = C$, beschrieben um das Centrum, durch welches die Richtung der Beschleunigung hindurchgeht. Ist die Beschleunigung nicht nach dem Centrum hin, sondern von diesem ab gerichtet, so genügt eine Aenderung des Zeichens vor $F(r)$. Man erhält dieselben Resultate direct aus Fig. 91., in welcher O das feste Centrum, $MM' = ds$ das Bogenelement der Bahn ist. Die Projection MN desselben auf die Beschleunigungsrichtung ist $MN = dr$ und folglich die Elementararbeit bei wachsendem r gleich $- F(r) dr$. Diese wird aber nach dem Früheren durch $Xdx + Ydy + Zdz$ dargestellt.

Fig. 91.

4) Die Beschleunigung ist die Resultante mehrerer anderer Beschleunigungen, welche nach festen Centris gerichtet sind. In diesem

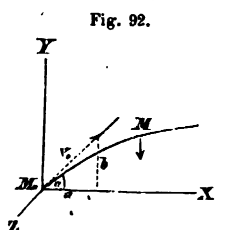
Falle bildet sich $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ aus einer Summe $\pm F(r)\,dr \pm F_1(r_1)\,dr_1 \pm \ldots = \Sigma \pm F(r)\,dr$ u. s. w.

Bevor wir zur Entwickelung der übrigen Principe der Bewegung fortschreiten, wollen wir zunächst eine Reihe von Problemen der krummlinigen Bewegung behandeln und an ihnen die Anwendung der Principe der Flächen und der lebendigen Kraft erläutern.

§. 8. **Die parabolische Bewegung eines Punktes.** Ein Punkt ist einer Beschleunigung von constanter Grösse und Richtung unterworfen; seine Anfangslage, sowie seine Anfangsgeschwindigkeit und deren Richtung sind bekannt; welches wird die Beschaffenheit seiner Bewegung sein?

Dieser Bewegung folgt ein Punkt, welcher unter gegebener Neigung gegen den Horizont im leeren Raume geschleudert wird. Da die Allgemeinheit der Untersuchung nicht dadurch beeinträchtigt wird, so wollen wir die spezielle Voraussetzung eines schweren Punktes dem Folgenden zu Grunde legen. Es sei also die Beschleunigung φ gleich der vertikal abwärts gerichteten Beschleunigung g der Schwere und bilde ferner die Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit dem Horizonte den Winkel α. Die Anfangslage M_0 des beweglichen Punktes sei der Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z und zwar sei die xy-Ebene die Vertikalebene, welche die Richtung von v_0 enthält, die y-Axe vertikal und positiv nach oben gerichtet, die x-Axe sei der horizontale Schenkel des Winkels α und die z-Axe also gleichfalls horizontal (Fig. 92.). Die Componenten der Beschleunigung φ sind demnach $X = 0$, $Y = -g$, $Z = 0$ und die Gleichungen der Bewegung:

Fig. 92.



$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Die Integration derselben ergibt unmittelbar

$$\frac{dx}{dt} = v_x = D_1, \qquad \frac{dy}{dt} = v_y = D_2 - gt, \qquad \frac{dz}{dt} = D_3$$

$$x = C_1 + D_1 t, \qquad y = C_2 + D_2 t - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad z = C_3 + D_3 t.$$

Sind nun a, b, 0 die Componenten $v_0 \cos\alpha$, $v_0 \sin\alpha$, 0 der Anfangsgeschwindigkeit, so liefern die Bedingungen

$$x = y = z = 0, \quad v_x = a, \quad v_y = b, \quad v_z = 0 \text{ für } t = 0$$

zur Bestimmung der 6 Constanten $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ die Gleichungen

$$a = D_1, \quad b = D_2, \quad 0 = D_3; \qquad 0 = C_1 = C_2 = C_3$$

und damit als Lösung des Problems das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} x = at & v_x = a \\ y = bt - \tfrac{1}{2}gt^2 & v_y = b - gt \\ z = 0 & v_z = 0\,. \end{array}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich nachstehende Folgerungen:

1. Die Bewegung erfolgt in der durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit geführten Vertikalebene. Denn es ist für jeden Werth von t die Coordinate $z = 0$. Die Horizontalprojection der Bewegung ist eine gleichförmige geradlinige Bewegung von der Geschwindigkeit $a = v_0 \cos\alpha$; die Projection der Bewegung auf die Vertikale ist gleichförmig veränderlich.

2. Die Gleichung der Bahn, welche man durch Elimination von t zwischen den Ausdrücken für x und y erhält, ist

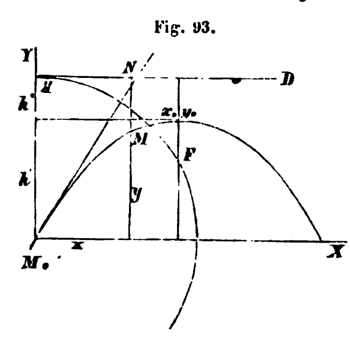


Fig. 93.

$$x^2 - \frac{2ab}{g}x + 2\frac{a^2}{g}y = 0.$$

Die Bahn ist daher eine Parabel (Fig. 93.), welche die Horizontale der Anfangslage, nämlich die x-Axe, in den Punkten $x = 0$ und $x = \frac{2ab}{g}$ schneidet. Die Axe der Parabel ist vertikal und ihr Scheitel hat die Coordinaten

$$x_0 = \frac{ab}{g}, \quad y_0 = \frac{b^2}{2g}$$

wie man erkennt, wenn man die Gleichung auf die Form

$$\left(x - \frac{ab}{g}\right)^2 = -\frac{2a^2}{g}\left(y - \frac{b^2}{2g}\right)$$

bringt. Verlegt man daher den Ursprung des Coordinatensystems in den Scheitel und kehrt den positiven Sinn der y-Axe um, d. h. setzt man $x + \frac{ab}{g}$ und $-\left(y - \frac{b^2}{2g}\right)$ an die Stelle von x und y, so erhält man als Scheitelgleichung der Parabel:

$$x^2 = \frac{2a^2}{g} \cdot y.$$

Der Parameter der Parabel ist demnach $\frac{2a^2}{g}$ und da die Directrix um den vierten Theil des Parameters vom Scheitel absteht, so läuft sie in der Höhe $y_0 + \frac{a^2}{2g} = \frac{a^2 + b^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$ mit der Hozizontalen parallel. Da diese Höhe blos von v_0, nicht aber von der Neigung α von v_0 gegen den Horizont abhängt, so folgt, dass alle Parabeln, welche von demselben Anfangspunkte aus mit derselben Anfangsgeschwindigkeit unter den verschiedenen Wurfwinkeln von einem schweren Punkte beschrieben werden können, die Directrix gemein haben. Die Höhe $\frac{v_0^2}{2g}$ der Directrix über dem Horizonte ist die Höhe, zu welcher der bewegliche Punkt vermöge der Anfangsgeschwindigkeit v_0 vertikal aufsteigen könnte.

Setzt man $h' = \frac{a^2}{2g}$, $h'' = \frac{b^2}{2g}$, $h = \frac{v_0^2}{2g}$, wo h', h'', h die drei Höhen bezeichnen, zu welchen der Punkt vertikal aufsteigen könnte mit den Geschwindigkeiten a, b und v_0, so erhält man für die Entfernung, in welcher der Punkt die Horizontale der Anfangslage trifft, oder die Wurfweite w, für die Höhe $y_0 = h''$ des Scheitels über dem Horizonte, oder die Wurfhöhe, den Parameter $2p$ der Parabel und die Höhe h der Directrix die Formeln:

$$w = \frac{2ab}{g} = 2\sqrt{h'h''}, \quad h'' = \frac{b^2}{2g}, \quad p = \frac{a^2}{g} = 2h', \quad h = h' + h''.$$

4. Quadrirt und addirt man die Ausdrücke $v_x = a$, $v_y = b - gt$, so erhält man für die Geschwindigkeit v mit Rücksicht auf $v_0^2 = a^2 + b^2$ und $y = bt - \frac{1}{2}gt^2$:

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = -gy.$$

Diese Gleichung spricht das Princip der lebendigen Kraft aus; nach §. 7. existirt nämlich eine Kräftefunction. Sie ist $U = -gy + C$, da wegen $X = 0$, $Y = -$.

$Z=0$, $dU = -g\,dy$ wird. $-g\,dy$ drückt die Elementararbeit und $-gy$ die totale Arbeit der Schwere längs des Weges von der Ordinate Null bis zur Ordinate y aus. Die Elementararbeit $-g\,dy$ ist negativ, so lange der Punkt steigt, positiv, während er fällt, denn im ersteren Falle ist dy positiv, im letzteren negativ. Die Niveauflächen des Problems sind Horizontalebenen und in den beiden Schnittpunkten einer jeden derselben mit der Bahn besitzt die Geschwindigkeit gleichen Werth, wenn auch verschiedene Richtung. Schreibt man die Gleichung der lebendigen Kraft in der Form: $v^2 = 2g\left(\frac{v_0^2}{2g} - y\right) = 2g(h-y)$, so erkennt man, dass die Geschwindigkeit in den einzelnen Punkten der Bahn dieselbe ist, als ob der Punkt von der Directrix bis zu der betreffenden Stelle der Bahn gefallen wäre.

4. Die **Flugzeit**, d. h. die Zeit, während welcher die Horizontalprojection des beweglichen Punktes die Wurfweite $w = \frac{2ab}{g}$ zurücklegt und zu deren Ende der Punkt auf die Horizontalebene der Anfangslage auffällt, wird erhalten, indem man w durch die Geschwindigkeit a der Horizontalprojection dividirt. Sie ist demnach $t_0 = \frac{2b}{g} = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha$, also dem Sinus des Elevationswinkels proportional.

Um die Flugzeit bis zum Auffallen des Punktes auf eine durch die Anfangslage senkrecht zur Bahnebene und gegen den Horizont unter einem Winkel β geführten Ebene zu finden, hat man zu combiniren die Gleichungen:

$$y = x\,tg\beta, \qquad x = at, \qquad y = bt - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

woraus die gesuchte Zeit t_1 folgt, nämlich $t_1 = \frac{2b - a\,tg\beta}{g}$, welche mit Hülfe von $a = v_0\cos\alpha$, $b = v_0\sin\alpha$ auf die Form

$$t_1 = \frac{2v_0}{g}\,\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}$$

gebracht werden kann.

5. Für die **Wurfweite** w erhielten wir

$$w = \frac{2ab}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Bei constantem v_0 wird dieselbe ein Maximum für $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$, d. h. für $\alpha = \frac{1}{4}\pi$. Für zwei Winkel α' und α'', welche sich zu $\frac{\pi}{2}$ ergänzen, ergeben sich gleich grosse Wurfweiten. Denn wenn $\alpha' + \alpha'' = \frac{1}{2}\pi$, so wird $\sin 2\alpha' = \sin 2(\frac{1}{2}\pi - \alpha'') = \sin 2\alpha''$.

Für die Wurfweite w_1 auf einer unter dem Winkel β gegen den Horizont geneigten Ebene $y = x\,tg\beta$, erhält man, wenn x_1 die Abscisse des Punktes ist, in welchem diese Ebene von der Flugbahn getroffen wird:

$$w_1 = \frac{x_1}{\cos\beta};$$

x_1 ergibt sich aber durch Elimination von t aus den Gleichungen unter Nr. 4.; nämlich

$$x_1 = \frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}$$

und hiermit wird

$$w_1 = \frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta}.$$

Diese Grösse wird bei constantem v_0 ein Maximum für

$$\alpha = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\beta.$$

Die Richtung dieses Wurfes bildet mithin mit der Vertikalen den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \alpha = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - \beta)$ und halbirt also den Winkel, welchen die geneigte Ebene mit der Vertikalen bildet.

Für zwei Winkel α' und α'', welche sich zu $\frac{1}{2}\pi + \beta$ ergänzen, werden die entsprechenden Wurfweiten gleich gross. Denn aus $\alpha' + \alpha'' = \frac{1}{2}\pi + \beta$ folgt $\cos\alpha'' = \cos(\frac{1}{2}\pi + \beta - \alpha') = \sin(\alpha' - \beta)$ und $\sin(\alpha'' - \beta) = \sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha') = \cos\alpha'$, mithin $\cos\alpha'' \sin(\alpha'' - \beta) = \cos\alpha' \sin(\alpha' - \beta)$ u. s. w. Von beiden Winkeln liegt der eine um ebensoviel über jenem Maximalwerthe $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\beta$, als der andere unter demselben; denn aus $\alpha' + \alpha'' = \frac{1}{2}\pi + \beta$ folgt auch $\alpha'' - (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\beta) = (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\beta) - \alpha'$.

6. Um den Elevationswinkel α zu finden, unter welchem der Wurf mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 erfolgen muss, damit ein bestimmter gegebener Punkt erreicht werde, dienen folgende Bemerkungen. Liegt zunächst der gegebene Punkt in derselben Horizontalen mit der Anfangslage in der Entfernung a von ihr, so folgt α aus der Gleichung

$$\frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = a.$$

Dieselbe lässt die beiden Lösungen zu $\alpha = \frac{1}{2}\alpha_0$ und $\frac{1}{2}(\pi - \alpha_0)$, wo $\alpha_0 = Arc\sin\frac{ag}{v_0^2}$. Die beiden Richtungen, die eine steil, die andre flach, unter welchen der bewegliche Punkt den gegebenen trifft, sind gleich geneigt gegen die Richtung $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ der grössten Wurfweite.

Liegt der zu treffende Punkt nicht im Horizonte, sondern irgendwo anders, so lege man durch ihn und die Anfangslage eine Gerade, welche gegen die Horizontale unter dem Winkel β geneigt sein möge, dann folgt α aus der Gleichung

$$\frac{2v_0^2}{g} \frac{\cos\alpha \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2\beta} = a$$

wenn a wieder die Entfernung von der Anfangslage bedeutet. Auch diese Gleichung lässt zwei Lösungen α', α'' zu, für welche

$$\cos\alpha' \sin(\alpha' - \beta) = \cos\alpha'' \sin(\alpha'' - \beta) = \frac{ag\cos^2\beta}{2v_0^2}$$

und welche die unter 5. erwähnte Eigenschaft besitzen. Um sie wirklich darzustellen, wollen wir aber lieber die Coordinaten des zu treffenden Punktes einführen. Sind diese x, y, so wird dieser Punkt erreicht, sobald x, y der Gleichung der Flugbahn genügen. Stellen wir daher die Gleichung unter Nr. 2. so dar, dass wir a, b und v_0 durch α und h ausdrücken, wodurch sie die Form annimmt $\sec^2\alpha \cdot x^2 - 4h\, tg\,\alpha \cdot x + 4hy = 0$, und lösen sie nach $tang\,\alpha$ auf, so kommt

$$tg\,\alpha = \frac{1}{x}\left(2h \pm \sqrt{4h(h-y) - x^2}\right).$$

Für $4h(h-y) - x^2 < 0$ ist der Punkt nicht mehr zu erreichen; die äussersten Lagen, für welche er noch erreichbar ist, sind die Punkte der Parabel

$$4h(h - y) - x^2 = 0.$$

Für Punkte dieser Grenzcurve fallen die beiden Wurfrichtungen in eine zusammen. Durch Verlegung des Coordinatenursprungs um die Grösse h in der Richtung der y um Umkehrung des Sinnes der y-Axe nimmt diese Gleichung die Form

$$x^2 = 4hy$$

an. Man erkennt daraus, dass der Scheitel der Grenzparabel, welche die mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 erreichbaren Punkte (x, y) von den nicht erreichbaren scheidet, in der Höhe h vertikal über der Anfangslage, also in der gemein

samen Directrix aller Flugbahnen und der Brennpunkt in der Anfangslage selbst sich befindet. Ihr Parameter ist $4h$.

7. Die sämmtlichen, den verschiedenen Elevationswinkeln α entsprechenden Parabeln bilden eine Enveloppe, welche nichts anderes ist, als die eben erwähnte Grenzparabel. Nach der Theorie der Enveloppen findet man die Gleichung dieser Curve, indem man die Gleichung der Parabel

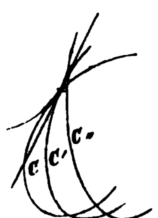
$$\sec^2\alpha \cdot x^2 - 4h\, tg\,\alpha \cdot x + 4hy = 0$$

nach dem individualisirenden Parameter $tg\,\alpha$ differentiirt und aus ihr und der dadurch zu gewinnenden Gleichung α eliminirt. Diese Differentiation liefert

$$tg\,\alpha - 2hx = 0$$

und die Elimination von $tg\,\alpha$ führt zu derselben Gleichung $4h(h-y) - x^2 = 0$, wie oben unter Nr. 6. Der eben benutzte Satz über die Bildung der Gleichung der Enveloppe einer gegebenen Curvenschaar ergibt sich, wie folgt. Es sei $f(x, y, c) = 0$ die Gleichung einer Curve C (Fig. 94.), deren Lage und Gestalt von einer Constanten c (Parameter im weitern Sinne genannt) abhängt; man erhält hieraus die Gleichungen aller einzelnen Curven der ganzen Curverschaar (C), indem man c continuirlich alle Werthe durchlaufen lässt. Die Gleichung einer dem Werthe $c + \varDelta c$ entsprechenden Curve C' ist demnach $f(x, y, c + \varDelta c) = 0$ und das System $\{f(x, y, c) = 0, \quad f(x, y, c + \varDelta c) = 0\}$ kann dazu dienen, die Coordinaten x, y der Durchschnittspunkte der Curven C, C' als Functionen von α und $\varDelta\alpha$ darzustellen. Lässt man nun $\varDelta c$ ohne Ende abnehmen, so geht C' in C über und dabei nehmen die Schnittpunkte eine bestimmte Grenzlage auf C an. Die dieser entsprechenden Grenzwerthe der Coordinaten erhält man, indem man in dem Systeme die zweite Gleichung durch die äquivalente Combination $\frac{f(x, y, c + \varDelta c) - f(x, y, c)}{\varDelta c} = 0$ ersetzt und $\varDelta c$ verschwinden lässt. Demnach stellt das System

Fig. 94.



$$f(x, y, c) = 0$$
$$\frac{\partial f(x, y, c)}{\partial c} = 0$$

diese Coordinaten als Functionen von α dar. Eliminirt man also c, so erhält man die Gleichung des geometrischen Orts der continuirlich aufeinanderfolgenden Schnittpunkte der einzelnen Curven der ganzen Schaar oder die Gleichung der sogenannten Enveloppe der Schaar. Die Enveloppe berührt sämmtliche Curven (Charakteristiken) der Schaar. Denn zwei aufeinanderfolgende Punkte sind die Schnittpunkte der Charakteristik mit der nächstvorhergehenden und nächstfolgenden Charakteristik und ihre Verbindungslinie ist Tangente der Charakteristik, weil sie auf dieser, und zugleich Tangente der Enveloppe, weil sie auf jener ebenfalls liegen. Die Tangente ist also der Enveloppe und der Charakteristik gemeinschaftlich oder beide Curven berühren sich.

8. Die Anfangslage M_0 des beweglichen Punktes, welche allen den verschiedenen Elevationswinkeln α entsprechenden Parabeln gemein ist, steht von allen Brennpunkten derselben ebensoweit ab, als von ihrer gemeinsamen Directrix, nämlich um die Strecke h. Daher ist der Ort aller Brennpunkte ein um die Anfangslage mit h als Radius beschriebener Kreis (S. Fig. 93.).

9. Die Coordinaten des Scheitels einer beliebigen, dem Winkel α entsprechenden Parabel sind nach Nr. 2.: $x = \frac{ab}{g}$, $y = \frac{1}{2}\frac{b^2}{g}$ oder, wenn man a und

b durch h und α ausdrückt: $x = 2h \sin 2\alpha$, $y = h \sin^2\alpha$. Mit Zuhülfenahme der Relation $\frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) = \sin^2\alpha$ erhält man hieraus, indem man die Quadratsumme von $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ gleich Eins setzt, d. h. α eliminirt, die Gleichung des Ortes der Scheitel sämmtlicher Parabeln, nämlich

$$\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \frac{(y - \frac{1}{2}h)^2}{(\frac{1}{2}h)^2} = 1;$$

derselbe ist mithin eine Ellipse, deren Mittelpunkt in der Höhe $\frac{1}{2}h$ über der Anfangslage M_0 liegt und welche eine horizontale Hauptaxe von der Länge $2h$ und eine vertikale Hauptaxe gleich h besitzt. Die Scheitel an den Enden der horizontalen Hauptaxe entsprechen den Würfen $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

10. Denkt man sich von O aus in einer Vertikalebene unter allen möglichen Winkeln α continuirlich hintereinander Punkte mit der Geschwindigkeit v_0 ausgeworfen, so erhält man alle Parabeln der ganzen Schaar zugleich, wie eine Stralengarbe, welche von einer grösseren Grenzparabel umhüllt wird. Erfolgt dies zugleich in allen Vertikalebenen des Punktes O, so entsteht das Phänomen einer idealen Fontaine. Die äussere Figur derselben ist das Paraboloid, welches durch Rotation der Grenzparabel um die Vertikale gebildet wird und die Scheitel aller Parabeln liegen auf einem Rotationsellipsoid um dieselbe Axe, dessen Aequator die Höhe der Fontaine halbirt.

Die Coordinaten der Punkte einer Vertikalebene, welcher unter dem Winkel α ausgeworfen wurden, haben nach der Zeit t die Werthe $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$, $y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$; eliminirt man hieraus α, so erhält man für den Ort aller unter den verschiedenen Winkeln α in der Vertikalebene gleichzeitig abgegangenen Punkte zur Zeit t

$$x^2 + (y + \tfrac{1}{2}gt^2)^2 = (v_0 t)^2;$$

der Ort dieser Punkte ist mithin ein Kreis, dessen Mittelpunkt vertikal unter M im Abstande $\frac{1}{2}gt^2$ liegt und einen Radius $v_0 t$ besitzt. Beide Grössen sind von der Zeit abhängig, der Mittelpunkt sinkt von M_0 aus, wie ein schwerer Punkt und der Radius wächst gleichförmig mit der Geschwindigkeit v_0. Da dieselbe Betrachtung für alle Vertikalebenen gilt, so folgt, dass alle Punkte, welche zu gleicher Zeit von O ausgeworfen werden, fortwährend auf einer veränderlichen Kugelfläche liegen, deren Mittelpunkt wie ein schwerer Punkt sinkt, während ihr Radius gleichförmig wächst.

11. Lässt man den Elevationswinkel α constant, aber die Anfangsgeschwindigkeit v_0 variiren, so kann eine der vorstehenden Untersuchung coordinirte Untersuchung geführt werden. Von dieser heben wir nur einige Gesichtspunkte heraus.

Eliminirt man aus den Gleichungen für die Coordinaten des Scheitels der Flugbahn, nämlich

$$x = 2h \sin 2\alpha, \qquad y = h \sin^2\alpha$$

die Grösse h und damit also die Anfangsgeschwindigkeit v_0, so ergibt sich

$$y = \tfrac{1}{2} tg\,\alpha \,.\, x,$$

d. h. der Ort der Scheitel aller Bahnen, welche der bewegliche Punkt unter constantem Elevationswinkel mit den verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten beschreiben kann, ist eine durch die Anfangslage gehende Gerade, welche die vertikalen Strecken zwischen der Horizontalen der Anfangslage und der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit halbirt, so dass also die Horizontale und die Wurfrichtung, die Scheitelgerade und die Vertikale vier harmonische Stralen sind.

Die Coordinaten eines Brennpunktes sind

$$x = 2h \sin 2\alpha$$
$$y = h \sin^2\alpha - h \cos^2\alpha = -h \cos 2\alpha.$$

Die Elimination von h liefert hier

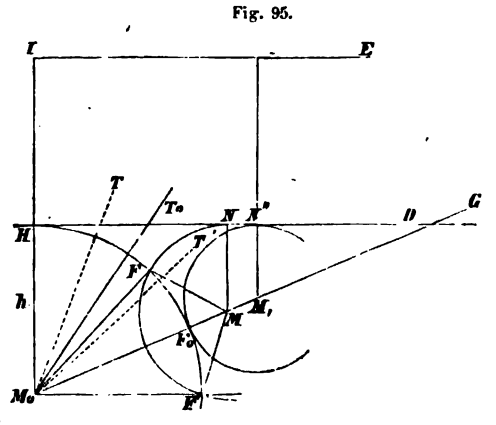
$$y = \cotg 2\alpha \cdot x,$$

d. h. der Ort aller Brennpunkte ist gleichfalls eine durch die Anfangslage gehende Gerade.

12. Viele von den bisher analytisch entwickelten Resultaten kann man leicht auf geometrischem Wege gewinnen, wie folgt.

Es sei M_0 (Fig. 95.) die Anfangslage, HD die gemeinschaftliche Directrix aller Parabeln, welche derselben Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2g \cdot M_0 H}$ entsprechen, und F der Brennpunkt irgend einer dieser Curven, der also wegen $M_0 F = M_0 H$ auf dem um M_0 mit $M_0 H = h$ beschriebenen Kreise sich befindet. Die Parabel, deren Brennpunkt F ist, schneidet eine Gerade $M_0 G$ in einem Punkte M, dessen Abstände vom Brennpunkte und der Directrix gleich sind, so dass $MF = MN$. Der Punkt M ist daher der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Directrix berührt und durch F geht, während M selbst in der Geraden $M_0 G$ liegt. Da ein solcher Kreis den Ort der Brennpunkte im Allgemeinen in zwei Punkten F, F' schneidet, so gibt es noch einen zweiten Brennpunkt F' und also auch noch eine zweite Parabel, welche $M_0 G$ in demselben Punkte M schneidet. Rückt der Punkt M auf der Geraden $M_0 G$ weiter von M_0 weg, so nimmt MN ab; der äusserste Punkt M_1 der Geraden $M_0 G$, welcher also von einer Parabel noch erreicht werden kann, muss die kürzeste Entfernung von dem Ortskreise der Brennpunkte haben. Dieser kürzeste Abstand fällt aber in die Gerade $M_0 G$ selbst. Daher ist der Schnittpunkt F_0 von $M_0 G$ mit dem Orte der Brennpunkte der Brennpunkt derjenigen Parabel, welche auf $M_0 G$ die grösste Wurfweite $M_0 M_1$ bestimmt. Hierfür fallen die Punkte F, F' in F_0 zusammen und geht der Kreis NFF' in den Berührungskreis der Directrix und des Ortes der Brennpunkte über, dessen Mittelpunkt auf $M_0 G$ liegt. Da die Tangente $M_0 T_0$ dieser Parabel den Winkel zwischen dem Radiusvector $M_0 F_0$ des Berührungspunktes und dem durch diesen gezogenen Diameter HM_0 halbirt, so ergibt sich, dass die Richtung des Wurfes, welchem die grösste Wurfweite auf $M_0 G$ entspricht, den Winkel halbiren muss, den $M_0 G$ mit der Vertikalen $M_0 H$ bildet. Ebenso halbiren die Richtungen $M_0 T$, $M_0 T'$ je zweier Würfe, welche in demselben Punkte M die Gerade $M_0 G$ treffen, die Winkel $HM_0 F$ und $HM_0 F'$; hieraus folgt, dass sie gleichgeneigt sind gegen die Richtung $M_0 T_0$ des weitesten Wurfes.

Fig. 95.

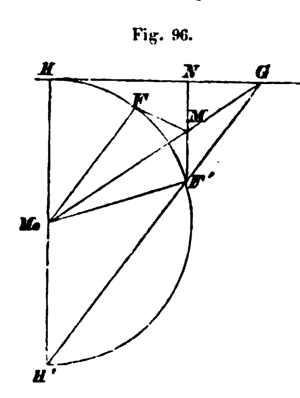


Denkt man sich jetzt durch M_0 alle Geraden $M_0 G$ gezogen und bestimmt auf jeder von ihnen den Punkt M_1 der grössten Wurfweite, so bilden die Punkte M_1 den Ort der äussersten, bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit noch erreichbaren Punkte. Die Punkte M_1 sind aber die Mittelpunkte aller Kreise, welche

die Directrix und den Ort der Brennpunkte berühren. Zieht man daher in dem Abstande $HJ = HM_0$ die Gerade JE parallel mit der Directrix HD, so stehen die Punkte M_1 von M_0 und dieser Geraden gleichweit ab. Daher ist der Ort $(M_1$ eine Parabel, welche die Vertikale M_0J zur Hauptaxe, HD zur Scheiteltangente und M_0 zum Brennpunkte hat. Diese Parabel berührt die einzelnen durch die Punkte M_1 gehenden Parabeln, denn ihre Tangenten, sowie die Tangente jener in M_1 halbiren den Winkel $M_0M_1N_1$ oder $F_0M_1N_1$.

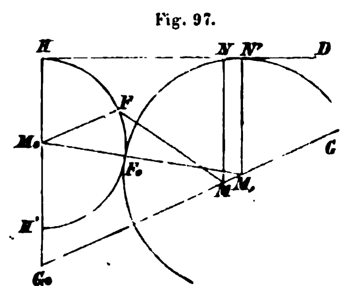
Mit Hülfe ähnlicher Betrachtungen kann man leicht eine Reihe anderer interessanter Wurfprobleme lösen. Um die Stelle zu finden, wo die Ebene M_0G unter rechtem Winkel getroffen wird, sei M die Stelle des Aufschlages des geschleuderten Punktes (Fig. 96.). Man construire den Kreis um M, welcher HG in N berührt; seine Durchschnitte F, F', mit dem Orte der Brennpunkte sind die Brennpunkte der beiden Parabeln, welche M erreichen. Nun halbirt M_0G den Winkel FMF' und die Tangente in M an die Parabel, deren Brennpunkt F ist, den Winkel FMN, sollen also beide zu einander senkrecht sein, so muss Winkel $NMF' = \pi$ werden. Zieht man also vom Schnittpunkte G der Geraden M_0G mit HG nach dem Endpunkte H' des Durchmessers HH' den Stral GH', so liefert sein Schnittpunkt mit dem Orte der Brennpunkte den Punkt F', von welchem man blos das Perpendikel $F'N$ auf HG zu fällen braucht, um auf M_0G den gesuchten Punkt M zu bestimmen, welcher unter rechtem Winkel getroffen wird. Die Richtung des Wurfes ergibt sich hierzu leicht aus dem Vorigen. Von den beiden Parabeln, deren Brennpunkte F, F' sind, löst nur die erstere das Problem, für die andere, deren Brennpunkt F' ist, ist M der Scheitel, indem der Radius vector MF' mit dem Diameter NF' zusammenfällt, und ist also die Tangente in M horizontal.

Fig. 96.



Soll die grösste Wurfweite für eine nicht durch die Anfangslage M_0 gehende Ebene G_0G (Fig. 97.) gefunden werden, so erwäge man, dass für irgend einen Punkt M in G_0G, wenn er auf einer zum Brennpunkte F gehörigen Parabel erreichbar sein soll, $FM = MN$ und da MN mit dem Fortrücken des Punktes M in der Richtung G_0G abnimmt, für die äusserste Lage M_1 des Punktes M, MF der kürzeste Abstand des Punktes M vom Ortskreise der Brennpunkte werden muss. Es ist daher M_1 der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die gemeinsame Directrix HD und den Ort der Brennpunkte berührt.

Fig. 97.



Im Allgemeinen kommt die geometrische Lösung derartiger Aufgaben auf das Problem der Berührungskreise einer Geraden und eines Kreises zurück, deren Mittelpunkte auf eine gegebene Curve beschränkt sind. Die Aufgaben über die grösste Wurfweite können auch alle mit Hülfe der Grenzparabel gelöst werden, welche die Enveloppe aller Flugbahnen für dieselbe Anfangsgeschwindigkeit ist.

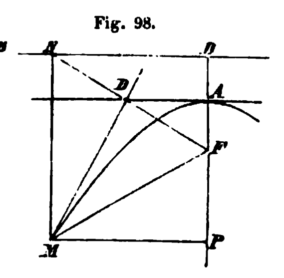
13. Nach Nr. 3. ist die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte M (Fig. 9.) der parabolischen Bahn gleich der Geschwindigkeit, welche ein Punkt durch den Fall von der Directrix HD aus erlangt, d. h. es ist $v^2 = 2g \cdot MN$. Nun ist aber

vermöge der Eigenschaften der Parabel $MN = MF$ und $\overline{DN}^2 = 2 FD \cdot AP$; also indem man $\overline{FD}^2$ beiderseits addirt: $\overline{FN}^2 = 2 FD \cdot AP + \overline{FD}^2 = 2 FD \cdot (AP + \frac{1}{2} FD)$ $= 2 FD \cdot MN$. Hieraus folgt $MN = \frac{\overline{FN}^2}{2 \cdot FD}$. Daher wird jetzt

$$v^2 = 2g \cdot \frac{\overline{FN}^2}{FD}.$$

Es ist mithin die Geschwindigkeit proportional der Länge FN. Diese Linie steht aber senkrecht auf der Tangente des Punktes M und es bilden daher alle Linien FN unter einander dieselben Winkel wie die Richtungen der Geschwindigkeit. Daher liegen die Punkte N in einer dem Hodographen der parabolischen Bewegung ähnlichen Linie und ist folglich dieser selbst eine Gerade. Die Strecken FD, DN sind proportional der Horizontal- und der Vertikalcomponente von v in demselben Verhältniss, mit welchem FN dem v selbst proportional ist.

Fig. 98.



§. 9. **Das ballistische Problem (Wurfbewegung im widerstehenden Mittel).** Ein schwerer Punkt wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α gegen den Horizont in einem homogenen, Widerstand leistenden Mittel geworfen, welche Bewegung wird derselbe annehmen, wenn die Beschleunigung des Widerstandes gleich der Function $a + bv^n$ der Geschwindigkeit ist, worin a und b Constante bedeuten?

1. Wir legen der Untersuchung ein rechtwinkliges Coordinatensystem, wie das der vorigen Untersuchung zu Grunde und nehmen die x-Axe horizontal, die y-Axe vertikal und positiv aufwärts gerichtet an. Die Componenten der Beschleunigung sind alsdann, da der Widerstand in der Richtung der Tangente dem Sinne der Bewegung entgegen gerichtet ist:

$$X = -(a + bv^n)\frac{dx}{ds}, \qquad Y = -(a + bv^n)\frac{dy}{ds} - g, \qquad Z = 0$$

und mithin die Gleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(a + bv^n)\frac{dx}{ds} = -\frac{a + bv^n}{v} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(a + bv^n)\frac{dy}{ds} - g = -\frac{a + bv^n}{v} \cdot \frac{dy}{dt} - g$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

und wenn die vertikale xy-Ebene durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit gelegt und die Anfangslage M_0 als Coordinatenursprung angenommen wird, so lehrt die dritte dieser Gleichungen, dass die Bewegung in der xy-Ebene erfolgt, sodass die Untersuchung sich von vornherein auf die beiden ersten Gleichungen beschränken kann. Um zu einem Integrale derselben zu gelangen, combinire man sie in derselben Weise, wie es bei der Entwickelung des Princips der Flächen §. 4. geschah. Man erhält zunächst

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{dx}{dt}$$

und wenn man für $\frac{dx}{dt}$ seinen Werth aus der ersten Gleichung einsetzt

$$(a + bv^n)\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right) = gv\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Nun führe man den Winkel η als neue Variabele ein, welchen die Tangente der Bahn mit der x-Axe bildet, d. h. man setze $\frac{dx}{dt} = v\cos\eta$, $\frac{dy}{dt} = v\sin\eta$, wodurch man erhält: $v(a + bv^n)\,d\eta = g(\cos\eta\,dv - v\sin\eta\,d\eta)$, oder

$$g\cos\eta\, v^{-(n+1)}\,dv - (a + g\sin\eta)\,v^{-n}\,d\eta = b\,d\eta.$$

Nun suche man einen integrirenden Factor K dieser Gleichung, so dass durch Multiplication derselben mit ihm die linke Seite ein vollständiges Differential werde. Da die rechte Seite v nicht enthält, so kann derselbe blos eine Function von η sein. Da ferner die linke Seite in dem einen Gliede v^{-n}, im andern das Differential $v^{-(n+1)}dv$ dieser Grösse enthält, so erkennt man leicht, dass der integrirende Factor die linke Seite zu einem vollständigen Differentiale von der Form $d\cdot Mv^{-n}$ machen wird. Soll dies eintreten, so sind die beiden Bedingungen zu erfüllen:

$$dM = nK(a + g\sin\eta)\,d\eta$$
$$M = -nKg\cos\eta,$$

aus denen man zunächst erhält:

$$\frac{dM}{M} = -\frac{n(a + g\sin\eta)}{g\cos\eta}\,d\eta = n\frac{\sin\eta}{\cos\eta}\,d\eta + \frac{na}{g}\frac{d\eta}{\cos\eta} = -n\,d\cdot l\cos\eta + \frac{na}{g}\,d\cdot l\,tg\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\eta)$$

und mithin

$$M = \cos^{-n}\eta\cdot tg^{\frac{na}{g}}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\eta),$$

sowie den Multiplicator K selbst, nämlich

$$K = -\frac{nM}{g\cos\eta}.$$

Dies liefert uns daher das Integral der Differentialgleichung:

$$Mv^{-n} = -\frac{n}{g}\int\frac{bM\,d\eta}{\cos\eta}.$$

Diese Formel gilt auch noch, wenn b eine Function von η ist; auch für den Fall, dass a Function von η ist, tritt nur die Aenderung ein, dass

$$M = \cos^{-n}\eta\cdot e^{\frac{g}{n}\int\frac{a\,d\eta}{\cos\eta}}$$

wird.

Für die weitere Behandlung des Problems setze man $tg(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\eta) = r$, wodurch $\cos\eta = \frac{2r}{1 + r^2}$, $\sin\eta = \frac{r^2 - 1}{1 + r^2}$, $\frac{d\eta}{\cos\eta} = \frac{dr}{r}$ wird, sowie zur Abkürzung $\frac{a}{g} = c$; so erhält man

$$M = 2^{-n}r^{n(c-1)}(1 + r^2)^n$$
$$2^n Mv^{-n} = -\frac{nb}{g}\int r^{n(c-1)}(1 + r^2)^n\frac{dr}{r}.$$

Ist n eine ganze positive Zahl, so erhält man dies Integral in geschlossener Form. Besonders einfach fällt derselbe aus für $c = \frac{a}{g} = \frac{n+2}{n}$, nämlich

$$r^2(1 + r^2)^n v^{-n} = \frac{nb}{2(n+1)}(1 + r^2)^{n+1} + C,$$

wobei die Constante durch die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit bestimmt werden muss; wofür $r = tg(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha)$, $v = v_0$ wird.

Das gefundene Integral bestimmt v als Function von r; nachdem dies erreicht ist, ist es leicht, auch t, x, y als Functionen vom r durch blosse Quadraturen darzustellen. Bezeichnen wir nämlich abkürzend die Beschleunigung des Widerstandes mit ω, so liefern die obigen Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\omega}{v}\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\omega}{v}\frac{dy}{dt} - g$$

$$\omega\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right) = g\,v\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v\,\omega\,d\eta = g\frac{d^2x}{dt^2}dt$$

leicht das folgende System von Gleichungen:

$$dt = -\frac{v\frac{d^2x}{dt^2}}{\omega\frac{dx}{dt}}dt = -\frac{v\,d\eta}{g\cos\eta} = -\frac{v}{g}\frac{dr}{r}$$

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = -\frac{v^2}{g}d\eta = -\frac{2v^2\,dr}{g(1+r^2)}$$

$$dy = \frac{dy}{dt}dt = -\frac{v^2}{g}tg\,\eta\,d\eta = -\frac{v^2(r^2-1)\,dr}{gr(1+r^2)}.$$

Sobald man in diesen Formeln v durch η oder r ausgedrückt einsetzt, ergeben sich t, x, y durch blosse Quadraturen. Die Reduction auf Quadraturen ist auch dann noch möglich, wenn die Beschleunigung des Widerstandes $a + b \cdot lv$ ist; ein Fall, der aus dem eben behandelten hervorgeht, wenn $a - \frac{b}{n}$ und $\frac{b}{n}$ an die Stelle von a und b treten und man hierauf einen Grenzübergang für $n = 0$ macht, dabei aber berücksichtigt, dass

$$\lim\left(\frac{v^n-1}{n}\right) = lv \text{ für } n = 0.$$

Die hier gegebene Entwickelung verdankt man Jacobi (*De motu puncti singularis.* Crelle's Journ. B. XXIV. S. 25.). Bereits Joh. Bernoulli hat in den *Actis eruditorum. Lips.* 1719. p. 216. das ballistische Problem behandelt; von seinem Neffen Nicol. Bernoulli enthält derselbe Band eine Abhandlung über denselben Gegenstand. Später hat Legendre (*Sur la question de balistique; Mém. de l'Acad. de Berlin,* 1782, p. 59) die Behandlung des Gegenstandes dahin erweitert, dass er den Widerstand in der oben angenommenen Form voraussetzte.

2. Für den speziellen Fall $a = 0$, $n = 2$ wird der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional. Wir wollen diesen einfachen Fall direct und unabhängig von der vorstehenden allgemeinen Theorie behandeln, zu diesem Behufe aber die Bewegungsgleichungen etwas umgestalten. Ist allgemein R die Widerstandsbeschleunigung, so lassen sich dieselben schreiben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{ds} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + R\frac{dy}{ds} + g = 0.$$

Setzt man nun $\frac{dy}{dx} = p$, also $\frac{dy}{dt} = p\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = p\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\frac{dp}{dt}$, so geht die zweite dieser Gleichungen über in

$$p\left(\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dx}{dt}\frac{dp}{dt} + g = 0$$

und indem man dieselbe mit Hülfe der ersten reducirt, kann man das System der Bewegungsgleichungen durch die beiden folgenden Gleichungen darstellen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{ds} = 0$$

$$\frac{dx}{dt}\frac{dp}{dt} + g = 0.$$

Setzen wir jetzt unserer Voraussetzung gemäss $R = \frac{g}{k^2}v^2 = \frac{g}{k^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, so gehen diese Gleichungen über in

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{k^2}\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dp}{dx} + g\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = 0.$$

Aus der ersten von diesen Gleichungen folgt

$$\frac{d^2x}{dt^2} : \frac{dx}{dt} = -\frac{g}{k^2}\frac{ds}{dt}$$

und mithin weiter durch Integration

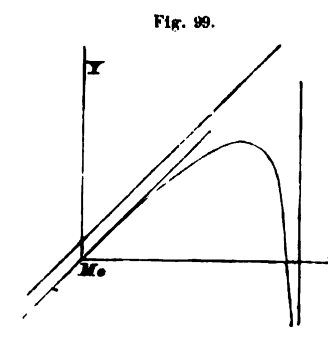
$$l\frac{dx}{dt} = -\frac{g}{k^2}s + C.$$

Um die Constante zu bestimmen, dient die Bemerkung, dass für $s = 0$ die horizontale Geschwindigkeitscomponente $\frac{dx}{dt}$ gleich $v_0 \cos\alpha$ wird. Dies liefert: $l(v_0 \cos\alpha) = C$ und mithin bleiben für die weitere Behandlung des Problems die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha\, e^{-\frac{g}{k^2}s}, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{e^{\frac{2g}{k^2}s}}{2h\cos^2\alpha},$$

wenn $h = \frac{v_0^2}{2g}$ gesetzt wird. Aus der ersten dieser beiden Gleichungen erkennt man, dass die Horizontalcomponente der Geschwindigkeit immer mehr abnimmt, dass mithin die absteigende Bahn immer mehr der vertikalen Richtung sich annähert und mithin die Bewegung immer mehr gleichförmig wird (vgl. Cap. II, §. 2, Nr. 4. S. 224). Der absteigende Curvenast hat daher eine vertikale Asymptote (Fig. 99). Um die zweite Gleichung zu integriren, multipliciren wir sie mit der Identität $dx\sqrt{1+p^2} = ds$, wodurch sie übergeht in

Fig. 99.



$$dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{e^{\frac{2g}{k^2}s}}{2h\cos^2\alpha}ds,$$

deren Integral ist

$$C - p\sqrt{1+p^2} - l(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{k^2}{4gh\cos^2\alpha}e^{\frac{2g}{k^2}s},$$

wobei die Constante dadurch bestimmt wird, dass für $s = 0$, $p = tg\,\alpha$ wird. Setzen wir zur Vereinfachung $P = p\sqrt{1+p^2} + l(p + \sqrt{1+p^2})$, so nimmt diese Gleichung die Form an

$$e^{\frac{2g}{k^2}s} = \frac{4gh}{k^2}(C - P)\cos^2\alpha.$$

Indem man mit ihrer Hülfe aus der ersten der drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{e^{\frac{2g}{k^2}s}}{2h\cos^2\alpha}, \quad \frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} + g\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = 0$$

s elimirt, erhält man dx, indem man hierauf den so gewonnenen Werth von dx in die zweite einsetzt, ergibt sich dy und in ähnlicher Weise aus der dritten dt durch p und dp dargestellt. Demnach wird das ganze Problem durch die drei Gleichungen:

$$dx = -\tfrac{1}{2}\frac{k^2}{g}\,dp\,(C-P)^{-1}$$

$$dy = -\tfrac{1}{2}\frac{k^2}{g}\,pdp\,(C-P)^{-1}$$

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{k}{g}\,dp\,(C-P)^{-\frac{1}{2}}$$

auf Quadraturen zurückgeführt. Um die Constante C durch die Anfangselemente auszudrücken, sei p_0 der Werth von $p = \frac{dy}{dx}$ für $t = 0$, d. h. $p_0 = tg\alpha$; ebenso P_0 der Werth von P für $t = 0$. Dann liefert die Gleichung

$$e^{\frac{g}{k^2}s} = \frac{4gh}{k^2}(C-P)\cos^2\alpha$$

den Werth von C, nämlich

$$C = P_0 + \frac{k^2}{4gh\cos^2\alpha}.$$

Die Grösse $p = \frac{dy}{dx}$, welche die Tangente der Neigung der Bahn gegen die Horizontale darstellt, beginnt mit dem Werthe p_0 und nimmt fortwährend ab, im höchsten Punkte der Bahn verschwindet sie, geht hierauf ins Negative über und nähert sich mehr und mehr dem Werthe $-\infty$.

Die drei zuletzt dargestellten Gleichungen für dx, dy, dt liefern durch Integration die Coordinaten x, y und die Zeit t als Functionen von p, nämlich

$$x = \tfrac{1}{2}\frac{k^2}{g}\int_p^{p_0}(C-P)^{-1}dp, \quad y = \tfrac{1}{2}\frac{k^2}{g}\int_p^{p_0}(C-P)^{-1}pdp, \quad t = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\frac{k}{g}\int_p^{p_0}(C-P)^{-\frac{1}{2}}dp.$$

Die Coordinaten des Scheitels erhält man insbesondere für $p = 0$, nämlich

$$x = \tfrac{1}{2}\frac{k^2}{g}\int_0^{p_0}(C-P)^{-1}dp$$

$$y = \tfrac{1}{2}\frac{k^2}{g}\int_0^{p_0}(C-P)^{-1}pdp.$$

Die Wurfweite w ergibt sich, wenn man zunächst den Werth $-p_1$ von p sucht, für welchen y zum zweitenmale verschwindet, d. h. die Gleichung auflöst

$$\int_{-p_1}^{p_0}(C-P)^{-1}pdp = 0$$

und den gefundenen Werth hierauf als Integrationsgrenze bei der Bestimmung von x benutzt, nämlich

$$w = \tfrac{1}{2}\frac{k^2}{g}\int_{-p_1}^{p_0}(C-P)^{-1}dp.$$

Die Abscisse der vertikalen Asymptote der Flugbahn ist der Werth von x, welcher $p = -\infty$ entspricht, nämlich

$$x = \frac{1}{2}\frac{k^2}{g}\int_{-\infty}^{p_0}(C-P)^{-1}\,dp\,.$$

Man kann leicht zeigen, dass der aufsteigende Ast der Curve über den Coordinatenursprung rückwärts verlängert, eine gegen den Horizont geneigte Asymptote besitzt (s. Fig. 99).

3. Für den Fall, dass p_0 und in Folge dessen auch p sehr klein ist, so dass die Flugbahn immer nahe am Horizonte bleibt, kann man approximativ setzen $\frac{ds}{dx} = 1$, $s = x$ und folglich

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{e^{\frac{2g}{k^2}x}}{2h\cos^2\alpha},$$

woraus sich ergibt

$$p = \frac{dy}{dx} = tg\,\alpha + \frac{k^2}{4gh\cos^2\alpha}\left(1 - e^{\frac{2g}{k^2}x}\right)$$

und

$$y = x\,tg\,\alpha + \frac{k^2}{4gh\cos^2\alpha}\left(x - \frac{1}{2}\frac{k^2}{g}e^{\frac{2g}{k^2}x} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{g}\right).$$

Die Coordinaten des Scheitels erhält man, indem man $p = 0$, die Abscisse der Wurfweite, indem man $y = 0$ setzt. Hierzu liefert die Gleichung $g\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dp}{dx} = 0$ mit Hülfe des vorherigen Werthes für $\frac{dp}{dx}$:

$$dt = \frac{e^{\frac{g}{k^2}x}\,dx}{v_0\cos\alpha}$$

und folglich die der Abscisse x entsprechende Zeit:

$$t = \frac{k^2}{g}\,\frac{e^{\frac{g}{k^2}x} - 1}{v_0\cos\alpha}.$$

§. 10. **Die Centralbewegung.** Ein Punkt bewege sich unter dem Einflusse einer Beschleunigung, deren Richtung fortwährend durch ein festes Centrum hindurchgeht und deren Grösse blos eine Function der Entfernung von demselben ist. Die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit sind bekannt; man soll die Natur dieser Bewegung erforschen.

Wählt man das Centrum O zum Ursprunge rechtwinkliger Coordinaten x, y, z des beweglichen Punktes M und bezeichnet dessen Entfernung von jenem mit r, so stellen $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$, $-\frac{z}{r}$ die Richtungscosinusse der Beschleunigung φ dar für den Fall, dass ihr Sinn dem Centrum zugewandt und $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ für den Fall, dass ihr Sinn vom Centrum abgewandt ist. Demnach sind die Componenten der Beschleunigung $X = \mp\frac{x}{r}\varphi$, $Y = \mp\frac{y}{r}\varphi$, $Z = \mp\frac{z}{r}\varphi$ in dem einen oder im anderen Falle. Man sieht, dass eine Aenderung von φ in $-\varphi$ genügt, um den zweiten Fall auf den ersten zurückzuführen und wir wollen deshalb den ersten formell hier zu Grunde legen. Daher sind die Gleichungen der Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}\varphi, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}\varphi, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{z}{r}\varphi.$$

Nach Cap. III, §. 4. gilt für das vorliegende Problem das Princip der Flächen; die Bewegung erfolgt daher in einer Ebene, nämlich in der durch das Centrum und die Anfangsgeschwindigkeit bestimmten Ebene. Wenn wir diese Ebene zu einer der Coordinatenebenen, z. B. zur xy-Ebene wählen, so ist die dritte Coordinate z zu jeder Zeit Null und die dritte Bewegungsgleichung von selbst erfüllt, so dass wir unter dieser Voraussetzung blos die beiden Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}\varphi, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}\varphi$$

zu integriren haben. Das Integral, welches das Flächenprincip liefert, ist dann

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C$$

und nimmt durch Einführung der Polarcoordinaten r, ϑ die Form

$$\frac{2dS}{dt} = r^2\frac{d\vartheta}{dt} = C$$

an, indem $xdy - ydx = r^2d\vartheta = 2dS$ den doppelten, von dem Radusrector r im Zeitelemente beschriebenen Elementarsector dS darstellt. Fällt man vom Centrum O das Perpendikel p auf die Tangente der Bahn, so stellt pds ebenfalls diesen doppelten Elementarsector dar und geht das Integral über in

$$pv = C \text{ oder } v = \frac{C}{p}.$$

Dasselbe sagt also aus, dass **für jede Centralbewegung das Moment der Geschwindigkeit in Bezug auf das Centrum oder die Sectorengeschwindigkeit des Radiusvectors, welcher vom Centrum nach dem beweglichen Punkte hinführt, constant ist. Die Geschwindigkeit selbst ist demnach dem Abstande ihrer Richtung vom Centrum umgekehrt proportional.** (Vgl. Cap. I, §§. 21 und 22). Die Constante C kann durch die Anfangselemente der Bewegung ausgedrückt werden. Bildet nämlich der anfängliche Radiusvector r_0 mit der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 den Winkel α, so ist der anfängliche Abstand p_0 des Centrums von v_0 gleich $r_0 \sin\alpha$ und mithin, wenn man die Gleichung auf den Anfangszustand der Bewegung bezieht, $p_0 v_0 = r_0 v_0 \sin\alpha = C$. Integrirt man die Gleichung des Flächenprincips nochmals, so folgt

$$S - S_0 = \frac{C}{2}(t - t_0)$$

d. h. **für jede Centralbewegung ist der von dem Radiusvector beschriebene Sector der Zeit proportional, in welcher er beschrieben wird.** (Vgl. Cap. I, §. 22. zu Ende.)

Wir wollen mit Hülfe des Flächenprincips einen Ausdruck für das Quadrat der Geschwindigkeit suchen, durch welchen dieses als Function des reciproken Werthes vom Radiusvector erscheint. Hierzu gestalten wir p um. Nun ist $\frac{r}{p}$ die Cosecante des Winkels zwischen r und p und da dieselbe Grösse auch durch $\frac{ds}{rd\vartheta}$ dargestellt wird (Fig. 100.), so besteht die Gleichung

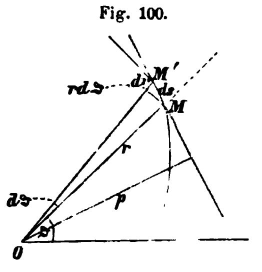


Fig. 100.

$$\frac{r}{p} = \frac{ds}{rd\vartheta}$$

und wenn man sie quadrirt und $ds^2 = r^2 d\vartheta^2 + dr^2$ einsetzt, so erhält man

$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2$ oder, da $\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\vartheta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\vartheta}$ ist,

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \left(-\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\vartheta}\right)^2.$$

Für $\frac{1}{r} = u$ nimmt diese Formel die Gestalt

$$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(-\frac{du}{d\vartheta}\right)^2$$

an und mit ihrer Hülfe erhält man aus der Gleichung $vp = C$ des Flächenprincips den gesuchten Ausdruck

$$v^2 = C^2\left[u^2 + \left(-\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right].$$

Um die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Beschleunigung deutlich zu erkennen, berücksichtigen wir den Cap. I, §. 10 entwickelten Satz, wonach die Geschwindigkeit die mittlere Proportionale zwischen der Beschleunigung und der halben Sehne ist, welche ihre Richtung im Krümmungskreise der Bahn bestimmt (Krümmungssehne). Ist c diese Sehne, und schreiben wir die Gleichung, welche diesen Satz ausspricht, so:

$$v^2 = 2\varphi \cdot \tfrac{1}{4}c,$$

so erhellt, dass ein Punkt, welcher mit constanter Beschleunigung gleich φ ohne Anfangsgeschwindigkeit sich durch den vierten Theil der Krümmungssehne hindurch bewegte, die Geschwindigkeit v verlangen würde. $\frac{1}{4}c$ ist gewissermassen die Geschwindigkeitshöhe von v.

Nach Cap. III, §. 7, gilt für unser Problem auch das Princip der lebendigen Kraft. Für die Kräftefunction U erhält man $dU = -\frac{\varphi}{r}(xdx + ydy)$ oder, da $x^2 + y^2 = r^2$ und folglich $xdx + ydy = rdr$ ist

$$dU = -\varphi dr$$

$$U - U_0 = -\int_{r_0}^{r} \varphi dr,$$

und folglich die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = U - U_0 = -\int_{r_0}^{r} \varphi dr,$$

oder indem man die Constante $\frac{1}{2}v_0^2 - U_0 = h$ setzt

$$\tfrac{1}{2}v^2 = U + h.$$

Combinirt man diese Gleichung der lebendigen Kraft mit der oben gefundenen $v^2 = C^2\left[u^2 + \left(-\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right]$, so erhält man durch Elimination von v eine Differentialgleichung zwischen u, r und ϑ, oder da $u = \frac{1}{r}$ ist, zwischen u und ϑ; sie ist die Differentialgleichung der Bahn, nämlich:

$$\tfrac{1}{2}C^2\left[u^2 + \left(-\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right] = U + h$$

und aus ihr folgt, da sich die Variabelen trennen lassen, die endliche Gleichung der Bahn:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{-Cdu}{\sqrt{2(U+h) - C^2u^2}},$$

wobei in U überall $\frac{1}{u}$ für r geschrieben gedacht wird und $u_0 = \frac{1}{r_0}$ dem Werthe $\vartheta = \vartheta_0$ entspricht.

Ist die Bahn bekannt, welche der bewegliche Punkt beschreibt, nicht aber die Abhängigkeit, in welcher die nach dem festen Centrum gerichtete Beschleunigung φ von dem Radiusvector r steht, so dient die eben entwickelte Gleichung dazu, diese Abhängigkeit aufzufinden. Differentiirt man nämlich dieselbe, indem man ϑ als unabhängige Variabele ansieht, so ergibt sich mit Rücksicht auf $dU = \varphi dr$ und $r = \frac{1}{u}$

$$\varphi = C^2u^2\left[u + \frac{d^2u}{d\vartheta^2}\right].$$

Umgekehrt ist wiederum diese Gleichung die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Bahn, falls φ als Function von u oder von r gegeben ist.

Man kann die Beschleunigung φ noch unter einigen andern bemerkenswerthen Formen darstellen. Combinirt man nämlich die Gleichungen $v = \frac{C}{p}$ und $v^2 = 2(U+h)$ behufs Elimination von v^2 und differentiirt die entstehende Gleichung

$$\frac{C^2}{p^2} = 2(U+h),$$

so erhält man, da $dU = -\varphi dr$ ist, die weitere Formel für φ:

$$\varphi = \frac{C^2}{p^3}\frac{dp}{dr}.$$

Nach einem bekannten Satze besteht aber nun zwischen r, p, dr, dp und dem Krümmungshalbmesser ϱ die Proportion

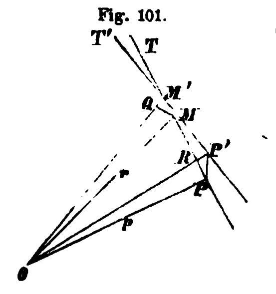
$$\frac{dp}{dr} = \frac{r}{\varrho}.$$

Mit Hülfe derselben kann man φ auch die Gestalt geben:

$$\varphi = \frac{C^2r}{\varrho p^3}.$$

Der erwähnte Satz aber kann einfach folgendermassen erwiesen werden. Es seien (Fig. 101.) MT, $M'T'$ die Tangenten einer Curve in den beiden aufeinanderfolgenden Punkten M und M', OP, OP' die vom Ursprunge O der Radienvectoren auf sie gefällten Perpendikel p, $p + dp$, während OM und OM' gleich r und $r + dr$ sind. Fällt man nun von M auf OM' das Perpendikel MQ und bezeichnet den Schnittpunkt von OP' und der Tangente MT mit R, so ist leicht zu sehen, dass die beiden verschwindend kleinen bei Q und R rechtwinkligen Dreiecke PRP' und MQM' ähnlich sind. Da nämlich die beiden Perpendikel OP, OP' mit einander denselben Winkel bilden, wie die Tangenten MT, $M'T'$, so liegen die vier Punkte P, P', O, M' (und in der Grenze M) in einem Kreise. Daher sind weiter die Winkel $OP'P$ und $OM'M$ als Peripheriewinkel desselben Bogens OP gleich, woraus die erwähnte Aehnlichkeit der Dreiecke folgt. Daher ist

Fig. 101.



$$\frac{RP'}{QM'} = \frac{PP'}{MM'}, \text{ d. h. } \frac{dp}{dr} = \frac{PP'}{MM'}.$$

Der Durchmesser des erwähnten Kreises ist wegen des rechten Winkels OPM gleich dem Radiusvector $OM = r$; in demselben Kreise liegt PP' als Element und über ihm steht als Peripheriewinkel POP', welcher gleich dem Contingenzwinkel ist Beschreibt man nun um MM' einen weiteren Kreis, welcher durch den Krümmungsmittelpunkt geht, so steht über ihm als Peripheriewinkel gleichfalls der Contingenzwinkel. Da sich nun zwei Bogen in verschiedenen Kreisen, über welchen gleiche Peripheriewinkel stehen, verhalten, wie die Durchmesser, so wird

$$\frac{PP'}{MM'} = \frac{r}{\varrho}$$

und folglich

$$\frac{dp}{dr} = \frac{r}{\varrho}.$$

Eine letzte Form für die Beschleunigung ist

$$\varphi = r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \frac{d^2r}{dt^2}.$$

Sie wurde bereits Cap. I, §. 14, Nr. 2 gegeben. Da nämlich beim vorliegenden Problem blos längs des Radiusvectors Beschleunigung stattfindet und die Beschleunigungscomponente senkrecht zu ihm Null ist, so muss φ mit der zum Radiusvector parallelen Componente daselbst zusammenfallen. Es findet in der That diese Uebereinstimmung bis auf das Vorzeichen statt, indem wir hier φ positiv angenommen haben, wenn sein Sinn dem Centrum zugewandt ist, während bei der dortigen Entwickelung die umgekehrte Voraussetzung zu Grunde gelegt ist.

Wir führen jetzt die Integration der Differentialgleichungen unseres Problems weiter und suchen die Polarcoordinaten r, ϑ und die rechtwinkeligen Coordinaten x, y des beweglichen Punktes als Functionen der Zeit zu bestimmen. Die beiden ersten Integrale, nämlich die durch das Flächenprincip und das Princip der lebendigen Kraft gegebenen, waren

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = C, \qquad v^2 = 2(U + h)$$

und enthalten die beiden Integrationsconstanten C und h. Nun ist nach Thl. II. Cap. II, §. 5. $v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ und daher

$$r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^4\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2r^2(U + h).$$

Subtrahirt man hiervon $r^4\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C^2$, so ergibt sich

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{2r^2(U + h) - C^2}}$$

und hierzu dem Früheren gemäss

$$d\vartheta = \frac{C}{r^2}dt = \frac{-Cdr}{r\sqrt{2r^2(U + h) - C^2}},$$

so dass, wenn t_0 der Anfangslage r_0, ϑ_0 entspricht, zunächst erhalten wird:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r}\frac{rdr}{\sqrt{2r^2(U + h) - C^2}},$$

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_{r_0}^{r}\frac{-Cdr}{r\sqrt{2r^2(U + h) - C^2}}.$$

Hierdurch sind zwei Relationen zwischen t, r, ϑ gegeben, wodurch r und ϑ als Functionen der Zeit bekannt werden. Die beiden Integrale, welche hier auf

treten, stammen, obgleich sie scheinbar sehr verschieden sind, doch aus einer gemeinsamen Quelle. Führt man nämlich das neue Integral

$$R = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \sqrt{2r^2(U+h) - C^2}$$

ein, so überzeugt man sich leicht, dass jene durch partielle Differentiation nach den Constanten h und C aus diesem gebildet werden, so dass

$$t - t_0 = \frac{\partial R}{\partial h}, \quad \vartheta - \vartheta_0 = -\frac{\partial R}{\partial C}$$

wird.

Nachdem die Polarcoordinaten r, ϑ als Functionen der Zeit gefunden, sind die rechtwinkligen Coordinaten x, y des beweglichen Punktes unmittelbar gleichfalls als Functionen der Zeit darstellbar. Nicht uninteressant ist es indessen, zu sehen, wie man die ursprünglichen Bewegungsgleichungen so umgestalten kann, dass sie in Bezug auf $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ und ϑ lineär werden und die beiden ersteren Grössen als Functionen von ϑ liefern durch die Formeln

$$\frac{x}{r} = a_1 \cos\vartheta + b_1 \sin\vartheta, \quad \frac{y}{r} = a_2 \cos\vartheta + b_2 \sin\vartheta.$$

Es ergab sich nämlich oben $r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2r^2(U+h) - C^2$ oder

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2(U+h) - \frac{C^2}{r^2}.$$

Differentiiren wir diese Gleichung, so folgt

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dU}{dr} + \frac{C^2}{r^3}$$

und indem wir hieraus den Werth $\frac{dU}{dr} = -\varphi = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3}$ entnehmen und in die Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}\varphi$ einsetzen, nimmt diese die Form an:

$$r\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{C^2}{r^2}\cdot\frac{x}{r},$$

die sich auch so schreiben lässt:

$$\frac{d\left(r^2\frac{d\cdot\frac{x}{r}}{dt}\right)}{dt} + \frac{C^2}{r^2}\frac{x}{r} = 0,$$

oder indem man mit $\frac{C^2}{r^2}$ dividirt:

$$\frac{r^2}{C}\frac{d\left(\frac{r^2}{C}\frac{d\cdot\frac{x}{r}}{dt}\right)}{dt} + \frac{x}{r} = 0.$$

Da aber nach dem Flächenprincip $\frac{r^2}{C} = \frac{dt}{d\vartheta}$ ist, so wird

$$\frac{r^2}{C}\frac{d\cdot\frac{x}{r}}{dt} = \frac{dt}{d\vartheta}\cdot\frac{d\cdot\frac{x}{r}}{dt} = \frac{d\cdot\frac{x}{r}}{d\vartheta}$$

und ebenso wandelt sich die weitere Differentiation in eine solche in Bezug auf ϑ um, so dass die Gleichung jetzt sich so gestaltet:

$$\frac{d^2\cdot\frac{x}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{x}{r} = 0,$$

welches die erwähnte lineäre Form ist. Ebenso erhält man die zweite Gleichung für $\frac{y}{r}$. Die vier Constanten a_1, a_2, b_1, b_2 können leicht durch die Anfangselemente der Bewegung ausgedrückt werden.

§. 11. **Die Centralbewegung, für welche die Beschleunigung der ersten Potenz der Entfernung vom Centrum proportional ist.** In diesem Falle ist $\varphi = \varkappa^2 r$, wo der Factor $\varkappa^2$ gefunden werden kann durch die Bemerkung, dass für eine gewisse Entfernung $r = \varepsilon$, $\varphi = g$ wird, so dass also $g = \varkappa^2 \varepsilon$, also $\varkappa^2 = \frac{g}{\varepsilon}$ ist. Wenn die xy-Ebene wieder die Ebene der Bewegung ist und x_0, y_0, a, b die Coordinaten der Anfangslage und die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit sind, so hat man das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{d^2x}{dt^2} + \varkappa^2 x = 0 & \frac{dx}{dt} = v_x & \\ & & \text{und} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \varkappa^2 y = 0 & \frac{dy}{dt} = v_y & \end{array} \begin{array}{ll} x = x_0 & v_x = a \\ \\ y = y_0 & v_y = b \end{array}\right\} \text{für } t = 0.$$

Die allgemeinen Integrale desselben sind:

$$\begin{array}{ll} x = A_1 \cos \varkappa t + B_1 \sin \varkappa t & v_x = -A_1\varkappa \sin \varkappa t + B_1\varkappa \cos \varkappa t \\ y = A_2 \cos \varkappa t + B_2 \sin \varkappa t & v_y = -A_2\varkappa \sin \varkappa t + B_2\varkappa \cos \varkappa t \end{array}$$

und die Anfangsbedingungen liefern die Constantenbestimmung:

$$\begin{array}{ll} x_0 = A_1 & a = B_1\varkappa \\ y_0 = A_2 & b = K_2\varkappa. \end{array}$$

Hiermit erhält man:

$$\begin{array}{ll} x = x_0 \cos \varkappa t + \frac{a}{\varkappa} \sin \varkappa t & v_x = -x_0\varkappa \sin \varkappa t + \frac{a}{\varkappa} \cos \varkappa t \\ y = y_0 \cos \varkappa t + \frac{b}{\varkappa} \sin \varkappa t & v_y = -y_0\varkappa \sin \varkappa t + \frac{b}{\varkappa} \cos \varkappa t. \end{array}$$

Weiter hat man $dU = -\varkappa^2 r dr$, $U - U_0 = -\frac{1}{2}\varkappa^2 (r^2 - r_0)$, $v^2 - v_0^2 = \varkappa^2 (r_0^2 - r^2)$. Die Gleichung der Bahn folgt durch Elimination von t zwischen den Ausdrücken für x und y, nämlich:

$$(bx - ay)^2 + \varkappa^2 (y_0 x - x_0 y)^2 = (bx_0 - ay_0)^2.$$

Dies ist aber die Gleichung einer um das feste Centrum als Mittelpunkt beschriebenen Ellipse; denn es sind die Coefficienten von xy, x^2, y^2 resp. $-2(ab + \varkappa^2 x_0 y_0)$, $b^2 + \varkappa^2 y_0^2$, $a^2 + \varkappa^2 x_0^2$ und damit wird die Differenz zwischen dem Quadrate des ersten und dem vierfachen Produkte der beiden letzten Coefficienten negativ, nämlich $-4\varkappa^2 (bx_0 - ay_0)^2$.

§. 12. **Die Centralbewegung, deren Beschleunigung dem reciproken Quadrate der Entfernung proportional ist. (Newton'sches Gesetz.)** Es sei $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$, wobei μ die Beschleunigung in der Einheit der Entfernung ausdrückt; die Gleichungen der Bewegung sind alsdann

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0.$$

Für die Kräftefunction hat man

$$U - U_0 = -\int_{r_0}^{r} \frac{\mu}{r^2} dr = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r_0}$$

und demnach sind die beiden Integrale, welche das Flächenprincip und das Princip der lebendigen Kraft liefern:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = C, \quad \tfrac{1}{2} v^2 = \frac{\mu}{r} + \tfrac{1}{2} v_0^2 - \frac{\mu}{r_0} = \frac{\mu}{r} + \tfrac{1}{2} H,$$

wenn $H = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$ gesetzt wird. Daher wird die Gleichung der Bahn erhalten durch Integration der Gleichung

$$\tfrac{1}{2} C^2 \left[u^2 + \left(- \frac{du}{d\vartheta} \right)^2 \right] = \frac{\mu}{r} + \tfrac{1}{2} H,$$

aus welcher mit Rücksicht auf die Bedeutung von $u = \frac{1}{r}$ folgt

$$d\vartheta = \frac{- C d \cdot \frac{1}{r}}{\sqrt{H + \frac{2\mu}{r} - \left(\frac{C}{r}\right)^2}},$$

welchem Ausdruck man wegen $H + \frac{2\mu}{r} - \left(\frac{C}{r}\right)^2 = H + \left(\frac{\mu}{C}\right)^2 - \left\{\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}\right\}^2$

$= \left\{ H + \left(\frac{\mu}{C}\right)^2 \right\} - \left\{ 1 - \left(\frac{\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}}{\sqrt{H + \left(\frac{\mu}{C}\right)^2}} \right)^2 \right\}$ leicht die Form gibt:

$$d\vartheta = \frac{- d \cdot \dfrac{\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}}{\sqrt{H + \left(\frac{\mu}{C}\right)^2}}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}}{\sqrt{H + \left(\frac{\mu}{C}\right)^2}} \right)^2}},$$

so dass man als unbestimmtes Integral erhält

$$\vartheta = Arc \cos \left(\frac{\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}}{\sqrt{H + \left(\frac{\mu}{C}\right)^2}} \right) + Const.$$

Zur Bestimmung der Constanten dient folgende Bemerkung. Der Ausdruck unter dem Zeichen *Arc cos* ist ein Cosinus und ist mithin sein grösster Werth die Einheit; variabel ist an ihm aber nur der Bestandtheil $\frac{C}{r}$ in seinem Zähler und in Folge dessen wächst er also mit abnehmendem r und erreicht sein Maximum 1 für den kleinsten Werth r_1 von r. Nennen wir ϑ_1 den Polarwinkel, welcher dem r_1 zugehört, so erhalten wir zur Bestimmung von *Const.* die Gleichung $\vartheta_1 = Arc \cos 1 + Const. = 0 + Const.$ und hiermit als Polargleichung der Bahn

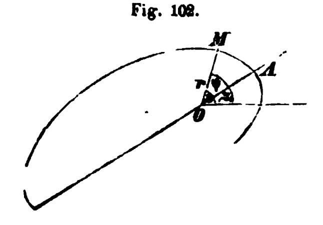


Fig. 102.

$$\vartheta - \vartheta_1 = Arc \cos \frac{\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}}{\sqrt{H + \left(\frac{\mu}{C}\right)^2}},$$

oder wenn wir die Richtung des kleinsten Radiusvectors zur Polaraxe wählen (Fig. 102), d. h. $\vartheta - \vartheta_1 = \psi$ setzen und die Gleichung nach r auflösen:

$$r = \frac{\frac{C^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{C}{\mu}\right)^2 H} \cdot \cos \psi}$$

Diese Gleichung hat die Form $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \psi}$ und stellt mithin einen Kegelschnitt dar, bezogen auf den Brennpunkt als Pol und die Richtung der durch die Brennpunkte gehenden Hauptaxe nach dem dem Pole benachbarten Scheitel hin als Polaraxe. Die numerische Excentricität ε und der halbe Parameter p dieses Kegelschnittes sind daher

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{C}{\mu}\right)^2 H}, \qquad p = \frac{C^2}{\mu}.$$

und folgt aus der ersteren dieser Formeln, dass der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, je nachdem $H < 0$, $H = 0$ oder $H > 0$ ist, d. h. je nachdem $v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$, $v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}$ oder $v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}$ ist. Man erkennt daraus, dass die Art des Kegelschnittes von der Grösse des Anfangsradiusvectors, d. h. der anfänglichen Entfernung vom Centrum und der Grösse der Anfangsgeschwindigkeit, nicht aber von der Neigung der letzteren gegen jenen abhängt. Der Punkt kann also mit derselben Anfangsgeschwindigkeit seine Anfangslage nach einer beliebigen Richtung hin verlassen, immer bleibt die Bahn von derselben Art; damit sie ihre Art ändere, muss v_0 oder r_0 oder müssen beide sich so ändern, dass die dem H gesteckten Grenzen überschritten werden.

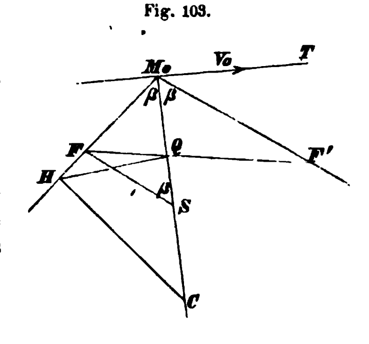
Das Resultat der bisherigen Untersuchung lässt sich folgendermassen zusammenfassen:

Wird ein Punkt von einer Beschleunigung afficirt, deren Richtung fortwährend nach einem festen Centrum hinläuft und deren Grösse dem reciproken Quadrate der Entfernung des Punktes vom Centrum proportional ist, so ist die Bahn desselben ein Kegelschnitt, für welchen ein Brennpunkt mit dem festen Centrum zusammenfällt; dieser Kegelschnitt kann eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel sein; welcher von diesen Gattungen er angehört, hängt von der Grösse der Anfangsgeschwindigkeit und seines anfänglichen Abstandes vom Centrum, nicht aber von der Richtung der ersteren ab.

Ist die Bahn eine Ellipse oder Hyperbel, so besteht zwischen dem halben Parameter p, der halben Hauptaxe a, welche durch die Brennpunkte geht, und der numerischen Excentrität ε die Relation $p = a(1 - \varepsilon^2)$ oder $p = a(\varepsilon^2 - 1)$ und hieraus erhält man im Falle der Ellipse: $a = -\frac{\mu}{H} = \frac{\mu}{\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2}$ und im Falle der Hyperbel $a = \frac{\mu}{H} = \frac{\mu}{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}}$. Ferner ist für die zweite Halbaxe bei der Ellipse $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$ und bei der Hyperbel $b^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1)$, mithin in unserem Falle $b = \frac{ac}{\mu}\sqrt{-H} = \frac{c}{\sqrt{-H}}$ für die Ellipse und $b = \frac{c}{\sqrt{H}}$ für die Hyperbel.

Es ist leicht, die geometrische Bedeutung des Criteriums für die Art des Kegelschnittes zu erkennen. Es sei M_0 (Fig. 103.) die Anfangslage des beweglichen Punktes, F das feste Centrum, nach welchem die Beschleunigung gerichtet ist, also $FM_0 = r_0$ der Anfangsabstand und M_0T die Richtung der Geschwindig-

keit v_0, also die Tangente des Kegelschnitts in M_0. Zieht man nun durch M_0 eine weitere Gerade M_0F' so, dass sie mit der Tangente denselben Winkel bildet wie FM_0, so muss sie nach einem bekannten Satze den zweiten Brennpunkt F' des Kegelschnittes enthalten. Die Halbirungslinie des Winkels FM_0F' ist die Normale in M_0 und auf ihr liegt der Krümmungsmittelpunkt für M_0; um ihn zu finden, genügt es, die Beschleunigung $\frac{\mu}{r_0^2}$ in der Richtung M_0F aufzutragen und auf die Normale zu projiciren; diese Projection ist die Normalbeschleunigung, hat die Richtung des Krümmungshalbmessers und ist gleich dem Quadrate von v_0 dividirt durch den Krümmungshalbmesser. Ist letzterer M_0C und Winkel $FM_0C = \beta$, so besteht folglich die Gleichung



$$\frac{\mu}{r_0^2} \cos \beta = \frac{v_0^2}{M_0C}.$$

Nach einer bekannten Construction für den Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte erhält man durch die Projection H des Krümmungsmittelpunktes C auf den Radiusvector und durch abermalige Projection des Punktes H zurück auf die Normale, einen Punkt Q der Hauptaxe, auf welcher die Brennpunkte liegen, so dass also die Gerade FQ den zweiten Brennpunkt F' unseres Kegelschnittes bestimmt. Je nachdem nun FQ die Gerade M_0F' in F' auf derselben Seite der Tangente schneidet, auf welcher F liegt oder auf der entgegengesetzten, ist der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, denn bei der Ellipse trifft die Tangente niemals die Verbindungsstrecke der Brennpunkte, bei der Hyperbel aber stets; ist aber FQ parallel M_0F', so liegt der Brennpunkt F' im Unendlichen und ist folglich die Curve eine Parabel. Um dies Criterium durch Längenverhältnisse auszudrücken, ziehen wir FS parallel M_0F'. Fällt alsdann der Punkt Q zwischen M_0 und S, so ist die Curve eine Ellipse, fällt Q mit S zusammen, eine Parabel und fällt Q über S hinaus, eine Hyperbel. Diese Fälle finden statt, je nachdem $M_0Q < M_0S$, $M_0Q = M_0S$ oder $M_0Q > M_0S$ ist.

Nun ist nach der obigen Bemerkung über die Projectionen von C:

$$M_0Q = M_0C \cdot \cos^2 \beta,$$

oder, wenn man die vorhin entwickelte Gleichung behufs Elimination von M_0C zu Hülfe ruft

$$M_0Q = \frac{v_0^2 \, r_0^2 \cos \beta}{\mu}$$

und da aus dem gleichschenkligen Dreieck M_0SF folgt:

$$M_0S = 2 r_0 \cos \beta,$$

so erhält man weiter:

$$\frac{M_0Q}{M_0S} = \frac{v_0^2}{\frac{2\mu}{r_0}}$$

und ist demnach das gesuchte Criterium: $\frac{v_0^2}{\frac{2\mu}{r_0}} \lesseqgtr 1$, d. h. $v_0^2 \lesseqgtr \frac{2\mu}{r_0}$.

Wir wollen jetzt die Coordination r, ψ als Functionen der Zeit suchen, uns dabei aber auf den Fall der elliptischen Bewegung beschränken. Die zu diesem

Zwecke zu integrirende Differentialgleichung erhalten wir aus §. 10., indem wir $U + h = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2} H$ setzen, nämlich:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{H + \frac{2\mu}{r} - \left(\frac{C}{r}\right)^2}}.$$

Die Integration würde zunächst r als Function von t liefern, wozu alsdann mit Hülfe der bereits bekannten Gleichung der Bahn ψ als Function von t gesucht werden müsste. Für die bequemere Handhabung dieser Gleichung ist es nicht unzweckmässig, die ebenfalls bereits entwickelten Bahnelemente a und ε, nämlich die grosse Halbaxe und numerische Excentrität statt H und c einzuführen. Wir fanden im vorigen §. für die elliptische Bahn:

$$a = -\frac{\mu}{H}, \quad a(1 - \varepsilon^2) = \frac{c^2}{\mu},$$

woraus wir ziehen

$$H = -\frac{\mu}{a}, \quad c^2 = \mu a (1 - \varepsilon^2).$$

Dadurch wird zunächst

$$dt = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 \varepsilon^2 - (a - r)^2}}.$$

Statt hieraus r als Function von t zu suchen und nachher in die Gleichung der Bahn einzusetzen, führt man lieber eine neue Variabele u ein, die sogenannte excentrische Anomalie, stellt r und ψ als Functionen derselben dar, sie selbst aber als Function der Zeit. Hierdurch ist die vorliegende Aufgabe ebenfalls gelöst. Beschreibt man nämlich über der grossen Axe der Ellipse als Durchmesser einen Kreis, verlängert die Ordinate MP des beweglichen Punktes M bis zum Durchschnitt N mit diesem und zieht den Radius CN des Kreises, so bildet letzterer mit der Richtung CF der grossen Axe vom Mittelpunkt nach dem Brennpunkt, welcher Centrum der Beschleunigung ist, den Winkel NCF, welcher die excentrische Anomalie des Punktes M heisst und gewöhnlich mit u bezeichnet wird. Im Gegensatze dazu heisst der Polarwinkel ψ, dessen Scheitel im Centrum der Beschleunigung liegt, die wahre Anomalie. Um nun zunächst r und ψ durch u darzustellen, hat man aus der Polargleichung der Ellipse $r + \varepsilon r \cos\psi = a(1 - \varepsilon^2)$ und da $r\cos\psi = FP = a\cos u - CF = a\cos u - a\varepsilon$ ist

Fig. 104.

$$r = a(1 - \varepsilon \cos u)$$

und indem man diesen Ausdruck für r in die Gleichung der Ellipse einsetzt, $1 - \varepsilon \cos u = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon\cos\psi}$ und hieraus

$$1 - \cos u = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}u = (1 - \varepsilon)\frac{1 - \cos\psi}{1 + \varepsilon\cos\psi} \text{ und}$$

$$1 + \cos u = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}u = (1 + \varepsilon)\frac{1 + \cos\psi}{1 + \varepsilon\cos\psi}$$

entwickelt, durch Division dieser Resultate in einander

$$tg\,\tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \cdot tg\,\tfrac{1}{2}u.$$

Hiermit sind r und ψ durch u dargestellt. Um nun aber u als Function der Zeit zu erhalten, müssen wir die Werthe für r und dr, nämlich $r = a(1 - \varepsilon\cos u)$,

$dr = a\varepsilon \sin u\, du$ in die obige Differentialgleichung zwischen r und t einführen. Diese Substitution liefert

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\,(1 - \varepsilon \cos u)\, du$$

und hieraus erhält man, wenn die Zeit von dem Momente an gezählt wird, in welchem der bewegliche Punkt durch den dem Beschleunigungscentrum zunächst gelegenen Scheitel der Ellipse (das Perihel) hindurchgeht, so dass also $t = 0$ für $u = 0$ ist,

$$nt = u - \varepsilon \sin u\,, \qquad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,.$$

Aus dieser Gleichung folgt für $u = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots\; nt = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ so dass der bewegliche Punkt zu 1, 2, 3 ... Umläufen die Zeiten $\frac{2\pi}{n}, 2\cdot\frac{2\pi}{n}, 3\cdot\frac{2\pi}{n}, \ldots,$ also zu jedem einzelnen Umlauf immer die nämliche Zeit braucht. Bezeichnen wir diese Umlaufszeit mit T, so ist

$$nT = 2\pi$$

und indem wir für n seinen Werth einführen, ergibt sich noch

$$\mu = \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot a^3,$$

d. h. die Beschleunigung μ in der Einheit der Entfernung vom Centrum ist dem Cubus der grossen Halbaxe der Bahn direct und dem Quadrate der Umlaufszeit umgekehrt proportional.

Zu der Gleichung $nt = u - \varepsilon \sin u$ kann man aber auch auf folgendem Wege gelangen. Nach dem Flächenprincipe ist der Sector $MFA = \frac{1}{2}ct$; andererseits aber stehen die Ordinaten MP, NP, sowie die Räume MAP, NAP der Ellipse und des Kreises in dem Verhältniss $b : a$ der kleinen und grossen Halbaxe und da die Dreiecke MFP, NFP sich wie $MP : NP$, also ebenfalls wie $b : a$ verhalten, so stehen auch die Summen $MAP + MFP$ und $NAP + NFP$ d. h. die Sectoren MFA und NFA der Ellipse und des Kreises in demselben Verhältnisse. Nun ist aber $NFA = NCA - NCF$ d. h. gleich $\frac{1}{2}a^2 u - \frac{1}{2}a\varepsilon\cdot a \sin u$. Daher wird $MFA = \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{2}a^2(u - \varepsilon \sin u)$ und indem man diesen Ausdruck dem Ausdrucke $\frac{1}{2}ct$ gleichsetzt, kommt

$$ct = ab\,(u - \varepsilon \sin u)\,,$$

welche Gleichung in die obige Form übergeht, sobald man mit Hülfe der Formeln

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \qquad c^2 = \mu a\,(1 - \varepsilon^2), \qquad b^2 = a^2\,(1 - \varepsilon^2)$$

die Grösse $\frac{c}{ab}$ eliminirt.

Die Gleichung $nt = u - \varepsilon \sin u$ liefert u als Function von t, wenn man sie mit Hülfe der Lagrange'schen Umkehrungsformel behandelt oder u in eine Sinusreihe auflöst, worüber wir hier nichts mittheilen werden; für kleine Werthe der Excentricität ε, bei welchen das Quadrat und die höheren Potenzen keinen Einfluss mehr über die Fehlergrenze hinaus üben, kann man nt als Näherungswerth von u anwenden. Indem man die Gleichung so schreibt:

$$u = nt + \varepsilon \sin u\,,$$

erhält man, wenn man rechts unter dem Sinuszeichen für u wieder $nt + \varepsilon \sin u$ setzt: $u = nt + \varepsilon \sin(nt + \varepsilon \sin u)$ und indem man abkürzt

$$u = nt + \varepsilon \sin nt.$$

Hierzu gibt die Gleichung $r = a\,(1 - \varepsilon \cos u)$ mit derselben Grenze der Genauigkeit

$$r = a\,(1 - \varepsilon \cos nt).$$

Um unter derselben Voraussetzung auch ψ durch t auszudrücken, benutzt man, statt den eben gefundenen Werth für r in die Gleichung der Bahn einzuführen und abzukürzen, lieber direct die Gleichung des Flächenprincips, nämlich $r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = C$, welche wegen $\vartheta - \vartheta_1 = \psi$ auch unter der Form $r^2 \frac{d\psi}{dt} = C$ geschrieben werden kann und vermöge $C^2 = \mu a\,(1 - \varepsilon^2)$ übergeht in $r^2 d\psi = \sqrt{\mu a\,(1 - \varepsilon^2)}\,dt$, worin nun noch für r sein Werth zu setzen ist. Nun erhält man für r aus $r = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \psi}$ $= a\,(1 - \varepsilon^2) \left\{1 + \varepsilon \cos \psi\right\}^{-1}$ bis zu Gliedern der Ordnung von ε^2 genau: $r = a\,(1 - \varepsilon \cos \psi)$ und hiermit ebenso $r^2 = a^2\,(1 - 2\,\varepsilon \cos \psi)$ und folglich weiter: $(1 - 2\,\varepsilon \cos \psi)\,d\psi = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,dt = nt$. Die Integration dieser Gleichung liefert, wegen $t = 0$ für $\psi = 0$: $nt = \psi - 2\,\varepsilon \sin \psi$, oder $\psi = nt + 2\,\varepsilon \sin \psi$, mithin nach derselben Methode, wie oben

$$\psi = nt + 2\,\varepsilon \sin nt.$$

Beschreibt man um F mit der Einheit als Radius einen Kreis und lässt auf ihm einen Punkt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit n bewegen, so ist $\psi = nt$ die Gleichung seiner Bewegung. Der Radiusvector, welcher nach ihm hinführt, bildet mit dem Radiusvector der elliptischen Bewegung den Winkel $2\varepsilon \sin nt$. Man nennt denselben die Mittelpunktsgleichung der elliptischen Bewegung. Während der Punkt der elliptischen Bewegung die erste Hälfte seiner Bahn beschreibt, ist dieser Winkel positiv, also ist der Radiusvector der elliptischen Bewegung dem Radiusvector der gleichförmigen Bewegung voraus, in der zweiten Hälfte der Bahn ist es umgekehrt. nt heisst die mittlere Anomalie

Die Gesetze der Planetenbewegung sind von Kepler entdeckt worden; sie sind die drei folgenden und beziehen sich auf einen bestimmten Punkt, den Schwerpunkt der Planeten.

1. Die Planetenbahnen sind ebene Curven und die Radienvectoren derselben vom Mittelpunkte der Sonne als Pol ausgehend, beschreiben Sectoren, welche der Zeit proportional sind.

2. Die Planetenbahnen sind Ellipsen und haben den Sonnenmittelpunkt zu einem ihrer Brennpunkte.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten sind den Cuben der grossen Halbaxen ihrer Bahnen proportional.

Kepler fand diese Sätze durch lange, mit der grössten Ausdauer fortgesetzte und mit wunderbarem Scharfsinn unter einander verglichene Beobachtungen; wir können heutzutage kaum mehr ermessen, welche gewaltige Entdeckung es war, aus den scheinbar so verwickelten Bahnen der Himmelskörper die Linien heraus zu lesen, auf deren Erforschung das Alterthum allen Fleiss verwandt hatte, ohne nur im Entferntesten die Bedeutung zu ahnen, welche sie für die Mechanik des Himmels erlangen sollten. Newton hat aus den Kepler'schen Gesetzen die Folgerungen gezogen, welche die Basis der ganzen Astronomie, der Physik und der Mechanik geworden sind. Das erste Kepler'sche Gesetz spricht das Flächenprincip aus und es folgt aus ihm, dass die Beschleunigung des Planeten nach dem Mittelpunkte der Sonne gerichtet ist. Aus dem zweiten Gesetze ergibt sich, dass die Beschleunigung dem Quadrate des Abstandes vom Sonnenmittelpunkte umgekehrt

proportional sein muss. Diese Folgerung wurde bereits in dem 2. Beispiele des Cap. I, §. 3 gezogen, kann aber auch auf folgende Weise erhalten werden. Wir haben oben für die Beschleunigung der Centralbewegung die Formel gegeben

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{d\vartheta^2}\right);$$

ist nun $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \vartheta}$ oder $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos \vartheta$ die Gleichung einer Planetenbahn, bezogen auf den Sonnenmittelpunkt als Pol und die grosse Axe als Polaraxe, so wird $\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\vartheta} = -\frac{\varepsilon}{p} \sin \vartheta$, $\frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{d\vartheta^2} = -\frac{\varepsilon}{p} \cos \vartheta$, mithin

$$\varphi = \frac{c^2}{pr^2}.$$

Aus diesen beiden ersten Gesetzen ergibt sich also die vollkommene Uebereinstimmung der Planetenbewegung mit der in den vorigen §§. entwickelten elliptischen Bewegung. Das dritte Gesetz in bestimmte Form gefasst, sagt, dass

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \cdots$$

sei, wenn $2a$, $2a_1$, $2a_2$, ... die grossen Axen der Bahnen verschiedener Planeten, T, T_1, T_2, ... aber ihre Umlaufszeiten sind, d. h. dass für alle Planeten $\frac{a^3}{T_2}$ constant sei. Nun war bei der elliptischen Bewegung die Beschleunigung μ in der Einheit der Entfernung vom Centrum

$$\mu = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2},$$

daher sagt das dritte Kepler'sche Gesetz, dass für alle Planeten die Beschleunigung in der Einheit der Entfernung gleich sei, so dass also, wenn sie sämmtlich in den Abstand gleich Eins vom Sonnenmittelpunkte gebracht werden könnten, sie auf dieselbe Weise beschleunigt würden. In der Theorie der Kräfte wird erläutert werden, dass der Grund der Beschleunigung in der Anziehung der Massen gesucht wird. Dort wird der hier besprochene Satz die Bedeutung gewinnen, dass die Sonne die Masseneinheit der verschiedenen Planeten auf dieselbe Weise anzieht und also kein spezifischer Unterschied der Anziehung nach Massgabe der Substanz existirt, aus welcher der Planet gebildet ist.

Newton hat die Kepler'schen Gesetze auch auf die Bewegung der Cometen um die Sonne und der Trabanten um die Hauptplaneten ausgedehnt und indem er stufenweise seine Betrachtungen verallgemeinerte, gelangte er dazu, zum erstenmale die Idee der allgemeinen Gravitation zu fassen und den Satz auszusprechen, dass zwischen allen materiellen Körpern eine Wechselwirkung bestehe, dass sie einander anziehen im directen Verhältnisse ihrer Massen und umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung. Wird diese Auffassung zu Grunde gelegt, so genügen unsere bisherigen Untersuchungen nicht mehr, um die Planetenbewegung vollständig zu erklären. Denn erstens ist das ganze Problem alsdann ein Problem der relativen und nicht mehr der absoluten Bewegung, so dass die Kepler'schen Bahnen also nur die relativen Bahnen sind und zweitens ist die in unseren Untersuchungen vorkommende Grösse μ von den sämmtlichen Körpern abhängig, welche einen Planeten beschleunigen. Wir werden daher Weiteres auf die Capitel über die relative Beschleunigung und die Theorie der Attractionskräfte versparen müssen.

§. 13. Wir wenden uns jetzt zu dem Jacobi'schen Princip des letzten Multiplicators, werden uns aber wegen des grossen Umfanges dieses Gegenstandes auf eine kurze Darstellung der Grundzüge desselben beschränken müssen. Das Princip lautet: „Wenn ein System von Differentialgleichungen soweit integrirt ist, dass man alle Integrale desselben, bis auf eines, kennt, so kann das letzte fehlende Integral gefunden werden, indem man den Multiplicator oder integrirenden Factor der letzten, noch zu integrirenden Gleichung in allen Fällen anzugeben im Stande ist.

Bei Entwickelung dieses Princips setzen wir voraus, dass die Differentialgleichungen nach dem höchsten der in ihnen vorkommenden Differentialquotienten aufgelöst sind und reduciren das System derselben auf die erste Ordnung, indem wir die Differentialquotienten der niederen Ordnungen als neue Variabele einführen. Hiernach würde das System der Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

zu ersetzen sein durch das gleichbedeutende:

$$x' = \frac{dx}{dt} \quad x'' = \frac{dx'}{dt} \quad x'' = X$$

$$y' = \frac{dy}{dt} \quad y'' = \frac{dy'}{dt} \quad y'' = Y$$

$$z' = \frac{dz}{dt} \quad z'' = \frac{dz'}{dt} \quad z'' = Z$$

oder auch durch die Proportion:

$$dt : dx : dx' : dy : dy' : dz : dz' = 1 : x' : X : y' : Y : z' : Z.$$

Für die allgemeine Untersuchung wollen wir die Variabelen des Systems mit $x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, bezeichnen und dasselbe unter der Form

$$\frac{dx_1}{dx} = X_1, \frac{dx_2}{dx} = X_2, \ldots \frac{dx_i}{dx} = X_i, \ldots \frac{dx_n}{dx} = X_n,$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, unter der Form

$$dx : dx_1 : dx_2 : \cdots\cdots : dx_n = 1 : X_1 : X_2 \cdots\cdots : X_n$$

voraussetzen, welche durch Einführung eines beliebigen Factors X auf der rechten Seite auch so dargestellt werden kann:

$$dx : dx_1 : dx_2 : \cdots\cdot : dx_n = X : X_1 : X_2 : \cdots\cdot : X_n,$$

wobei die jetzigen Grössen $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ soviel sind als die früheren gleichnamigen Grössen multiplicirt mit X.

Wir beginnen mit der speziellen Betrachtung einer einzigen Differentialgleichung, um von da aus durch Erweiterung zum System

von 2, 3, ... n Gleichungen successive aufzusteigen. Sind, wie allgemein üblich, x, y die Variabelen, X, Y Functionen derselben, so sei die Gleichung unter der Form

$$dx : dy = X : Y$$

gegeben, welche soviel bedeutet, als

$$Xdy - Ydx = 0.$$

Ist nun $F = Const.$ das Integral dieser Gleichung, nach der Constanten aufgelöst gedacht, so liefert die Differentiation desselben die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial x}dx = 0,$$

welche mit $Xdy - Ydx = 0$ identisch sein muss, sich von ihr also nur durch einen Factor M unterscheiden kann, für welchen die Bedingungen

$$MX = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad -MY = \frac{\partial F}{\partial x}$$

bestehen müssen, welcher daher der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MY)}{\partial y} = 0$$

genügen muss. Dieser Multiplicator M macht den Ausdruck $Xdy - Ydx$ unmittelbar zu einem vollständigen Differentiale $MXdy - MYdx = \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial x}dx$ und mithin die vorgelegte Differentialgleichung integrabel. Er heisst bekanntlich der integrirende Factor derselben und ward bereits von **Euler** gefunden.

Es seien jetzt zwei Gleichungen gegeben durch die Proportion

$$dx : dy : dz = X : Y : Z$$

und seien $f = \alpha$, $\varphi = \beta$ ihre beiden Integrale, nach den Constanten aufgelöst. Die Differentiation derselben führt zu den Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = 0,$$

aus welchen man für die Verhältnisse der Differentialien dx, dy, dz findet:

$$dx : dy : dz = A : B : C,$$

wenn A, B, C die Bedeutung haben:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Da diese Proportion mit der gegebenen identisch sein muss, so gibt es nothwendig einen Multiplicator M von der Beschaffenheit, dass

$$MX = A,\ MY = B,\ MZ = C$$

wird. Zwischen den Grössen A, B, C besteht aber, wie die unmittelbare Differentiation nach x, y, z zeigt, die Relation:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Der Multiplicator muss daher der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügen:

$$\frac{\partial (MX)}{\partial x} + \frac{\partial (MY)}{\partial y} + \frac{\partial (MZ)}{\partial z} = 0.$$

Während nun bei dem vorigen Falle mit Hülfe des Multiplicators das Integral der vorgelegten Differentialgleichung sich ergab, ist es hier im Falle des Systems zweier Differentialgleichungen nicht unmittelbar möglich, durch denselben ein Integral zu erhalten; vielmehr liefert er durch Multiplication mit den Grössen X, Y, Z nur die Werthe von A, B, C, nämlich

$$A = MX = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$B = MY = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$C = MZ = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

und erst mit ihrer Hülfe gelangt man zu einem der beiden Integrale, z. B. zu $f = \alpha$, wenn das andere $\varphi = \beta$ bereits bekannt ist.

Führt man nämlich an die Stelle einer der Variabelen, z. B. z, die neue Varibele φ ein, so wird f eine Function von x, y, φ und wenn die Differentiationen von f nach diesen Variabelen durch $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$ bezeichnet werden, so wird

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

und hiermit werden

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z},\quad B = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z},\quad C = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

woraus man erhält

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{A}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}},\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{B}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$$

und da das Differential von f, als Function von x, y, φ dargestellt

nämlich $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)d\varphi$ sich vermöge des bereits bekannten Integrales $\varphi = \beta$ in Folge von $d\varphi = 0$ auf

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$$

zusammenzieht, so wird dasselbe nach Substitution der eben dargestellten beiden Differentialquotienten mit Rücksicht auf $A = MX$, $B = MY$ übergehen in

$$df = \frac{M}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}(Xdy - Ydx)$$

und also die Gleichung

$$\int \frac{M}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}(Xdy - Ydx) = f = \alpha$$

das gesuchte zweite Integral der beiden Differentialgleichungen darstellen, sobald X, Y mit Hülfe von $\varphi = \beta$ durch x und y allein dargestellt sind. Man sieht, dass also $\frac{M}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$ der integrirende Factor der Gleichung $Xdy - Ydx = 0$ ist. Daher also der Satz:

Wenn $\varphi = \beta$ ein Integral des Systems zweier Differentialgleichungen $dx : dy : dz = X : Y : Z$ ist und die Grösse M der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MY)}{\partial y} + \frac{\partial(MZ)}{\partial z} = 0$ genügt, so ist $\frac{M}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$ der integrirende Factor der Differentialgleichung $Xdy - Ydx = 0$, wenn aus X, Y, M die Variabele z mit Hülfe des Integrales $\varphi = \beta$ eliminirt wird.

Man kann zwei Fälle bezeichnen, in welchen man den Multiplicator M leicht angeben kann. Bringt man nämlich die partielle Differentialgleichung, welcher er genügen muss, auf die Form

$$X\frac{\partial M}{\partial x} + Y\frac{\partial M}{\partial y} + Z\frac{\partial M}{\partial z} + \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)M = 0,$$

so sieht man, dass $M = Const. = 1$ genügt, wenn $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$ ist. Der integrirende Factor der Gleichung $Xdy - Ydx = 0$ ist in diesem Falle $\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$. Gibt man andererseits dieser Gleichung die Form:

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{Y}{X}\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{Z}{X}\frac{\partial M}{\partial z}\right)+\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0,$$

welche mit Hülfe des gegebenen Systems der zwei Differentialgleichungen, nämlich $\frac{Y}{X}=\frac{dy}{dx}$, $\frac{Z}{X}=\frac{dz}{dx}$ wegen $\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial M}{\partial z}\frac{dz}{dx}=\frac{dM}{dx}$ übergeht in $\frac{d\cdot lM}{dx}+\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0$, so erkennt man, dass, wenn $\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$ der vollständige Differentialquotient nach x von einer Function ξ ist, der Multiplicator $M = C\cdot e^{-\xi}$ wird.

Als Beispiel für den ersten dieser beiden Fälle dient die Integration der Differentialgleichung zweiter Ordnung $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x, y)$ [s. Cap. II. §. 4], welche identisch ist mit dem Systeme der beiden Gleichungen erster Ordnung $\frac{dy}{dx}=y'$, $\frac{dy'}{dx}=f(x, y)$ oder also auch mit der Proportion $dx:dy:dy' = 1:y':f(x, y)$. Hier ist $X=1$, $Y=y'$, $Z=f(x, y)$ und die Bedingung $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$ erfüllt. Kennt man also ein Integral $\varphi(x, y, y')=\beta$ dieses Systems, so ist $\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial y'}}$ der integrirende Factor der Gleichung $dy - y'dx = 0$, nachdem y' mit Hülfe von $\varphi(x, y, y')=\beta$ eliminirt ist.

§. 14. Es sei jetzt gegeben das System von n Differentialgleichungen: $dx:dx_1:dx_2:\cdots\cdot:dx_n = X:X_1:X_2:\cdots\cdots:X_n$ mit den $n+1$ Variabelen $x, x_1, x_2, \cdots x_n$ und seien $f_1=\alpha_1$, $f_2=\alpha_2$, $\cdots\cdot f_n=\alpha_n$ die n Integrale desselben, aufgelöst nach den n willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdot \alpha_n$. Die Differentiation derselben liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2+\cdots\cdot+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n=0\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x}dx+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2+\cdots\cdot+\frac{\partial f_2}{\partial x_n}dx_n=0\\
&\;\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&\frac{\partial f_n}{\partial x}dx+\frac{\partial f_n}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_n}{\partial x_2}dx_2+\cdots\cdot+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}dx_n=0
\end{aligned}$$

und aus diesem erhält man die Proportion

$$dx:dx_1:dx_2:\cdots\cdots:dx_n = A:A_1:A_2:\cdots\cdots:A_n,$$

worin die Grössen A der Reihe nach die Werthe der Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x} \end{vmatrix} \cdots\cdots \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix}$$

besitzen, wenn man dieselben für eine gerade Anzahl der $n+1$ Variabeln aufeinanderfolgend mit abwechselnden, bei einer ungeraden Anzahl derselben aber mit demselben Zeichen nimmt.

Daher besteht weiter die Proportion

$$A : A_1 : A_2 : \cdots : A_n = X : X_1 : X_2 : \cdots\cdots : X_n$$

und folglich gibt es einen Factor M von der Beschaffenheit, dass

$$A = MX, \quad A_1 = MX_1, \quad A_2 = MX_2, \quad \cdots \quad A_n = MX_n$$

wird. Nun kann gezeigt werden, dass die Grössen A der Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \cdots\cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0$$

unterworfen sind; ist dies erwiesen, so besteht für den Multiplicator M die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial (MX)}{\partial x} + \frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (MX_2)}{\partial x_2} + \cdots\cdots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} = 0.$$

Der Beweis hierfür ergibt sich, wenn man bedenkt, dass $A, A_1, A_2, \cdots A_n$ Unterdeterminanten sind von der Determinante

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x} \end{vmatrix}$$

worin die Function f willkürlich wählbar ist. Ordnet man R nach den Elementen der ersten Reihe, nämlich nach den Derivirten dieser Function, so erhält man nach einem bekannten Satze über die Bildung der Determinanten:

$$R = A\frac{\partial f}{\partial x} + A_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + A_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach denselben Derivirten partiell, so erhält man

$$A = \frac{\partial R}{\partial\cdot\frac{\partial f}{\partial x}},\quad A_1 = \frac{\partial R}{\partial\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1}},\ \dots\ A_i = \frac{\partial R}{\partial\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}},\quad A_k = \frac{\partial R}{\partial\cdot\frac{\partial f}{\partial x_k}}\ \dots\ A_n = \frac{\partial R}{\partial\cdot\frac{\partial f}{\partial x_n}}.$$

Da nun in A keine Differentiationen nach x, in A_1 keine nach x_1, $\cdots$ in A_n keine nach x_n vorkommen, so können in

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$$

nicht zweite Differentialquotienten von der Form $\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i^2}$, sondern nur solche, wie $\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k}$ vorkommen, wo i und k verschiedene Indices sind. Daher hat der vorstehende Ausdruck die Form

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = \Sigma F_{i,k}^{(s)} \cdot \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Um die hierin vorkommenden Coefficienten $F_{i,k}^{(s)}$ entwickeln zu können, stellen wir die Determinanten A_i, A_k nach den Derivirten der Functionen $f_1, f_2 \cdots f_n$, resp. genommen nach x_k und x_i geordnet dar, nämlich

$$A_i = \frac{\partial A_i}{\partial\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_k}}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial A_i}{\partial\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_k}}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial A_i}{\partial\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_k}}\frac{\partial f_s}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial A_i}{\partial\cdot\frac{\partial f_n}{\partial x_k}}\frac{\partial f_n}{\partial x_k}$$

$$A_k = \frac{\partial A_k}{\partial\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i}}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial A_k}{\partial\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i}}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial A_k}{\partial\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x_i}}\frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial A_k}{\partial\cdot\frac{\partial f_n}{\partial x_i}}\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$$

Hieraus erhalten wir die beiden mit $\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k}$ multiplicirten Glieder, das eine aus $\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$, nämlich:

$$\frac{\partial A_i}{\partial\cdot\frac{\partial f_s}{\partial x_k}}\cdot\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k}$$

und das andre aus $\frac{\partial A_k}{\partial x_k}$:

$$\frac{\partial A_k}{\partial\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}}\cdot\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Die Coefficienten beider geben zusammen $F_{i,k}^{(s)}$, nämlich:

$$F_{i,k}^{(s)} = \frac{\partial A_i}{\partial\cdot\frac{\partial f_s}{\partial x_k}} + \frac{\partial A_k}{\partial\cdot\frac{\partial f_s}{\partial x_i}} = \frac{\partial^2 R}{\partial\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\partial\cdot\frac{\partial f_s}{\partial x_k}} + \frac{\partial^2 R}{\partial\cdot\frac{\partial f}{\partial x_k}\,\partial\cdot\frac{\partial f_s}{\partial x_i}}.$$

Diese Summe ist aber Null, weil in jeder Determinante

$R = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ die Grössen $\frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik} \partial a_{rs}}$ und $\frac{\partial^2 R}{\partial a_{rk} \partial a_{is}}$ entgegengesetzt gleich sind. (Vgl. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. 2. Aufl. S. 21.)

Um jetzt die Bedeutung des Multiplicators M für die Integration unseres Systems von Differentialgleichungen zu zeigen, müssen wir demselben zunächst eine etwas passendere Form geben. Hierzu dient ein Satz über die Differentiation einer Determinante. Sind nämlich sämmtliche Elemente der Determinante

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & p_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & p_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & p_n \end{vmatrix}$$

von ein und derselben Grösse x abhängig, so ist zunächst

$$\frac{dR}{dx} = \Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial a_i} \frac{da_i}{dx} + \frac{\partial R}{\partial b_i} \frac{db_i}{dx} + \cdots + \frac{\partial R}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dx} \right).$$

Nun kann man aber folgende n Systeme von Gleichungen bilden mit $x_1', x_2', \cdots x_n'$; $x_1'', x_2'', \cdots x_n''$; $\cdots\cdots x_1^{(n)}, x_2^{(n)} \cdots\cdots x_n^{(n)}$ als Unbekannten:

$$\begin{aligned}
a_1 x_1' + b_1 x_2' + \cdots\cdots + p_1 x_n' &= \frac{da_1}{dx} \\
a_2 x_1' + b_2 x_2' + \cdots\cdots + p_2 x_n' &= \frac{da_2}{dx} \\
\vdots \\
a_n x_1' + b_n x_2' + \cdots\cdots + p_n x_n' &= \frac{da_n}{dx} \\
\\
a_1 x_1'' + b_1 x_2'' + \cdots\cdots + p_1 x_n'' &= \frac{db_1}{dx} \\
a_2 x_1'' + b_2 x_2'' + \cdots\cdots + p_2 x_n'' &= \frac{db_2}{dx} \\
\vdots \\
a_n x_1'' + b_n x_2'' + \cdots\cdots + p_n x_n'' &= \frac{db_n}{dx} \\
\vdots \\
a_1 x_1^{(n)} + b_1 x_2^{(n)} + \cdots\cdots + p_1 x_n^{(n)} &= \frac{dp_1}{dx} \\
a_2 x_1^{(n)} + b_2 x_2^{(n)} + \cdots\cdots + p_2 x_n^{(n)} &= \frac{dp_2}{dx} \\
\vdots \\
a_n x_1^{(n)} + b_n x_2^{(n)} + \cdots\cdots + p_n x_n^{(n)} &= \frac{dp_n}{dx}
\end{aligned}$$

und aus ihnen erhält man durch Auflösung nach den Unbekannten für die Werthe von $x_1', x_2'', x_3''', \ldots x_n^{(n)}$:

$$R x_1' = \frac{\partial R}{\partial a_1} \frac{da_1}{dx} + \frac{\partial R}{\partial a_2} \frac{da_2}{dx} + \cdots\cdots + \frac{\partial R}{\partial a_n} \frac{da_n}{dx} = \Sigma \frac{\partial R}{\partial a_i} \frac{da_i}{dx},$$

$$R x_2'' = \Sigma \frac{\partial R}{\partial b_i}\frac{db_i}{dx},\quad R x_3''' = \Sigma \frac{\partial R}{\partial c_i}\frac{dc_i}{dx},\; \ldots\ldots\; R x_n^{(n)} = \Sigma \frac{\partial R}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dx}$$

und indem man die Summe aller dieser Gleichungen bildet:

$$\frac{dR}{dx} = R\,(x_1' + x_2'' + x_3''' + \cdots + x_n^{(n)})$$

oder, indem man mit R dividirt:

$$\frac{d\cdot lR}{dx} = x_1' + x_2'' + x_3''' + \cdots + x_n^{(n)}.$$

Nehmen wir nun, wie zu Anfang dieses §. an, das Gleichungssystem $dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots\ldots : X_n$, welches wir auch so schreiben können:

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X},\quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X},\; \ldots\; \frac{dx_n}{dx} = \frac{X_n}{X}$$

sei integrirt und die n Integrale auf die Form $x_1 = f_1(x, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$, $x_2 = f_2(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \ldots\ldots x_n = f_n(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ gebracht, so werden durch diese Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und ihre Differentialquotienten die Gleichungen des Systems identisch erfüllt für jedes x und jeden Werth von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$. Differentiirt man sie daher nach den α, so erhält man n Systeme von Gleichungen der Form

$$\frac{d\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}}{dx} = \frac{\partial\cdot\frac{X_i}{X}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial\cdot\frac{X_i}{X}}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + \frac{\partial\cdot\frac{X_i}{X}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_k},$$

nämlich:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial\cdot\frac{X_1}{X}}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial\cdot\frac{X_1}{X}}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\frac{\partial\cdot\frac{X_1}{X}}{\partial x_n} = \frac{d\cdot\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}}{dx}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial\cdot\frac{X_1}{X}}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial\cdot\frac{X_1}{X}}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\frac{\partial\cdot\frac{X_1}{X}}{\partial x_n} = \frac{d\cdot\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}}{dx}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}\frac{\partial\cdot\frac{X_1}{X}}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\frac{\partial\cdot\frac{X_1}{X}}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\frac{\partial\cdot\frac{X_1}{X}}{\partial x_n} = \frac{d\cdot\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}}{dx}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial\cdot\frac{X_2}{X}}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial\cdot\frac{X_2}{X}}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\frac{\partial\cdot\frac{X_2}{X}}{\partial x_n} = \frac{d\cdot\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}}{dx}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial\cdot\frac{X_2}{X}}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial\cdot\frac{X_2}{X}}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\frac{\partial\cdot\frac{X_2}{X}}{\partial x_n} = \frac{d\cdot\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}}{dx}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}\frac{\partial\cdot\frac{X_2}{X}}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\frac{\partial\cdot\frac{X_2}{X}}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\frac{\partial\cdot\frac{X_2}{X}}{\partial x_n} = \frac{d\cdot\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}}{dx}$$

u. s. w.

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \cdot \frac{X_n}{X}}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \cdot \frac{X_n}{X}}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \cdot \frac{X_n}{X}}{\partial x_n} = \frac{d \cdot \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}}{dx}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \cdot \frac{X_n}{X}}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \cdot \frac{X_n}{X}}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \cdot \frac{X_n}{X}}{\partial x_n} = \frac{d \cdot \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}}{dx}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \cdot \frac{X_n}{X}}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \cdot \frac{X_n}{X}}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \cdot \frac{X_n}{X}}{\partial x_n} = \frac{d \cdot \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}}{dx}.$$

Dies Gleichungssystem hat die Form des vorigen und zwar sind die dortigen Grössen $a_1, a_2, \dots a_n;\ b_1, b_2, \dots b_n;\ \dots\ p_1, p_2 \dots p_n$ hier $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}, \dots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n};\ \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}, \dots \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n};\ \dots\ \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}, \dots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n};$ die Grössen $x_1', x_2', \dots x_n';\ x_1'', x_2'', \dots x_n'';\ \dots\ x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots x_n^{(n)}$ aber hier

$$\frac{\partial \cdot \frac{X_1}{X}}{\partial x_1}, \frac{\partial \cdot \frac{X_1}{X}}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial \cdot \frac{X_1}{X}}{\partial x_n};\ \frac{\partial \cdot \frac{X_2}{X}}{\partial x_1}, \frac{\partial \cdot \frac{X_2}{X}}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial \cdot \frac{X_2}{X}}{\partial x_n};\ \dots\ \frac{\partial \cdot \frac{X_n}{X}}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial \cdot \frac{X_n}{X}}{\partial x_n}.$$

Daher ergibt sich der Satz:

$$\frac{d \cdot lR}{dx} = \frac{\partial \cdot \frac{X_1}{X}}{\partial x_1} + \frac{\partial \cdot \frac{X_2}{X}}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \cdot \frac{X_n}{X}}{\partial x_n},\quad R = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} \end{vmatrix}.$$

Führt man die Differentiationen aus, so geht die rechte Seite dieser Gleichung über in

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) - \frac{1}{X^2}\left(X_1\frac{\partial X}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial X}{\partial x_2} + \dots + X_n\frac{\partial X}{\partial x_n}\right),$$

wobei man dem Subtrahenden mit Hülfe der gegebenen Gleichungen

$$\frac{X_1}{X} = \frac{dx_1}{dx},\ \frac{X_2}{X} = \frac{dx_2}{dx}, \dots \frac{X_n}{X} = \frac{dx_n}{dx}$$

die Form $\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial X}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx} + \dots + \frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx}\right)$ oder $\frac{1}{X}\left(\frac{dX}{dx} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)$ geben kann, wodurch die Gleichung übergeht in

$$\frac{d \cdot l(XR)}{dx} = \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right).$$

In allen Fällen also, in welchen die rechte Seite ein vollständiger Differentialausdruck nach x ist (eine Constante und insbesondere Null mit inbegriffen), kann man R durch eine Quadratur finden.

Vergleicht man die vorliegende Gleichung mit der oben für den Multiplicator M entwickelten, nämlich mit

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0,$$

welche man durch Ausführung der Differentiationen und Division mit MX auf die Form

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{X_1}{X}\frac{\partial M}{\partial x_1} + \frac{X_2}{X}\frac{\partial M}{\partial x_2} + \cdots + \frac{X_n}{X}\frac{\partial M}{\partial x_n}\right)$$
$$+ \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0$$

oder wegen $\frac{X_1}{X} = \frac{dx_1}{dx}$, $\frac{X_2}{X} = \frac{dx_2}{dx}$, ... auch auf die Form

$$\frac{d \cdot lM}{dx} + \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0$$

bringen kann, so folgt, dass $lM = Const. = -l(XR)$, d. h.

$$M = \frac{Const.}{XR}$$

ist. Dies ist die Form des Multiplicators, unter welcher seine Bedeu tung für die Integration des Systems unserer Differentialgleichungen leicht erkannt wird. Nehmen wir an, von den n Integralgleichungen des Systems $dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n$ seien $n-1$ bereits gefunden, nämlich

$$x_2 = \varphi_2(x, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n),$$
$$x_3 = \varphi_3(x, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n);$$
$$\vdots$$
$$x_n = \varphi_n(x, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n).$$

Dagegen bleibe noch die einzige Differentialgleichung $dx_1 : dx = X_1 : X$ oder $Xdx_1 - X_1 dx = 0$ zu integriren übrig und sei $x_1 = \varphi_1(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha$ das gesuchte Integral derselben. Die Functionen φ haben dieselbe Be deutung, wie die früheren f und gehen auch der Form nach in diese über sobald $x_1 = \varphi_1(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ in sie eingesetzt wird. Differentiir man behufs der Bildung von R die bekannten Integralgleichungen nac den willkürlichen Constanten und bezeichnet die Differentiationen $x_2, x_3, \ldots x_n$, insofern diese Grössen als Functionen von $x, x_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha$ auftreten, durch Klammern, so ist

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}\right) + \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_k} \text{ und } \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right) = \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1}\right) = \cdots = \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right) = 0$$

Demnach erhält man zunächst

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right) + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1}\right) + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdots\cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right) + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right) + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_2}\right) + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} \cdots\cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\right) + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3} & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_3}\right) + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3} & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\right) + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3} \cdots\cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_3}\right) + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n} & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\right) + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n} & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_n}\right) + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n} \cdots\cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right) + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \end{vmatrix}$$

multiplicirt man aber die Elemente der ersten Colonne successiv mit $\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)$, $\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)$ und subtrahirt sie von den Elementen der folgenden Colonnen, so erhält man einfacher

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right) & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1}\right) & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right) \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right) & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_2}\right) & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\right) \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3} & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_3}\right) & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\right) & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_3}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n} & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\right) & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_n}\right) & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right) \end{vmatrix},$$

oder da die Elemente der ersten Reihe sämmtlich bis auf das Anfangselement verschwinden

$$R = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdot \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right) & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_2}\right) & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\right) \\ \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_3}\right) & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\right) & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_3}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\right) & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_n}\right) & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right) \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdot Q,$$

$$\text{wenn } Q = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right) & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_2}\right) & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\right) \\ \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_3}\right) & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\right) & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_3}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\right) & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_n}\right) & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right) \end{vmatrix}.$$

In allen Fällen nun, in welchen der Ausdruck

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)$$

ein vollständiger Differentialquotient nach x ist, kann R vermöge der oben entwickelten Gleichung von vornherein bestimmt werden und da Q durch die $n-1$ bekannten Integrale gefunden wird, so liefert die vorliegende Gleichung $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} = \frac{R}{Q}$ und damit den integrirenden Factor der noch übrigen Differentialgleichung $X dx_1 - X_1 dx = 0$, worin X, X_1 Functionen von x, x_1 sind. Ist nämlich $F(x, x_1) = \alpha_1$ das Integral dieser Differentialgleichung, aus welchem $x_1 = \varphi_1(x, \alpha_1, \alpha_2 \ldots. \alpha_n)$ folgen würde, so macht die Rücksubstitution dieses Ausdruckes für x_1 dieselbe identisch und wenn man sie also nach α_1 differentiirt, so kommt $\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} = 1$. Da aber aus der Gleichung $R = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdot Q$ folgt $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} = \frac{R}{Q}$, so erhält man weiter $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{Q}{R}$. Ist nun N der integrirende Factor von $X dx_1 - X_1 dx = 0$, so muss derselbe den Bedingungen genügen: $NX = \frac{\partial F}{\partial x_1}$, $-NX_1 = \frac{\partial F}{\partial x}$. Aus der ersten von diesen folgt $N = \frac{1}{X}\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{Q}{XR} = MQ$, wobei die willkürliche Constante der Gleichung $M = \frac{Const.}{XR}$ gleich Eins gesetzt ist. Man erhält daher den Satz:

Sind von dem Systeme der n Differentialgleichungen zwischen $n+1$ Variabelen

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots. : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots. : X_n$$

$n-1$ Integrale bekannt, vermöge welcher $x_2, x_3, \ldots. x_n$ als Functionen von x, x_1 und den $n-1$ Integrationsconstanten $\alpha_2, \alpha_3 \ldots. \alpha_n$ durch die Gleichungen $x_2 = \varphi_2(x, x_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_n)$, $x_3 = \varphi_3(x, x_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_n), \ldots. x_n = \varphi_n(x, x_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_n)$ dargestellt werden können, so ist der integrirende Factor N der noch übrigen Differentialgleichung

$$X dx_1 - X dx = 0$$

durch die Gleichung

$$N = MQ$$

zu finden, wo M der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial \cdot MX}{\partial x} + \frac{\partial \cdot MX_1}{\partial x_1} + \ldots. + \frac{\partial \cdot MX_n}{\partial x_n} = 0$$

genügt und Q die Determinante $\Sigma \pm \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right)\left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\right) \ldots \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right)$ bedeutet.

Die Determinante Q ist verschiedener Darstellungen fähig. Man erhält für sie sehr einfach:

$$Q = \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3} \ldots. \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}.$$

In derselben Weise nämlich, wie wir die Determinante R als das Produkt von $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}$ und Q darstellten, kann man Q selbst als das Produkt von $\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}$ und eine Determinante niedrigerer Ordnung erhalten. Setzt man diesen Schluss fort, so ergibt sich die erwähnte Form des Produktes für Q. Die Determinante R ist demnach

$$R = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}.$$

Um für Q eine andere Form zu entwickeln, wollen wir eine Eigenschaft des Multiplicators M heranziehen. Es wurde oben gezeigt, dass M der partiellen Differentialgleichung

$$X\frac{\partial M}{\partial x} + X_1\frac{\partial M}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial M}{\partial x_n} + \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) M = 0$$

genügen muss. Da diese Gleichung verschiedene Lösungen hat, so sei N eine andere derselben, so dass auch

$$X\frac{\partial N}{\partial x} + X_1\frac{\partial N}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial N}{\partial x_n} + \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) N = 0$$

ist. Multiplicirt man nun diese letztere Gleichung mit $\frac{1}{M}$, die vorige mit $\frac{N}{M^2}$ und subtrahirt beide von einander, so erlangt man in den einzelnen Gliedern des Resultates die Differentialquotienten von $\frac{N}{M}$, so dass dieselbe geschrieben werden kann:

$$X\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial x} + X_1\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial x_n} = 0.$$

Es ist daher $\frac{N}{M}$ eine Lösung der Gleichung

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung setzt sich aber aus n von einander unabhängigen Lösungen $f_1, f_2, \ldots f_n$ zusammen und ist $F(f_1, f_2, \ldots f_n)$. Daher wird

$$N = M \cdot F(f_1, f_2 \ldots f_n),$$

oder wenn man mit M_0 einen bestimmten Werth des Multiplicators, mit M aber den allgemeinen und mit $\frac{1}{\varpi}$ die Function $F(f_1, f_2 \ldots f_n)$ bezeichnet, welche mit M_0 multiplicirt M gibt, so ist

$$M = \frac{M_0}{\varpi}.$$

Die früher entwickelten Bedingungen

$$MX = A,\ MX_1 = A_1 \ldots MX_n = A_n$$

nehmen daher jetzt die Gestalt an

$$M_0 X = A\varpi,\ M_0 X_1 = A_1\varpi,\ \ldots\ M_0 X_n = A_n\varpi.$$

Die n Lösungen der partiellen Differentialgleichung $X\frac{\partial f}{\partial x} + \cdots = 0$, Constanten gleichgesetzt, sind nun aber bekanntlich zugleich die Integrale des Systems

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots\ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots\ldots : X_n.$$

Diese letzteren werden also:

$$f_1 = \alpha_1,\ f_2 = \alpha_2,\ \ldots\ldots f_n = \alpha_n$$

und wenn von ihnen $n - 1$ z. B. $f_2, f_3, \ldots\ldots f_n$ bekannt sind, eins aber, f_1, noch zu finden übrig bleibt, so kann mit Hülfe des Multiplicators der integrirende Factor der letzten, noch zu integrirenden Gleichung des Systems gefunden werden. Nun war die Determinante A

$$A = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots\ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

und wenn wir sie nach den Differentialquotienten von f_1 ordnen

$$A = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot B_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} B_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} B_n, \text{ wo } B_1 = \Sigma \pm \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial f_3}{\partial x_3} \ldots\ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Durch Vertauschung zweier Indices der Functionen f in A, wodurch die Determinante verschwindet, erhält man aber hierzu das System:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} B_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} B_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} B_n \\
0 &= \frac{\partial f_3}{\partial x_1} B_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} B_2 + \cdots + \frac{\partial f_3}{\partial x_n} B_n \\
&\vdots \\
0 &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1} B_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} B_2 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} B_n.
\end{aligned}$$

Führt man nun statt $x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ die Grössen $f_2, f_3 \ldots\ldots f_n$ als neue Variabele ein, so dass $f_1 = \Phi\,(x, x_1, f_2, f_3 \ldots\ldots f_n)$ wird und bezeichnet durch Klammern die unter dieser Voraussetzung auszuführenden Differentiationen, so dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_3}\right)\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \cdots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_3}\right)\frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \cdots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_2} \\
&\vdots \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_n} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_3}\right)\frac{\partial f_3}{\partial x_n} + \cdots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_n},
\end{aligned}$$

wird, so liefert die Bildung von A mit Rücksicht auf das vorstehende Gleichungssystem einfach:

$$A = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) B_1$$

und wenn man dies in $M_0 X = A\varpi$ einführt:

$$M_0 X = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) \cdot B_1 \varpi.$$

Nun ist aber f_1 das Integral der noch übrig bleibenden Differentialgleichung

$$X dx_1 - X_1 dx = 0,$$

aus welcher man durch die $n - 1$ bekannten Integrale $f_2 = \alpha_2$, $f_3 = \alpha_3, \ldots f_n = \alpha_n$ die Grössen $x_2, x_3 \ldots x_n$ eliminirt hat. Es muss diese Gleichung daher durch den integrirenden Factor in $df_1 = 0$ oder in

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) dx = 0$$

übergehen. Daher muss $\frac{1}{X}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)$ oder also vermöge $M_0 X = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) \cdot B\varpi$

$$\frac{M_0}{B_1 \varpi}$$

der integrirende Factor sein. Derselbe war aber nach dem Früheren MQ, mithin ist

$$Q = \frac{1}{B_1} = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}},$$

welches die gewünschte weitere Form für Q ist.

§. 15. Das System der Bewegungsgleichungen eines Punktes war nun $dt : dx : dx' : dy : dy' : dz : dz' = 1 : x' : X : y' : Y : z' : Z$. Die Gleichung für die Bestimmung des Multiplicators M ist daher, indem t, x, x', y, y', z, z' resp. mit $x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_6$; $1, x', X, y', Y, z', Z$ resp. mit $X, X_1, X_2 \ldots X_6$ zu identificiren sind,

$$\frac{d \cdot lM}{dt} + \frac{\partial X}{\partial x'} + \frac{\partial Y}{\partial y'} + \frac{\partial Z}{\partial z'} = 0$$

und wenn X, Y, Z also nicht von den Componenten der Geschwindigkeit x', y', z' abhängen, so wird

$$\frac{d \cdot lM}{dt} = 0, \text{ d. h. } M = Const.$$

Enthalten X, Y, Z die Zeit nicht, so reducirt sich das Gleichungssystem der Bewegung auf die nächst niedrigere Ordnung

$$dx : dx' : dy : dy' : dz : dz' = x' : X : y' : Y : z' : Z$$

und nachdem man dasselbe integrirt und alles durch eine Variabele, z. B. x dargestellt hat, erhält man die Zeit durch die Gleichung

$$dt : dx = 1 : x'$$

d. h. es wird

$$t = \int \frac{dx}{x'} + C,$$

also mit Hülfe einer blossen Quadratur gefunden.

§. 16. Als Beispiel für die Bestimmung des Multiplicators führen wir die Newton'sche Centralbewegung an. Für sie ist $X = -\frac{\mu x}{r^3}$, $Y = -\frac{\mu y}{r^3}$ und das Gleichungssystem also:

$$dx : dx' : dy : dy' = x' : -\frac{\mu x}{r^3} : y' : -\frac{\mu y}{r^3}.$$

Zwei Integrale liefern die Principe der Flächen und der lebendigen Kraft und wenn diese $f_1 = \alpha$, $f_2 = \beta$ sind, wo f_1, f_2 von x, y, x', y' abhängen, so wird der letzte Multiplicator für die noch übrige zu integrirende Gleichung

$$MQ = \frac{M}{\frac{\partial f_1}{\partial x'}\frac{\partial f_2}{\partial y'} - \frac{\partial f_1}{\partial y'}\frac{\partial f_2}{\partial x'}}$$

d. h. wenn in ihm und der noch übrigen Gleichung $x'dy - y'dx = 0$ x' und y' durch x und y mit Hülfe von $f_1 = \alpha$, $f_2 = \beta$ ausgedrückt werden, so ist er der integrirende Factor dieser Gleichung.

Es ist aber nach dem vorigen §. $M = Const.$ ein specieller Werth des Multiplicators, daher kann man als allgemeinen Multiplicator wählen

$$\frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial x'}\frac{\partial f_2}{\partial y'} - \frac{\partial f_1}{\partial y'}\frac{\partial f_2}{\partial x'}},$$

indem man $Const. = 1$ annimmt. Nun ist aber nach §. 12, S. 267:

$$f_1 = \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{\mu}{r} = \alpha, \quad f_2 = xy' - x'y = \beta,$$

wenn wir für v^2 seinen Werth $x'^2 + y'^2$ einsetzen. Hierdurch ergibt sich $\frac{\partial f_1}{\partial x'} = x'$, $\frac{\partial f_2}{\partial x'} = -y$; $\frac{\partial f_1}{\partial y'} = y'$, $\frac{\partial f_2}{\partial y'} = x$ und es wird daher der Multiplicator

$$\frac{1}{xx' + yy'}$$

und der Ausdruck

$$\frac{x'dy - y'dx}{xx' + yy'}$$

ein vollständiges Differential. Dass letzteres wirklich der Fall ist, ergibt

sich folgendermassen. Wir schreiben die Gleichungen, welche die Principe der lebendigen Kraft und der Flächen liefern, indem wir $\frac{\mu}{r} + \alpha = \lambda$ setzen, so:

$$x'^2 + y'^2 = 2\lambda, \quad xy' - x'y = \beta.$$

Um aus ihnen x', y' zu entnehmen, ersetzen wir die erste durch eine andere, welche in Bezug auf diese Grössen lineär ist, wie die zweite. Dies gelingt, wenn man bedenkt, dass allgemein, was immer x, y, x', y' sein mögen:

$$(x'^2 + y'^2)\,(x^2 + y^2) = (xx' + yy')^2 + (xy' - x'y)^2.$$

Setzt man hierin für $x'^2 + y'^2$ und $xy' - x'y$ ihre Werthe 2λ und β, so folgt

$$2\lambda r^2 = (xx' + yy')^2 + \beta^2$$

und erhält man also jetzt die beiden lineären Gleichungen

$$yy' + xx' = \sqrt{2\lambda r^2 - \beta^2}$$
$$xy' - yx' = \beta,$$

um aus ihnen x' und y' darzustellen. Sie liefern

$$r^2 y' = \beta x + y\sqrt{2\lambda r^2 - \beta^2}$$
$$r^2 x' = -\beta y + x\sqrt{2\lambda r^2 - \beta^2}.$$

Stellen wir jetzt den Ausdruck, welcher ein vollständiges Differential sein soll, durch x und y allein dar. Man erhält durch Division der Gleichungen für ry' und rx' mit $r^2(yy' + xx') = r^2\sqrt{2\lambda r^2 - \beta^2}$

$$\frac{y'}{xx' + yy'} = \frac{\beta x}{r^2\sqrt{2\lambda r^2 - \beta^2}} + \frac{y}{r^2},$$

$$\frac{x'}{xx' + yy'} = -\frac{\beta y}{r^2\sqrt{2\lambda r^2 - \beta^2}} + \frac{x}{r^2}$$

und hiermit

$$\frac{x'dy - y'dx}{xx' + yy'} = -\frac{\beta\,(x\,dx + y\,dy)}{r^2\sqrt{2\lambda r^2 - \beta^2}} + \frac{x\,dy - y\,dx}{r^2}.$$

Da aber $x\,dx + y\,dy = r\,dr$ ist, so wird, wenn wir zugleich für λ seinen Werth restituiren:

$$\frac{x'dy - y'dx}{xx' + yy'} = -\frac{\beta}{\sqrt{2\alpha r^2 + 2\mu r - \beta^2}}\cdot\frac{dr}{r} + \frac{x\,dy - y\,dx}{r^2}.$$

Beide Theile dieses Ausdrucks sind vollständige Differentialien, mithin er selbst. Der erste ist es, weil er blos r enthält, der zweite aber ist soviel als

$$\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{r^2}{x^2}} = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = d\cdot \mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Die in den vier letzten §§. gegebene Darstellung der Theorie des letzten Multiplicators schliesst sich aufs Engste an die Darstellung Jacobi's selbst an, deren er sich insbesondere in seinen Vorlesungen über Dynamik (herausgegeben von Clebsch, Berlin 1866) bediente.

§. 17. Das bereits §. 3 erwähnte Princip der kleinsten Wirkung, zu dessen Entwickelung wir jetzt übergehen, unterscheidet sich von den bisher aufgestellten Principen dadurch, dass es nicht ein Integral der Differentialgleichungen der Bewegung liefert, dass sein Werth vielmehr darin besteht, dass es eine Function angibt, welche, wenn diese Differentialgleichungen erfüllt sind, für die Bahn des Punktes ein Minimum wird und dass man aus ihm die Differentialgleichungen der Bewegung erhalten kann. Eine etwas unklare Auffassung des wahren Gehaltes dieses Principes bei Euler und weit mehr noch bei Maupertuis haben demselben den Namen verschafft, den es führt. Man glaubte nämlich, dieser Satz sei identisch damit, dass die Natur ihre Wirkungen mit dem kleinstmöglichen Aufwande von Kraft oder Beschleunigung zu erreichen suche. Abgesehen von der in dieser Ansicht enthaltenen unhaltbaren Teleologie beging man dabei das Versehen, das Produkt $v\,ds$ aus der Geschwindigkeit und dem Wegelemente als den Aufwand an Arbeit anzusehen.

Es handelt sich bei dem Princip der kleinsten Wirkung um das Integral

$$V = \int v\,ds,$$

ausgedehnt über eine im Allgemeinen beliebige Strecke der Bahn des beweglichen Punktes zwischen zwei festen Grenzpunkten. Setzt man hierin $v = \frac{ds}{dt}$, so erhält man

$$V = \int \frac{ds^2}{dt}.$$

Wenn nun das Princip der lebendigen Kraft für die Bewegung des Punktes gilt, also

$$\tfrac{1}{2} v^2 = U + h \quad \text{oder also} \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\,(U + h)$$

ist und man eliminirt aus dem Integrale die Zeit, indem man den Werth

$$\frac{1}{dt} = \frac{\sqrt{2\,(U + h)}}{ds}$$

in dasselbe einführt, so ist

$$V = \int \sqrt{2\,(U + h)} \cdot ds$$

ein Minimum, d. h. es ist dies Integral längs der wirklich beschriebenen Bahn kleiner als längs jedes andern zwischen denselben Grenzpunkten

möglichen, jener unendlich nahen und mit den sonstigen Bedingungen des Problems vereinbaren Weges.

In dieser präcisen, aller metaphysischen Speculation entkleideten Form unter bestimmter Angabe der wesentlichen Bedingung, dass die Zeit mit Hülfe des Principes der lebendigen Kraft vorher eliminirt ist, wurde der Satz zuerst von Jacobi ausgesprochen (Vorlesungen über Dynamik, S. 45). Der Beweis desselben zerfällt in zwei Theile. Zunächst ist zu zeigen, dass das Integral die gemeinsame Bedingung des Minimums und Maximums erfüllt, nämlich dass die unendlich kleine Aenderung, welche dasselbe erleiden würde, wenn an die Stelle der wirklichen Bahn irgend eine andere von ihr unendlich wenig abweichende Bahn tritt, verschwindet; sodann aber weiter, dass ein Maximum desselben überhaupt nicht stattfinden kann.

Wenn die Differentialgleichungen der Bewegung integrirt sind, so sind die Coordinaten x, y, z des beweglichen Punktes als Functionen der Zeit bekannt und wenn man daher zwischen ihnen die Zeit eliminirt, so erscheinen zwei derselben als Functionen der dritten, so z. B. y und z als Functionen von x. Man kann daher in V alles durch eine Coordinate, z. B. durch x ausdrücken.

Man erhält dadurch, wenn α, β die Werthe von x sind, welche dem Anfangs- und Endpunkte des Weges entsprechen, über welchen das Integral erstreckt wird:

$$V = \int_\alpha^\beta \sqrt{2(U+h)} \cdot \frac{ds}{dx} dx,$$

oder, indem man

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

einsetzt, worin y', z' die Bedeutung von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ haben:

$$V = \int_\alpha^\beta \sqrt{2(U+h)} \cdot \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot dx,$$

sowie endlich, wenn man zur Abkürzung

$$2(U+h) = A, \quad 1 + y'^2 + z'^2 = B, \quad \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = P$$

setzt:

$$V = \int_\alpha^\beta P dx.$$

Es ist nun zunächst zu erweisen, dass

$$\delta V = \delta \int_\alpha^\beta P dx = 0$$

ist. Das Zeichen δ bezieht sich hierbei auf die unendlich kleine Aen-

derung, welche V erleidet, wenn bei denselben Werthen der unabhängigen Variabeln x an die Stelle der Functionen y, z, y', z', von x, welche für die wirkliche Bahn gelten, beliebige andere von ihnen unendlich wenig abweichende Functionen von x treten, welche einer unmittelbar nächstanliegenden Bahn zukommen. Es erleidet hierbei also x keine Veränderung, ebenso auch nicht die Grenzen α, β, da der Anfangs- und Endpunkt als fest angenommen worden sind. Man hat daher

$$\delta V = \int_\alpha^\beta \delta P \cdot dx,$$

oder da P von y, z, y', z' abhängt und in Folge dessen

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial y}\delta y + \frac{\partial P}{\partial z}\delta z + \frac{\partial P}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial P}{\partial z'}\delta z'$$

ist:

$$\delta V = \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial P}{\partial y}\delta y + \frac{\partial P}{\partial z}\delta z + \frac{\partial P}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial P}{\partial z'}\delta z'\right) dx.$$

Um dies Integral zweckmässig umzugestalten, bemerken wir, dass die Bestandtheile, welche mit $\delta y'$, $\delta z'$ multiplicirt sind, mit Hülfe der partiellen Integration folgendermassen sich darstellen. Es ist

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial P}{\partial y'}\delta y' dx = \int_\alpha^\beta \frac{\partial P}{\partial y'}\,\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot dx = \int_\alpha^\beta \frac{\partial P}{\partial y'}\,\frac{d\delta y}{dx}\,dx$$

$$= \left[\frac{\partial P}{\partial y'}\delta y\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{d\frac{\partial P}{\partial y'}}{dx}\delta y dx,$$

oder, weil δy an den Grenzen α, β verschwindet

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial P}{\partial y'}\delta y' dx = -\int_\alpha^\beta \frac{d\frac{\partial P}{\partial y'}}{dx}\delta y dx \;*)$$

*) Der Satz

$$\delta \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot \delta y}{dx}$$

oder kürzer, weil dx keine Aenderung erleidet:

$$\delta dy = d \delta y,$$

von welchem wir bei dieser Entwickelung Gebrauch machten, erweist sich leicht in folgender Art. Es sei (Fig. 105.) $AMM'B$ die Projection der wirklichen Bahn auf die xy-Ebene, $A\mu\mu'B$ die irgend einer Nachbarcurve derselben und $PM = y$

und ebenso ist

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial P}{\partial z'}\,dx = -\int_\alpha^\beta \frac{d\,\frac{\partial P}{\partial z'}}{dx}\,\delta z\,dx\,.$$

Durch Einführung dieser Werthe in den Ausdruck für δV erhalten wir jetzt

$$\delta V = \int_\alpha^\beta \left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{d\,\frac{\partial P}{\partial y'}}{dx}\right)\delta y + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{d\,\frac{\partial P}{\partial z'}}{dx}\right)\delta z\right\} dx.$$

Nun ist aber vermöge der abgekürzten Bezeichnungen

$$P = \sqrt{A}\cdot\sqrt{B},\quad A = 2\,(U+h),\quad B = 1 + y'^2 + z'^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \sqrt{\frac{B}{A}}\cdot\frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial y'} = \sqrt{\frac{A}{B}}\cdot y'$$

und folglich

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{d\,\frac{\partial P}{\partial y'}}{dx} = \sqrt{\frac{B}{A}}\,\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\,y'\right)}{dx}.$$

Weiter aber hat man nun

$$\sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{2\,(U+h)}} = \frac{1}{v}\,\frac{ds}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

und hiermit wird

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{d\,\frac{\partial P}{\partial y'}}{dx} = \sqrt{\frac{B}{A}}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d^2 y}{dt^2}\right),$$

sowie auf ganz ähnliche Weise

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{d\,\frac{\partial P}{\partial z'}}{dx} = \sqrt{\frac{B}{A}}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d^2 z}{dt^2}\right).$$

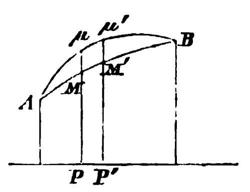
also $P\mu = y + \delta y$. Für eine unendlichkleine Aenderung des x, nämlich $PP' = dx$ wird man dann einerseits haben:

$$P'\mu' = P'M' + M'\mu' = (y + dy) + \delta\,(y + dy),$$

andererseits aber auch

$$P'\mu' = P\mu + d\cdot P\mu = (y + \delta y) + d\,(y + \delta y).$$

Fig. 105.



Da nun allgemein die Aenderung einer Summe gleich der Summe der Aenderungen der einzelnen Summanden sein muss, so ergibt sich durch Vergleichung beider Ausdrücke

$$y + dy + \delta y + \delta dy = y + \delta y + dy + d\delta y,$$

d. h.

$$\delta dy = d\delta y.$$

Substituirt man diese Werthe in den zuletzt gegebenen Ausdruck für δV, so nimmt er die Gestalt an

$$\delta V = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{B}{A}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right\}.$$

Es sind aber hierin $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ die Componenten der Beschleunigung parallel den Axen der y und z vermöge der Bedeutung der Kräftefunction und also

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

folglich

$$\delta V = 0.$$

Hiermit ist der erste Theil des Beweises geführt, es handelt sich jetzt darum, zu zeigen, dass ein Maximum nicht stattfinden kann. Zu dem Ende wollen wir durch den Anfangs- und den Endpunkt des Bogenelementes ds die Niveauflächen legen, welche den Werthen der Kräftefunction U in diesen Punkten entsprechen. Zwischen diesen beiden Flächen lassen sich auf unzählige Arten ausser dem Bogenelemente ds der wirklich von dem beweglichen Punkte beschriebenen Bahn andere Bogenelemente ziehen, welche mit ds verglichen, beliebige Grösse haben können. Bezieht man also das Integral V einmal auf die wirkliche Bahn, das anderemal auf irgend eine andere, so sieht man, dass in beiden Fällen der Factor v des Elementes $v ds$ derselbe ist, weil v für alle Punkte der durch den Anfangspunkt von ds gelegten Niveaufläche dasselbe bleibt, während die ds verschieden sind und man dem ds der zweiten Curve eine beliebige Grösse geben, also es jedenfalls grösser als das der ersten Curve annehmen kann. Diese Betrachtung gilt für alle Elemente des Integrales V, mithin für dieses selbst. Es kann also V für andere benachbarte Curven als die wirkliche Bahn grösser gemacht werden als der Werth von V für diese, mithin ist ein Maximum nicht möglich. Dass ein wirkliches Minimum nun wirklich eintritt, kann hieraus noch nicht gefolgert werden, denn dieses setzt voraus, dass für alle Nachbarcurven V grösser wird und es ist wohl denkbar, dass der Fall eintreten könnte, dass es für gewisse Curven grösser, für andere kleiner ausfallen könnte, als wie für die wirkliche Bahn und dann würde weder ein Maximum noch ein Minimum eintreten können. In der That hat Jacobi auch gezeigt, dass in gewissen Fällen V nur innerhalb eines gewissen Bereichs die Eigenschaft des Minimums zukommt, über denselben hinaus sie aber verliert. So z. B. wenn der Punkt bei constanter Geschwindigkeit eine kürzeste Linie auf einer Fläche beschreibt. Wenn nämlich alle von dem Anfangspunkte auf der Fläche nach den verschiedenen Richtungen auslaufenden kürze-

sten Linien eine Enveloppe bilden, so besteht die Eigenschaft des Minimums von V und von jenem Anfangspunkte bis zu dem Berührungspunkte seiner Bahn mit der Enveloppe. (Vgl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 46.)

Es wurde oben angegeben, dass man mit Hülfe des Principes der lebendigen Kraft aus dem Integrale V die Zeit zu eliminiren habe. Dies hindert jedoch nicht, dieselbe als die Grundvariabele anzusehen, von welcher die Coordinaten des beweglichen Punktes abhängen, sie darf nur nicht explicit in v und ds auftreten; vielmehr ist die Wahl der Grundvariabeln an sich willkürlich bei jeder Curve und ist es an sich gleichgültig, ob x oder y oder z oder t oder irgend eine andere Grösse hierzu gewählt wird. Behält man t bei, so kann man den ersten Theil des Beweises etwas abkürzen, wie folgt.

Man hat zunächst

$$\delta V = \int \delta (v ds) = \int (\delta v \cdot ds + v \cdot \delta ds).$$

Nun transformiren wir jeden der Bestandtheile $\delta v \cdot ds$ und $v \cdot \delta ds$. Für den ersten derselben erhalten wir mit Hülfe der Gleichung $ds = v dt$:

$$\delta v \cdot ds = dt \cdot \delta (\tfrac{1}{2} v^2) = dt \cdot \delta (U + h) = dt \cdot \delta U,$$

d. h.

$$\delta v \cdot ds = dt \left\{ X \delta x + Y \delta y + Z \delta z \right\},$$

da

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z$$

und

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

ist. Vermöge der Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

geht aber der Ausdruck $\delta v \cdot ds$ über in

$$\delta v \cdot ds = dt \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right).$$

Was die andere Parthie des Elementes von δV, nämlich $v \cdot \delta ds$ betrifft, so erhält man aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

indem man Aenderungen δ nimmt:

$$ds \cdot \delta ds = dx \cdot \delta dx + dy \cdot \delta dy + dz \cdot \delta dz,$$

oder wegen $\delta dx = d \cdot \delta x$, $\delta dy = d \cdot \delta y$, $\delta dz = d \cdot \delta z$, wenn man zugleich mit dt dividirt:

$$v \cdot \delta ds = \frac{dx}{dt} d \delta x + \frac{dy}{dt} d \delta y + \frac{dz}{dt} d \delta z.$$

Addirt man jetzt beide Bestandtheile $\delta v \cdot ds$ und $v \cdot \delta ds$, so kommt

$$\delta(vds) = dt\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) + \left(\frac{dx}{dt}d\delta x + \frac{dy}{dt}d\delta y + \frac{dz}{dt}d\delta z\right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber das Differential von

$$\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z,$$

daher wird

$$\delta(vds) = d\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)$$

und folglich, indem man diesen Ausdruck vom Anfangspunkte des Bogens bis zu dessen Endpunkte integrirt

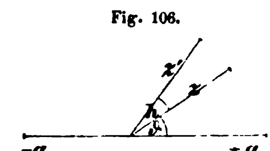
$$\delta V = \int \delta(vds) = \left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}dz\right) = 0,$$

weil die Grenzpunkte fest sind, also für sie $\delta x = \delta y = \delta z = 0$ sind.

§. 18. Wir haben bereits mehrfach Veranlassung gehabt, darauf hinzudeuten, dass die Theorie des Imaginären und seine geometrische Bedeutung von grossem Nutzen für die Mechanik sein könne; wir wollen jetzt zeigen, welchen Gebrauch man von ihr machen kann, wenn es sich um die Behandlung eines Bewegungsproblems handelt. Um hierbei sorgfältig zu Werke zu gehen, beginnen wir mit der Darstellung der Punkte durch complexe Grössen.

Da eine Strecke, welche vom Coordinatenursprung aus im positiven Sinne der x-Axe mit dem Coefficienten $+1$ behaftet in die Rechnung eingeführt wird und da dieser Coefficient sich in -1 verwandelt, sobald dieselbe Strecke auf der x-Axe im negativen Sinne aufgetragen wird, so liegt die Frage nahe, mit welchem Coefficienten eine unter dem Winkel ϑ gegen die positive x-Axe geneigte Strecke behaftet werden müsse, damit sie nicht nur nach Grösse, sondern auch nach Richtung bestimmt sei. Es sei a (Fig. 106.) die absolute Länge dieser Strecke, z aber bezeichne sie nach Grösse und Richtung; dann muss also

Fig. 106.



$$z = f(\vartheta)\cdot a$$

sein, indem der fragliche Coefficient offenbar nur von ϑ abhängen kann. Um $f(\vartheta)$ zu bestimmen, bemerken wir, dass wenn ϑ sich um h ändert, der Ausdruck z gleichfalls ein anderer, etwa z' wird, sodass

$$z' = f(\vartheta + h)\cdot a.$$

Zu derselben Strecke z' gelangen wir aber auch, indem wir von z ausgehen und dieses durch Multiplication mit dem Coefficienten $f(h)$ in z' überführen. Denn es ist $f(\vartheta)$ überhaupt die Function, durch Multiplication mit welcher eine Strecke aus einer ersten Lage in eine zweite sich dreht.

Demnach ist auch

$$z' = f(h)\cdot z,$$

oder mit Benutzung des früheren Ausdruckes für z:

$$z' = f(\vartheta)\, f(h) \cdot a.$$

Die Vergleichung beider Formen für z' führt zu der Bedingung

$$f(\vartheta + h) = f(\vartheta)\, f(h),$$

welche von der unbekannten Function ϑ zu erfüllen ist. Um mit Hülfe dieser Bedingungsgleichung, welche eine Differenzengleichung ist, $f(\vartheta)$ zu bestimmen, verwandeln wir dieselbe in eine Differentialgleichung. Zu diesem Zwecke schreiben wir sie zunächst so:

$$\frac{f(\vartheta + h) - f(\vartheta)}{h} = f(\vartheta) \cdot \frac{f(h) - 1}{h}.$$

Lässt man nun h ohne Ende abnehmen, so geht die linke Seite in $f'(\vartheta)$ über, während auf der rechten Seite neben $f(\vartheta)$ die Grösse

$$lim \cdot \frac{f(h) - 1}{h} = lim\, f'(h) = f'(0)$$

erscheint. Dadurch geht die Gleichung, wenn wir die noch unbekannte Constante $f'(0)$ mit A bezeichnen, in die folgende Differentialgleichung

$$\frac{f'(\vartheta)}{f(\vartheta)} = A$$

über, deren Integral

$$f(\vartheta) = B \cdot e^{A\vartheta} = B \cdot C^{\vartheta}$$

ist. Hiermit wäre die Function $f(\vartheta)$ im Allgemeinen gefunden und es handelt sich blos noch um die Bestimmung der Constanten B und C. Hierzu dient aber die Bemerkung, dass für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ der Coefficient $f(\vartheta)$ in $+1$ und -1 übergehen muss, weil in diesen Fällen die Strecke a in die positive oder negative Richtung der x-Axe fällt. Dies liefert die Bedingungsgleichungen für die Constanten, nämlich

$$+1 = B \cdot C^0$$
$$-1 = B \cdot C^{\pi},$$

aus welchen $B = 1$, $C = (-1)^{\frac{1}{\pi}}$ hervorgehen. Dadurch wird aber

$$f(\vartheta) = (-1)^{\frac{\vartheta}{\pi}}$$

und also schliesslich

$$z = (-1)^{\frac{\vartheta}{\pi}} \cdot a.$$

$(-1)^{\frac{\vartheta}{\pi}}$ ist also der Coefficient, mit welchem eine Strecke a in der Rechnung auftreten muss, sobald sie aus der positiven x-Axe um den Winkel ϑ im positiven Drehungssinne herausgedreht ist. Für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ z. B. wird er $(-1)^{\frac{1}{2}} = i$; es drückt daher die Multiplication einer Strecke mit i eine Drehung derselben um $\frac{1}{2}\pi$ aus. Man kann diesem Coefficienten, welcher den Namen des **Richtungscoefficienten** der

Strecke a führt, verschiedene andere, für viele Untersuchungen zweckmässigere Formen geben. Es ist nämlich

$$-1 = -1 + 0 \cdot i = \cos\pi + i \sin\pi,$$

folglich nach dem Satze von Moivre

$$(-1)^{\frac{\vartheta}{\pi}} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{\vartheta}{\pi}} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta.$$

Ferner ist

$$\cos\vartheta + i\sin\vartheta = e^{\vartheta i}.$$

Daher haben wir für den Richtungscoefficienten jetzt die drei Formen

$$(-1)^{\frac{\vartheta}{\pi}}, \quad \cos\vartheta + i\sin\vartheta, \quad e^{\vartheta i}$$

und kann also z durch die Formen

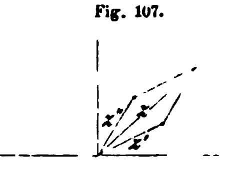
$$z = (-1)^{\frac{\vartheta}{\pi}} a, \quad z = a(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \quad z = ae^{\vartheta i}$$

dargestellt werden. Die zweite von diesen können wir weiter umgestalten, indem wir die Multiplication mit a in den beiden Summanden der Klammer ausführen und bedenken, dass $a\cos\vartheta = x$, $a\sin\vartheta = y$ die Coordinaten des Endpunktes der Strecke sind. Hiernach wird

$$z = x + yi$$

und ist die Bedeutung der complexen Grösse $x + yi$ klar. Sie stellt den vom Ursprung der Coordinaten nach dem Punkte (x, y) gezogenen Radiusvector nach Grösse und Richtung dar. Da übrigens hierdurch auch der Endpunkt dieses Radiusvectors bestimmt ist, so betrachtet man oft auch z als Coordinate dieses Punktes und spricht von einem „Punkte z", wie man in der gewöhnlichen analytischen Geometrie von einem „Punkte (xy)" redet. Die in der Formel enthaltene Addition von x und yi bedeutet die Construction eines rechtwinkligen Dreiecks und die Multiplication von y mit i drückt aus, dass yi die Länge y parallel zur y-Axe aufgetragen darstellt. Indem man x und y variiren lässt, kann z jeden Punkt der Ebene darstellen. Für $y = 0$ stellt diese Grösse alle Punkte der reellen Axe der x dar; für $x = 0$ erhält man die Punkte der imaginären Axe der y. Sind x und y von einander abhängig oder beide Functionen einer dritten Grösse t, so stellt $z = x + yi$ eine ebene Curve dar und wenn t die Zeit ist zugleich die Bewegung des Punktes, der sie beschreibt, mit allen ihren Eigenthümlichkeiten. Für $y = 0$ ist diese Bewegung geradlinig und erfolgt in der x-Axe.

Fig. 107.



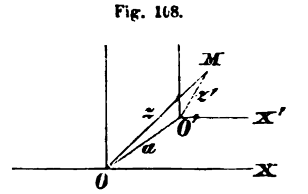
Wird z aus zwei complexen Ausdrücken $z' = x' + y'i$ und $z'' = x'' + y''i$ durch Addition gebildet, ist nämlich

$$z = z' + z'' = (x' + x'') + (y' + y'')i,$$

so sind $x' + x''$, $y' + y''$ die Projectionen der Länge von z auf d...

Axen und ergibt sich mithin (Fig. 107.) z als die Diagonale eines Parallelogramms, welches aus z' und z'' construirt werden kann. Die Verlegung des Coordinatenursprungs kommt auf die Addition complexer Ausdrücke zurück. Ist nämlich 0 der Ursprung der z, $0'$ der der z' für dieselbe Richtung der x- und y-Axen, sind für einen beliebigen Punkt M (Fig. 108.) die ihn repräsentirenden Ausdrücke

Fig. 108.



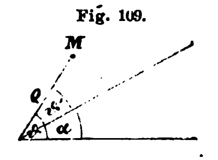
$$0M = z = x + yi, \quad 0'M = z' = x' + y'i$$

und ist $0\,0' = a = \alpha + \beta i$, so wird

$$z = a + z' = (\alpha + x') + (\beta + y')i.$$

Die Drehung des Coordinatensystems wird durch eine Multiplication erreicht. Wählen wir für die Darstellung von z die letzte der drei obigen Formen, so ist, wenn der Radiusvector eines Punktes M (Fig. 109.) die Länge ϱ besitzt und er unter dem Winkel ϑ gegen die ursprüngliche Polaraxe, unter ϑ' aber gegen die neue Axe, welche mit jener den Winkel α bildet, geneigt ist,

Fig. 109.



$$z = \varrho e^{\vartheta i}, \quad z' = \varrho e^{\vartheta' i}, \quad \vartheta = \vartheta' + \alpha$$

und mithin

$$z = \varrho e^{(\vartheta' + \alpha)i} = \varrho \cdot e^{\alpha i} \cdot e^{\vartheta'} = z' \cdot e^{\alpha i},$$

d. h. es genügt die Multiplication mit $e^{\alpha i}$, um die alten z durch die neuen darzustellen.

Das Differential dz gibt eine unendlich kleine Aenderung der Lage des beweglichen Punktes an und bestimmt diese auch hinsichtlich ihrer Richtung, $\frac{dz}{dt}$ gibt die Geschwindigkeit v des Punktes am Ende der Zeit t nach Grösse und Richtung, $\frac{d^2z}{dt^2}$ ebenso die Beschleunigung und ist hier vollkommen allgemein die Beschleunigung nach Grösse und Richtung gleich $\frac{dv}{dt}$. Berücksichtigt man, dass

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + i\frac{d^2y}{dt^2},$$

so erkennt man sofort, dass ein grosser Vortheil der Behandlung der Mechanik mit Hülfe der complexen Grössen darin besteht, dass an die Stelle zweier Bewegungsgleichungen zwischen reellen Coordinaten, nämlich

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

eine einzige
$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$
tritt, indess man dieselbe allein für sich zu untersuchen braucht, sie übrigens auch jeden Augenblick in die zwei Differentialgleichungen der gewöhnlichen Form auflösen kann. Wir wollen dies in einigen Beispielen erläutern.

1. Es sei die Beschleunigung des Punktes z gleich Null, d. h. $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, also $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + i\frac{d^2y}{dt^2} = 0$. Die Integration dieser Gleichung liefert: $\frac{dz}{dt} = b$, $z = a + bt$, worin die willkürlichen Constanten complexe Werthe haben werden. Für $t = 0$ wird $z = a$; es bezeichnet also a den Anfangspunkt der Bewegung; b ist die constante Geschwindigkeit; sie ist constant nach Grösse und Richtung. Es ist daher die Bewegung gleichförmig und erfolgt in gerader Linie; diese Gerade geht durch den Punkt $z = a$ und ist parallel der Richtung des nach dem Punkte $z = b$ führenden Radiusvectors.

2. Die Beschleunigung sei constant nach Grösse und Richtung, aber von Null verschieden, nämlich $\frac{d^2z}{dt^2} = c$, wo c eine complexe Constante bedeutet. Man erhält hier $\frac{dz}{dt} = b + ct$, $z = a + bt + \frac{1}{2}c^2$. Um die Bedeutung der complexen Constanten a und b zu ermitteln, setzen wir weiter $t = 0$ und erfahren dadurch, das $z = a$ den Anfangspunkt der Bewegung markirt, sowie dass der Radiusvector von $z = b$ nach Grösse und Richtung die Anfangsgeschwindigkeit angibt. Um die Gestalt der Bahn zu erkennen, genügt eine Coordinatentransformation. Verlegen wir zunächst den Ursprung in den Punkt a, indem wir $z + a$ an die Stelle von z setzen, so wird die Gleichung der Bahn $z = bt + \frac{1}{2}ct^2$. Nun stellen wir die constante Beschleunigung c nach Grösse und Richtung durch den Ausdruck $c = \alpha e^{Ci}$ dar, worin α und C reell sind, sodass $z = bt + \frac{1}{2}\alpha e^{Ci}t^2$ wird. Indem wir nun das Coordinatensystem so drehen, dass ze^{Ci} an die Stelle von z tritt, kommt in Bezug auf das gedrehte System als Gleichung der Bahn $z = be^{-Ci}t + \frac{1}{2}\alpha t^2$. Die Drehung ist um den Richtungswinkel der Beschleunigung c vorgenommen worden und es ist daher die reelle Axe jetzt zugleich die Richtung der Beschleunigung. Für $be^{-Ci} = b'$ geht die Gleichung über in die Form $z = b't + \frac{1}{2}\alpha t^2$ und wenn man jetzt $\frac{dz}{dt} = b' + \alpha t$ bildet, so erkennt man, dass b' die Anfangsgeschwindigkeit darstellt. Setzen wir $b' = \beta + \beta' i$, so können wir $\frac{dz}{dt} = \beta + \beta i + \alpha t$ auf die Form bringen: $\frac{dz}{dt} = \alpha\left(\frac{\beta}{\alpha} + t\right) + \beta i$ oder, indem wir den Anfang der Zeit um $\frac{\beta}{\alpha}$ verlegen, d. h. $t + \frac{\beta}{\alpha} = t'$ einführen, auf die Form $\frac{dz}{dt} = \alpha t' + \beta' i$. Der Werth von z nimmt dabei die Form an $z = (\beta + \beta' i)\left(t' - \frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\alpha\left(t' - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = -\frac{\beta}{\alpha}(\frac{1}{2}\beta + \beta' i) + \beta' t' i + \frac{1}{2}\alpha t'^2$ und wenn man jetzt nochmals den Coordinatenursprung und zwar in den Punkt $\frac{\beta}{\alpha}(\frac{1}{2}\beta + \beta' i)$ verlegt, d. h. $z + \frac{\beta}{\alpha}(\beta + \beta' i)$ für z setzt, so kommt $z = \beta' t' i + \frac{1}{2}\alpha t'^2$. Jetzt wird für $t' = 0$ auch $z = 0$. Aus dieser letzten Gleichung erkennt man

deutlich die Projectionen der Bewegung auf die reelle und die imaginäre Axe. Man hat, wenn $z = x + iy$ gesetzt wird, wobei also x, y die Coordinaten des beweglichen Punktes bedeuten, $x = \frac{1}{2}\alpha t'^2$, $y = \beta' t'$. Aus beiden Gleichungen folgt die Gleichung der Bahn, auf die gewöhnliche Weise dargestellt, nämlich die Parabelgleichung $y^2 = \frac{2\beta'^2}{\alpha} x^2$.

3. Die Beschleunigung sei nach Grösse constant gleich ε, ihre Richtungslinie drehe sich aber mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω um. Nehmen wir die reelle Axe senkrecht zu der Anfangsrichtung der Beschleunigung und den positiven Sinn der imaginären Axe übereinstimmend mit dem Sinne der Beschleunigung an. Die Beschleunigung ist dann anfangs εi und wenn ihre Drehung im negativen Drehungssinne erfolgt, so ist sie zur Zeit t durch die Gleichung $\frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon i e^{-\omega t i} = \varepsilon i\,(\cos \omega t - i \sin \omega t)$ nach Grösse und Richtung bestimmt. Aus ihr ergibt sich $\frac{dz}{dt} = \frac{\varepsilon i}{\omega}(\sin \omega t + i \cos \omega t) + \frac{\varepsilon}{\omega}$, wenn der Punkt zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit Null besitzt. Hieraus folgt weiter $z = \frac{\varepsilon i}{\omega^2}(-\cos \omega t + i \sin \omega t) + \frac{\varepsilon t}{\omega} + \frac{\varepsilon i}{\omega^2}$, wenn für $t = 0$ der bewegliche Punkt sich im Coordinatenursprunge befindet. Schreibt man diese Gleichung so: $z = \frac{\varepsilon}{\omega^2}(\omega t - \sin \omega t) + \frac{\varepsilon i}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$, so erkennt man, dass $x = \frac{\varepsilon}{\omega^2}(\omega t - \sin \omega t)$, $y = \frac{\varepsilon}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$ die Coordinaten des beweglichen Punktes zur Zeit t sind und dass seine Bahn eine Cycloide ist. Der Radius r des rollenden Kreises ist $r = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ und die Grösse der Beschleunigung ist $\varepsilon = r\omega^2$, also nichts anderes, als die centripetale Beschleunigung der gleichförmigen Kreisbewegung.

4. Es sei die Beschleunigung proportional dem Radiusvector z, nämlich $\frac{d^2z}{dt^2} = -\varkappa^2 z$. Die Integration dieser Gleichung ergibt $z = A \cos \varkappa t + B \sin \varkappa t$. Diese Gleichung bedeutet die elliptische Bahn des Punktes. Um dies deutlicher zu sehen, setze man $A = \varrho \sin \lambda$, $B = \varrho \cos \lambda$, wo ϱ und λ complex sein werden; man erhält dann $z = \varrho \sin(\lambda + \varkappa t) = \varrho \sin\left(\varkappa\left(\frac{\mu}{\varkappa} + t\right) + \nu i\right)$, wenn $\lambda = \mu + \nu i$. Setzt man weiter $\frac{\mu}{\varkappa} + t = t'$, so nimmt z die Form an

$$z = \varrho \sin(\varkappa t' + \nu i) = \varrho\left(\cos \nu i \sin \varkappa t' + i\,\frac{\sin \nu i}{i} \cos \varkappa t'\right)$$

und, da $\cos \nu i = \frac{1}{2}(e^{\nu} + e^{-\nu})$, $\frac{\sin \nu i}{i} = \frac{1}{2}(e^{\nu} - e^{-\nu})$ reell sind, da man ferner ϱ immer reell machen kann, indem man die x-Axe dreht, so erhellt, dass diese Gleichung sich in die beiden spaltet:

$$x = \varrho \cos \nu i \sin \varkappa t, \quad y = \varrho\,\frac{\sin \nu i}{i} \cos \varkappa t,$$

aus welchen

$$\frac{x^2}{(\varrho \cos \nu i)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\varrho \sin \nu i}{i}\right)^2} = 1$$

als die Gleichung der elliptischen Bahn folgt, in gewöhnlicher Weise dargestellt. Die Bahn wird ein Kreis, sobald $\cos \nu i = \pm \frac{\sin \nu i}{i}$; in diesem Falle wird

$A = \varrho\left(\sin v \cos vi + i \cos v \frac{\sin vi}{i}\right)$ und $B = \varrho\left(\cos v \cos vi - i \sin v \frac{\sin vi}{i}\right)$, oder also $A = \varrho\,(\sin v \pm i \cos v) \cos vi$, $B = \varrho\,(\cos v \mp i \sin v) \cos vi$, d. h. $B = \mp iA$. Die Gleichung der Bahn ist in diesem Falle $z = A\,(\cos \varkappa t \mp i \sin \varkappa t)$ und da man A durch Drehung der reellen Axe reell machen kann, so zerfällt dieselbe in die beiden Gleichungen $x = A \cos \varkappa t$ und $y = \mp A \sin \varkappa t$, aus welchen die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = A^2$$

hervorgeht.

Für ein complexes $\varrho = r + ir'$, aber reelles λ wird die Bahngleichung $z = (r + ir') \sin(\lambda + \varkappa t)$ und spaltet sich in $x = r \sin(\lambda + \varkappa t)$, $y = r' \sin(\lambda + \varkappa t)$, so dass $\frac{x}{r} - \frac{y}{r'} = 0$. Die Bahn ist mithin geradlinig und die Bewegung erfolgt in der Richtung von ϱ.

Wir begnügen uns vorläufig mit diesen Beispielen ebener Bewegungen. Die allgemeine Theorie, welche eine Anwendung des Imaginären auf den Raum gestattet, rührt von Hamilton her und wurde insbesondere in seinen Elements of Quaternions entwickelt. Für die uns hier angehenden spezielleren Fragen verweisen wir auf zwei Quellen, nämlich Siebeck: Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen (Crelle's Journal Bd. 55, S. 221), und Durège: Ueber die Anwendung der imaginären Grössen in der Mechanik (Grunert's Archiv, Theil 40, S. 1). Der letzteren Abhandlung sind die oben gegebenen Beispiele entlehnt.

§. 19. Zum Schlusse des vorliegenden, den Problemen der krummlinigen Bewegung und den Methoden ihrer Behandlung gewidmeten Capitels wollen wir noch auf einige Untersuchungen hindeuten, welche durch den Hamilton'schen Hodographen veranlasst werden. Gemäss Cap. I, §. 2 dieses Theiles stellt der Radiusvector dieser Curve die Geschwindigkeit, das Bogenelement derselben die Elementarbeschleunigung und folglich, wenn man gleichzeitig mit dem beweglichen Punkte einen zweiten Punkt den Hodographen so durchlaufen lässt, wie sie vermöge der Construction des Hodographen zusammengehören, so stellt die Geschwindigkeit des Hodographenpunktes die Beschleunigung der Bewegung dar.

Von besonderem Interesse ist der Hodograph der Centralbewegung. Es sei (Fig. 110.) F das Centrum, M der bewegliche Punkt, $FP = p$ das Perpendikel auf die Tangente in M von F aus gefällt. Für die Geschwindigkeit der Centralbewegung gilt nun der Satz $vp = C$. Beschreibt man daher um F mit dem Radius $\sqrt{C}$ einen Kreis und sucht in Bezug auf ihn zur Tangente in M den Pol Q oder, was dasselbe sagt, den zu P conjugirten Pol Q, so stellt FQ die Geschwindigkeit v des Punktes M nach Grösse, der Richtung nach aber um $\frac{1}{2}\pi$ gedreht, dar. Während also die Tangente des Punktes M im Laufe der Bewegung die

Fig. 110.

Bahn als Enveloppe erzeugt, beschreibt ihr Pol Q den um $\frac{1}{2}\pi$ gedrehten Hodographen. Beide Curven sind also in Bezug auf den Kreis Polaren von einander. Die Tangente des Hodographen hat die Richtung der Beschleunigung für die richtige Lage dieser Curve; in unserem Falle steht sie also senkrecht auf der Richtung der Beschleunigung und da diese die Richtung nach dem Centrum F hat, senkrecht auf MF. Ist also P' der Schnittpunkt der Tangente des Hodographen mit MF und $FM = r$, $FP' = p'$, $FQ = r'$, so hat man vermöge der antiparallelen Lage der Tangenten beider Curven gegen die Geraden FM, FP die Gleichung $pr' = p'r$.

Da die Tangente QP' des Hodographen auf dem Radiusvector FM des beschreibenden Punktes senkrecht steht, so bildet sie mit der folgenden Tangente denselben unendlichkleinen Winkel, welchen FM mit dem folgenden Radiusvector bildet, nämlich das Differential $d\vartheta$ des Polarwinkels. Es ist also $d\vartheta$ der Contingenzwinkel des Hodographen und also, wenn ϱ' den Krümmungshalbmesser und ds' das Bogenelement dieser Curve bezeichnet, $\varrho' d\vartheta = ds'$. Während nun $FM = r$ sich um $d\vartheta$ umdreht, dreht sich der Radiusvector $FQ = r'$ um einen gewissen unendlichkleinen Winkel $d\vartheta'$ um, welcher das Differential des zu r' gehörigen Polarwinkels ϑ' ist. Daher ist $\frac{1}{2}r'^2 d\vartheta'$ der unendlichkleine von r' durchstrichene Sector; derselbe ist aber offenbar auch $\frac{1}{2}p\,ds'$. Aus beiden Ausdrücken erhält man also $ds' = \frac{r'^2}{p}\,d\vartheta'$, d. h. $\frac{d\vartheta'}{dt} = \frac{\varrho' p}{r'^2}\,\frac{d\vartheta}{dt}$, oder, da $r^2\frac{d\vartheta}{dt} = C$ ist, $\frac{d\vartheta'}{dt} = C\cdot\frac{\varrho' p}{r^2 r'^2}$, so dass mit Benutzung der Relation $pr' = p'r$ die Geschwindigkeit des Hodographenpunktes Q wird, $r'\frac{d\vartheta'}{dt} = C\,\frac{\varrho' p}{r^2} = \frac{\varrho' p^2}{r^2}\cdot v$, da $vp = C$.

Wenn die Centralbeschleunigung das Newton'sche Gesetz befolgt, also $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$ ist, so wird $ds' = \frac{\mu}{r^2}\,dt = \frac{\mu}{C}\,d\vartheta$ wegen $r^2\frac{d\vartheta}{dt} = C$. Es war aber $ds' = \varrho' d\vartheta$; daher wird $\varrho' = \frac{\mu}{C}$. Für diese Centralbewegung ist also der Krümmungshalbmesser des Hodographen constant und diese Curve daher ein Kreis.

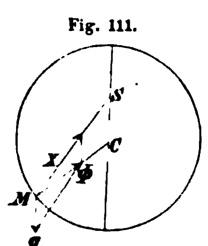
Das Problem des Hodographen hat eine Umkehrung. Sie besteht in der Aufgabe: Wenn der Hodograph und die Geschwindigkeit, mit welcher er beschrieben wird, bekannt sind, die Bahn und Geschwindigkeit des beweglichen Punktes zu finden, zu dessen Bewegung der Hodograph gehört.

IV. Capitel.

Die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Bahn.

§. 1. Durch die Anfangslage, die Anfangsgeschwindigkeit und das Gesetz, welches die Beschleunigung befolgt, ist die Bewegung eines Punktes vollkommen bestimmt; er beschreibt eine bestimmte Bahn und zwar nach einem Gesetze, welches eine nothwendige Folge jener Bestimmungsstücke ist. Wird daher ausser der Anfangslage, der Anfangsgeschwindigkeit und der Beschleunigung noch die Bahn vorgeschrieben, welche der Punkt durchlaufen soll, so ist dies nur dann möglich, wenn noch ein Zwang hinzutritt, der den Punkt nöthigt, sich in der vorgeschriebenen Bahn, statt in jener zu bewegen, welche in Folge der übrigen Bestimmungsstücke frei zu Stande kommen würde. Dieser Zwang kann auf mannigfache Art herbeigeführt werden und wir werden zeigen, dass man einen Punkt nöthigen kann, jede beliebige Curve einfacher oder doppelter Krümmung zu beschreiben. Welcher Art er aber auch immer sei, so kann er, weil er nur einen modificirenden Einfluss auf die Geschwindigkeit ausübt, stets durch eine Beschleunigung ersetzt werden, welche die Geschwindigkeit der freien Bewegung so abändert, dass ihre Richtung in die Tangente der vorgeschriebenen Bahn fällt. Das Gesetz, welches diese hinzuzufügende Beschleunigung befolgen muss, hängt von der gegebenen Beschleunigung und der Beschaffenheit der Bahn ab, welche der Punkt zu beschreiben gezwungen wird; dasselbe zu finden ist eine der wichtigsten Forderungen bei Problemen der gezwungenen Bewegung. Jenen Zwang nennt man je nach den Umständen, unter welchen er ausgeübt wird, Widerstand der Bahn oder Spannung und die ihm äquivalente Zwangsbeschleunigung die Beschleunigung des Widerstandes oder der Spannung. Oft ist die Bahn als eine Rinne oder als eine Röhre aus einem festen Material gearbeitet gegeben, welche durch ihre Festigkeit den Punkt hindert, sie zu verlassen, oft wird sie dadurch bestimmt, dass der Punkt durch einen oder mehrere Fäden mit anderen Punkten verbunden ist. In allen Fällen erfolgt aber die Bewegung wie eine freie, wenn die Zwangsbeschleunigung eingeführt wird und kann die aus einem Material gearbeitete Bahn entfernt und die Fadenverbindung gelöst gedacht werden, denn alles, was sie leisten, wird durch die Zwangsbeschleunigung dargestellt.

Fig. 111.

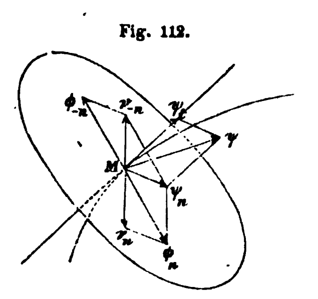


Soll ein schwerer Punkt M (Fig. 111.) z. B. genöthigt werden, mit constanter Geschwindigkeit ωr einen vertikalen Kreis zu beschreiben, so muss zu der Beschleunigung g der Schwere noch eine solche Beschleunigung X hinzutreten, dass aus beiden zusammen jeden Augenblick die Normalbeschleunigung $\varphi = \omega^2 r$ resultirt, indem der Punkt bei der gleichförmigen Bewegung eine Tangentialbeschleunigung gleich Null besitzt. Da g nach Grösse und Richtung constant ist, φ eben

falls nach Grösse unveränderlich, so folgt, dass die Richtung von X den vertikalen Durchmesser in einem Punkte S so schneidet, dass $CS : g = r : \omega^2 r$, d. h. $CS = \frac{g}{\omega^2}$, also gleichfalls constant ist. Die Grösse von X ist veränderlich mit dem Winkel ϑ, den CM mit der Vertikalen bildet, nämlich es ist $X^2 = g^2 + \omega^4 r^2 + 2 g \omega^2 r \cos \vartheta$. Zerlegt man X in eine tangentielle und normale Componente, so tilgt die erstere die Tangentialbeschleunigung $g \cos \vartheta$ der Schwere, während die letztere einerseits deren Normalcomponente vernichtet, andererseits $\varphi = \omega^2 r$ bildet.

Es befinde sich der bewegliche Punkt zur Zeit t im Punkte M (Fig. 112.) der gegebenen Bahn, v sei seine Geschwindigkeit und ψ die gegebene Beschleunigung. Diese letztere zerlegen wir in zwei Componenten, eine tangentielle ψ_t und eine normale ψ_n, deren Richtung in der Normalebene des Punktes M durch die Schnittlinie derselben mit der Ebene bestimmt wird, welche die Tangente und die Beschleunigung ψ enthält. Die Beschleunigung des Zwanges, welche so bestimmt werden muss, dass durch sie in Verbindung mit ψ der Punkt die vorgeschriebene Bahn beschreibt, sei ν und werde gleichfalls in zwei Componenten, eine tangentielle ν_t und eine normale, also gleichfalls in die Normalebene fallende Componente ν_n zerlegt. Die Tangentialcomponente ν_t ist Null, wenn die Beschaffenheit der Curve der Bewegung kein Hinderniss darbietet, so dass die Bewegung in der Bahn durch ψ_t allein bestimmt wird, im Gegenfalle ist sie die sogenannte Beschleunigung der Reibung, verzögert die durch ψ_t bestimmte Bewegung, indem sie ihr entgegengesetzt ist und wird veranlasst durch die nicht glatte Beschaffenheit der Bahn. Sie ist nur vorhanden, wenn die Bahn aus einem mehr oder weniger rauhen Material gearbeitet vorausgesetzt wird. Die Resultante von ψ_t und ν_t ist $\psi_t - \nu_t$ und fällt in die Richtung der Tangente; ψ_n und ν_n geben eine Resultante, welche in die Normalebene fällt. Beide Resultanten stellen die gesammte Tangential- und Normalbeschleunigung des Punktes dar und wenn wir diese wie früher mit φ_t und φ_n bezeichnen, so haben wir zunächst die Gleichungen

Fig. 112.



$$\varphi_t = \psi_t - \nu_t, \quad \varphi_n = Res. (\varphi_n, \nu_n).$$

Nun stellen aber $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{v^2}{\varrho}$ bei jeder Bewegung die Tangential- und Normalbeschleunigung dar; daher liefern diese Gleichungen schliesslich

$$\frac{dv}{dt} = \psi_t - \nu_t, \quad \frac{v^2}{\varrho} = Res. (\psi_n, \nu_n).$$

Die Componente $\psi_t - \nu_t$ bestimmt die Grösse der Geschwindigkeit v. Die Richtung und Grösse von ν_n bestimmt sich dadurch, dass ψ_n mit ν_n

ein Parallelogramm bilden muss, dessen Diagonale $\frac{v^2}{\varrho}$ ist, von welchem also eine Seite ψ_n nach Grösse und Richtung und die Diagonale ebenfalls nach Grösse und Richtung (Richtung des Krümmungshalbmessers der bekannten Bahn) gegeben sind und welches somit vollständig bestimmt ist. Die Reibungsbeschleunigung kann, da sie von der physischen Beschaffenheit der Bahn und des materiellen Punktes abhängt, nicht wohl theoretisch bestimmt werden, sorgfältige Experimente haben aber gelehrt, dass sie der Normalcomponente ν_n proportional ist und also durch $f\nu_n$ ausgedrückt werden kann, wo f ein von der Natur der sich reibenden Substanzen der Bahn und des Punktes abhängiger numerischer Coefficient ist, den man aus besonderen Reibungstafeln zu entnehmen hat.

§. 2. Wir wollen annehmen, die Beschleunigung ν_t der Reibung sei Null; also $\frac{dv}{dt} = \psi_t$, $\frac{v^2}{\varrho} = Res. (\psi_n, \nu_n)$; wir wollen weiter voraussetzen, es sei $\psi = 0$, d. h. es habe der Punkt eine Anfangsgeschwindigkeit und diese werde von keiner Beschleunigung afficirt, als von der des Normalwiderstandes der Bahn. Es sind dann $\psi_t = 0$, $\psi_n = 0$ und reducirt sich die Resultante von ψ_n und ν_n auf ν_n, dessen Richtung also in den Krümmungshalbmesser der Bahn fällt. Die beiden Gleichungen $\frac{dv}{dt} = 0$, $\frac{v^2}{\varrho} = \nu_n$, aus deren erster $v = Const. = c$ folgt, liefern den Satz:

Wird ein Punkt, welcher gezwungen ist, eine vorgeschriebene Bahn zu beschreiben, von keiner Beschleunigung als der des Normalwiderstandes der Bahn afficirt, so bewegt er sich gleichförmig auf der vorgeschriebenen Bahn und ist die Normalbeschleunigung des Widerstandes gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit dividirt durch den Krümmungshalbmesser der Bahn. Damit also der Punkt die vorgeschriebene Bahn nicht verlässt, muss ν_n sich so nach der Krümmung der Bahn richten, dass es immer umgekehrt proportional dem Krümmungshalbmesser ist; an stark gekrümmten Stellen der Bahn, d. h. für kleine ϱ ist also ν_n verhältnissmässig gross, an flachen Stellen wird nur ein kleines ν_n erfordert, um den Punkt auf der Bahn zu erhalten.

Ist ψ normal zur Bahn, also $\psi_t = 0$, $\psi_n = \psi$, $\frac{dv}{dt} = 0$, $\frac{v^2}{\varrho} = Res. (\psi, \nu_n)$, so bewegt sich der Punkt ebenfalls gleichförmig, aber ν_n fällt im Allgemeinen nicht in die Richtung des Krümmungshalbmessers.

Ist die Bahn eben und fällt die Beschleunigung ψ in die Ebene derselben, so fällt ψ_n in die Richtung der Normalen

oder des Krümmungshalbmessers der ebenen Curve und ν_n ebenfalls, so dass die Resultante $\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho}$ beider durch ihre Summe oder Differenz dargestellt wird.

Ist ψ tangential, also $\psi_t = \psi$, $\psi_n = 0$, so wird die Geschwindigkeit zwar nicht constant, aber die Normalcomponente der Widerstandsbeschleunigung wird $\nu_n = \frac{v^2}{\varrho}$ und fällt in die Richtung des Krümmungshalbmessers.

In allen diesen Fällen hängt der Sinn, in welchem ν oder ν_n den beweglichen Punkt afficiren muss, damit dieser auf der Bahn bleibt, von der besonderen Art ab, wie der Zwang ausgeübt wird. So macht es einen Unterschied, ob die Bahn als eine unendlich dünne Röhre gedacht wird, in welcher der Punkt läuft, oder als eine unendlich dünne Rinne (halbdurchschnittene Röhre), oder ob er durch Fäden, an die er geknüpft ist, auf die Bahn gezwungen werden soll.

§. 3. Man kann die Art und Weise, wie die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Bahn zu Stande kommt, auch auf eine etwas andere Art auffassen, als bisher geschehen. Dieselbe ist nicht im Wesen, sondern nur im Wortausdrucke von der bisherigen verschieden, bietet aber kleine Vortheile gerade deswegen dar. Die Normalbeschleunigung φ_n ist äquivalent den beiden Normalcomponenten ψ_n und ν_n der gegebenen Beschleunigung und der Beschleunigung des Widerstandes. Trägt man daher φ_n in entgegengesetztem Sinne auf als φ_{-n}, Fig. 112, so tilgt φ_{-n} jene beiden Componenten ψ_n und ν_n. Da nun die Bewegung eines Punktes überhaupt durch φ_t und φ_n als zustandekommend gedacht werden kann, so kann man sagen: Die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Bahn unter Einfluss einer gegebenen Beschleunigung ψ erfolgt, wie die freie Bewegung, indem zu der Tangentialbeschleunigung $\frac{dv}{dt}$ und der Normalbeschleunigung $\frac{v^2}{\varrho}$ noch eine weitere Beschleunigung φ_{-n} hinzutritt, welche in jedem Augenblicke die Normalcomponente ψ_n und die Normalcomponente ν_n des Widerstandes tilgt. Diese Beschleunigung φ_{-n} heisst im Gegensatze zu der Centripetalbeschleunigung φ_n die Centrifugalbeschleunigung und ist jener gleich, aber dem Sinne nach entgegengesetzt. Da ferner die Beschleunigung ν_n des Widerstandes nichts anderes leistet, als den Punkt zu hindern, die vorgeschriebene Bahn zu durchdringen und dieselbe zu verlassen, so ist die entgegengesetzt genommene Beschleunigung ν_{-n} die Beschleunigung, mit welcher der Punkt auf die Bahn drückt oder die Fäden spannt, wenn er an solche geknüpft ist. Diese Druckbeschleunigung ist daher die Resul-

tante aus φ_{-n} und ψ_n, d. h. aus der Centrifugalbeschleunigung und der Normalcomponenten der gegebenen Beschleunigung. Bei $\psi_n = 0$ ist sie gleich der Centrifugalbeschleunigung φ_{-n}.

§. 4. Wir sagten oben, dass man einen Punkt nöthigen könne, jede beliebige ebene oder doppelt gekrümmte Curve zu beschreiben. Huyghens und Monge haben gezeigt, dass sich dies erreichen lässt, indem man den Punkt an einen oder besser an zwei biegsame Fäden knüpft und diese über die Fläche der Krümmungsaxen (Evolutenfläche) der zu beschreibenden Curve hinspannt. Der erstere hat dies für einen speciellen Fall, nämlich für die ebenen Curven gezeigt und dadurch die Theorie der Evoluten ebener Curven gefunden, der letztere hat die Behauptung für beliebige Curven allgemein bewiesen. Errichtet man nämlich im Krümmungsmittelpunkte einer Curve ein Perpendikel auf die Schmiegungsebene, so ist dies der Durchschnitt zweier aufeinanderfolgender Normalebenen und heisst die Krümmungsaxe. Die ganze Schaar der Krümmungsaxen bildet eine abwickelbare Fläche, welche von sämmtlichen Normalebenen berührt wird. Diese Fläche der Krümmungsaxen enthält alle Evoluten der Curve und diese sind kürzeste Linien auf ihr. Knüpft man einen biegsamen Faden an den Curvenpunkt und zieht ihn über diese Evolutenfläche in irgend einer Richtung hin, so biegt er sich längs einer Evolute, so dass also durch Abheben des Fadens von dieser Evolute, jedoch so, dass er immer Tangente an sie bleibt, der Endpunkt genöthigt wird, die Curve selbst zu beschreiben. Weil der tangirende Faden sich aber um den Berührungspunkt mit der Evolute drehen kann, so ist die Bewegung mit Hülfe eines einzigen Fadens nicht hinreichend sicher, daher verknüpft Monge zwei Fäden in dem beschreibenden Punkte und spannt sie über die Evolutenfläche: dadurch wird jedes Ausweichen des Punktes unmöglich. Vgl. über diese Gegenstände meine „Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung. S. 34 flg.“

§. 5. Es kann der Fall eintreten, dass der bewegliche Punkt an einer Stelle die vorgeschriebene Bahn verlässt und die gezwungene Bewegung in eine freie übergeht. Soll dies sich ereignen, so muss der Normalwiderstand ν_n gleich Null werden und da $\frac{v^2}{\varrho} = Res.\ (\psi_n, \nu_n)$ ist, so folgt, dass die Normalbeschleunigung zusammenfallen muss mit ψ_n, mit der Normalcomponente der gegebenen Beschleunigung ψ. Hieraus folgt weiter, weil ψ die Resultante von ψ_t und ψ_n ist, die Tangente und die Hauptnormale, in welche letztere $\frac{v^2}{\varrho}$ fällt, aber die Schmiegungsebene der Bahn bestimmen, dass der bewegliche Punkt nur an solchen Stellen die vorgeschriebene Bahn verlassen kann, an welcher die Beschleunigung ψ in die Schmiegungsebene

fällt. Bildet nun ψ mit der Tangente der Bahn an einer solchen Stelle den Winkel α, so ist $\psi_n = \psi \sin \alpha$ und erhält man aus der obigen Gleichung: $v^2 = \varrho \psi \sin \alpha$, oder also, weil $\varrho \sin \alpha = \frac{1}{2} c$, nämlich gleich der halben Sehne ist, welche die Beschleunigung in dem Krümmungskreise bestimmt: $v^2 = \frac{1}{2} c \psi = 2 \cdot \frac{1}{4} c \psi$, d. h. der bewegliche Punkt muss an einer Stelle, an welcher er die vorgeschriebene Bahn verlassen soll, eine Geschwindigkeit besitzen, welche er erlangen würde, wenn er mit der Beschleunigung an jener Stelle durch den vierten Theil der Krümmungssehne der Beschleunigung hindurch sich gleichförmig beschleunigt bewegt hätte.

§. 6. Wir stellen jetzt die Bewegungsgleichungen für die Bewegung auf vorgeschriebener Bahn auf. Es seien X, Y, Z die Componenten der gegebenen Beschleunigung ψ; N_x, N_y, N_z die der Beschleunigung ν_n des Normalwiderstandes und da $-\frac{dx}{ds}$, $-\frac{dy}{ds}$, $-\frac{dz}{ds}$ die Richtungscosinusse der Reibungsbeschleunigung ν_t sind, also nach der obigen Bemerkung über $\nu_t = f \cdot \nu_n$ die Componenten der letzteren $-f\nu_n \frac{dx}{ds}$, $-f\nu_n \frac{dy}{ds}$, $-f\nu_n \frac{dz}{ds}$. Hiernach sind $X + N_x - f\nu_n \frac{dx}{ds}$, $Y + N_y - f\nu_n \frac{dy}{ds}$, $Z + N_z - f\nu_n \frac{dz}{ds}$ die Componenten der Gesammtbeschleunigung parallel den Coordinatenaxen und mithin die Gleichungen der Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N_x - f\nu_n \frac{dx}{ds},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N_y - f\nu_n \frac{dy}{ds},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N_z - f\nu_n \frac{dz}{ds},$$

zu welchen noch die beiden Gleichungen der Bahn, nämlich:

$$\Phi(x, y, z) = 0$$
$$\Psi(x, y, z) = 0$$

hinzutreten, sowie die weiteren selbstverständlichen Gleichungen:

$$\nu_n^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2,$$
$$N_x \frac{dx}{ds} + N_y \frac{dy}{ds} + N_z \frac{dz}{ds} = 0,$$

von denen die zweite ausdrückt, dass ν_n senkrecht zur Tangente ist. Aus diesen 7 Gleichungen hat man die Coordinaten x, y, z, die Componenten N_x, N_y, N_z der Beschleunigung des Normalwiderstandes und diesen selbst darzustellen. Damit ergeben sich von selbst die Richtungscosinusse für ν_n. In manchen Fällen wird es zweckmässig sein, statt zweier Curvengleichungen zwischen x, y, z drei Gleichungen zu ge-

brauchen, welche die Coordinaten der Punkte der Bahn als Functionen einer weiteren Variabelen ω darstellen. Es genügt alsdann, ω durch die Zeit auszudrücken, wenn man x, y, z als Functionen der Zeit sucht.

§. 7. Von den Principen, welche zur Integration der Bewegungsgleichungen dienen, ist das Flächenprincip in seltenen Fällen anwendbar, weil die Richtung der Beschleunigung des Widerstandes von vornherein nicht bekannt ist. Ist die Reibung nicht vorhanden, so gilt es, wenn die Ebene von ψ und ν_n fortwährend durch eine Gerade hindurchgeht, für die Projection der Bewegung auf eine Ebene senkrecht zu dieser Geraden.

Das Princip der lebendigen Kraft ist nur brauchbar, wenn die Reibung Null ist, der Normalwiderstand ν_n tritt aber gar nicht in den Ausdruck desselben ein; dies versteht sich von selbst, denn da er normal zur Bahn ist, so ist seine Elementararbeit Null. Die Arbeit der Reibung aber wäre $-f\nu_n ds$ und mithin die Gesammtelementararbeit aller Beschleunigungsbestandtheile ψ, ν gleich $Xdx + Ydy + Zdz - f\nu_n ds$ und folglich nach Cap. III, §. 5.

$$d \cdot \tfrac{1}{2}v^2 = Xdx + Ydy + Zdz - f\nu_n ds,$$

allein da ν_n nicht blos Function von s ist, auch nicht von x, y, z, so ist die rechte Seite dieser Gleichung kein vollständiges Differential, mithin ist auch das Princip nicht anwendbar, es sei denn, dass das letzte Glied fehlt, d. h. die Reibung Null ist. Im letzteren Falle gilt es, wie bei der freien Bewegung. Sobald das Princip der lebendigen Kraft anwendbar ist, so folgt aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = U - U_0 \quad \text{oder} \quad v^2 = 2(U + h)$$

sogleich

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2(U + h)}$$

und wenn man die Gleichungen der Bahn durch $x = f_1(\omega)$, $y = f_2(\omega)$, $z = f_3(\omega)$ darstellt, wodurch $ds = d\omega \sqrt{f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2}$ wird, und t durch ω ausdrückt

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2(U + h)}{f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2}}.$$

Hieraus ergibt sich ω als Function der Zeit. Sobald dies gefunden, sind x, y, z und $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ bekannt und folglich auch $N_x = \frac{d^2x}{dt^2} - X$, $N_y = \frac{d^2y}{dt^2} - Y$, $N_z = \frac{d^2z}{dt^2} - Z$, also auch ν_n und seine Richtung. Zur Grösse ω kann man oft mit Vortheil eine der drei Coordinaten x, y, z wählen.

Wir wenden uns jetzt zur Behandlung eines sehr umfangreichen Falles der Bewegung auf vorgeschriebener Bahn, nämlich zu der Behandlung der Bewegung eines schweren Punktes auf derselben und

werden diese Untersuchung sowohl im Allgemeinen, als auch für spezielle Curven durchführen.

§. 8. **Die Bewegung eines schweren Punktes auf vorgeschriebener Bahn.** Es sei die den beweglichen Punkt M afficirende Beschleunigung die Beschleunigung der Schwere, also $\psi = g$; es finde aber keine Reibung auf der Bahn statt, die wir zunächst als eine beliebige ebene oder doppelte krumme Linie voraussetzen. Es ist also $\nu_n = \nu$, $\nu_t = 0$ und sind die Gleichungen der Bewegung, wenn wir die x- und y-Axe horizontal, die z-Axe aber vertikal und positiv im Sinne der Schwere annehmen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = N_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = N_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g + N_z.$$

Für das Problem gilt das Princip der lebendigen Kraft; nach diesem ist, wenn der Punkt in der Anfangslage M_0 die Coordinaten x_0, y_0, z_0 und die Geschwindigkeit v_0 besitzt,

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = g\,(z - z_0),$$

aus welcher Gleichung man für das Quadrat der Geschwindigkeit zur Zeit t zieht:

$$v^2 = 2g\left(\frac{v_0^2}{2g} - z_0\right) + 2gz.$$

Die Geschwindigkeit ist unabhängig von der Gestalt der Bahn und wird allein durch den vertikalen Abstand von der Anfangslage bestimmt. Die Kräftefunction des Problems ist $U = gz + h$ und die Niveauflächen sind Horizontalebenen. So oft der bewegliche Punkt dieselbe Horizontalebene erreicht, besitzt er dieselbe Geschwindigkeit. In der eben entwickelten Gleichung für v^2 bedeutet $\frac{v_0^2}{2g}$ die Geschwindigkeitshöhe, welche v_0 entspricht, d. h. die Höhe, von welcher der Punkt vertikal fallen müsste, um die Anfangsgeschwindigkeit zu gewinnen, bis zu welcher Höhe er mithin auch vertikal mit dieser Anfangsgeschwindigkeit aufsteigen kann.

Wir wollen jetzt annehmen, die Bahn des Punktes sei eine geschlossene Curve und schneiden dieselbe mit dem System der horizontalen Niveauebenen. Eine dieser Ebenen geht durch den höchsten, eine andere durch den tiefsten Punkt der Bahn und beide berühren die Bahn an diesen Stellen. Nehmen wir der Einfachheit wegen die Niveauebene des höchsten Punktes zur xy-Ebene. In Bezug auf die verschiedenen Werthe, welche die Geschwindigkeit erlangen kann, während der Punkt in seiner Bahn läuft, haben wir drei Fälle zu unterscheiden.

1. $\frac{v_0^2}{2g} - z_0 > 0$, d. h. die Geschwindigkeitshöhe von v_0 ist grösser als der anfängliche Abstand des Punktes von der Niveauebene des höch-

sten Punktes. In diesem Falle kann v niemals Null werden, da z nur positive Werthe besitzt. Die Geschwindigkeit wächst mit z, wird im tiefsten Punkte ein Maximum, nimmt mit z ab, wird im höchsten Punkte ein Minimum, dessen Werth von Null verschieden ist, wächst dann wieder u. s. w. Der Punkt macht volle Umläufe auf seiner Bahn und passirt den höchsten und tiefsten Punkt derselben mit dem Minimal- und Maximalwerth der Geschwindigkeit. Je nach Beschaffenheit der Bahn können mehrere Maxima und Minima von v eintreten, die hier erwähnten sind die extremsten von ihnen.

2. $\frac{v_0^2}{2g} - z_0 < 0$, d. h. die Geschwindigkeitshöhe von v_0 ist kleiner als der anfängliche Abstand des Punktes von der Niveauebene des höchsten Punktes. In diesem Falle wird die Geschwindigkeit Null, sobald $z_0 - z = \frac{v_0^2}{2g}$ ist. Daher ist $z_0 - z$ der kleinste Abstand, den die Niveauebene des höchsten Punktes erreichen kann. Sobald er ihn erreicht hat, verschwindet seine Geschwindigkeit, er sinkt mit wachsender Geschwindigkeit, passirt den tiefsten Punkt, steigt auf der anderen Seite über die Anfangslage hinaus bis zu demselben Niveau auf, fällt dann wieder u. s. w. Er vollführt in diesem Falle also eigentliche Oscillationen zwischen zwei Punkten, welche in der Niveauebene $z = z_0 - \frac{v_0^2}{2g}$ liegen.

3. $\frac{v_0^2}{2g} - z_0 = 0$, d. h. die Geschwindigkeitshöhe von v_0 ist gleich dem Anfangsabstande von der Niveauebene des höchsten Punktes. In diesem Falle reducirt sich die Formel für v^2 auf $v^2 = 2gz$. Die Geschwindigkeit kann nur für $z = 0$ verschwinden. Man kann aber zeigen, dass der Punkt in diesem Falle sich der Niveauebene des höchsten Punktes nur asymptotisch nähern kann, und dass eine unendlich lange Zeit erfordert würde, wenn er den höchsten Punkt erreichen sollte. Um diese Behauptung zu erweisen, wollen wir den Bogen s der Bahn vom höchsten Punkte an zählen und zwar so, dass derselbe abnimmt, wenn der bewegliche Punkt sich diesem höchsten Punkte nähert. Dann wird v durch $-\frac{ds}{dt}$ ausgedrückt und folgt aus der Gleichung $v^2 = 2gz$ jetzt

$$\frac{ds}{dt} + \sqrt{2gz} = 0\,.$$

Nun bildet aber der Krümmungshalbmesser ϱ der Bahn im Punkte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen Winkel λ, μ, ν, für welche die Gleichungen gelten:

$$\frac{\cos\lambda}{\frac{d\cdot\frac{dx}{ds}}{ds}} = \frac{\cos\mu}{\frac{d\cdot\frac{dy}{ds}}{ds}} = \frac{\cos\nu}{\frac{d\cdot\frac{dz}{ds}}{ds}} = \varrho\,,$$

sodass also insbesondere

$$\frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds} = \frac{\cos \nu}{\varrho}$$

ist. Wählt man nun eine Constante α so, dass wenigstens bis auf eine gewisse endliche Strecke des Bogens s hin, vom höchsten Punkte an gerechnet, $\alpha > \frac{\varrho}{\cos \nu}$, so wird

$$\frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds} < \frac{1}{\alpha},$$

also, indem man integrirt und berücksichtigt, dass $\frac{dz}{ds}$ im höchsten Punkte verschwindet, weil z ein Minimum wird,

$$\frac{dz}{ds} < \frac{s}{\alpha}$$

und folglich durch abermalige Integration, da z selbst mit s verschwindet,

$$z < \frac{1}{2} \frac{s^2}{\alpha}.$$

Diesen Werth führen wir nun in die obige Gleichung ein und erhalten

$$\frac{ds}{s} + dt \sqrt{\frac{g}{\alpha}} > 0.$$

Integriren wir jetzt von irgend einer Stelle s der Bahn an, innerhalb jenes Bereiches, für welchen α gewählt wurde, an welcher der Punkt sich zur Zeit t_1 befinden mag, so wird

$$l \frac{s}{s'} + (t - t_1) \sqrt{\frac{g}{\alpha}} > 0,$$

oder

$$t - t_1 > \sqrt{\frac{\alpha}{g}} \cdot l \frac{s'}{s}.$$

Nimmt nun s fortwährend ab, so wächst der Logarithmus auf der rechten Seite dieser Ungleichung ins Unendliche, mithin auch die Zeit t und kann also der bewegliche Punkt erst nach unendlich langer Zeit die höchste Stelle seiner Bahn erreichen, d. h. er erreicht sie nie und nähert sich ihr nur immer mehr.*)

---

*) Der hier zu Hülfe gerufene Satz über den Krümmungshalbmesser der Curven im Raume wird folgendermassen erwiesen. Die Richtung des Krümmungshalbmessers ist die einer Linie, welche in die Ebene zweier aufeinanderfolgender Tangenten fällt und auf der ersten von ihnen senkrecht steht. Sind nun a, b, c die Cosinusse der Richtungswinkel für eine durch den Coordinatenursprung gezogene Gerade in einer ersten Lage, so sind $a + da$, $b + db$, $c + dc$ die Richtungscosinusse für ihre nächstfolgende Lage und wenn wir vom Ursprunge und auf der Geraden in beiden Lagen die Linieneinheit auftragen, so stellen jene

Die Druckbeschleunigung findet man, indem man die Centrifugalbeschleunigung $\frac{v^2}{\varrho}$, welche die Richtung des Krümmungshalbmessers, aber einen vom Krümmungsmittelpunkte abgewandten Sinn hat, mit der Normalcomponenten von g, d. i. mit der Projection von g auf die Normalebene der Bahn zusammensetzt. Ist die Bahn eben und ihre Ebene vertikal, ferner α der Winkel zwischen der Tangente und der Vertikalen, so wird die Druckbeschleunigung die algebraische Summe von $g \sin \alpha$ und $\frac{v^2}{\varrho}$ sein; im tiefsten Punkte ist sie $g + \frac{v^2}{\varrho}$, im höchsten $g - \frac{v^2}{\varrho}$.

§. 9. **Bewegung eines schweren Punktes auf einer geneigten Geraden.** Es sei M_0 (Fig. 113.) die Anfangslage des schweren Punktes, welcher ohne Anfangsgeschwindigkeit sich auf der Geraden M_0A bewegen soll; die Gerade bilde mit der Vertikalen den Winkel α; man soll die Geschwindigkeit, den durchlaufenen Raum und die Beschleunigung des Widerstandes der Bahn finden. Die Einfachheit der Aufgabe gestattet die Behandlung derselben ohne Zugrundelegung eines bestimmten Coordinatensystems.

---

sechs Grössen die Coordinaten der Endpunkte beider Längen dar. Daher ist die Länge ε der Verbindungslinie beider Endpunkte $\varepsilon = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}$ und sind die Richtungscosinusse dieser unendlichkleinen Linie ε gegen die Coordinatenaxen $\frac{da}{\varepsilon}, \frac{db}{\varepsilon}, \frac{dc}{\varepsilon}$. Die Richtung von ε ist nun eine Linie, welche in die Ebene beider Lagen der Geraden fällt und mit ihnen ein unendlichschmales gleichschenkliges Dreieck bildet, d. h. auf ihnen senkrecht steht. Ist also die Gerade, welche wir in zwei aufeinanderfolgenden Lagen betrachten, die Tangente, so hat ε die Richtung des Krümmungshalbmessers. Für die Tangente sind aber die Richtungscosinusse:

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds}.$$

Daher werden $d\varepsilon$ und die Cosinusse der Richtungswinkel λ, μ, ν für den Krümmungshalbmesser bestimmt durch die Gleichungen

$$d\varepsilon = \sqrt{\left(d\cdot\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

$$\frac{\cos\lambda}{d\cdot\frac{dx}{ds}} = \frac{\cos\mu}{d\cdot\frac{dy}{ds}} = \frac{\cos\nu}{d\cdot\frac{dz}{ds}} = \frac{1}{d\varepsilon}.$$

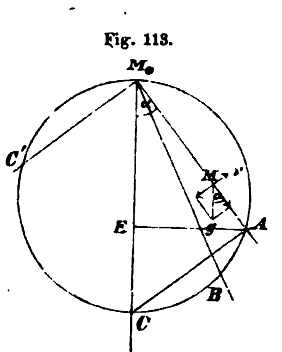
Die Länge $d\varepsilon$ ist aber zugleich das Mass für den Contingenzwinkel und da der Krümmungshalbmesser ϱ mit Hülfe der Gleichung $\varrho = \frac{ds}{d\varepsilon}$ gefunden wird, so erhält man, indem man sämmtliche vier vorstehende Ausdrücke mit ds multiplicirt, die Formeln

$$\frac{\cos\lambda}{\frac{d\cdot\frac{dx}{ds}}{ds}} = \frac{\cos\mu}{\frac{d\cdot\frac{dy}{ds}}{ds}} = \frac{\cos\nu}{\frac{d\cdot\frac{dz}{ds}}{dz}} = \varrho,$$

von denen wir oben Gebrauch machten.

Auf den beweglichen Punkt M wirkt zur Zeit t die Beschleunigung $\psi = g$ vertikal abwärts und die Beschleunigung ν des Widerstandes der Bahn normal zur Bahn; man hat daher für die Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = \psi_t = g \cos \alpha$ und es muss die Resultante aus der Normalcomponenten $\psi_n = g \sin \alpha$ der gegebenen Beschleunigung und der des normalen Widerstandes ν die Centripetalbeschleunigung $\frac{v^2}{\varrho}$ liefern; da aber der Krümmungshalbmesser der Geraden unendlich gross ist, so ist diese Resultante Null und folglich $\nu = g \sin \alpha$ und dem Sinne nach entgegengesetzt mit dieser Normalcomponenten von ψ. Daher bestehen die Gleichungen:

Fig. 113.



$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = g \cos \alpha, \quad \nu = g \sin \alpha;$$

aus den beiden ersteren folgt mit Rücksicht auf die Nebenbedingungen $v = 0$ und $s = 0$ für $t = 0$:

$$v = g \cos \alpha \cdot t, \qquad s = \tfrac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2.$$

Die letzte, $\nu = g \sin \alpha$, bestimmt den Widerstand; er ist constant. Die Bewegung ist eine gleichförmig beschleunigte, aber die Beschleunigung längs der Bahn wird nicht durch den vollen Werth g der Beschleunigung der Schwere, sondern nur durch einen Bestandtheil $g \cos \alpha$ derselben repräsentirt, während der andere $g \sin \alpha$ durch den Widerstand der Bahn vernichtet wird.

Für $\alpha = 0$ geht die Bewegung in die des freien Fallens über; es wird nämlich $v = gt$, $s = \frac{1}{2} g t^2$, $\nu = 0$.

Beschreibt man über der willkürlichen vertikalen Länge $M_0 C = h$ als Durchmesser einen Kreis und zieht in ihm durch M_0 unter beliebigen Winkeln α Sehnen $M_0 A$, $M_0 B$, ... so sind die Zeiten, welche ein beweglicher schwerer Punkt braucht, um dieselben zu durchlaufen, gleich gross. Denn die Zeit ϑ, in welcher eine unter dem Winkel α gegen die Vertikale geneigte Sehne $M_0 A = l$ durchlaufen wird, folgt aus der Gleichung $l = \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot \vartheta^2$ und ist $\vartheta = \sqrt{\frac{2}{g} \frac{l}{\cos \alpha}}$; da aber $h \cos \alpha = l$ ist, so wird dieselbe unabhängig von α, nämlich $\vartheta = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Auch die Sehnen, wie AC, welche man durch den unteren Endpunkt des Durchmessers $M_0 C$ ziehen kann, werden in derselben Zeit ϑ durchlaufen; denn zu jeder solchen Sehne gibt es eine von M_0 ausgehende gleiche und parallele $M_0 C'$, für welche die Behauptung eben erwiesen wurde. Die Geschwindigkeiten, mit welchen die Punkte von M_0 ausgehend auf den verschiedenen Sehnen in deren Endpunkten ankommen, sind aber verschieden. Denn zufolge der Gleichung $v = g \cos \alpha \cdot t$ sind sie:

$$v = g \cos \alpha \cdot \vartheta = g \cos \alpha \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2g\, l \cos \alpha} = \sqrt{2\, g \cdot M_0 E}.$$

Es folgt dies auch daraus, dass die Endpunkte dieser Sehnen in verschiedenen Niveauebenen liegen.

Findet Reibung längs der Geraden statt und ist der Reibungscoefficient f, so werden die Gleichungen der Bewegung:

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = g \cos \alpha - f \nu, \quad \nu = g \sin \alpha,$$

mithin, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ ist:

$$v = g (\cos \alpha - f \sin \alpha)\, t, \qquad s = \tfrac{1}{2} g (\cos \alpha - f \sin \alpha) \cdot t^2.$$

Die Bewegung ist auch jetzt im Allgemeinen eine gleichförmig beschleunigte, nur in dem Falle, dass $g \cos\alpha - f \sin\alpha = 0$, d. h. $f = \operatorname{cotg} \alpha$ ist, ruht der Punkt, indem $v = 0$, $s = 0$ wird. Ist die Anfangsgeschwindigkeit v_0 nicht Null, so ist die Bewegung in diesem Falle gleichförmig.

Bewegt sich der Punkt mit Reibung die gerade Linie hinan, so erhält man aus den Bewegungsgleichungen, wenn die s vom Ausgangspunkte gezählt werden und für $s = 0$, $t = 0$ und $v = v_0$ ist, nämlich aus

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -g(\cos\alpha - f \sin\alpha), \quad \nu = g \sin\alpha$$

die folgenden:

$$v = v_0 - g(\cos\alpha - f\sin\alpha)\,t, \qquad s = v_0 t - \tfrac{1}{2} g(\cos\alpha - f \sin\alpha)\,t^2.$$

Die Bewegung ist eine gleichförmig verzögerte, ausser wenn $f = \operatorname{cotg}\alpha$; in diesem Falle ist sie gleichförmig, nämlich es wird $v = v_0$, $s = v_0 t$.

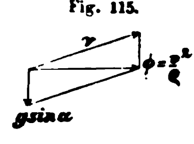
§. 10. **Bewegung eines schweren Punktes auf der Schraubenlinie bei vertikaler Axe.** Ein Punkt (Fig. 114.) bewege sich auf der Cylinderschraube, deren Axe vertikal sei, abwärts, unter Einfluss der Beschleunigung der Schwere ohne Anfangsgeschwindigkeit und ohne dass die Reibung ihn hindert; man soll die Geschwindigkeit, den durchlaufenen Raum und die Beschleunigung des Widerstandes der Bahn finden. Bildet die Tangente der Schraubenlinie mit der Erzeugungslinie des Cylinders den Winkel α, so hat man, da die Beschleunigung der Schwere die Richtung der Erzeugungslinie hat: $\psi = g$, $\psi_t = g \cos\alpha$, $\psi_n = g \sin\alpha$, mithin sind die Gleichungen

Fig. 114.

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = g \cos\alpha$$

zu integriren, welche wieder eine gleichförmig beschleunigte Bewegung liefern. Hinsichtlich der Grösse ν muss bemerkt werden, dass dieselbe die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Katheten $\frac{v^2}{\varrho}$ und $g \sin\alpha$ sind. Der Krümmungshalbmesser der Bahn hat nämlich die Richtung der Normalen des Cylinders und steht mithin auf dessen Tangentenebene senkrecht. In die letztere fällt die Richtung von g, $g \cos\alpha$ und $g \sin\alpha$ und da die Centripetalbeschleunigung $\frac{v^2}{\varrho}$ die Richtung des Krümmungshalbmessers hat, so ist sie senkrecht zur Normalcomponenten $g \sin\alpha$. Diese bildet aber mit ν (hier ν) zusammen jene Centripetalbeschleunigung als Resultante, daher hat das zu dieser Bildung nöthige Parallelogramm (Fig. 115.) eine Seite $g \sin\alpha$ senkrecht zur Diagonalen $\frac{v^2}{\varrho}$. Es ist folglich

Fig. 115.



$$\nu^2 = \left(\frac{v^2}{\varrho}\right)^2 + g^2 \sin^2\alpha$$

und die Tangente der Neigung von ν gegen die Richtung des Krümmungshalbmessers $\frac{g\varrho \sin\alpha}{v^2}$. Da v wächst und ϱ constant ist, so nimmt also ν fortwährend an Grösse zu, wird aber seiner Richtung nach immer mehr normal zur Cylinderfläche. Die Ebene des Parallelogramms ist die Normalebene der Bahn.

§. 11. **Bewegung eines schweren Punktes auf einem vertikalen Kreise, einfaches Pendel.** Ein schwerer Punkt bewege sich auf einem vertikalen Kreise vom Radius a aus der Anfangslage M_0 (Fig. 116), seine Anfangsgeschwindigkeit sei v_0; welche Bewegung wird er annehmen und welches wird die Beschleunigung des Widerstandes sein?

Die Gleichungen der Bewegung sind, wenn die positive z-Axe mit dem Sinne der Schwere übereinstimmend, die x- und y-Axe horizontal und zwar erstere als Durchmesser des Kreises, der Coordinatenursprung aber im Mittelpunkte des Kreises angenommen werden, wie §. 8:

Fig. 116.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = N_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = N_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g + N_z,$$

wozu noch die Gleichungen des Kreises, nämlich:

$$x^2 + z^2 = a^2$$
$$y = 0$$

hinzutreten. Der letzten Gleichung wegen ist $N_y = 0$; es fällt deshalb der Widerstand in die Ebene des Kreises. Das Princip der lebendigen Kraft gibt wieder

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \tfrac{1}{2} v_0^2 + g\,(z - z_0),$$

wir ziehen es aber vor, statt z einen Polarwinkel einzuführen, nämlich den Winkel ϑ, welchen der Radius des Kreises, welcher nach dem beweglichen Punkte hingeht, mit der vertikalen Fallrichtung bildet. Ist zugleich α der der Anfangslage M_0 entsprechende Werth von ϑ, so hat man $z = a \cos \vartheta$, $z_0 = a \cos \alpha$ und mithin

$$v^2 = v_0^2 + 2\,ga\,(\cos \vartheta - \cos \alpha).$$

Der Winkel ϑ genügt, um den Ort des beweglichen Punktes auf dem Kreise zu bestimmen; wir suchen daher nicht x und z, sondern ϑ als Function der Zeit. Hierzu dient die Bemerkung, dass der in der Zeit t durchlaufene Bogen $M_0 M = s$ mit ϑ durch die Gleichung

$$s = a\,(\alpha - \vartheta)$$

verbunden ist und folglich

$$v = \frac{ds}{dt} = -\,a\,\frac{d\vartheta}{dt}$$

wird, worin $-\dfrac{d\vartheta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit darstellt. Hiermit erhält man also mit Hülfe der Gleichung der lebendigen Kraft die Differentialgleichung

$$-\,a\,\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2\,ga\,(\cos \vartheta - \cos \alpha)},$$

durch deren Integration sich ϑ als Function von t ergibt. Dieser Gleichung genügt für ϑ eine elliptische Function, wie wir sogleich zeigen werden.

An die Stelle der obigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in x, y, z hätten wir auch von vornherein eine Differentialgleichung in ϑ setzen können. Es ist nämlich offenbar $g \sin \vartheta$ die Tangentialbeschleunigung und da dieselbe durch $\dfrac{dv}{dt}$ oder $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ ausgedrückt wird, so ergibt sich mit Hülfe des eben benutzten Ausdrucks für s, aus welchem $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -\,a\,\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2}$ folgt:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{a}\sin \vartheta = 0,$$

welches die Differentialgleichung zweiter Ordnung unseres Problemes in ϑ ist. Ein beweglicher Punkt, welcher auf einem vertikalen Kreise von der Schwere getrieben wird, heisst, insbesondere, wenn der Zwang auf dem Kreise durch einen Faden geleistet wird, welcher den Punkt mit dem Kreismittelpunkte verknüpft, ein einfaches Pendel und daher wird diese Gleichung gewöhnlich die Pendelgleichung genannt. Ihr erstes Integral ist $-a\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2ga\,(\cos\vartheta - \cos\alpha)}$, aus welchem wir jetzt durch abermalige Integration ϑ als Function der Zeit suchen.

Zunächst ist es nicht unzweckmässig, den Winkel $\frac{1}{2}\vartheta$ für ϑ einzuführen. Aus $1 - \cos\vartheta = 2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta$ und $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ folgt

$$\cos\vartheta - \cos\alpha = 2(\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta)$$

und damit wird die Grösse unter dem Wurzelzeichen gleich

$$v_0^2 + 4ga\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - 4ga\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta$$

und folglich mit Rücksicht darauf, dass $\vartheta = \alpha$ für $t = 0$ wird, wenn man das Minuszeichen dazu benutzt, um die Grenzen des Integrales umzukehren:

$$t = \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{a\,d\vartheta}{\sqrt{v_0^2 + 4ga\sin^2\frac{1}{2}\alpha - 4ga\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}}.$$

Dies Integral drückt die Zeit aus, welche verfliesst, bis der anfängliche Winkel α auf die Grösse ϑ herabgesunken ist. Die Reduction desselben macht eine Sonderung der drei Fälle nöthig:

$$1.\ v_0^2 + 4ga\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha < 4ga,$$
$$2.\ v_0^2 + 4ga\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = 4ga,$$
$$3.\ v_0^2 + 4ga\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha > 4ga.$$

Der Sinn dieser Unterscheidung wurde schon §. 8, wenn auch unter etwas anderer Form erläutert. Dividirt man nämlich diese drei Relationen mit $2g$ und setzt für $2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ wieder $1 - \cos\alpha$, so gehen sie über in $\frac{v_0^2}{2g} \lesseqgtr a + a\cos\alpha$. Nun ist $\frac{v_0^2}{2g}$ die der Anfangsgeschwindigkeit entsprechende Fallhöhe, $a + a\cos\alpha$ aber die Tiefe der Anfangslage unterhalb des höchsten Punktes des Kreises; daher ist im ersten Falle die Geschwindigkeitshöhe kleiner, im zweiten gleich, im dritten grösser als die Tiefe der Anfangslage. Im ersten Falle finden Oscillationen im gewöhnlichen Sinne (Hin- und Hergänge), im letzten finden volle Umläufe statt, im zweiten nähert sich der bewegliche Punkt dem höchsten Punkte asymptotisch.

I. Fall: $v_0^2 + 4ga\sin^2\alpha < 4ga$. Wir setzen

$$\frac{v_0^2 + 4ga\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{4ga} = \varkappa^2$$

und $\varkappa$ ist alsdann der Voraussetzung dieses Falles gemäss < 1. Die Bedeutung von $\varkappa$ ist leicht zu ermitteln. Es ist nämlich

$$\varkappa^2 = \frac{\frac{v_0^2}{2g} + a - a\cos\alpha}{2a} = \frac{HM_0 + M_0Q}{2a},$$

wenn $HM_0 = \frac{v_0^2}{2g}$, $M_0Q = P_0A = CA - CP_0 = a - a\cos\alpha$. Es ist demnach $\varkappa = \sqrt{\frac{HQ}{2a}}$. Die charakteristische Bedingung dieses ersten Falles ist also $\varkappa < 1$, d. h. $HQ < 2a$. Durch Einführung von $\varkappa$ wird

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{d\cdot\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{\varkappa^2 - \sin^2\frac{1}{2}\vartheta}}.$$

Wir ersetzen ϑ durch eine neue Variabele φ, welche mit ϑ durch die Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2}\vartheta = \varkappa \sin \varphi$$

verbunden ist, in Folge deren den Grenzen $\vartheta = \vartheta$ und $\vartheta = \alpha$ die neuen Grenzen $\varphi = \varphi$ und $\varphi = Arc \sin\left(\frac{1}{\varkappa} \sin \frac{1}{2}\alpha\right) = \beta$ entsprechen; t nimmt dann die Form an:

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\varphi}^{\beta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Legendre hat für Integrale dieser Art die Bezeichnung

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}} = F(\psi, \varkappa)$$

eingeführt. Dies Integral heisst „elliptisches Integral erster Gattung" und die Grösse $\varkappa$, welche kleiner als die Einheit ist, der Modulus, ψ aber die Amplitude desselben. Oft lässt man die Bezeichnung des Modulus weg, wenn er als selbstverständlich angenommen wird, oft schreibt man auch $F(\psi)$, *mod.* $\varkappa$. Mit Hülfe dieser Bezeichnung geht die Gleichung für t über in:

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \left\{F(\beta, \varkappa) - F(\varphi, \varkappa)\right\},$$

wo

$$\sin \varphi = \frac{1}{\varkappa} \sin \tfrac{1}{2}\vartheta, \qquad \sin \beta = \frac{1}{\varkappa} \sin \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Für die Zeit t_1 des Niederganges zum tiefsten Punkte erhält man hieraus, indem dem $\vartheta = 0$ entspricht: $\varphi = 0$ und $F(0, \varkappa) = \int_0^0 \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}} = 0$ ist:

$$t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot F(\beta, \varkappa).$$

Demnach ergibt sich weiter für die Zeit $t_1 - t$, während welcher der Punkt von M aus, dem ϑ entsprechend, bis zum tiefsten Punkte fällt:

$$t_1 - t = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot F(\varphi, \varkappa).$$

Da die Anfangsgeschwindigkeit nicht Null ist, so steigt der Punkt von der tiefsten Lage bis zu einer Stelle auf, welche um $\frac{v_0^2}{2g}$ über dem Niveau des Ausgangspunktes M_0 liegt und daselbst wird die Geschwindigkeit zum erstenmal Null. Die Oscillationsdauer T ist das Vierfache der Zeit, welche der Punkt braucht, um von der tiefsten Lage bis dorthin zu gelangen. Ist t_2 die Zeit, welche vom Anfange der Bewegung gerechnet, verfliesst, bis er diese Stelle erreicht, so wird

$$T = 4(t_2 - t_1).$$

Die Amplitude φ, welche zu t_2 gehört, bestimmt sich durch die Bedingung, dass t_2 die kleinste Zeit ist, zu welcher die Geschwindigkeit Null wird. Nun war $v = -a\frac{d\vartheta}{dt}$ und aus der obigen ersten Gleichung für t folgt durch Differentiation nach der unteren Grenze ϑ des Integrales $\frac{dt}{d\vartheta} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \frac{1}{\sqrt{\varkappa^2 - \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta}}$, folglich $v = 2a\sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\varkappa^2 - \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta}$ und wenn dies verschwinden soll, muss $\sin \frac{1}{2}\vartheta = \pm \varkappa$

werden. Da das Verschwinden der Geschwindigkeit zum erstenmale nur bei einem negativen ϑ eintritt, so muss $\sin \frac{1}{2}\vartheta = -\varkappa$ gewählt werden. Hierzu findet sich dann mit Hülfe der Gleichung $\varkappa \sin \varphi = \sin \frac{1}{2}\vartheta = -\varkappa$ der Werth von φ, nämlich $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$ und hiermit erhält man aus der für t aufgestellten Gleichung zunächst:

$$t_2 = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \left\{F(\beta, \varkappa) - F(-\tfrac{1}{2}\pi, \varkappa)\right\},$$

oder weil

$$F(-\tfrac{1}{2}\pi, \varkappa) = \int_0^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}} = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}} = -F(\tfrac{1}{2}\pi, \varkappa)$$

ist, wie man sogleich durch die Substitution von $-\psi$ für ψ sieht:

$$t_2 = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \left\{F(\beta, \varkappa) + F(\tfrac{1}{2}\pi, \varkappa)\right\}.$$

Mit Hülfe des bereits gefundenen $t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot F(\beta, \varkappa)$ ergibt sich hieraus weiter:

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot F(\tfrac{1}{2}\pi, \varkappa).$$

Daher wird jetzt die Oscillationsdauer

$$T = 4\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot F(\tfrac{1}{2}\pi, \varkappa).$$

Das elliptische Integral mit der Amplitude $\frac{1}{2}\pi$, nämlich

$$F(\tfrac{1}{2}\pi, \varkappa) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}}$$

heisst das vollständige elliptische Integral erster Gattung und wird von Legendre immer mit F', von Jacobi mit K bezeichnet. Demnach wäre schliesslich zu schreiben:

$$T = 4\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot K, \ mod.\ \varkappa, \qquad K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}}, \qquad \varkappa^2 = \frac{v_0^2 + 4ga \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{4ga}$$

Für $v_0 = 0$ wird der Modulus $\varkappa = \sin \frac{1}{2}\alpha$ und findet man für die verschiedenen Werthe von $\frac{1}{2}\alpha$ die Werthe von K in besonderen Tafeln, bei Legendre in seinen *Exercises du calcul integral* und in seinem *Traité des fonctions elliptiques*. Da nämlich der Modulus $\varkappa$ kleiner als die Einheit ist, so kann er in allen Fällen als Sinus eines gewissen Winkels angesehen werden (Winkel des Modulus).

Uebrigens kann man sich behufs der numerischen Berechnung der Oscillationsdauer T der Reihenentwickelung bedienen. Man erhält nämlich nach dem binomischen Satze

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}} = (1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}\varkappa^2 \sin^2 \psi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\varkappa^4 \sin^4 \psi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\varkappa^6 \sin^6 \psi + \cdots$$

und folglich

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi + \tfrac{1}{2}\varkappa^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 \psi\, d\psi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\varkappa^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 \psi\, d\psi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\varkappa^6 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^6 \psi\, d\psi +$$

Die hierin auftretenden Integrale stehen sämmtlich unter der Form

$$J_{2n} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n} \psi \, d\psi,$$

wofür der Werth

$$J_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

ist. Unter Benutzung dieses Werthes erhält man daher

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left\{ 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \varkappa^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \varkappa^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \varkappa^6 + \cdots \right\}.$$

Ist insbesondere die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$, so geht dieser Ausdruck für T wegen $\varkappa = \sin \frac{1}{2}\alpha$ über in den folgenden:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left\{ 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) \sin^4 \tfrac{1}{2}\alpha + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \tfrac{1}{2}\alpha + \cdots \right\},$$

sodass also T nach geraden Potenzen des Sinus vom halben Elongationswinkel, welchen Namen α führt, entwickelt werden kann. Aus dieser Entwickelung kann man brauchbare Näherungswerthe für die Oscillationsdauer des einfachen Pendels ableiten, indem man sich auf 1, 2, 3, ... Glieder der Reihe beschränkt. Für sehr kleine Werthe des Elongationswinkels, wie dies namentlich bei sehr langen Pendeln eintreten wird, genügt als Näherungsformel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Dieselbe ist unabhängig von dem Elongationswinkel α und zeigt, dass bei überhaupt kleinen Elongationen die Schwingungen verschieden langer Pendel trotz der Verschiedenheit der Elongationen, dennoch sehr nahe gleiche Dauer haben. Diese Eigenschaft heisst der **Isochronismus** kleiner Pendelschwingungen. Er findet bei der Bewegung eines schweren Punktes auf einer beliebigen Curve in der Nähe des tiefsten Punktes statt, wenn der Krümmungskreis dortselbst vertikal steht, und zwar mit derselben Näherung, mit welcher der Krümmungskreis die Curve vertritt. Für die Cycloide gilt der Isochronismus in aller Strenge bei beliebiger Entfernung des schwingenden Punktes vom tiefsten Punkte, wie später gezeigt werden wird.

Will man die eben erwähnte Näherungsformel unmittelbar finden, so genügt es in der Gleichung

$$-a\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2ga(\cos\vartheta - \cos\alpha)}$$

$v_0 = 0$ und wegen der Kleinheit von α und also auch von ϑ, da dieser Winkel bei $v_0 = 0$ nie über α hinausgehen kann, $\cos\vartheta = 1 - \frac{1}{2}\vartheta^2$, $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ zu setzen, wodurch die Gleichung übergeht in

$$-\sqrt{\frac{a}{g}} \frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2},$$

aus welcher zunächst allgemein

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_\alpha^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \, Arc\cos\frac{\vartheta}{\alpha} \text{ und } \vartheta = \alpha \cos t \sqrt{\frac{g}{a}}$$

folgt, für $\vartheta = 0$ aber die Zeit des Niederganges bis zum tiefsten Punkte, d. h.

$$\tfrac{1}{2}T = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

also
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$
erhalten wird.

Um die Bedeutung dieser Formel und der ihr vorausgehenden approximativen Rechnung deutlicher zu erkennen, müssen wir auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Pendelbewegung zurückgehen. Sie war
$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{a}\sin\vartheta = 0.$$
Sie ist nicht lineär, kann aber für kleine Amplituden ϑ näherungsweise lineär gemacht werden, indem man ϑ für $\sin\vartheta$ schreibt. Sie lautet dann
$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{a}\vartheta = 0$$
und ihr Integral ist (vgl. Cap. II, §. 2, Nr. 7.).
$$\vartheta = A\cos t\sqrt{\frac{g}{a}} + B\sin t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$
Die Constanten A, B bestimmen sich durch die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit; indem für $t = 0$ der Winkel $\vartheta = \alpha$ und die Winkelgeschwindigkeit $-\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ wird, ergibt sich $A = \alpha$, $B = 0$; wodurch die Lösung $\vartheta = \alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{a}}$, wie oben, hergestellt ist. Multiplicirt man die lineäre Differentialgleichung mit a und bedenkt, dass $a\vartheta$ den Kreisbogen $AM = \sigma$ vom tiefsten Punkte bis zum Punkte M bedeutet, sowie, dass $\vartheta = \frac{\sigma}{a}$, so wird die Differentialgleichung
$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{g}{a}\sigma = 0.$$
Sie ist aber die Gleichung für die geradlinige oscillirende Bewegung, welche die Projection der gleichförmigen Kreisbewegung ist. Die der obigen Näherungsformel zu Grunde liegende mechanische Idee ist also keine andere, als dass man wegen der Kleinheit der Amplituden den Bogen, welchen der Pendelpunkt beschreibt, als eine Gerade, die Bewegung auf ihm aber als die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung ansehen darf. Der Isochronismus der Schwingungen erscheint dabei als eine Folge davon, dass bei jener oscillirenden Bewegung die Oscillationsdauer von der Oscillationsweite unabhängig ist. Die Form $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ konnte also unmittelbar aus Thl. II, Cap. I, §. 12. entnommen werden.

Zu der Reihe $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{2}\alpha + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^4\frac{1}{2}\alpha + \cdots\right\}$ kann man auch gelangen, indem man in der Gleichung der lebendigen Kraft $v_0 = 0$ setzt, wie diese Formel voraussetzt, und aus dem sich ergebenden Integrale
$$t = \int_\alpha^\vartheta \frac{-a\,d\vartheta}{\sqrt{2ga(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}$$
für die vierfache Zeit des Niederganges oder die Oscillationsdauer erhält:
$$T = 4\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^\alpha \frac{d\vartheta}{\sqrt{2g(\cos\vartheta - \cos\alpha)}};$$
hierauf weiter statt ϑ die Variabele $1 - \cos\vartheta = x$ einführt, sodass die Bedeutung

von x durch $x = \frac{AP}{a}$ (s. Fig. 115.) angegeben wird und gleichzeitig dann $1 - \cos\alpha = \frac{AP_0}{a} = b$ setzt, wodurch man mit Rücksicht auf $-\sin\vartheta\, d\vartheta = dx$, $d\vartheta = -\frac{dx}{\sin\vartheta} = \frac{dx}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$, $\cos\vartheta - \cos\alpha = b - x$, sowie mit Rücksicht auf die den Grenzen $\vartheta = 0$, $\vartheta = \alpha$ entsprechenden Grenzen $x = 0$, $x = b$ zu der Form

$$T = 4\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}\sqrt{2(b-x)}} = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}}(1 - \tfrac{1}{2}x)^{-\frac{1}{2}}$$

gelangt und endlich die Grösse $(1 - \frac{1}{2}x)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Satze in der Reihe

$$(1 - \tfrac{1}{2}x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\frac{x}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots$$

auflöst, welche wegen $x < 1$ convergirt. Hierdurch ergibt sich für T:

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\int_0^b \frac{x\,dx}{\sqrt{bx - x^2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(\tfrac{1}{2})^2\int_0^b \frac{x^2\,dx}{\sqrt{bx - x^2}}\right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}(\tfrac{1}{2})^3\int_0^b \frac{x^3\,dx}{\sqrt{bx - x^2}} + \cdots\right).$$

Die hier auftretenden Integrale folgen aus der allgemeinen Formel:

$$A_n = \int_0^b \frac{x^n\,dx}{\sqrt{bx - x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot b^n\pi, \qquad A_0 = \pi$$

und erhält man für T unter Anwendung derselben die gut convergirende Reihe:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 + (\tfrac{1}{2})^2\,\frac{b}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^3 + \cdots\right),$$

welche wegen $b = 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ mit der früher entwickelten identisch ist.

Zu der Formel für das Integral A_n gelangt man durch folgende Reduction. Es ist, indem man x^n in $x^{n-1}\cdot x$ zerlegt, statt des Factors x setzt $-\frac{1}{2}(b - 2x - b)$ und hierauf spaltet:

$$A_n = \int_0^b \frac{x^n\,dx}{\sqrt{bx - x^2}} = \int_0^b \frac{x^{n-1}\cdot x\,dx}{\sqrt{bx - x^2}} = -\tfrac{1}{2}\int_0^b \frac{x^{n-1}(b - 2x - b)}{\sqrt{bx - x^2}}\,dx$$
$$= -\int_0^b x^{n-1}\cdot\tfrac{1}{2}\frac{(b-2x)\,dx}{\sqrt{bx - x^2}} + \frac{b}{2}\int_0^b \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{bx - x^2}},$$

d. h.

$$A_n = -\int_0^b x^{n-1}d\cdot\sqrt{bx - x^2} + \frac{b}{2}A_{n-1}.$$

Indem man auf der rechten Seite dieser Gleichung partiell integrirt und bemerkt, dass $x^{n-1}\sqrt{bx - x^2}$ an beiden Grenzen verschwindet, mithin

$$\int_0^b x^{n-1}d\cdot\sqrt{bx - x^2} = -(n-1)\int_0^b \sqrt{bx - x^2}\cdot x^{n-2}\,dx$$

ist und das Integral rechts in zwei andere zerlegt, indem man für $\sqrt{bx - x^2}$ das gleichbedeutende $\frac{bx - x^2}{\sqrt{bx - x^2}}$ einsetzt, nämlich

$$\int_0^b x^{n-1} d \cdot \sqrt{bx - x^2} = -(n-1)\, b \int_0^b \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{bx - x^2}} + (n-1) \int_0^b \frac{x^n\,dx}{\sqrt{bx - x^2}}$$
$$= -(n-1)\, b\, A_{n-1} + (n-1)\, A_n,$$

gelangt man durch passende Zusammenziehung zu der Reductionsformel

$$A_n = \frac{2n-1}{2n}\, b\, A_{n-1}.$$

Mit Hülfe dieser ergeben sich ebenso

$$A_{n-1} = \frac{2n-3}{2n-2}\, b\, A_{n-2}$$
$$A_{n-2} = \frac{2n-5}{2n-4}\, b\, A_{n-3}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$A_2 = \frac{3}{4}\, b\, A_1$$
$$A_1 = \frac{1}{2}\, b\, A_0$$

und folglich durch Multiplication aller dieser Gleichungen

$$A_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot b^n A_0 .$$

A_0 aber ergibt sich unmittelbar als:

$$A_0 = \int_0^b \frac{dt}{\sqrt{bx - x^2}} = \int_0^b \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - x\right)^2}} = \int_0^b \frac{d \cdot \frac{x}{\frac{b}{2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{b}{2} - x}{\frac{b}{2}}\right)^2}}$$

$$= \int_0^b \frac{-d \cdot \frac{\frac{b}{2} - x}{\frac{b}{2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{b}{2} - x}{\frac{b}{2}}\right)^2}} = \left(Arc \cos \frac{\frac{b}{2} - x}{\frac{b}{2}}\right)_0^b = \pi .$$

Nach diesen Einzelnheiten über die Oscillationsdauer kehren wir zu dem allgemeinen Probleme zurück; wir haben noch den Ort des beweglichen Punktes d. h. den Winkel ϑ und seine Geschwindigkeit als Functionen der Zeit zu bestimmen.

Um den **Winkel** ϑ als Function der Zeit darzustellen, müssen wir die Gleichung

$$t_1 - t = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot F(\varphi, \varkappa), \qquad \varkappa \sin\varphi = \sin \tfrac{1}{2}\vartheta$$

nach φ auflösen. Setzt man den Werth des elliptischen Integrales erster Gattung gleich u, nämlich

$$\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}} = F(\varphi, \varkappa) = u ,$$

so wird die obere Grenze φ desselben eine Function von u sein; sie heisst „Amplitude u" und wird nach Jacobi durch $\varphi = am. (u, \varkappa)$ oder $\varphi = am.\, u,\ mod.\ \varkappa$ bezeichnet. Die Functionen $\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi} = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 am\, u} = \Delta\, u$.

heissen zum Gegensatz der elliptischen Integrale elliptische Functionen und u ihr Argument. Die elliptischen Functionen sind von Abel und Jacobi eingeführt worden, Legendre nannte die elliptischen Integrale elliptische Functionen, da er sie allein kannte. Nach diesen Bemerkungen ziehen wir aus der obigen Gleichung zunächst

$$F(\varphi, \varkappa) = \sqrt{\frac{g}{a}}\,(t_1 - t)$$

und hieraus also

$$\varphi = am\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,(t_1 - t),\ \varkappa\right)$$

und da

$$\sin \tfrac{1}{2}\vartheta = \varkappa \sin \varphi$$

ist, so erhalten wir den Sinus des halben Winkels ϑ

$$\sin \tfrac{1}{2}\vartheta = \varkappa \sin am\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,(t_1 - t),\ \varkappa\right).$$

Um endlich auch die Geschwindigkeit durch elliptische Functionen darzustellen, hat man $v = -a\frac{d\vartheta}{dt}$, wo $-\frac{d\vartheta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit ausdrückt. Nun folgt aus der eben entwickelten Gleichung:

$$\vartheta = 2\,Arc\sin\left\{\varkappa \sin am\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,(t_1 - t),\ \varkappa\right)\right\}.$$

Es kommt also darauf an, einen Ausdruck der Form $Arc\sin(\varkappa \sin am\, u)$ zu differentiiren. Dies liefert: $d \cdot Arc\sin(\varkappa \sin am\, u) = \frac{d(\varkappa \sin am\, u)}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin am^2 u}} = \frac{\varkappa \cos am\, u \cdot d\, am\, u}{\Delta\, am\, u}$ $= \varkappa \cos am\, u \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}} = \varkappa \cos am\, u \cdot du.$ Demnach wird im vorliegenden Falle für $u = \sqrt{\frac{g}{a}}\,(t_1 - t)$:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -2\varkappa\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \cos am\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,(t_1 - t),\ \varkappa\right)$$

und folglich

$$v = 2\varkappa\sqrt{ga} \cdot \cos am\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,(t_1 - t),\ \varkappa\right).$$

II. Fall: $v^2 + 4ga\sin^2\frac{1}{2}\alpha = 4ga$, d. h. $HQ = 2a$. In diesem Falle wird aus der Formel für t, die wir zu Anfang der Untersuchung aufstellten:

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\vartheta}^{\alpha}\frac{d\cdot\frac{1}{2}\vartheta}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}.$$

Um den Werth dieses Integrales zu bestimmen, verwandeln wir den Cosinus im Nenner in einen Sinus, indem wir statt ϑ die supplementäre Variabele $\pi - \vartheta$ einführen und lösen diesen Sinus in die Factoren Sinus und Cosinus des halben Winkels auf. Dies liefert

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\pi-\alpha}^{\pi-\vartheta}\frac{d\cdot\frac{1}{4}\vartheta}{\sin\frac{1}{4}\vartheta\cos\frac{1}{4}\vartheta} = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\frac{1}{4}(\pi-\alpha)}^{\frac{1}{4}(\pi-\vartheta)}\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta\cos\vartheta}$$

und indem wir im Zähler unter dem Integralzeichen den Factor $\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta$, welcher die Einheit beträgt, zufügen, spaltet sich das Integral in die beiden

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\int_{\frac{1}{4}(\pi-\alpha)}^{\frac{1}{4}(\pi-\vartheta)}\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\cos\vartheta} + \int_{\frac{1}{4}(\pi-\alpha)}^{\frac{1}{4}(\pi-\vartheta)}\frac{\cos\vartheta\, d\vartheta}{\sin\vartheta}\right)$$

und liefert uns also
$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\, l\, \frac{tg\,\frac{1}{4}(\pi - \vartheta)}{tg\,\frac{1}{4}(\pi - \alpha)}.$$
Für die Zeit des Niederganges erhält man hieraus, indem man $\vartheta = 0$ setzt:
$$t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}}\, l\, Cotg\,\tfrac{1}{4}(\pi - \alpha).$$
In dem vorliegenden Falle kann die Geschwindigkeit erst Null werden, wenn der Punkt in den höchsten Punkt des Kreises gelangt. Die Zeit, welche hierzu nöthig wäre, würde aus der Formel für $\vartheta = -\pi$ folgen. Dieser Werth liefert aber $t = \infty$. Der Punkt nähert sich der höchsten Stelle des Kreises asymptotisch, wie bereits §. 8. allgemein bewiesen wurde.

Aus der Gleichung für t ergibt sich für den Winkel ϑ, wenn man abkürzend $tg\,\frac{1}{4}(\pi - \alpha) = \beta$ setzt,
$$\vartheta = \pi - 4\, Arctg\left(\beta e^{t\sqrt{\frac{g}{a}}}\right).$$
Indem man diese Gleichung differentiirt, erhält man die Winkelgeschwindigkeit $-\frac{d\vartheta}{dt}$ als Function der Zeit, nämlich:
$$-\frac{d\vartheta}{dt} = 4\sqrt{\frac{g}{a}}\, \frac{\beta}{e^{-t\sqrt{\frac{g}{a}}} + \beta^2 e^{t\sqrt{\frac{g}{a}}}}$$
und hiermit die Geschwindigkeit $v = -a\frac{d\vartheta}{dt}$:
$$v = \frac{4\beta\sqrt{ag}}{e^{-t\sqrt{\frac{g}{a}}} + \beta^2 e^{t\sqrt{\frac{g}{a}}}}.$$

III. Fall: $v_0^2 + 4ga\,sin^2\,\frac{1}{2}\alpha > 4ga$, d. h. $HQ > 2a$. Wir setzen hier:
$$\frac{4ga}{v_0^2 + 4ga\,sin^2\,\frac{1}{2}\alpha} = \varkappa^2,$$
wo also wieder $\varkappa < 1$ wird und erhalten für t:
$$t = \varkappa\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{d\cdot\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1 - \varkappa^2\,sin^2\,\frac{1}{2}\vartheta}},$$
oder nach Ausführung der Substitution $\frac{1}{2}\vartheta = \varphi$:
$$t = \varkappa\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\frac{1}{2}\vartheta}^{\frac{1}{2}\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2\,sin^2\,\varphi}}.$$
d. h.
$$t = \varkappa\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\left\{F(\tfrac{1}{2}\alpha, \varkappa) - F(\tfrac{1}{2}\vartheta, \varkappa)\right\}.$$
Die Bedeutung der einzelnen Glieder dieser Formel ergibt sich, wenn man die Zeit t_1 des Niederganges zum tiefsten Punkte sucht. Man erhält sie, indem man $\vartheta = 0$ setzt, nämlich:
$$t_1 = \varkappa\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot F(\tfrac{1}{2}\alpha, \varkappa)$$
und indem man hiervon t abzieht, gewinnt man für die Zeit, während welcher der Punkt von M bis zum tiefsten Punkte fällt, während welcher also der Winkel ϑ bis zu 0 abnimmt:
$$t_1 - t = \varkappa\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot F(\tfrac{1}{2}\vartheta, \varkappa).$$

Im vorliegenden Falle macht der Punkt volle Umläufe; die Zeit T eines Umlaufs findet man, indem man in der ersten Formel für t

$$\vartheta = -(\pi + \pi - \alpha) = -(2\pi - \alpha)$$

setzt. Nun ist aber

$$F\left(-(\pi - \tfrac{1}{2}\alpha),\, \varkappa\right) = \int_0^{-(\pi - \frac{1}{2}\alpha)} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}},$$

oder wenn man $-\psi$ für ψ einführt und das Integrationsintervall zerlegt

$$F\left(-(\pi - \tfrac{1}{2}\alpha),\, \varkappa\right) = -\int_0^{\pi - \frac{1}{2}\alpha} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}} = -\left(\int_0^{\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}} - \int_{\pi - \frac{1}{2}\alpha}^{\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}}\right).$$

Das erste dieser beiden Integrale ist aber, weil der Elementarfactor desselben zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ dieselben Werthe hat, wie zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π gleich $2F\left(\frac{\pi}{2}, \varkappa\right)$ und das zweite geht durch die Substitution $\pi - \psi$ für ψ über in

$$\int_0^{\frac{1}{2}\alpha} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}} = F(\tfrac{1}{2}\alpha, \varkappa),$$

so dass also

$$-F\left(-(\pi - \tfrac{1}{2}\alpha),\, \varkappa\right) = 2F(\tfrac{1}{2}\pi, \varkappa) - F(\tfrac{1}{2}\alpha, \varkappa) = 2K - F(\tfrac{1}{2}\alpha, \varkappa)$$

wird. Hierdurch erhält man also die volle Umlaufszeit

$$T = 2\varkappa \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot K, \quad mod\ \varkappa.$$

Um den Winkel ϑ als Function der Zeit darzustellen, ist die Gleichung $t_1 - t = \varkappa \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot F(\frac{1}{2}\vartheta, \varkappa)$ umzukehren. Man erhält dadurch

$$\vartheta = 2\, am\left(\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{g}{a}}\,(t_1 - t),\, \varkappa\right).$$

In Bezug auf die Geschwindigkeit $v = -a\frac{d\vartheta}{dt}$ erhält man zunächst aus

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}} = u = F(\varphi, \varkappa)$$

den Werth von $\frac{du}{d\varphi}$, nämlich

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}}$$

und hieraus weiter

$$d\varphi = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi} \cdot du,$$

d. h.

$$d \cdot am\, u = \Delta\, am\, u \cdot du.$$

Dadurch wird

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \Delta\, am\left(\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{g}{a}}\,(t_1 - t),\, \varkappa\right)$$

und schliesslich

$$v = \frac{2}{\varkappa}\sqrt{ag} \cdot \Delta\, am\left(\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{g}{a}}\,(t_1 - t),\, \varkappa\right).$$

Es bleibt jetzt noch übrig, die Beschleunigung des Normalwiderstandes beim Pendelproblem zu bestimmen. Dieselbe bildet mit der Normalcomponenten der

Schwere $g \cos \vartheta$ die Centripetalbeschleunigung als Resultante und da diese beiden Componenten in die Richtung des Radius fallen, so wird

$$\frac{v^2}{a} = \nu - g \cos \vartheta,$$

folglich

$$\nu = \frac{v^2}{a} + g \cos \vartheta.$$

Im tiefsten Punkte der Bahn ist $\vartheta = 0$, mithin da auch die Geschwindigkeit ihr Maximum v_1 in diesem Punkte erreicht, ν selbst ein Maximum, nämlich $\frac{v_1^2}{a} + g$; im höchsten Punkte, wenn derselbe überhaupt erreicht wird, ist $\vartheta = -\pi$, ν ein Minimum v_2 und die Beschleunigung gleichfalls ein Minimum $\frac{v_2^2}{a} - g$. Für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ wird $\nu = \frac{v^2}{a}$, unter v die Geschwindigkeit verstanden, mit welcher der Punkt die Horizontalebene des Kreismittelpunktes passirt.

Ist die Bahn aus einem festen Material gearbeitet, so wird ν von der Festigkeit desselben geleistet, wird der Punkt durch einen Pendelfaden in der Bahn erhalten, so ist ν eine Folge des Zusammenhangs der Theilchen dieses Fadens.

§. 12. **Bewegung eines schweren Punktes auf der Cycloïde.** Wir schicken der Untersuchung der Bewegung eines schweren Punktes auf der Cycloïde einige geometrische Betrachtungen über diese Curve voraus. Es sei $AMOB$ (Fig. 117.) ein Cycloïdenbogen zwischen zwei Spitzen A und B, C der Mittelpunkt des rollenden Kreises, entsprechend der Lage M des beschreibenden Punktes und $MCN = \omega$ der zugehörige Wälzungswinkel, um welchen sich der rollende Kreis umgedreht hat, während der beschreibende Punkt den Bogen AM durchlaufen hat. Dann sind die Gleichungen der Cycloïde, welche die Coordinaten $AP = x$, $PM = y$ eines beliebigen Punktes derselben als Functionen von ω darstellen:

$$x = a(\omega - \sin \omega); \quad y = a(1 - \cos \omega) = 2a \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega,$$

worin a den Radius des rollenden Kreises bedeutet. Hieraus folgt:

$$\frac{dx}{d\omega} = a(1 - \cos \omega) = 2a \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega, \quad \frac{dy}{d\omega} = 2a \sin \tfrac{1}{2}\omega \cos \tfrac{1}{2}\omega$$

und also die Neigung der Tangente gegen die Basis der Cycloïde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\omega} : \frac{dx}{d\omega} = \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2}\omega.$$

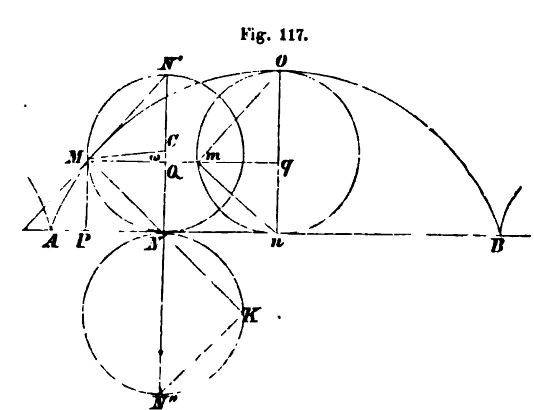


Fig. 117.

Hieraus folgt weiter, dass die Tangente der Cycloïde mit der zur Basis senkrechten Richtung den Winkel $\frac{1}{2}\omega$ bildet und durch den Gegenpunkt N' des Berührungspunktes N der Basis und des rollenden Kreises hindurchgeht. Dies zieht die weitere Folgerung nach sich, dass die Normale durch den Berührungspunkt N selbst hindurchläuft.

Die Tangente eines auf M unmittelbar folgenden Curvenpunktes M' bildet mit der Richtung NN' den Winkel $\frac{1}{2}\omega + d \cdot \frac{1}{2}\omega$; daher bil-

die beiden aufeinanderfolgenden Tangenten miteinander den **Contingenzwinkel** $d\tau = d \cdot \frac{1}{2}\omega$.

Das Bogenelement ds, wenn s von A nach M, entsprechend dem wachsenden Winkel ω, gezählt wird, ist $ds = d\omega \sqrt{\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2} = 2a \sin \frac{1}{2}\omega\, d\omega$. Hieraus ergibt sich der Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{ds}{d\tau} = 4a \sin \frac{1}{2}\omega = 2 \cdot \overline{MN}$, weil wegen des rechten Winkels NMN' die Länge $MN = 2a \sin \frac{1}{2}\omega$ ist. **Der Krümmungshalbmesser ist mithin der doppelten Normalen** MN **gleich.** Construirt man auf der dem rollenden Kreise abgewandten Seite der Cycloïdenbasis $NN'' = NN'$ und verbindet den Krümmungsmittelpunkt K mit N'', so wird $\triangle NN''K \cong NN'M$ und liegt mithin K auf einem über NN'' als Durchmesser beschriebenen Kreise. Hieraus erkennt man leicht, **dass die Evolute der Cycloïde wieder eine Cycloïde ist, von denselben Dimensionen, wie sie selbst; beide Cycloïden haben gemeinschaftliche Richtung der Basis, liegen auf entgegengesetzten Seiten derselben und sind gegeneinander um die halbe Basislänge so verschoben, dass die Spitzen der einen mit den Scheiteln der anderen paarweise auf demselben Perpendikel zur Basis liegen.**

Die Bogenlänge $AM = s$ der Cycloïde ist

$$s = 2a \int_0^\omega \sin \tfrac{1}{2}\omega\, d\omega = 4a \int_\omega^0 d \cdot \cos \tfrac{1}{2}\omega = 4a - 4a \cos \tfrac{1}{2}\omega.$$

Der halbe Cycloïdenbogen AO, welcher dem Winkel $\omega = \pi$ entspricht, ist demnach $4a$ und folglich der Bogen $OM = S$, vom Scheitel an gerechnet $S = 4a \cos \frac{1}{2}\omega$. Es ist aber $MN' = 2a \cos \frac{1}{2}\omega$ und wenn man $Oq = N'Q = x$ setzt, indem man On als eine Abscissenaxe ansieht, so besteht zwischen dem Bogen S und seiner Projection auf diese Abscissenaxe die Gleichung $S^2 = 8ax$, eine Gleichung, welche ganz gleichgebildet ist mit der Parabelgleichung in Bezug auf den Scheitel und die Axe derselben. Da $Om^2 = 2ax$ ist, so ergibt sich weiter, dass $S = 2 \cdot Om$.

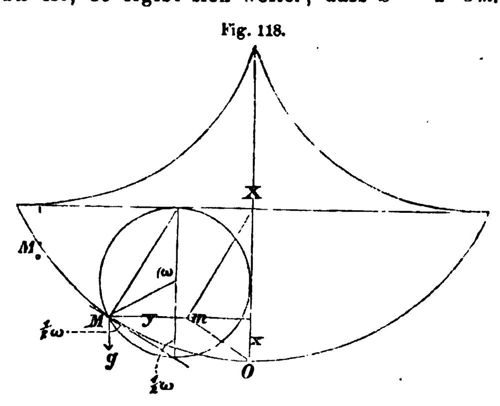


Fig. 118.

Ein schwerer Punkt fälle jetzt auf einer vertikalstehenden Cycloïde (Fig. 118.), deren Basis horizontal liegt und welche ihre concave Seite nach oben kehrt. Der bewegliche Punkt verlasse die Anfangslage M_0 mit der Geschwindigkeit $v_0 = 0$. Den tiefsten Punkt, den Scheitel O, wählen wir zum Ursprung rechtwinkliger Coordinaten x, y und nehmen die x-Axe vertikal und positiv nach oben, die y-Axe horizontal an. Für diese Coordinaten bestehen die folgenden Gleichungen, die man findet, wenn man bedenkt, dass das jetzige x und das frühere y sich zu $2a$, das jetzige y und das frühere x sich zur halben Basis πa ergänzen, nämlich:

$$x = a(1 + \cos \omega), \qquad y = a[(\pi - \omega) + \sin \omega].$$

Da dem Obigen zufolge die Richtung der Beschleunigung der Schwere mit der Richtung der Cycloïdentangente den Winkel $\frac{1}{2}\omega$ bildet, so ist $g \cos \frac{1}{2}\omega$ die Tan-

gentialcomponente und $g \sin \frac{1}{2}\omega$ die Normalcomponente der Beschleunigung; daher hat man folgendes Gleichungssystem zu behandeln:

$$\frac{dv}{dt} = g \cos \tfrac{1}{2}\omega, \qquad \frac{v^2}{\varrho} = g \sin \tfrac{1}{2}\omega - \nu.$$

Rechnen wir den Bogen s von M_0 an abwärts, so kommt noch hinzu: $\frac{ds}{dt} = v$; will man aber den Bogen S vom Scheitel an aufwärts nach M gerechnet, einführen, so wird $-\frac{dS}{dt} = v$, weil $s + S$ den Bogen von M_0 bis zum Scheitel, also eine constante Länge darstellt.

Wir suchen zunächst ω als Function der Zeit. Wir fanden oben

$$ds = 2\,a \sin \tfrac{1}{2}\omega\, d\omega = -\,4\,a\ d \cdot \cos \tfrac{1}{2}\omega,$$

mithin ist $\frac{dv}{dt} = -\,4\,a\,\frac{d^2 \cdot \cos \frac{1}{2}\omega}{dt^2}$ und wenn wir dies in die ersten der beiden Bewegungsgleichungen einführen, so kommt:

$$\frac{d^2 \cdot \cos \frac{1}{2}\omega}{dt^2} + \tfrac{1}{4}\frac{g}{a} \cos \tfrac{1}{2}\omega = 0.$$

Die Integration dieser in $\cos \frac{1}{2}\omega$ linearen Gleichung liefert:

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega = A \cos\left(\tfrac{1}{2}t\sqrt{\frac{g}{a}}\right) + B \sin\left(\tfrac{1}{2}t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)$$

und wenn man dies differentiirt:

$$-\frac{v}{4a} = \frac{d \cdot \cos \frac{1}{2}\omega}{dt} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\ A \sin\left(\tfrac{1}{2}t\sqrt{\frac{g}{a}}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot B \cos\left(\tfrac{1}{2}t\sqrt{\frac{g}{a}}\right).$$

Nun ist zu Anfang der Bewegung $v = 0$ und wenn ω_0 der der Anfangslage entsprechende Werth von ω ist, so hat man zur Constantenbestimmung die Gleichungen: $\cos \frac{1}{2}\omega_0 = A$, $0 = B$, und hiermit also:

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega = \cos \tfrac{1}{2}\omega_0 \cdot \cos\left(\tfrac{1}{2}t\sqrt{\frac{g}{a}}\right),$$

aus welcher Gleichung ω als Function der Zeit sich ergibt. Zugleich erhält man:

$$v = \sqrt{ga}\ \cos \tfrac{1}{2}\omega_0 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\,t\right)$$

und da $x = a\,(1 + \cos \omega) = 2\,a \cos^2 \frac{1}{2}\omega$ ist, wenn x_0 den Anfangswerth von x, nämlich $x_0 = 2\,a \cos^2 \frac{1}{2}\omega_0$ bezeichnet:

$$x = x_0 \cdot \cos^2\left(\tfrac{1}{2}t\sqrt{\frac{g}{a}}\right),$$

sowie

$$s = 2\sqrt{2\,ax_0} \cdot \cos\left(\tfrac{1}{2}t\sqrt{\frac{g}{a}}\right).$$

Wir wollen t_0 die Zeit des Niederganges von M_0 bis zum tiefsten Punkte nennen; für sie ist $\omega = \pi$ und daher folgt aus der Formel für $\cos \frac{1}{2}\omega$:

$$t_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4\,a}{g}}.$$

Dieser Ausdruck enthält keine Spur von Grössen, welche die Anfangslage bestimmen. Daher besitzt die Cycloïde die ausgezeichnete Eigenschaft, **dass ein schwerer Punkt dieselbe Zeit gebraucht, um bis zum tiefsten Punkt zu fallen, mag er von einer Anfangslage ohne Geschwindigkeit ausgehen, von welcher man will.** Deswegen heisst die Cycloïde die „**Tautochrone**“.

Statt ω als Function der Zeit zu suchen, konnten wir auch S durch die Zeit ausdrücken. Da $\cos \frac{1}{2}\omega = \frac{Om}{2a}$ und $S = 2 \cdot Om$, so folgt $\cos \frac{1}{2}\omega = \frac{S}{4a}$ und da $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{d^2S}{dt^2}$, so erhält man aus der oben zu Grunde gelegten Gleichung $\frac{dv}{dt} = g \cos \frac{1}{2}\omega$ zwischen S und t die lineäre Differentialgleichung:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \frac{g}{4a} \cdot S = 0,$$

deren Integral in ähnlicher Weise wie oben liefert

$$S = S_0 \cos\left(\tfrac{1}{2} t \sqrt{\frac{g}{a}}\right),$$

wenn $S_0 = OM_0$. Aus dieser Gleichung folgt für $S = S_0$ die Zeit des Niederganges ebenso, wie vorher.

Die Zeit t_0 ist der vierte Theil der Oscillationsdauer eines Kreispendels von der Länge $4a$, wenn dieselbe nach der für kleine Elongationen näherungsweise geltenden Formel $T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ berechnet wird. Jene Formel, welche für das Kreispendel eine Näherungsformel ist, gilt mithin für das Cycloïdenpendel in aller Strenge. Der Krümmungshalbmesser der Cycloïde ist am Scheitel gleich $4a$, nämlich gleich dem doppelten Durchmesser des rollenden Kreises, welcher daselbst die Normalenlänge darstellt; jener Näherungsformel liegt folglich die Vorstellung zu Grunde, dass die kleinen Schwingungen auf dem Kreise identificirt werden können mit Schwingungen auf einer Cycloïde, deren Erzeugungskreis einen Radius besitzt gleich dem vierten Theile des Radius von dem Kreise, auf welchem jene Bewegung erfolgt.

Die Eigenschaft des Tautochronismus der Cycloïde wurde von Huyghens entdeckt. Er nöthigte eine kleine schwere Kugel, eine Cycloïde zu beschreiben, indem er sie an einem Faden schwingen liess, welcher über die Evolute der Curve hingespannt war. Das betreffende Werk von Huyghens führt den Titel: *Horologium oscillatorium* und ist der Theorie der Pendeluhren gewidmet.

Eine leichte Interpretation des Ausdruckes für die Tangentialbeschleunigung auf der Cycloïde genügt übrigens, den Tautochronismus unmittelbar einzusehen. Wir fanden, dass dieselbe $\frac{g}{4a} \cdot S$ ist, wenn S den Bogen vom Scheitel an aufwärts gerechnet bedeutet. Bereits Cap. I, §. 7. fanden wir für die oscillirende Bewegung, welche die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung auf eine gerade Linie ist und bei welcher in Folge dessen die Beschleunigung proportional dem Abstande x des beweglichen Punktes von dem Mittelpunkt C der Oscillation ist, die Oscillationsdauer gleich 2π dividirt durch $\sqrt{\varkappa}$, wenn $\varkappa$ der Proportionalitätsfactor der Beschleunigung $\varphi = \varkappa x$ war. Ferner ist aus Cap. I, §. 10. klar, dass wenn die Gerade, in welcher die oscillirende Bewegung erfolgt, zu irgend einer Curve gebogen wird, auf dieser die oscillirende Bewegung ebenso erfolgen wird, sobald die Beschleunigung der geradlinigen Bewegung für sie zur Tangentialbeschleunigung wird. Denn die Tangentialbeschleunigung allein bestimmt das Gesetz der Bewegung in der Bahn. Biegen wir also eine Gerade, auf welcher ein Punkt mit der Beschleunigung $\frac{g}{4a} x$ oscillirt, so zu einer Cycloïde, dass der Mittelpunkt der Oscillation der Scheitel der Cycloïde wird und der Abstand x in den Bogen S, von diesem Scheitel an gerechnet, übergeht, so wird die Oscillationsdauer

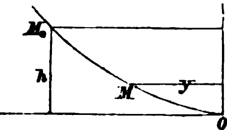
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{4a}}} = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Es ist aber bei dem Cycloïdenpendel die Tangentialbeschleunigung $\frac{g}{4a}S$, also $\varkappa = \frac{g}{4a}$; die Bewegung desselben ist daher nichts anderes, als die oben angeführte transformirte oscillirende gradlinige Bewegung.

Wir können in diesen Betrachtungen noch einen Schritt weitergehen. Rollen wir die Ebene der Cycloïde zu irgend einem Cylinder auf, sodass die Basis derselben in einen zu den Erzeugungslinien senkrechten Schnitt dieser Fläche übergeht, so behält die Tangentialbeschleunigung des auf der transformirten Cycloïde beweglichen Punktes denselben Werth, wie bei der ebenen Cycloïde. Es übertragen sich daher auch alle Folgerungen auf die transformirte Curve und erkennt man auf diese Weise, dass die Cycloïde auch nach der Transformation noch Tautochrone ist und dass es mithin unendlich viele Tautochronen doppelter Krümmung gibt.

§. 13. Wir wollen jetzt das Problem der ebenen Tautochrone unmittelbar angreifen und stellen uns daher die Aufgabe: Es sind gegeben zwei in einer Vertikalebene liegende Punkte M_0 und O (Fig. 119.), deren Höhendifferenz h beträgt, auf welcher ebenen vertikalen Curve muss ein schwerer Punkt von M_0 nach O ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen, damit die Fallzeit T von M_0 nach O von h unabhängig sei, sodass der Punkt M_0 auch irgendwo anders auf der gesuchten Curve gewählt werden kann, ohne dass dadurch T eine Aenderung erleidet.

Fig. 119.



Ist der tieferliegende Punkt O der Ursprung rechtwinkliger Coordinaten x, y, von denen die x vertikal aufwärts, die y horizontal gerechnet werden, so wird der Bogen von O nach M aufwärts gerechnet. Bogen $OM = s$ wird eine noch unbekannte Function von x sein, etwa $s = \varphi(x)$, auf deren Bestimmung die Lösung der ganzen Aufgabe hinauskommt. Nun ist einerseits $v = \frac{d(M_0M)}{dt} = -\frac{ds}{dt}$, andererseits nach dem Principe der lebendigen Kraft $\frac{1}{2}v^2 = -g(x-h)$, folglich $dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}}$ und also

$$T = \int_h^0 \frac{-\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{2g(h-x)}} = \int_0^h \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{2g(h-x)}}.$$

Da die Fallzeit T von h unabhängig sein soll, so muss die Bedingung

$$\frac{dT}{dh} = 0$$

durch die Wahl der Function $\varphi(x)$ erfüllt werden. Um diese Differentiation bequemer auszuführen, reduciren wir die obere Grenze des Integrales auf die Constante 1. Dies wird erreicht durch die Substitution $x = h\omega$, wodurch T die Form annimmt:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1 \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{1-\omega}}\varphi'(h\omega)\,d\omega.$$

Hieraus ergibt sich nun:

$$\frac{dT}{dh} = \frac{1}{\sqrt{8gh}} \int_0^1 \frac{2h\omega\,\varphi''(h\omega) + \varphi'(h\omega)}{\sqrt{1-\omega}}\,d\omega,$$

welche Grösse verschwinden muss. Damit dies bei jedem beliebigen Werthe von h eintrete, muss der Elementarfactor des bestimmten Integrales verschwinden, d. h. es muss sein

$$2h\omega\,\varphi''(h\omega) + \varphi'(h\omega) = 0,$$

oder, wenn man für $h\omega$ wieder x schreibt:

$$2x\,\varphi''(x) + \varphi'(x) = 0.$$

Hieraus folgt aber für $\varphi(x)$ zunächst $\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} = -\frac{1}{2x}$, d. h. $\frac{d\cdot l\,\varphi'(x)}{dx} = -\frac{1}{2x}$,

und also durch Integration: $l\cdot\varphi'(x) = l\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, wo a eine beliebige Constante ist und durch eine zweite Integration

$$s = \varphi(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{a}{x}}\cdot dx = 2\sqrt{ax},$$

welches die Gleichung der Cycloïde zwischen Abscisse x und Bogen s ist, deren Scheitel in O liegt. Hiermit ist die Aufgabe gelöst und zugleich erwiesen, dass die Cycloïde die einzige Tautochrone ist, denn die integrirte Differentialgleichung lässt nur eine Function $\varphi(x)$ als Lösung zu.

§. 14. Man kann die vorige Aufgabe noch zu der folgenden verallgemeinern, deren Lösung zuerst von Abel im Crelle'schen Journale, Bd. I, S. 153 (1826.) gegeben wurde: Auf welcher Curve muss ein schwerer Punkt von einer Stelle M_0 zu einer um die Grösse h tiefer liegenden Stelle O fallen, damit die Fallzeit T eine gegebene Function $\psi(h)$ der Fallhöhe h werde?

Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung ist die Bedingung zu erfüllen

$$\int_0^h \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{h-x}} = \sqrt{2g}\cdot\psi(h).$$

Um hieraus die unbekannte Function $s = \varphi(x)$, welche den Bogen der gesuchten Curve von O nach M gerechnet als Function der Abscisse x darstellt, zu finden, integriren wir beide Seiten dieser Gleichung nach Multiplication mit $\frac{dh}{\sqrt{\mu-h}}$ abermals und zwar von 0 bis μ; es wird sich dann zeigen, dass die beiden Integralzeichen links weggeschafft werden können. Zunächst ist also unsere Gleichung

$$\int_0^\mu \frac{dh}{\sqrt{\mu-h}} \int_0^h \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{h-x}} = \sqrt{2g}\int_0^\mu \frac{\psi(h)\,dh}{\sqrt{\mu-h}},$$

welche wir noch dadurch vereinfachen können, dass wir die Wurzeln mit Hülfe zweckmässiger Substitutionen fortbringen. Setzen wir nämlich auf der linken Seite $h - x = y^2$, so kommt:

$$2\int_0^\mu \frac{dh}{\sqrt{\mu-h}} \int_0^{\sqrt{h}} \varphi'(h-y^2)\,dy$$

und indem wir hierin jetzt für h die neue Variabele x durch die Gleichung $\mu - h = x^2$ einführen, geht diese Seite über in

$$4\int_0^{\sqrt{\mu}} dx \int_0^{\sqrt{\mu - x^2}} \varphi'(\mu - x^2 - y^2)\, dy$$

und hierdurch wird unsere ganze Gleichung

$$4\int_0^{\sqrt{\mu}}\int_0^{\sqrt{\mu - x^2}} \varphi'(\mu - x^2 - y^2)\, dx\, dy = \sqrt{2g}\int_0^{\mu} \frac{\psi(h)\, dh}{\sqrt{\mu - h}}.$$

Um die linke Seite derselben zu reduciren und die gesuchte Function φ von den Integralzeichen zu befreien, wollen wir eine Interpretation versuchen. Es steht nichts im Wege, das Produkt $dx\,dy$ als das Element eines ebenen Flächenraumes anzusehen, bezogen auf rechtwinklige Coordinaten x, y. Die Grösse $x^2 + y^2$ stellt alsdann das Quadrat der Entfernung dieses Elementes vom Ursprunge dar und das Element $\varphi'(\mu - x^2 - y^2)\, dx\, dy$ des Integrales ist das Produkt aus dem Flächenelemente und einer Function von dem Quadrate dieses seines Abstandes vom Ursprunge. Die Integration nach y ist bei constantem x von $y = 0$ bis $y = \sqrt{\mu - x^2}$ zu führen, d. h. also von der Abscissenaxe bis an den Kreis $x^2 + y^2 = \mu$, welcher mit dem Radius $\sqrt{\mu}$ um den Coordinatenursprung beschrieben werden kann. Die nachfolgende Integration in Bezug auf x erstreckt sich von $x = 0$ bis $x = \sqrt{\mu}$ und sieht man hieraus deutlich, dass das ganze Doppelintegral die Bildung der Summe aller Elemente $\varphi'(\mu - (x^2 + y^2))\, dx\, dy$ verlangt, welche dem Viertelkreise angehören. Nun können wir aber diese Summe anders bilden. Wählen wir nämlich Polarcoordinaten r, ϑ, so ist der Ausdruck des Flächenelementes $r\,dr\,d\vartheta$ und also $\varphi'(\mu - r^2)\, r\,dr\,d\vartheta$ das Element unseres Doppelintegrales und um die Integration über alle Punkte des Viertelkreises zu erstrecken, haben wir nach r von $r = 0$ bis $r = \sqrt{\mu}$, nach ϑ aber von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ zu integriren. Das Doppelintegral wird auf diese Weise nur in andere Elemente, die sich ausserdem noch etwas anders gruppiren, zerlegt gedacht. Wir erhalten auf diese Weise jetzt für die ganze linke Seite unserer Gleichung

$$4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\sqrt{\mu}} \varphi'(\mu - r^2)\, r\,dr\,d\vartheta$$

und können die Integration nach ϑ sofort ausführen, indem sie nur den Factor $\frac{1}{2}\pi$ liefert, sodass dieser Ausdruck übergeht in:

$$2\pi\int_0^{\sqrt{\mu}} \varphi'(\mu - r^2)\, r\,dr.$$

Da aber nun $\varphi'(\mu - r^2)\cdot 2\,r\,dr = -\,d\cdot\varphi(\mu - r^2)$ ist, so kann auch das letzte Integralzeichen entfernt werden und bleibt blos

$$\pi\,[\varphi(\mu) - \varphi(0)].$$

Hiermit wird jetzt unsere ganze Gleichung

$$\varphi(\mu) - \varphi(0) = \frac{1}{\pi}\sqrt{2g}\int_0^{\mu} \frac{\psi(h)\, dh}{\sqrt{\mu - h}},$$

und damit ist unsere Function $s = \varphi(x)$ gefunden, nämlich weil s für das Argument Null verschwindet, d. h. $\varphi(0) = 0$ ist, wird

$$s = \frac{1}{\pi}\sqrt{2g}\int_0^x \frac{\psi(h)\,dh}{\sqrt{\mu - h}}.$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Curve, bezogen auf Abscisse und Bogen als Coordinaten. Das Wesentliche der angewandten Methode besteht darin, dass das Element des ursprünglichen Integrales so verändert wird, dass es als das Element eines Doppelintegrales auftritt, für welches beide Integrationen ausführbar sind und also in Folge dessen die gesuchte Function von den Integralzeichen befreit wird.

Wird $\psi(h)$ constant, nämlich $\psi(h) = a$, so ergibt sich wieder die Cycloïde. Denn es ist $\int_0^x \frac{dh}{\sqrt{x - h}} = 2\sqrt{x}$, mithin $s^2 = \frac{8ag}{\pi^2} \cdot x$. Der Radius des Wälzungskreises ist $\frac{ag}{\pi^2}$.

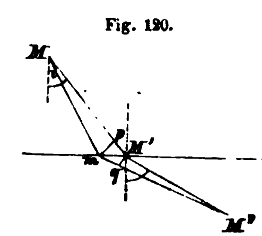
Das Problem der Tautochronen ist noch einer anderen bedeutenden Verallgemeinerung fähig, indem man die Curve suchen kann, auf welcher ein Punkt, welcher irgend welchen von dem Orte abhängigen Beschleunigungen unterworfen ist, sich bewegen muss, damit die Zeit, welche er braucht, um an einer bestimmten Stelle anzulangen, unabhängig sei von der Länge des Weges, den er zurückgelegt hat. In dieser Allgemeinheit haben bereits Newton und Euler das Problem aufgefasst. (Vgl. Jullien, *Problèmes de mécanique rationelle*, T. I, p. 374.)

§. 15. Die Cycloïde besitzt in Bezug auf die Bewegung eines schweren Punktes auf ihr noch eine weitere ausgezeichnete Eigenschaft. Sie ist nämlich unter allen Curven, welche durch zwei gegebene Punkte A, B gelegt werden können, diejenige, auf welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von dem einen Punkte zum andern gelangt. Sie heisst daher auch die Brachistochrone des schweren Punktes. Das Problem der Brachistochrone wird mit Hülfe der Variationsrechnung gelöst, indem man die Zeit des Fallens von A nach B nach den Regeln dieses Calculs zu einem Minimum macht und aus den Bedingungen des Minimums die Gestalt der unbekannten Curve bestimmt. Indessen kann man eben dazu durch einfache geometrische Betrachtungen gelangen, wie wir kurz zeigen wollen.

Zunächst ist klar, dass wenn eine Curve Brachistochrone zwischen zweien ihrer Punkte A und B ist, sie dieselbe Eigenschaft zwischen je zweien ihrer Punkte M, M' besitzen muss, sonst würde man dem Bogen MM' den Bogen einer anderen Curve substituiren können, auf welchem der Punkt in kürzerer Zeit von M nach M' gelangen könnte und in Folge dessen wäre die Zeit des Fallens von A nach B auf der ursprünglichen Curve nicht die kürzeste, diese Curve also nicht die Brachistochrone. Ferner lassen sich zwei Eigenschaften der Brachistochrone angeben, von denen die eine sich auf die Lage ihrer Schmiegungsebene, die andere auf die Neigung ihrer Tangente gegen die Vertikale und die Geschwindigkeit bezieht. Zu dem Ende seien M, M', M'' drei aufeinanderfolgende Punkte derselben und also MM', $M'M''$ zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente; durch die drei Punkte legen wir die horizontalen Niveauebenen ε, ε', ε'' unseres Problems und bezeichnen die Geschwindigkeiten für ε und ε' mit v, v'. Da jede Bewegung im Zeitelement als gleichförmig anzusehen ist, so denken wir uns das Element MM' mit der Geschwindigkeit v, das Element $M'M''$ mit der Geschwindigkeit v'

beschrieben und bemerken, dass wenn wir zwischen M und M'' irgend zwei andere Elemente $M\mu$, $\mu M''$ ziehen würden, deren gemeinsamer Punkt μ auf ε' liegt, $M\mu$ ebenfalls mit der Geschwindigkeit v und $\mu' M''$ mit der Geschwindigkeit v' durchlaufen würde, da die Geschwindigkeiten für alle Punkte derselben Niveauebene dieselbe ist. Legen wir nun durch M und M'' eine Vertikalebene, so kann gezeigt werden, dass die beiden Elemente MM', $M'M''$ der Brachistochrone in diese Ebene hineinfallen müssen, d. h. dass die Schmiegungsebene des Punktes M vertikal ist. Denn ist M_1 die Projection von M' auf diese Ebene, so ist $MM_1 < MM'$ und $M_1M'' < M'M''$, wo auch immer M' in der Niveauebene ε' liegen mag, mithin wäre die Zeit, welche ein Punkt braucht, um MM_1 mit der Geschwindigkeit v zu durchlaufen, grösser als die Zeit, welche er bei derselben Geschwindigkeit zum Durchlaufen von MM_1 nöthig haben würde; ebenso wäre zum Durchlaufen von $M'M''$ mit der Geschwindigkeit v' eine grössere Zeit erforderlich, als zum Durchlaufen von M_1M''. Daher fällt M' mit M_1 zusammen und ist folglich die Schmiegungsebene $MM'M''$ des Punktes M vertikal. Aus denselben Gründen ist die Schmiegungsebene des Punktes M' vertikal und da sie durch $M'M''$ geht, so fällt sie mit der Schmiegungsebene von M zusammen. Da hiernach je zwei aufeinanderfolgende Schmiegungsebenen der Brachistochrone zusammenfallen, so ist die ganze Curve eben und ihre Ebene die Vertikalebene der Punkte A', B.

Fig. 120.



Der zweite der angedeuteten Sätze sagt aus, dass wenn i die Neigung der Tangente der Brachistochrone in M gegen die Vertikale ist, der Quotient $\frac{\sin i}{v}$ längs der ganzen Curve constant ist. Zieht man nämlich nach einem dem Punkte M' benachbarten Punkte m (Fig. 120) in der Schnittlinie der Vertikalebene der Brachistochrone mit der Niveauebene ε' des Punktes M' die Strecken Mm, $M''m$ und fällt von m auf MM' das Perpendikel mp, sowie von M' auf $M''m$ das Perpendikel $M'q$, so wird wegen der unendlichen Kleinheit von mM' die Strecke $Mm = Mp$ und ebenso $qM'' = M'M''$. Daher sind die Zeiten, welche der bewegliche Punkt braucht, um $MM' + M'M''$ einerseits und $Mm + mM''$ andererseits zu durchlaufen:

$$\frac{MM'}{v} + \frac{qM''}{v'} \quad \text{und} \quad \frac{Mp}{v} + \frac{mM''}{v'}$$

und der Unterschied beider beträgt daher

$$\frac{pM'}{v} - \frac{mq}{v'} = mM'\left(\frac{\sin i}{v} - \frac{\sin i'}{v'}\right),$$

wenn i, i' die Neigungen von MM' und $M'M''$ gegen die Vertikale in M, M' bedeuten. Diese unendlich kleine Differenz ist aber nun die Aenderung, welche die Fallzeit des beweglichen Punktes beim Uebergange von den Elementen MM', $M'M''$ der Brachistochrone zu den Elementen Mm, mM'' einer benachbarten Curve erleidet, und da die Fallzeit für die Brachistochrone ein Minimum ist, so muss jene Aenderung Null sein. Daher ist

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin i'}{v'},$$

d. h. der Quotient $\frac{\sin i}{v}$ bleibt beim Uebergange von einem Elemente der Brachistochrone zum folgenden, also auch längs der ganzen Curve constant.

Bezeichnen wir den reciproken Werth dieses Quotienten, welcher eine Länge darstellt, mit μ, setzen also

$$\sin i = \frac{v}{\mu}$$

und ziehen die Formel

$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = gy$$

heran, welche das Princip der lebendigen Kraft gibt und worin v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des beweglichen Punktes (in A), y die Tiefe von M unter der Niveauebene von A bedeutet, so kommt, wenn wir noch $\frac{v_0^2}{2g} = h$ und $\frac{\mu^2}{2g} = 2a$ setzen

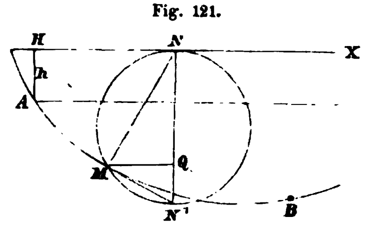
$$\sin i = \sqrt{\frac{y+h}{2a}}.$$

Tragen wir nun die Länge $h = AH$ vertikal über A auf (Fig. 121.), ziehen durch H in der Ebene der Curve die Gerade HX, in M die Normale MN und die Tangente MN', von welcher ersteren HX in N und letztere die Vertikale des Punktes N in N' treffen mag, sowie MQ parallel HX, so wird

$$\sin i = \sin MN'N = \frac{MN}{NN'} = \frac{\sqrt{NN' \cdot NQ}}{NN'} = \sqrt{\frac{NQ}{NN'}} = \sqrt{\frac{y+h}{NN'}}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem oben für $\sin i$ aufgestellten, so folgt $NN' = 2a$, d. h. da $2a$ constant ist, NN' ist ebenfalls constant. Beschreibt man nun über NN' als Durchmesser einen Kreis, so geht dieser durch M, bleibt während der Bewegung von constanter Grösse, berührt die Horizontale HX und hat zu der Brachistochrone die Beziehung, dass deren Normale und Tangente fortwährend durch den Berührungspunkt N mit HX und dessen Gegenpunkt N' hindurchgehen. Diese Eigenschaften charakterisiren aber hinreichend die Brachistochrone als die Cycloïde.

Fig. 121.



Ist v_0 gleich Null, so wird A zur Spitze der Cycloïde. In diesem Falle ist es sehr leicht, die Cycloïde zu construiren. Es sind nämlich alle Cycloïden, welche die Spitze A und die Richtung der Basis AX gemein haben, ähnliche und ähnlich liegende Curven und unterscheiden sich in nichts als der Grösse des rollenden Kreises. Construirt man daher irgend eine derselben über der Basis $A\alpha$ und sucht ihren Durchschnitt β mit dem Strahle AB, so genügt es, zu $\beta\alpha$ die Parallele BA' zu ziehen, um die Basis AA' der durch B gehenden Cycloïde zu finden. Der Radius ihres Wälzungskreises ist $\frac{AA'}{2\pi}$. Ist aber v_0 nicht Null, so liefert $\frac{v_0^2}{2g} = h$ zunächst die Höhe der Cycloïdenbasis über der Anfangslage A des beweglichen Punktes. Um in dieser Basis die Spitze der Cycloïde zu finden, bedenken wir, dass in Bezug auf dieselbe als Ursprung eines Coordinatensystems der x, y, für welches die x-Axe in die Basis der Cycloïde fällt, die Gleichungen der Cycloïde durch die Coordinaten $x = x_1$, $y = h$; $x = x_2$, $y = h'$ der Punkte A, B erfüllt werden müssen, dass also die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= a(\omega_1 - \sin\omega_1) \qquad & x_2 &= a(\omega_2 - \sin\omega_2) \\ h &= 2a\sin\tfrac{1}{2}\omega_1 \qquad & h' &= 2a\sin\tfrac{1}{2}\omega_2, \end{aligned}$$

bestehen, zu welchen noch eine weitere $x_2 - x_1 = d$ hinzutritt, weil die Horizontalprojection der Entfernung AB als gegeben anzusehen ist. Nach Elimination der Hülfswinkel ω_1, ω_2, welche die den Punkten A, B entsprechenden Wälzungswinkel sind, bleiben drei Gleichungen zwischen x_1, x_2, d, a, h, h' übrig, aus welchen x_1, x_2, a gefunden werden können.

Auch das Problem der Brachistochrone ist einer Verallgemeinerung fähig, indem man an die Stelle der constanten Beschleunigung der Schwere eine Be-

schleunigung treten lässt, deren Grösse und Richtung vom Orte des beweglichen Punktes abhängt. Die beiden oben benutzten Sätze behalten in soweit auch bei dem allgemeinen Probleme ihre Geltung, als an die Stelle der Niveauebenen allgemeine Niveauflächen treten und der Winkel i die Neigung des Bogenelementes der Brachistochrone gegen die Normale der Niveaufläche angibt.

Das Problem der Brachistochrone rührt von Joh. Bernoulli her, welcher es 1696 in den *Actis eruditorum* stellte. Es wurde damals von Leibnitz gelöst; kurze Zeit darauf gaben auch Jacob Bernoulli, de l'Hopital und Newton Lösungen desselben.

§. 16. **Bewegung eines schweren Punktes auf der Cycloïde im widerstehenden Mittel.** Ein schwerer Punkt sei genöthigt, sich auf einer vertikalen Cycloïde zu bewegen, deren Basis horizontal ist und welche ihre Concavität nach oben kehrt unter der Voraussetzung, dass die Beschleunigung des Widerstandes der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist; man soll die Bewegung des Punktes untersuchen.

Legen wir den Ursprung des Coordinatensystems in den Scheitel, die x-Axe vertikal und positiv nach oben, die y-Axe horizontal und rechnen wir den Bogen s vom Scheitel an aufwärts. Die Tangentialbeschleunigung hat zwei Bestandtheile. Der von der Schwere herrührende ist $-g\cdot\left(-\frac{dx}{ds}\right)=g\frac{dx}{ds}$, der von dem Widerstande herrührende aber $-\varkappa\frac{ds}{dt}$. Da die Tangentialbeschleunigung selbst den Werth $-\frac{d^2s}{dt^2}$ besitzt, so wird die Gleichung der Bewegung auf der Bahn:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\varkappa\frac{ds}{dt}-g\frac{dx}{ds}=0.$$

Sie geht vermöge der Eigenschaft $s^2=8ax$, wo a den Radius des Wälzungskreises bedeutet, über in

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\varkappa\frac{ds}{dt}+\frac{g}{4a}s=0,$$

ist lineär mit constanten Coefficienten und besitzt daher Particulärlösungen von der Form $s=C\cdot e^{rt}$. Eine solche Lösung genügt, wenn die Constante r eine Wurzel der Gleichung $r^2+\varkappa r+\frac{g}{4a}=0$, d. h. $r=-\frac{1}{2}\varkappa\pm\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2-\frac{g}{a}}$ ist, wie man durch Einsetzen der Lösung in die Differentialgleichung findet. Das allgemeine Integral ist daher

$$s=e^{-\frac{1}{2}\varkappa t}\left(Ce^{\frac{1}{2}t\sqrt{\varkappa^2-\frac{g}{a}}}+C'e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{\varkappa^2-\frac{g}{a}}}\right).$$

Es sei nun zunächst $\varkappa^2-\frac{g}{a}$ negativ. Setzt man in diesem Falle $\sqrt{\frac{g}{a}-\varkappa^2}=\gamma$, so nimmt das Integral die Gestalt an

$$s=e^{-\frac{1}{2}\varkappa t}(A\cos\tfrac{1}{2}\gamma t+B\sin\tfrac{1}{2}\gamma t)$$

und wenn $s=c$ und $v=0$ für $t=0$, so bestimmen sich die Constanten A und B durch die Bedingungen $c=A$ und $-\varkappa A+\gamma B=0$. In Folge dieser Bestimmung wird sodann

$$s=ce^{-\frac{1}{2}\varkappa t}\left(\cos\tfrac{1}{2}\gamma t+\frac{\varkappa}{\gamma}\sin\tfrac{1}{2}\gamma t\right).$$

Der bewegliche Punkt passirt den Scheitel der Cycloide, so oft der Inhalt der Klammer auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwindet. Die Zeit des Niederganges ist daher der kleinste Werth von t_1, welcher aus der Gleichung

$$tg\,\tfrac{1}{2}\gamma t_1=-\frac{\gamma}{\varkappa}$$

folgt. Dieser Werth ist unabhängig von c und daher ist für den vorliegenden Fall die Cycloïde Tautochrone im widerstehenden Mittel, wenn die Beschleunigung des Widerstandes der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist.

Für die Geschwindigkeit $v = -\frac{ds}{dt}$ erhält man aus der vorstehenden Formel für s:

$$v = \tfrac{1}{2} c e^{-\frac{1}{2}\varkappa t}\left(\frac{\varkappa^2}{\gamma} + \gamma\right) \sin \tfrac{1}{2}\gamma t.$$

Dieselbe wird Null für $t = 0, \frac{2\pi}{\gamma}, \frac{4\pi}{\gamma}, \frac{6\pi}{\gamma}, \ldots$ Daher ist die Dauer T einer Oscillation

$$T = \frac{4\pi}{\gamma} = \frac{4\pi}{\left(\frac{g}{a} - \varkappa^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\varkappa^2 a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Für sehr kleine Werthe von $\varkappa$ ist diese Grösse nahezu gleich $4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, dieselbe, wie bei den Oscillationen auf der Cycloïde im leeren Raume.

Setzt man die Werthe von t, für welche v verschwindet, in die Formel für s ein, so erhält man die verschiedenen Schwingungsweiten, nämlich

$$c,\; ce^{-\frac{\varkappa\pi}{\gamma}},\; ce^{-\frac{2\varkappa\pi}{\gamma}},\; ce^{-\frac{3\varkappa\pi}{\gamma}}, \ldots$$

Sie nehmen in einer geometrischen Progression ab, deren Exponent $e^{-\frac{\varkappa\pi}{\gamma}}$ ist.

Nehmen wir jetzt an, es sei $\varkappa^2 - \frac{g}{a}$ positiv. Man setze $\sqrt{\varkappa^2 - \frac{g}{a}} = \gamma$. Für s erhält man alsdann

$$s = Ce^{-\frac{1}{2}(\varkappa - \gamma)t} + C'e^{-\frac{1}{2}(\varkappa + \gamma)t}$$

und wenn man die Constanten C, C' durch dieselben Bedingungen, wie oben, bestimmt:

$$s = \frac{1}{2}\frac{c}{\gamma}\left[(\varkappa + \gamma)e^{-\frac{1}{2}(\varkappa - \gamma)t} - (\varkappa - \gamma)e^{-\frac{1}{2}(\varkappa + \gamma)t}\right].$$

Diese Gleichung zeigt, dass s nur für $t = \infty$ verschwindet, dass der bewegliche Punkt sich dem Scheitel der Cycloïde nur asymptotisch nähert, ohne ihn erreichen zu können.

Für die Geschwindigkeit erhält man

$$v = \frac{c}{4\gamma}(\varkappa^2 - \gamma^2)\left(e^{-\frac{1}{2}(\varkappa + \gamma)t} - e^{-\frac{1}{2}(\varkappa - \gamma)t}\right),$$

sie wächst anfangs, aber nur bis zu einer Zeit t_1, welche aus der Gleichung $e^{-\gamma t_1} = \frac{\varkappa - \gamma}{\varkappa + \gamma}$ bestimmt wird, nämlich bis zu $t_1 = \frac{1}{\gamma}\, l \cdot \frac{\varkappa + \gamma}{\varkappa - \gamma}$. Man sieht dies aus dem Werthe von

$$\frac{dv}{dt} = \frac{c}{8\gamma}(\varkappa^2 - \gamma^2)e^{-\frac{1}{2}(\varkappa - \gamma)t}\left[(\varkappa - \gamma) - (\varkappa + \gamma)e^{-\gamma t}\right].$$

Von jener Zeit an nimmt v ab und nähert sich der Null als Grenze.

Wird $\frac{g}{a} - \varkappa^2 = 0$, so erhält man

$$s = ce^{-\frac{1}{2}\varkappa t}(1 + \tfrac{1}{2}\varkappa t)$$

$$v = \tfrac{1}{4}\varkappa^2 ct\, e^{-\frac{1}{2}\varkappa t}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\tfrac{1}{4}\varkappa^2 ce^{-\frac{1}{2}\varkappa t}(\tfrac{1}{2}\varkappa t - 1).$$

In diesem Falle kann der bewegliche Punkt den Scheitel ebenfalls nie erreichen. Die Geschwindigkeit besitzt für $t = \frac{2}{\varkappa}$ ein Maximum.

§. 17. **Bewegung eines schweren Punktes auf einem vertikalen Kreise im widerstehenden Mittel.** Ein schwerer Punkt sei genöthigt, auf einem vertikalen Kreise sich zu bewegen, es wirke aber auf ihn der Widerstand eines Mittels, in welchem er sich bewegt. Die Anfangsgeschwindigkeit sei Null, die Schwingungen seien sehr klein und verhältnissmässig langsam, d. h. der Radius a des Kreises (der Pendelfaden) sehr lang. Bedeutet R die Beschleunigung des Widerstandes, so wird die Gleichung der Bewegung unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise des §. 11.:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g \sin\vartheta - R.$$

Die Grösse R wollen wir wieder der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional setzen, etwa $R = \varkappa v$. Dadurch geht unsere Gleichung, wenn wir zugleich auf die Relation $s = a(\alpha - \vartheta)$ Rücksicht nehmen, welche uns liefert:

$$v = \frac{ds}{dt} = -a\frac{d\vartheta}{dt}, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -a\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

über in:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \varkappa\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{g}{a}\sin\vartheta = 0.$$

Diese Gleichung ist nicht lineär, unter der Voraussetzung kleiner Schwingungen wird sie aber lineär, sobald man $\sin\vartheta$ näherungsweise durch ϑ ersetzt, nämlich:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{\varkappa}\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{g}{a}\cdot\vartheta = 0.$$

Diese Gleichung ist dieselbe, wie die des vorigen §., nur steht ϑ an Stelle von s und a an Stelle von $4a$. Es gelten also alle dortigen Schlüsse auch hier mit Rücksicht auf diese Modificationen und die Beschränkung auf kleine Oscillationsamplituden. Für die Bewegung eines Pendels in der Luft gelten nahezu die Gesetze der uns vorliegenden Bewegung, indem man ohne Fehler innerhalb der Beobachtungsgrenze den Widerstand der Luft für langsame Schwingungen der Geschwindigkeit selbst proportional setzen darf. Die Zeit des Niederganges ist etwas grösser als im leeren Raume, die Oscillationsdauer aber ist dieselbe wie dort.

Es ist wichtig, für das Pendelproblem im widerstehenden Mittel eine allgemeine Methode zu kennen, welche für specielle Gesetze der Beschleunigung des Widerstandes Näherungen mit hinreichender Schärfe zulässt. Die folgende Methode, welche man Cauchy verdankt, erfüllt diese Forderung in ausgezeichneter Weise.

Unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungsweise hat man $\frac{dv}{dt} = g\sin\vartheta - R$ und $-a\frac{d\vartheta}{dt} = v$, oder, wenn ϑ sehr klein ist, wie hier immer angenommen werden soll, näherungsweise

$$\frac{dv}{dt} = g\vartheta - R, \quad -a\frac{d\vartheta}{dt} = v.$$

Combinirt man diese Gleichungen so, dass man die zweite, mit einem unbestimmten Coefficienten λ multiplicirt zur ersten addirt, so erhält man nach einer kleinen Transformation:

$$\frac{d(v+\lambda\vartheta)}{dt} + \frac{\lambda}{a}\left(v - \frac{ga}{\lambda}\vartheta\right) + R = 0.$$

Nun bestimmt man λ so, dass $v - \frac{ga}{\lambda}\vartheta$ in $v + \lambda\vartheta$ übergeht, welches für $\lambda^2 = -ga$ d. h. für $\lambda = \sqrt{ga}\cdot i$ erfolgt. Man hat alsdann

$$\frac{d(v+\lambda\vartheta)}{dt} + \frac{\lambda}{a}(v+\lambda\vartheta) + R = 0.$$

Diese Gleichung ist lineär und kann man durch Multiplication mit $e^{\frac{\lambda}{a}t}$ bewirken, dass die beiden ersten Glieder sich in ein einziges zusammenziehen und die Gleichung die Form annimmt:

$$\frac{d \cdot e^{\frac{\lambda}{a}t}(v + \lambda\vartheta)}{dt} + e^{\frac{\lambda}{a}t} R = 0 .$$

Durch Integration von $t = 0$ bis $t = t$ unter Berücksichtigung der Bedingungen: $v = 0$, $\vartheta = \alpha$ für $t = 0$ erhält man nun

$$e^{\frac{\lambda}{a}t}(v + \lambda\vartheta) - \lambda\alpha + \int_0^t e^{\frac{\lambda}{a}t} R dt = 0,$$

oder nach Division mit $e^{\frac{\lambda}{a}t}$ und mit Rücksicht auf die Bedeutung von λ:

$$v + \sqrt{ga} \cdot \vartheta i = \sqrt{ga}\, \alpha i e^{-i\sqrt{\frac{g}{a}}t} - e^{-i\sqrt{\frac{g}{a}}t} \int_0^t e^{i\sqrt{\frac{g}{a}}t} R dt .$$

Ersetzt man nun hierin die Exponentialfunction $e^{\pm i\sqrt{\frac{g}{a}}t}$ durch den gleichbedeutenden goniometrischen Ausdruck $\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \pm i \sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$ und setzt die reellen Bestandtheile, sowie die imaginären für sich einander gleich, so findet man:

$$v = \left(\alpha\sqrt{ga} - \int_0^t \sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \cdot R dt\right) \sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t - \left(\int_0^t \cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \cdot R dt\right) \cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t,$$

$$\vartheta = \left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{ga}} \int_0^t \sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \cdot R dt\right) \cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \frac{1}{\sqrt{ga}} \left(\int_0^t \cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \cdot R dt\right) \cdot \sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t .$$

Aus diesen beiden Formeln zieht man folgende Folgerungen.

1. Im leeren Raume ist $v = 0$ für $t = 0$ und für $t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, d. h. für die halbe Oscillationsdauer; hier, im widerstehenden Mittel ist für $t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ die Geschwindigkeit noch nicht Null, vielmehr ist sie: $v = \int_0^{\pi\sqrt{\frac{g}{a}}} \cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \cdot R dt .$

Hieraus folgt, dass die halbe Oscillationsdauer im widerstehenden Mittel etwas grösser ist, als im leeren Raum.

2. Für $t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, wofür im leeren Raume der Ausschlagwinkel $\vartheta = -\alpha$ wird, ergibt sich hier $\vartheta = -\alpha + \frac{1}{\sqrt{ga}} \int_0^{\pi\sqrt{\frac{a}{g}}} \sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \cdot R dt$ und da der Werth des Integrales positiv ist (weil $\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$ von $t = 0$ bis $t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ nur positive Werthe hat und R eine absolute Zahl ist), so folgt, dass der Ausschlagwinkel im widerstehenden Mittel kleiner ist, als im leeren Raume. Die Amplitude wird also durch den Widerstand des Mittels verkleinert.

Wir wollen jetzt insbesondere die Beschleunigung des Widerstandes dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, also $R = g \frac{v^2}{\varkappa^2}$ setzen und als Näherungswerth die Geschwindigkeit im leeren Raume für v nehmen, nämlich $v = \alpha \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \sqrt{\frac{g}{a}}\, t$. Wir fanden nämlich früher für sehr kleine Schwingungen $\vartheta = \alpha \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t$ und $v = -a \frac{d\vartheta}{dt}$, woraus dieser Ausdruck für v entspringt. Dadurch wird $R = \frac{g^2 \alpha^2}{a \varkappa^2} \sin^2 \sqrt{\frac{g}{a}}\, t$ und indem man dies in die obige Formel für v einführt, geht dieselbe für $t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ als obere Grenze über in:

$$v = \frac{g^2 \alpha^2}{a \varkappa^2} \int_0^{\pi \sqrt{\frac{a}{g}}} \sin^2 \sqrt{\frac{g}{a}}\, t \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t\, dt = 0,$$

so dass also die Oscillationsdauer sehr nahe gleich der Oscillationsdauer im leeren Raume ist. Die Formel für ϑ liefert auf dieselbe Weise für den Ausschlagwinkel α_1 nach der ersten halben Schwingung

$$\alpha_1 = -\alpha + \frac{g^2 \alpha^2}{a \varkappa^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{ag}} \int_0^{\pi \sqrt{\frac{a}{g}}} \sin^3 \sqrt{\frac{a}{g}}\, t\, dt,$$

oder

$$\alpha_1 = -\alpha + \tfrac{4}{3} \frac{g \alpha^2}{a \varkappa^2} = -\alpha \left(1 - \tfrac{4}{3} \frac{g \alpha}{a \varkappa^2}\right),$$

sodass man α_1 aus α durch Multiplication mit $-\left(1 - \frac{4}{3} \frac{g\alpha}{a \varkappa^2}\right)$ findet. Ebenso erhält man α_2 aus α_1, nämlich

$$\alpha_2 = \alpha_1 \left(1 - \tfrac{4}{3} \frac{g \alpha_1}{a \varkappa^2}\right) \text{ u. s. f.}$$

Die Werthe $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bilden (absolut genommen) keine geometrische Progression, da in dem Multiplicator, welche ein folgendes α liefert, das vorhergehende α selbst vorkommt, dieser Multiplicator also nicht constant ist.

§. 18. Es mögen hier noch einige Uebungsaufgaben über die Bewegung auf vorgeschriebener Bahn Platz finden.

1. Es ist gegeben in einer Vertikalebene ein Punkt M_0 und eine horizontale Gerade G; man soll durch M_0 diejenige Gerade hindurchlegen, auf welcher ein schwerer Punkt von M_0 aus fallen muss, um die Gerade G in der kürzesten Zeit zu erreichen.

2. Dieselbe Aufgabe für den Fall, dass an die Stelle der Geraden G ein in der Vertikalebene liegender Kreis K tritt.

3. Auf der convexen Seite einer vertikalen ebenen Curve liegt im höchsten Punkte ein schwerer Punkt. Man ertheilt demselben eine Geschwindigkeit a in der Richtung der Tangente; an welcher Stelle und mit welcher Geschwindigkeit verlässt er die Curve?

4. Dieselbe Aufgabe für den speziellen Fall, dass die Curve ein Kreis ist.

5. Auf welcher in einer Vertikalebene liegenden Curve muss ein schwerer Punkt fallen, damit er in gleichen Zeiten um gleiche Höhen sinke, also die vertikale Fallhöhe der Zeit proportional und die Tangente der Anfangslage vertikal ist?

6. Ein Punkt fällt auf einer Curve, welche continuirlich in einen vertikalen *Kreis* übergeht und bewegt sich auf der Innenseite desselben weiter. Die Höhe, welche er bis zum Uebergang auf den Kreis durchfallen hat, ist H; die Uebergangstangente horizontal und liegt der Kreis so, dass der Punkt auf ihm zuerst aufsteigen muss. Wie gross darf der Radius des Kreises höchstens sein, damit der Punkt die Bahn nicht verlässt?

7. Ein Punkt bewegt sich auf einer logarithmischen Spirale und wird nach dem Pole derselben zu umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung von diesem beschleunigt; seine Anfangslage hat den Abstand a vom Pol, μ ist die Grösse der Beschleunigung in der Einheit der Entfernung, wie gross ist die Zeit, nach welcher er den Pol erreicht? Die Gleichung der Curve sei $\varrho = ae^{m\vartheta}$.

V. Capitel.

Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Fläche.

§. 1. Durch die Anfangslage, die Anfangsgeschwindigkeit und das *Gesetz*, welches die Beschleunigung befolgt, ist die Bewegung eines Punktes vollständig bestimmt; wird daher noch die weitere Bedingung hinzugefügt, dass die Bewegung des Punktes auf einer gegebenen Fläche erfolgen soll, so muss noch ein Zwang hinzutreten, welcher den Punkt nöthigt, auf derselben zu bleiben. Dieser Zwang kann aber, wie er auch immer beschaffen sein möge, weil er auf die Geschwindigkeit einen verändernden Einfluss ausübt, durch eine Beschleunigung ersetzt werden, die mit der gegebenen Beschleunigung zusammen eine Resultante liefert, welche in Verbindung mit der anfänglichen Geschwindigkeit die Bahn des Punktes und die Bewegung desselben in ihr der zugefügten Bedingung entsprechend bestimmt. Der Zwang wird je nach den Umständen, die ihn ausüben, Widerstand der Fläche oder Spannung und die ihm äquivalente Beschleunigung die Beschleunigung des Widerstandes oder der Spannung genannt. Dieselbe kann an jeder Stelle der Bahn in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine in die Richtung der Normalen der Fläche, die andere in die Tangentenebene der Fläche fällt. Die letztere Componente, welche von der Reibung herrührt, setzen wir hier gleich Null voraus, sodass also blos eine Normalbeschleunigung des Widerstandes als vorhanden angenommen wird.

§. 2. Den Zwang, welcher den Punkt auf die Fläche nöthigt, kann man sich auf verschiedene Arten ausgeübt denken. In vielen Fällen reicht es aus, die Fläche aus einem festen Material gearbeitet, aber als eine unendlich dünne Schale anzunehmen, auf deren Innen- oder Aussenseite der bewegliche Punkt sich befindet; in anderen Fällen wird man es vorziehen, den Punkt als zwischen zwei unendlich nahen solchen Schalen beweglich zu denken. Zuweilen gelingt es, den Punkt durch gespannte Fäden auf die Fläche zu zwingen; so z. B. kann man

denselben nöthigen, auf einem Rotationsellipsoid zu bleiben, indem man ihn durch zwei Fäden von der Längensumme gleich der Rotationsaxe mit den Brennpunkten verknüpft. Die allgemeinste Art, einen Punkt zu nöthigen, auf einer gegebenen Fläche zu bleiben, welche zugleich das Analogon zu der Monge'schen Fadenconstruction Cap. IV, §. 4. darbietet, beruht auf folgenden Betrachtungen. Durch jeden Punkt einer Fläche gehen zwei Krümmungslinien hindurch; sie bezeichnen die beiden Richtungen, nach welchen hin von jenem Punkte aus die Fläche am schwächsten und stärksten gekrümmt ist und schneiden einander rechtwinklig. Die sämmtlichen Krümmungslinien einer Fläche bilden auf dieser zwei Curvenschaaren, sodass jede Curve der einen Schaar alle Curven der anderen Schaar rechtwinklig durchschneidet und beide Schaaren mithin die ganze Fläche in rechteckige Flächenelemente zerlegen. Die Krümmungslinien einer Fläche besitzen die Eigenschaft, dass die Normalen, welche in zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Punkten einer solchen Curve auf der Fläche errichtet werden, sich schneiden. Legt man daher in allen Punkten längs einer Krümmungslinie die Normalen an die Fläche, so bilden diese eine abwickelbare Fläche und berühren eine auf dieser abwickelbaren Fläche liegende Curve. Diese Curve ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte aller Normalschnitte der Fläche, welche die Krümmungslinie berühren und enthält also Mittelpunkte der stärksten oder der schwächsten Krümmung, je nachdem die Krümmungslinie eine Linie der stärksten oder der schwächsten Krümmung ist. Führt man diese Construction mit sämmtlichen Krümmungslinien aus, so erhält man zwei Schaaren abwickelbarer Flächen, welche sich paarweise rechtwinklig in den Normalen der Fläche durchschneiden und eine neue Fläche, auf welcher die sämmtlichen Orte der Krümmungsmittelpunkte der in den Richtungen der stärksten und schwächsten Krümmung geführten Normalschnitte (Hauptnormalschnitte) liegen und also selbst den Ort der Krümmungsmittelpunkte aller dieser Hauptnormalschnitte darstellt. Diese Fläche hat zwei Theile, die sich in einzelnen Fällen von einander trennen, von denen der eine die Mittelpunkte stärkster, der andere die Mittelpunkte schwächster Krümmung enthält. Da durch jede Normale ein Normalschnitt der stärksten und ein Normalschnitt der schwächsten Krümmung hindurchgeht, so berührt jede Normale eine Curve der Krümmungsmittelpunkte der einen und eine Curve der Krümmungsmittelpunkte der anderen Art und da diese beiden Curven auf der Fläche der Krümmungsmittelpunkte liegen, aber verschiedenen Theilen angehören, so folgt, dass jede Normale diese Fläche doppelt berührt, nämlich in einem Krümmungsmittelpunkte der stärksten und einem Krümmungsmittelpunkte der schwächsten Krümmung. Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass die sämmtlichen Normalen einer Fläche eine gewisse Centralfläche doppelt berühren oder in dem Falle

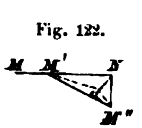
dass diese in zwei getrennte Theile zerfällt, zwei Flächen zugleich berühren. Man erkennt daraus weiter, dass man nur nöthig hat, eine Gerade so längs der Gesammtfläche der Hauptkrümmungsmittelpunkte hingleiten zu lassen, dass sie dieselbe doppelt berührt, nämlich in einem Punkte des einen und in einem Punkte des anderen Theiles, wenn einer ihrer Punkte gezwungen sein soll, sich auf der gegebenen Fläche selbst zu bewegen, welcher jene Fläche der Hauptkrümmungsmittelpunkte angehört.

§. 3. Die Theorie der Bewegung eines Punktes auf gegebener Fläche nimmt einige Lehren der Geometrie über die kürzesten Linien (auch geodätische Linien genannt) in Anspruch, welche wir zunächst entwickeln wollen. Die kürzesten Linien auf Flächen sind durch die Eigenschaft charakterisirt, dass in jedem ihrer Punkte der Krümmungshalbmesser, also auch die Hauptnormale derselben mit der Normalen der Fläche zusammenfällt oder also die Schmiegungsebene der kürzesten Linie durch die Normale der Fläche geht. Um diese Eigenschaft ganz elementar zu beweisen, nehmen wir zunächst den einfachsten Fall an, auf welchen sich der Fall bei einer allgemeinen Fläche zurückführen lässt, nämlich dass die Fläche aus zwei Ebenen E, E' bestehe, welche sich in einer Geraden d schneiden. Soll von einem Punkte A in E nach einem Punkte B in E' über die Fläche hin eine kürzeste Linie gezogen werden, so wird diese die Kante d in einem gewissen Punkte C schneiden und ist zunächst klar, dass die Stücke AC und CB dieser kürzesten Linie geradlinig sein müssen. Nun muss aber C so gewählt werden, dass $AC + CB$ ein Minimum werde. Um die hierzu erforderliche Lage des Punktes C zu erkennen, drehen wir die Ebene E' so lange um die Kante d um, bis sie in die Ebene E hineinfällt, aber so, dass A und B auf entgegengesetzte Seiten von d zu liegen kommen. Durch diese Drehung wird die Länge der kürzesten Linie nicht geändert und muss folglich $AC + CB$ auch nach derselben in der Gesammtebene die kürzeste Linie sein, welche von A nach B gezogen werden kann. In der Ebene aber ist die Gerade die kürzeste Linie. Daher muss der Punkt C so gewählt werden, dass $AC + CB$ beim Zusammenfallen der Ebene E, E' in eine Gerade übergeht. Hierdurch ist die Lage von C auf der Kante d vollkommen bestimmt. Dieser Punkt muss so liegen, dass die Winkel, welche AC und CB mit d, in demselben Sinne genommen, bilden sich zu π ergänzen. — Nehmen wir jetzt an, die beiden Ebenen E, E' bilden einen unendlichkleinen Winkel mit einander, so wird der Punkt B bei der Drehung der Ebene E' um die Kante d einen unendlichkleinen Kreisbogen BB' um d als Rotationsaxe beschreiben, dessen Ebene mithin senkrecht steht auf d und dessen Mittelpunkt der Fusspunkt des Perpendikels ist, welches von B auf d gefällt werden kann. Dieser unendlichkleine Kreisbogen fällt mit der Richtung seiner

Tangente zusammen und steht senkrecht auf der Ebene E' in ihrer ursprünglichen Lage, sowie nach der unendlichkleinen Drehung und folglich senkrecht auf E. Daher steht auch die Ebene BCB', welche den kleinen Kreisbogen enthält, oder die mit ihr identische Ebene ACB senkrecht auf E und geht durch die Normale von E, welche in A errichtet werden kann. — Die beiden Ebenen E, E' seien nun zwei aufeinanderfolgende Tangentenebenen einer Fläche; dann sind also AC und CB zwei aufeinanderfolgende Elemente einer Curve auf der Fläche, die Ebene ACB ist ihre Schmiegungsebene in A und enthält die Normale der Fläche in A als ihre Hauptnormale oder die Richtung des Krümmungshalbmessers der Curve in A. Wenn nun aber eine Linie zwischen irgend zweien ihrer Punkte eine kürzeste sein soll, so muss sie diese Eigenschaft auch in ihren Bogenelementen besitzen, d. h. zwischen zwei unendlichnahen Punkten, welche auf zwei aufeinanderfolgenden Tangentenebenen liegen. Demnach besteht der Satz: **Jede kürzeste Linie auf einer Fläche besitzt die Eigenschaft, dass ihre Schmiegungsebene in jedem ihrer Punkte durch die Normale der Fläche in diesem Punkte hindurchgeht, also auf der Tangentenebene der Fläche senkrecht steht und ihr Krümmungshalbmessrr in die Richtung der Normalen fällt.**

§. 4. Da die Schmiegungsebene der kürzesten Linie die Normale der Fläche enthält, so folgt, dass der Normalschnitt der Fläche mit ihr zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente, folglich auch die Krümmung gemein hat. Ziehen wir jetzt auf der Fläche irgend eine beliebige Curve und nehmen auf derselben drei aufeinanderfolgende Punkte M, M', M'' (Fig. 122) an, verlängern das Bogenelement MM' um sich selbst, wodurch wir zu einem Punkte N gelangen und ziehen NM'', so wird die Länge der Linie NM'', welche als unendlichkleiner Kreisbogen anzusehen ist, erhalten, indem man $M'N$ oder MM' mit dem Contingenzwinkel $NM'M''$ multiplicirt. Daher ist dieser Contingenzwinkel selbst $\frac{NM''}{MM'}$. Nun ist aber der Krümmungshalbmesser der Curve $MM'M''$ ... in M gleich dem Bogenelemente MM' dividirt durch diesen Contingenzwinkel. Derselbe wird daher $\frac{MM'^2}{NM''}$.

Fig. 122.



In M' legen wir jetzt die Tangentenebene an die Fläche; sie wird die Tangentenebene des Punktes M in einer Geraden d schneiden. Auf die Tangentenebene in M' fällen wir von N das Perpendikel NQ; dadurch erhalten wir $M'Q$ als das zweite Element einer kürzesten Linie, welche mit der Curve $MM'M''$ ... die Tangente in M, mit dem durch diese Tangente geführten, die Curve $MM'M''$ ... also gleichfalls berührenden Normalschnitte der Fläche aber beide Elemente, also auch der Krümmung gemein hat. Denn wenn die Tangentenebene des Punktes M

durch Drehung um d in die Lage der Tangentenebene des Punktes M gelangt, so beschreibt Q einen unendlichkleinen Kreisbogen, welcher von seiner Tangente QN erst um Unendlichkleines zweiter Ordnung abweicht. Daher ist der Krümmungshalbmesser des Normalschnitts $MM'Q$, welcher die Curve in M berührt, ähnlich wie vorher $\frac{\overline{MM'}^2}{NQ}$.

Der unendlichkleine Winkel $M''M'Q$, welcher gebildet wird von dem zweiten Bogenelemente $M'M''$ der gegebenen Curve und dem zweiten Bogenelemente $M'Q$ der kürzesten Linie, welche dieselbe in M berührt, heisst der geodätische Contingenzwinkel der gegebenen Curve im Punkte M. Legt man durch M' gleichfalls eine kürzeste Linie, welche mit der Curve $MM'M''\ldots$ das zweite Bogenelement $M'M''$ gemein hat, sie also in M' berührt, so kann man den geodätischen Contingenzwinkel einer Curve in einem Punkte M auch definiren als den verschwindend kleinen Winkel der beiden, die Curve in M und dem nächstfolgenden Punkte M' berührenden kürzesten Linien. Das Bogenelement MM', dividirt durch ihn, heisst der Halbmesser der geodätischen Krümmung, sowie der reciproke Werth hiervon die geodätische Krümmung selbst. Daher stellt $\frac{\overline{MM'}^2}{QM''}$ den Halbmesser der geodätischen Krümmung dar.

Bezeichnet man den Krümmungshalbmesser der Curve $MM'M''\ldots$ mit ϱ, den des sie in M berührenden Normalschnitts oder der sie berührenden kürzesten Linie $MM'Q$ mit R und den der geodätischen Krümmung mit $\overset{*}{\varrho}$, so hat man

$$\varrho : R : \overset{*}{\varrho} = \frac{1}{NM''} : \frac{1}{NQ} : \frac{1}{QM''}$$

oder

$$\frac{1}{\varrho} : \frac{1}{R} : \frac{1}{\overset{*}{\varrho}} = NM'' : NQ : QM''.$$

In dem unendlichkleinen rechtwinkligen Dreieck $M''QN$ stellt Winkel $NM''Q = \vartheta$ den Neigungswinkel der Schmiegungsebene der Curve $MM'M''$ gegen die Tangentenebene dar und hat man weiter

$$NM'' : NQ : QM'' = 1 : \sin\vartheta : \cos\vartheta$$

und mit Hülfe dieser Proportion also

$$\frac{1}{\varrho} : \frac{1}{R} : \frac{1}{\overset{*}{\varrho}} = 1 : \sin\vartheta : \cos\vartheta,$$

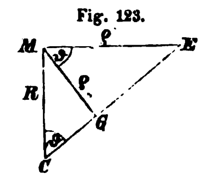
$$\varrho = R\sin\vartheta, \quad \overset{*}{\varrho} = \frac{\varrho}{\cos\vartheta} = R\,tg\,\vartheta.$$

Die Gleichung $\varrho = R\sin\vartheta$ enthält den Meunier'schen Satz. Wenn nämlich ϑ der Winkel ist, den die Schmiegungsebene $MM'M''$ mit der Tangentenebene in M (M' fällt mit M zusammen) bildet, so ist $\sin\vartheta$ der Cosinus der Neigung λ derselben Ebene gegen den Normalschnitt und sagt die Gleichung $\varrho = R\cos\lambda$ aus, dass der Krümmungs-

mittelpunkt der Curve $MM'M''$ erhalten wird, wenn man den Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes, welcher die Curve berührt, auf die Schmiegungsebene derselben projicirt. Daher liegen die Krümmungskreise aller Curven, welche mit dem Normalschnitte die Tangente gemein haben, auf einer Kugel, welche den Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes zum Mittelpunkte hat. In der letzteren Fassung kann man den Meunier'schen Satz unmittelbar an der Hand der Figur einsehen. Durch die vier Punkte M, M', M'', Q lässt sich nämlich eine Kugel legen, welche die beiden Kreise, die durch die Punkte M, M', M'' einerseits und M, M', Q andererseits möglich sind, enthält. In der Grenze sind dies die Krümmungskreise der Curve $MM'M''$... und des Normalschnittes $MM'Q$.... Da die Kugel mit der Fläche das Element $M'M''Q$ gemein hat, welches in der Tangentenebene des Punktes M verschwindet, so berührt sie die Fläche in M und da die Ebene des Normalschnittes senkrecht zur Tangentenebene ist, so ist sein Krümmungskreis ein grösster Kreis der Kugel u. s. w.

Nach den obigen Formeln wird der Halbmesser der geodätischen Krümmung erhalten, indem man den Krümmungshalbmesser der Curve durch den Cosinus seiner Neigung gegen die Tangentenebene der Fläche dividirt. Hieraus erhellt weiter, dass der Halbmesser der geodätischen Krümmung und der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, dessen Höhe der Krümmungshalbmesser der Curve ist (Fig. 123.). Construirt man daher den Krümmungshalbmesser des Normalschnittes in M und fällt von seinem Mittelpunkte C ein Perpendikel auf die Schmiegungsebene einer Curve $MM'M''$, welche den Normalschnitt in M berührt und verlängert dieselbe bis zum Durchschnitt E mit der Tangentenebene in M, so ist ME der Halbmesser der geodätischen Krümmung.

Fig. 123.



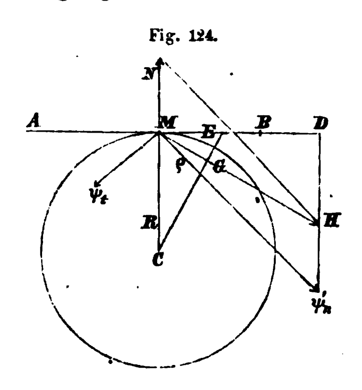
Im Gegensatze zur geodätischen Krümmung, welche die Abweichung einer Curve von dem berührenden Normalschnitte ins Auge fasst, nennt man die Krümmung im gewöhnlichen Sinne, welche die Abweichung von der Tangente angibt, die absolute Krümmung.

Der Contingenzwinkel $QM'M''$ der geodätischen Krümmung fällt in die Tangentenebene der Fläche; legt man nun in allen Punkten der Curve $MM'M''$... an die Fläche die Tangentenebene, so bilden alle diese Tangentenebenen eine abwickelbare Fläche, auf welcher die Curve liegt. Jede Tangente, wie $M'N$ ist auf die folgende Tangentenebene zu projiciren, um den Schenkel $M'Q$ des Contingenzwinkels der geodätischen Krümmung zu erhalten. Wickelt man die Fläche der Tangentenebenen ab, indem man jede Ebene um die Schnittlinie d, welche sie mit der

folgenden Ebene gemein hat, so lange umdreht, bis sie in diese hineinfällt, so geht die Curve in eine gewisse ebene Deformationscurve über, deren Contingenzwinkel offenbar die Contingenzwinkel der geodätischen Krümmung jener sind. Da hierbei die Curvenelemente selbst nicht geändert werden, so folgt der Satz: Der Halbmesser der geodätischen Krümmung einer Curve ist gleich dem Krümmungshalbmesser der Deformationscurve, in welche die gegebene Curve übergeht, wenn man die abwickelbare Fläche, welche von den Tangentenebenen der Fläche, auf welcher die gegebene Curve liegt, längs dieser gebildet wird, in eine Ebene ausbreitet.

§. 5. Der bewegliche Punkt befinde sich zur Zeit t im Punkte M seiner Bahn (Fig. 124.) und besitze die Geschwindigkeit v längs der Tangente derselben; die gegebene Beschleunigung sei ψ und die Beschleunigung des Normalwiderstandes N. Die Beschleunigung ψ zerlegen wir in zwei Componenten, eine tangentielle ψ_t und eine normale ψ_n; letztere fällt mit N in die Normalebene der Bahn und bildet mit N eine Resultante φ_n. Die beiden Beschleunigungen ψ_t und $\varphi_n = Res.\ (\psi_n, N)$, welche zusammen dem System der beiden Beschleunigungen ψ und N äquivalent sind, sind die Tangential- und Centripetalbeschleunigung der Bewegung und es bestehen daher die beiden Gleichungen

Fig. 124.



$$\frac{dv}{dt} = \psi_t, \quad \frac{v^2}{\varrho} = Res.\ (\psi_n, N).$$

In diesen Gleichungen ist N zwar seiner Richtung, aber noch nicht seiner Grösse und seinem Sinne nach bestimmt, ϱ aber ist noch gänzlich unbekannt. Zur Bestimmung beider Grössen führt aber Folgendes. Durch die Normale der Fläche und die Tangente der Bahn legen wir den die Bahn berührenden Normalschnitt und construiren über seinem Krümmungskreise als grösstem Kreise eine Kugel. Diese Kugel enthält den Krümmungskreis der Bahn in M und ein Perpendikel von dem Mittelpunkte C der Kugel auf die Ebene dieses Krümmungskreises liefert den Krümmungsmittelpunkt G derselben, welcher auf der Richtung der Centripetalbeschleunigung $\varphi_n = MH$ sich befindet. Denkt man nun das Perpendikel CG über G hinaus nach E, nämlich bis an die Tangente der Fläche verlängert, welche in die Normalebene der Bahn fällt und projicirt φ_n oder was dasselbe ist, ψ_n auf diese Tangente als MD, so besteht vermöge der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke MGE und MDH die Gleichung $MG \cdot MH = ME \cdot MD$, d. h. $\varrho \cdot \varphi_n = ME \cdot MD$

oder da $\varrho\varphi_n = v^2$ ist, $ME \cdot MD = v^2$. Da nun ψ_n als gegeben anzusehen ist, so kann man seine Projection MD auf die Tangentenebene der Fläche in M finden und gewinnt dadurch ME als dritte Proportionale zu v und MD (z. B. dadurch, dass man $MA = MB = v$ aufträgt und zu A, B und D den vierten, dem D zugeordneten harmonischen Punkt E sucht). Sobald aber der Punkt E bekannt ist, bestimmt die Verbindungslinie CE desselben mit dem Mittelpunkte der oben gedachten Kugel die Lage von φ_n und ist in dem Parallelogramme MH alles, insbesondere auch die Widerstandsbeschleunigung ν vollkommen bestimmt. Dem vorigen §. gemäss ist ME nichts anderes, als der Radius der geodätischen Krümmung der Bahn $\overset{*}{\varrho} = \frac{\varrho}{\cos\vartheta}$, wenn ϑ den Winkel bedeutet, den die Schmiegungsebene der Bahn mit der Tangentenebene der Fläche bildet. Die Componente MD von ψ_n, welche in die Tangentenebene fällt, ist offenbar $\varphi_n \cos\vartheta = \frac{v^2}{\varrho}\cos\vartheta$ oder $\frac{v^2}{\varrho : \cos\vartheta}$, also $\frac{v^2}{\overset{*}{\varrho}}$, d. h. wenn man die gegebene Beschleunigung ψ in drei Componenten zerlegt, die eine ψ_t längs der Tangente der Bahn, die andere längs der Normalen der Fläche und die dritte längs der Schnittlinie der Tangentenebene der Fläche mit der Normalebene der Bahn, so wird die letztere Componente erhalten, indem man das Quadrat der Geschwindigkeit durch den Radius der geodätischen Krümmung dividirt.

Was den Widerstand N betrifft, so bedenke man, dass, weil φ_n die Resultante von ψ_n und N ist, die Summe der Projectionen der beiden letzten Grössen auf eine beliebige Axe gleich der Projection von φ_n ebendahin sein muss. Wählt man nun zu dieser Axe die Flächennormale MC, so erhält man $\frac{v^2}{\varrho}\sin\vartheta = N + \psi_n \sin\lambda$, wenn ψ_n mit MC den Winkel λ bildet. Nach dem Meunier'schen Satze ist aber $\varrho = R\sin\vartheta$, daher wird

$$N = \frac{v^2}{R} - \psi_n \sin\lambda .$$

Ebenso gross würde offenbar auch N sein, wenn der bewegliche Punkt sich auf dem Normalschnitte bewegen würde.

Genau in derselben Weise, wie Cap. IV, §. 3., versteht man auch hier unter Centrifugalbeschleunigung die der Centripetalbeschleunigung φ_n entgegengesetzt gleiche Beschleunigung φ_{-n} und ebenso unter Druckbeschleunigung die der Widerstandsbeschleunigung entgegengesetzt gleiche Beschleunigung. Letztere ist demnach die Resultante von ψ_n und φ_{-n}.

§. 6. Für den speziellen Fall, dass $\psi = 0$ ist, der Punkt sich also blos mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter Einfluss der Widerstandsbeschleunigung ν auf der Fläche bewegt, folgt aus der ersten Gleichung des §. 5, nämlich $\frac{dv}{dt} = 0$, dass die Geschwindigkeit constant.

die Bewegung also eine gleichförmige ist. Aus der zweiten Gleichung oder auch aus der Figur des Parallelogramms MH folgt weiter, dass die Centripetalbeschleunigung φ_n mit N nach Grösse und Richtung zusammenfällt. Demnach hat der Krümmungshalbmesser die Richtung der Flächennormale und ist die Bahn eine geodätische Linie. Die Widerstandsbeschleunigung, welche den Punkt auf die Fläche zwingt, ist demnach $\frac{v^2}{R}$ und folglich umgekehrt proportional dem Krümmungshalbmesser des berührenden Normalschnittes.

Als zweiten speziellen Fall wollen wir annehmen, es sei ψ stets normal zu der Fläche. In diesem Falle ist $\psi_t = 0$ und die Bewegung ebenfalls gleichförmig. Die Centripetalbeschleunigung φ_n fällt auch hier in die Flächennormale, es ist $\psi_n = N + \psi$ und die Bahn gleichfalls eine geodätische Linie. Für die Widerstandsbeschleunigung folgt also

$$N = \frac{v^2}{R} - \psi.$$

§. 7. Die Gleichungen für die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Fläche in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y, z sind, wenn N_x, N_y, N_z die Componenten der normalen Widerstandsbeschleunigung N bedeuten:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N_x$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N_y$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N_z,$$

wozu noch kommen:

$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2$$
$$F(x, y, z) = 0$$
$$N_x : N_y : N_z = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z},$$

von denen die zweite ausdrückt, dass der Punkt auf der Fläche $F = 0$ liegen soll und die Proportion sagt, dass der Widerstand die Richtung der Normalen besitzt.

Bezüglich der Anwendung der Principe der Bewegung rücksichtlich der Integration dieser Gleichungen ist zu bemerken, dass die Beschleunigung des Widerstandes in dem Princip der lebendigen Kraft nicht auftritt; denn die Elementararbeit derselben ist Null, weil ihre Richtung senkrecht zum Elemente der Bahn ist.

§. 8. **Die Bewegung eines schweren Punktes auf der Kugelfläche.** Ein schwerer Punkt sei gezwungen, sich auf einer Kugelfläche zu bewegen. Der Zwang kann dadurch ausgeübt werden, dass der Punkt durch einen nicht dehnbaren Faden mit dem Kugelmittelpunkte verknüpft wird. Der Faden beschreibt eine Kegel-

fläche, daher heisst der einfache Apparat ein conisches Pendel; der Punkt verlässt die Kugelfläche nicht, daher heisst er auch ein sphärisches Pendel.

Den Mittelpunkt der Kugel wählen wir zum Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z (Fig. 125.), dessen x- und y-Axe horizontal, dessen positive z-Axe vertikal abwärts gerichtet ist. Es sind alsdann die Componenten der Beschleunigung der Schwere: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$ und da für r als Kugelradius $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$, $-\frac{z}{r}$ die Richtungscosinusse der normalen Widerstandsbeschleunigung N sind, so hat man für deren Componenten: $N_x = -N\frac{x}{r}$, $N_y = -N\frac{y}{r}$, $N_z = -N\frac{z}{r}$ und daher sind die Gleichungen der Bewegung des Pendels:

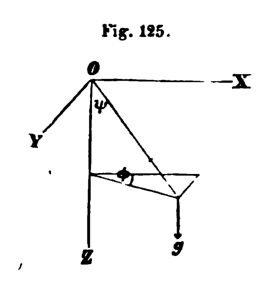


Fig. 125.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{r}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{r}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - N\frac{z}{r},$$

wozu noch die Gleichung der Kugelfläche hinzutritt, nämlich:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Zunächst gibt uns das Princip der lebendigen Kraft ein Integral dieser Gleichungen. Es ist nämlich für die Kräftefunction $dU = g\,dz$, also $U = gz + h$ und daher

$$v^2 = 2gz + C;$$

sodann aber gilt auch das Princip der Flächen in Bezug auf die horizontale xy-Ebene. Es fällt nämlich sowohl die Richtung der Beschleunigung g, als auch die Widerstandsbeschleunigung N in die Vertikalebene, welche durch den beweglichen Punkt und die z-Axe geht, es schneidet folglich die Resultante von g und N stets die z-Axe und geht daher ihre Projection auf die xy-Ebene fortwährend durch den Coordinatenursprung. Das Integral, welches das Flächenprincip liefert, ist daher:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C'.$$

Wir wollen jetzt beide Integrale durch Polarcoordinaten ausdrücken. Diese seien ausser dem constanten Radiusvector r zwei Polarwinkel, von denen der eine, φ, die Neigung der durch den Radiusvector und die z-Axe gehenden Ebene gegen die xz-Ebene angibt, während der andere, ψ, der Winkel sei, welchen der Radiusvector mit der z-Axe bildet. Bei constantem φ würde nun der Punkt M einen unendlichkleinen Kreisbogen $r\,d\psi$ beschreiben, wenn ψ sich um $d\psi$ ändert; bei constantem ψ dagegen einen zu der Ebene von ψ rechtwinkligen anderen unendlichkleinen Kreisbogen $r \sin\psi\, d\varphi$ vom Radius $r \sin\psi$, wenn φ sich um $d\varphi$ ändert. Daher ist das Bogenelement der sphärischen Bahn des Punktes M die Quadratwurzel aus dem Ausdrucke

$$r^2 d\psi^2 + r^2 \sin^2\psi\, d^2\varphi$$

und wird das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher dasselbe beschrieben wird

$$r^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2\psi \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Dadurch geht unser erstes Integral mit Rücksicht auf $z = r\cos\psi$ über in die folgende Form:

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \sin^2\psi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{r}\cos\psi + A,$$

worin A die Stelle von $\frac{C}{r^2}$ vertritt. Das zweite Integral nimmt, wenn man bedenkt, dass der doppelte Elementarsector in der xy-Ebene $r^2 \sin^2 \psi \, d\varphi$ zum Ausdrucke hat, die Form an:

$$\sin^2 \psi \frac{d\varphi}{dt} = C,$$

worin $\frac{C'}{r^2} = C$ gesetzt ist. Eliminirt man mit Hülfe dieses Integrales aus dem ersteren die Grösse $\frac{d\varphi}{dt}$, so erhält man

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{\sin^2 \psi} = \frac{2g}{r} \cos \psi + A$$

und hieraus, wenn für die Anfangslage, d. h. für $t = 0$ die Winkel $\varphi = 0$ und $\psi = \psi_0$ werden, zunächst

$$t = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin \psi \, d\psi}{\sqrt{-C^2 + \left(A + \frac{2g}{r} \cos \psi\right) \sin^2 \psi}},$$

sowie, wenn man den dieser Gleichung zu Grunde liegenden Ausdruck für dt in das zweite Integral einführt

$$\varphi = C \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin \psi \, d\psi}{\sin^2 \psi \sqrt{-C^2 + \left(A + \frac{2g}{r} \cos \psi\right) \sin^2 \psi}}.$$

Von den beiden so gewonnenen Gleichungen stellt die letztere die Gleichung der Bahn in den sphärischen Coordinaten φ, ψ dar, während die erste ψ als Function der Zeit und hierauf mit Hülfe der letzten auch φ als Function der Zeit zu bestimmen verhilft. Die beiden hier vorliegenden Quadraturen kommen auf elliptische Integrale zurück, da die Wurzel im Nenner derselben $\cos^3 \psi$ enthält, wenn man $\cos \psi$ als Integrationsvariabele ansieht und mithin werden φ und ψ durch elliptische Functionen der Zeit dargestellt.

Die beiden Constanten C und A kann man leicht durch die Coordinaten der Anfangslage und die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit ausdrücken. Die beiden Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{dt}$ und $\frac{d\psi}{dt}$ drücken nämlich zwei Winkelgeschwindigkeiten aus und wenn wir ihre Werthe zur Zeit $t = 0$ mit φ'_0 und ψ'_0 bezeichnen, so erhalten wir durch die beiden ersten Integrale, indem wir sie auf den Anfang der Bewegung anwenden:

$$\sin^2 \psi_0 \cdot \varphi'_0 = C, \qquad \psi'^2_0 + \sin^2 \psi_0 \cdot \varphi'^2_0 - \frac{2g}{r} \cos \psi_0 = A.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit v_0, deren Richtung die Kugelfläche berührt, kann man in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine u_0 in die Ebene der xz fällt und senkrecht zum Radius der Kugel ist; sie hat die Grösse $u_0 = r\psi'_0$. Die andere w_0 ist senkrecht zur xz-Ebene und wird durch $w_0 = r \sin \psi_0 \cdot \varphi'_0$ dargestellt. Durch Einführung von u_0 und w_0 erhält man daher jetzt

$$C = \frac{w_0}{r} \sin \psi_0, \qquad A = \frac{u_0^2 + w_0^2}{r^2} - \frac{2g}{r} \cos \psi_0 = \frac{v_0^2}{r^2} - \frac{2g}{r} \cos \psi_0.$$

Die Darstellung der obigen Integrale für t und φ in der canonischen Form erfordert eine sorgfältige Untersuchung der Wurzelgrösse, welche in denselben vorkommt, woraus wir zunächst einige Folgerungen über die Natur der Bewegung des Pendelpunktes ziehen. Es ist dem Obigen zufolge das Zeitdifferential

$$dt = \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{-C^2 + \left(A + \frac{2g}{r}\cos\psi\right)\sin^2\psi}}.$$

Wir geben dieser Gleichung die Form

$$-\frac{d\cos\psi}{dt} = \sqrt{-C^2 + \left(A + \frac{2g}{r}\cos\psi\right)\sin^2\psi}$$

und schliessen hieraus, dass die Werthe von ψ, welche die Wurzelgrösse zum Verschwinden bringen, $\cos\psi$ zu einem Minimum oder Maximum machen, folglich selbst die grössten und kleinsten Werthe sind, deren ψ fähig ist. Nun ist die Grösse unter dem Wurzelzeichen, nach Potenzen von $\cos\psi$ geordnet

$$-\frac{2g}{r}\left\{\cos^3\psi + \frac{Ar}{2g}\cos^2\psi - \cos\psi - \frac{r}{2g}(A - C^2)\right\},$$

oder, wenn man $\cos\psi = x$, $\frac{Ar}{2g} = a$, $\frac{C^2 r}{2g} = b$ setzt und den Inhalt der Klammer mit y bezeichnet

$$y = x^3 + ax^2 - x + b - a$$

und die cubische Gleichung $y = 0$ ist es, welche wünschenswerthe Aufschlüsse über die Maxima und Minima von ψ gewährt. Denken wir uns y als die Ordinate einer Curve, so wird, weil die cubische Gleichung $y = 0$ wenigstens eine reelle Wurzel besitzen muss, diese Curve die Abscissenaxe einmal oder dreimal schneiden. Nun entsprechen

den Werthen $x = -\infty$, $x = -1$, $x = 0$, $\quad x = \cos\psi_0$, $\quad x = +1$

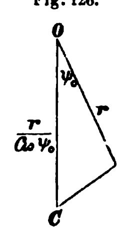
die Werthe $y = -\infty$, $y = b$, $\quad y = b - a$, $y = -\frac{r}{2g}\sin^2\psi_0(\psi'_0)^2$, $y = b$,

wobei wir zunächst den Winkel ψ_0 als spitz annehmen wollen und geht mithin innerhalb der Intervalle von $x = -\infty$ bis $x = -1$, $x = -1$ bis $x = \cos\psi_0$ und $x = \cos\psi_0$ bis $x = +1$ die Ordinate y vom Negativen zum Positiven, vom Positiven zum Negativen und vom Negativen zum Positiven über. Es gibt daher innerhalb dieser drei Intervalle drei reelle Werthe x_3, x_2, x_1 von x, für welche y verschwindet. Da aber $x = \cos\psi$ und im ersten Intervalle x unterhalb -1 liegt, so entspricht der Wurzel x_3 kein reeller Winkel ψ, während den beiden andern Wurzeln x_2, x_1, welche zwischen -1 und $+1$ liegen, reelle Winkel ψ entsprechen. Zu dem kleineren Werthe x_2 gehört der grössere Winkel α, zu dem grösseren Werthe x_1 der kleinere Winkel β. Für $\psi = \alpha$ erreicht daher der bewegliche Punkt seine höchste, für $\psi = \beta$ seine tiefste Lage. Auch ist leicht zu entscheiden, ob diese höchsten und tiefsten Lagen sich auf der unteren oder auf der oberen Halbkugel befinden. Die Entscheidung hierüber hängt von dem Vorzeichen der Differenz $b - a$ ab. Ist nämlich $b - a$ positiv, so findet kein Zeichenwechsel des y zwischen $x = -1$ und $x = 0$, wohl aber zwischen $x = 0$ und $x = \cos\psi_0$ statt, es fällt mithin x_2 zwischen 0 und $\cos\psi_0$, also überhaupt zwischen 0 und $+1$, mithin α zwischen $\frac{\pi}{2}$ und 0; ist dagegen $b - a$ negativ, so liegt x_2 zwischen -1 und 0 und folglich α zwischen π und $\frac{\pi}{2}$ und da $\beta < \alpha$ ist, so folgt, dass im ersten Falle die höchsten und tiefsten Punkte beide auf der unteren Halbkugel sich befinden, während im zweiten die höchsten Punkte auf der oberen, die tiefsten auf der unteren Halbkugel liegen. Es ist dies auch richtig, wenn $\psi_0 > \frac{1}{2}\pi$, als $x = \cos\psi_0$ zwischen 0 und -1 liegt, wie man sofort findet.

Um diesen Einfluss des Vorzeichens von $b - a$ mechanisch zu deuten, bilden wir diese Differenz. Es waren $b = \frac{C^2 r}{2g}$, $a = \frac{Ar}{2g}$, sowie $C = \frac{w_0}{r}\sin\psi_0$, $A = \frac{u_0^2 + w_0^2}{r^2} - \frac{2g}{r}\cos\psi_0$.

Hiermit wird
$$b - a = \cos\psi_0 - \frac{u_0^2 + w_0^2 \cos^2\psi_0}{2\,gr}$$
und die Bedingung für die Lage der höchsten und tiefsten Punkte:
$$\frac{u_0^2 + w_0^2 \cos^2\psi_0}{2\,gr} \lessgtr \cos\psi_0 .$$
Um dieselbe zu vereinfachen, wollen wir die xz-Ebene durch einen tiefsten Punkt legen, dann ist ψ_0 das Minimum von ψ, also $\psi'_0 = 0$ und $u_0 = r\psi'_0 = 0$. Dadurch geht die vorliegende Bedingung über in
$$\frac{w_0^2}{2g} \lessgtr \frac{r}{\cos\psi_0} .$$
In den tiefsten Punkten ist wegen $u_0 = 0$ die ganze Geschwindigkeit w_0 horizontal; $\frac{w_0^2}{2g}$ ist die ihr entsprechende Geschwindigkeitshöhe und $\frac{r}{\cos\psi_0}$ ist das Stück OC, welches auf der Richtung des vertikalen Kugelhalbmessers von der Tangentenebene des tiefsten Punktes abgeschnitten wird, vom Mittelpunkte an gerechnet bis zum Durchschnitt mit dieser Ebene (Fig. 126.). Demnach kann man sagen: Die höchsten Punkte liegen auf der unteren oder auf der oberen Halbkugel, je nachdem die Geschwindigkeitshöhe entsprechend der Geschwindigkeit in den tiefsten Punkten kleiner oder grösser ist als das Stück, welches die Tangentenebene der tiefsten Punkte auf dem vertikalen Kugelhalbmesser bestimmt; die tiefsten Punkte liegen stets auf der unteren Halbkugel.

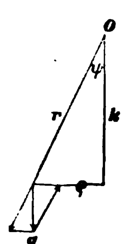
Fig. 126.



Unter den speziellen Fällen unseres Problems verdient einer besondere Beachtung, nämlich der, dass die cubische Gleichung zwei gleiche Wurzeln besitzt. In diesem Falle fallen die Werthe der Winkel α und β zusammen und reducirt sich der ganze Spielraum des Winkels ψ auf deren gemeinschaftlichen Werth ψ_0. Daher ist in diesem Falle die Bahn des beweglichen Punktes ein horizontaler Kreis mit dem Radius $r \sin\psi_0$. Soll nun die Gleichung $y = 0$ eine Doppelwurzel besitzen, so muss auch die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ dieselbe als Wurzel besitzen. Daher bestehen die beiden Gleichungen
$$\begin{aligned} x^3 + \ ax^2 - x + b - a &= 0 \\ 3x^2 + 2ax - 1 &= 0 . \end{aligned}$$
Da ψ constant, so ist $\psi' = 0$, also $u_0 = r\psi'_0 = 0$ und mit Rücksicht hierauf wird $A = \frac{w_0^2}{r^2} - \frac{2g}{r}\cos\psi_0$ und mithin $a = \frac{Ar}{2g} = \frac{w_0^2}{2gr} - \cos\psi_0$. Dies in die zweite Gleichung substituirt, gibt wegen $x = \cos\psi = \cos\psi_0$
$$w_0^2 = \frac{rg \sin^2\psi}{\cos^2\psi} ,$$
welche Gleichung in Verbindung mit $u = 0$ die Bedingung der Kreisbewegung ausdrückt. Schreibt man die Gleichung folgendermassen:
$$\frac{w_0^2}{r \sin\psi} = g\,tg\,\psi ,$$
so wird ihr Sinn augenfälliger. Es ist nämlich $\frac{w_0^2}{r \sin\psi}$ die Centripetalbeschleunigung der Kreisbewegung und $g\,tg\,\psi$ die in die Richtung des Radius der Kreisbahn fallende Componente von g und drückt daher die Gleichung aus, dass die Centripetalbeschleunigung gleich dieser Componenten sei (Fig. 127.) Die Tangentialcomponente von g ist bei der horizontalen Kreisbahn Null und die Ge-

schwindigkeit also constant, wie auch aus dem Princip der lebendigen Kraft folgt. Die Componente $\frac{g}{\cos\psi}$ gibt die Spannungsbeschleunigung. Die Umlaufszeit T ergibt sich für diesen Fall sehr einfach wegen der constanten Geschwindigkeit mit Hülfe der Gleichung $\omega_0 T = 2\pi\varrho$, wenn $\varrho = r \sin\psi$ den Radius der Kreisbahn bezeichnet, indem man

Fig. 127.



$$w_0 = \sqrt{\frac{rg \sin^2\psi}{\cos\psi}} = \sqrt{g\varrho\, tg\,\psi} = \sqrt{g\varrho \cdot \frac{\varrho}{\varkappa}} = \varrho \sqrt{\frac{g}{\varkappa}}$$

eliminirt, wobei für den Abstand der Bahn vom Kugelmittelpunkte $\varkappa$ geschrieben worden ist. Man erhält auf diese Weise:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\varkappa}{g}}.$$

Diese Umlaufzeit ist also gleich der Oscillationsdauer eines gewöhnlichen Pendels von der Länge $\varkappa$ (bei kleiner Elongation).

Die oben angedeutete Reduction der beiden Integrale

$$t = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{-C^2 + \left(A + \frac{2g}{r}\cos\psi\right)\sin^2\psi}}$$

und

$$\varphi = C \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sin^2\psi \sqrt{-C^2 + \left(A + \frac{2g}{r}\cos\psi\right)\sin^2\psi}}$$

auf die canonische Form der elliptischen Integrale basirt auf der Untersuchung der Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 + ax^2 - x + b - a = 0$. Man führt nämlich zunächst an Stelle der Constanten A, C die Winkel α, β ein, deren Cosinusse Wurzeln dieser Gleichung sind, nämlich $x_1 = \cos\beta$, $x_2 = \cos\alpha$. Da der Coefficient von x in jeder cubischen Gleichung die Summe der Produkte der Wurzeln zu zweien ist, so muss $\cos\alpha\cos\beta + x_3\cos\alpha + x_3\cos\beta = -1$ sein, woraus die dritte Wurzel folgt, so dass diese drei Wurzeln also sind

$$x_1 = \cos\beta, \quad x_2 = \cos\alpha, \quad x_3 = -\frac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}.$$

Mit Hülfe derselben gestaltet sich nun y so:

$$y = (\cos\psi - \cos\beta)(\cos\psi - \cos\alpha)\left(\cos\psi + \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\right)$$

und die weitere Vergleichung der Summe der Wurzeln mit dem Coefficienten des x^2 und des Produktes derselben mit dem Absolutgliede $b - a$ in der cubischen Gleichung liefert

$$a = \frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}, \quad b = \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$$

und hierdurch den früheren Formeln zufolge

$$A = \frac{2g}{r}\,\frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}, \quad C = \sqrt{\frac{2g}{r}} \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha + \cos\beta}}$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man daher

$$t = \sqrt{\frac{r}{2g}} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{-(\cos\psi - \cos\beta)(\cos\psi - \cos\alpha)\left(\cos\psi + \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\right)}}$$

$$\varphi = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha + \cos\beta}} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sin^2\psi \sqrt{-(\cos\psi - \cos\beta)(\cos\psi - \cos\alpha)\left(\cos\psi + \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\right)}}$$

Was das erste dieser Integrale betrifft, so führt die Substitution*)

$$\cos\psi = \cos\beta - (\cos\beta - \cos\alpha)\sin^2\sigma, \qquad \sin^2\sigma = \frac{\cos\beta - \cos\psi}{\cos\beta - \cos\alpha}$$

dasselbe auf die gewünschte Form

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\sqrt{\frac{\cos\beta + \cos\alpha}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}}\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\sigma}}$$

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\,\frac{\varkappa}{\sqrt{\cos\beta - \cos\alpha}}\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\sigma}}, \qquad \varkappa^2 = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta},$$

wo σ_0 aus der Gleichung

$$\sin^2\sigma_0 = \frac{\cos\beta - \cos\psi_0}{\cos\beta - \cos\alpha}$$

sich ergibt, nämlich als der Werth von σ, welcher dem Anfangswerthe ψ_0 entspricht. In Betreff des Integrales für φ nimmt man zunächst eine Spaltung vor. Man ersetzt $\sin^2\psi$ im Nenner unter dem Integralzeichen durch $1 - \cos^2\psi = (1+\cos\psi)(1-\cos\psi)$ und erhält

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha + \cos\beta}}\left[\frac{1}{2}\int\limits_{\psi_0}^{\psi}\frac{\sin\psi\,d\psi}{(1+\cos\psi)\sqrt{-(\cos\psi - \cos\beta)(\cos\psi - \cos\alpha)\left(\cos\psi + \frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)}}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int\limits_{\psi_0}^{\psi}\frac{\sin\psi\,d\psi}{(1-\cos\psi)\sqrt{-(\cos\psi - \cos\beta)(\cos\psi - \cos\alpha)\left(\cos\psi + \frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)}}\right].$$

Die Substitution

$$\sin^2\omega = \frac{1}{\varkappa^2}\cdot\frac{\cos\psi - \cos\alpha}{\cos\psi + \frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}},$$

worin $\varkappa^2$ dieselbe Bedeutung hat, wie bei dem Integrale für t, ergibt alsdann

$$\varphi = -\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}}\left[\frac{1}{1+\cos\alpha}\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\frac{(1 - \varkappa^2\sin^2\omega)\,d\omega}{(1 + m_1\sin^2\omega)\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\omega}}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{1-\cos\alpha}\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\frac{(1 - \varkappa^2\sin^2\omega)\,d\omega}{(1 + m_2\sin^2\omega)\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\omega}}\right],$$

worin die Parameter m_1, m_2 die Werthe haben:

$$m_1 = \varkappa^2\cdot\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(\cos\alpha + \cos\beta)}, \qquad m_2 = -\varkappa^2\cdot\frac{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{(1-\cos\alpha)(\cos\alpha + \cos\beta)}$$

und ω_0 der dem ψ_0 entsprechende Werth von ω ist.

Wir wollen jetzt den Winkel ψ als Function der Zeit darstellen. Dazu müssen wir die Gleichung

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\,\frac{\varkappa}{\sqrt{\cos\beta - \cos\alpha}}\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\sigma}}$$

umkehren. Da es nun an sich gleichgültig ist, von welchem Momente an wir die Zeit nehmen, so wollen wir sie von dem Momente an zählen, in welchem der

*) Das Nähere hierüber findet man in dem Werke von Durège: Theorie der elliptischen Functionen. 2. Aufl. Leipzig, Teubner, 1868, S. 311, welchem die hier gegebene Entwickelung zum Theil entlehnt ist.

bewegliche Punkt eine tiefste Lage passirt. Dann ist $t = 0$ für $\psi = \beta$, d. h. es ist ψ_0, welcher Werth bis jetzt beliebig war und welchem $t = 0$ entsprach, gleich β. Hierfür wird aber, wie aus der Substitutionsgleichung

$$\sin^2 \sigma = \frac{\cos\beta - \cos\psi}{\cos\beta - \cos\alpha}$$

folgt, $\sigma_0 = 0$ und mithin jetzt

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\frac{\varkappa}{\sqrt{\cos\beta - \cos\alpha}}\int_0^{\sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\sigma}} = 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\cdot\frac{\varkappa}{\sqrt{\cos\beta - \cos\alpha}}\cdot F(\sigma, \varkappa).$$

Bezeichnen wir nun die Zeit, während welcher der Punkt von einer tiefsten Stelle zur nächsten höchsten gelangt, mit T, so wird ψ von β bis α und in Folge dessen σ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gehen, wie gleichfalls aus der Formel für $\sin^2\sigma$ hervorgeht. Demnach wird

$$T = 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\frac{\varkappa}{\sqrt{\cos\beta - \cos\alpha}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\sigma}} = 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\frac{\varkappa}{\sqrt{\cos\beta - \cos\alpha}}\cdot K.$$

Die Division beider Formeln für t und T ergibt daher

$$t = \frac{T}{K}\cdot F(\sigma, \varkappa).$$

Für $\sigma = \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \ldots$ wird $F(\sigma, \varkappa) = K, 2K, 3K, 4K, \ldots$ und folglich $t = T, 2T, 3T, 4T, \ldots$ Diesen Werthen entspricht aber $\psi = \alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots$ d. h. der bewegliche Punkt befindet sich zu den Zeiten $0, 2T, 4T, \ldots$ in tiefsten, zu den Zeiten $T, 3T, \ldots$ in höchsten Lagen und gebraucht immer dieselbe Zeit, um von einer extremen Lage zur nächstfolgenden zu gelangen.

Aus der Gleichung $t = \frac{T}{K}F(\sigma, \varkappa)$ folgt $F(\sigma, \varkappa) = \frac{K}{T}t$ und weiter durch Umkehrung

$$\sigma = am\,\frac{Kt}{T}, \quad mod\ \varkappa.$$

Indem wir diesen Ausdruck für σ in die Gleichung

$$\cos\psi = \cos\beta - (\cos\beta - \cos\alpha)\sin^2\sigma = \cos\beta\cos^2\sigma + \cos\alpha\sin^2\sigma$$

einführen, gelangen wir zu der gewünschten Gleichung, welche ψ als Function der Zeit darstellt, nämlich

$$\cos\psi = \cos\beta\cos^2 am\,\frac{Kt}{T} + \cos\alpha\sin^2 am\,\frac{Kt}{T}.$$

Nun sind $\cos^2(\sigma \pm \lambda\pi)$ und $\sin^2(\sigma \pm \lambda\pi)$ resp. gleich $\cos^2\sigma$ und $\sin^2\sigma$, wenn λ eine ganze Zahl ist; der Winkel ψ ist daher für alle Lagen des beweglichen Punktes derselbe, deren Amplituden σ sich um ein positives oder negatives Vielfache von π von einander unterscheiden. Aendert sich aber $\sigma = am\,\frac{Kt}{T}$ um $\lambda\pi$, so ändert sich $F(\sigma, \varkappa)$ um $2\lambda K$, also t um $2\lambda T$. Daher ist ψ zu allen Zeiten $t \pm 2\lambda T$ derselbe Winkel, wie zur Zeit t.

Das Vierfache von T ist die Zeit, welche der Punkt braucht, um von einer tiefsten Lage zur folgenden höchsten, von da zur nächsten tiefsten, hierauf wieder zur folgenden höchsten und dann endlich wieder zu der nächsten tiefsten zu gelangen. Diese Zeit stellt die ganze Oscillationsdauer dar. Indessen ist die tiefste Lage, welche der Punkt am Schlusse dieser Zeit erreicht, nicht dieselbe wie zu Anfang, vielmehr verschiebt sich die Stellung der höchsten und tiefsten Lagen im Laufe der Bewegung, wie die Discussion des Winkels φ lehrt.

Man kann die Formel für $\cos\psi$ noch etwas gefügiger gestalten. Dividirt man nämlich die Gleichung $\cos\psi = \cos\beta - (\cos\beta - \cos\alpha)\sin^2\sigma$ mit $\cos\beta$ und

setzt $\frac{\cos\psi}{\cos\beta} = \cos\psi_1$, $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \cos\alpha_1$, so wird $\cos\psi = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1 \sin^2\sigma$, oder also $\sin\frac{1}{2}\psi_1 = \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\sigma$, d. h.

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi_1 = \sin\tfrac{1}{2}\alpha_1 \sin am \frac{Kt}{T}.$$

Zugleich kann auch der Modulus $\varkappa$ bequemer dargestellt werden. Es wird nämlich durch Einführung des Winkels α_1

$$\varkappa^2 = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta} = \frac{1 - \cos^2\alpha_1}{\frac{1}{\cos^2\beta} + 2\cos\alpha_1 + 1} = \frac{4\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1\cos^2\frac{1}{2}\alpha_1}{4\cos^2\frac{1}{2}\alpha_1 + tg^2\beta} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1}{1 + \frac{tg^2\beta}{4\cos^2\frac{1}{2}\alpha_1}}$$

und wenn man also

$$\frac{tg\,\beta}{2\cos\frac{1}{2}\alpha_1} = tg\,\beta_1$$

setzt,

$$\varkappa = \sin\tfrac{1}{2}\alpha_1 \cos\beta_1.$$

Hinsichtlich des Winkels φ wollen wir die Reduction auf die canonische Form nicht weiter verfolgen. Ihre Ausführung zeigt, dass φ einen periodischen Bestandtheil hat und einen anderen, welcher der Zeit proportional wächst. Von besonderem Interesse ist die Kenntniss des Winkels Φ, um welchen die Vertikalebene des Pendelpunktes sich dreht, während dieser von einer höchsten zur nächsten tiefsten Lage fortschreitet. Es kann gezeigt werden, dass dieser Winkel grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist und dass sich folgende Werthe von t, ψ, φ entsprechen:

$$\begin{aligned} t &= 0,\ T,\ 2T,\ 3T,\ 4T,\ \ldots \\ \psi &= \alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta,\ \alpha\ \ldots \\ \varphi &= 0,\ \Phi,\ 2\Phi,\ 3\Phi,\ 4\Phi,\ \ldots \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich, dass die Bahn des Punktes aus congruenten Theilen besteht, welche in die Zeitintervalle zwischen 0 und $2T$, $2T$ und $4T$, $4T$ und $6T$, ... und die Winkel 2Φ, 4Φ, 6Φ, ... fallen, sodass wenn $\frac{\Phi}{\pi}$ rational ist, der Punkt, nachdem er eine Anzahl solcher Theile durchlaufen hat, an seine frühere Stelle wieder gelangt, im Falle, dass dies Verhältniss irrational ist, er aber die Anfangslage nicht wieder erreicht. Die höchsten Punkte rücken auf einem horizontalen Kugelkreise fort.

Wir wollen jetzt die Beschleunigung N des Widerstandes (der Spannung des Fadens) suchen. Dies geschieht sehr einfach, indem man die Beschleunigungen N und g einerseits und $\frac{dv}{dt}$, $\frac{v^2}{\varrho}$ andererseits, welche letzteren jenen zusammen äquivalent sind, auf die Richtung der Flächennormalen (des Pendelfadens) projicirt; die Projectionssummen müssen beidemale dieselben sein. Die beiden ersteren liefern $N - g\cos\psi$, die Tangentialbeschleunigung hat die Projection Null und die Centripetalbeschleunigung, welche die Richtung des Krümmungshalbmessers ϱ der Bahn besitzt, bildet mit dem Pendelfaden einen Winkel, dessen Cosinus $\frac{\varrho}{r}$ ist, wodurch ihre Projection $\frac{v^2}{r}$ wird. Man sieht dies unmittelbar, wenn man bedenkt, dass der Krümmungskreis einer sphärischen Curve auf der Kugel liegt und also der Krümmungshalbmesser derselben die Projection des Kugelradius auf die Schmiegungsebene ist. Demnach besteht die Gleichung

$$N - g\cos\psi = \frac{v^2}{r},$$

aus welcher man zieht:

$$N = \frac{v^2}{r} + g\cos\psi.$$

Combinirt man hiermit die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = g(z - z_0)$$

und ersetzt $\cos\psi$ durch das gleichbedeutende $\frac{z}{r}$, so erhält man:

$$N = \frac{v_0^2 + g(3z - 2z_0)}{r},$$

oder, wenn man noch für $\frac{v_0^2}{2g}$ die Geschwindigkeitshöhe h einführt:

$$N = \frac{g}{r}(3z - 2z_0 + 2h).$$

Zu demselben Resultate gelangt man, indem man die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + N\frac{x}{r} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + N\frac{y}{r} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + N\frac{z}{r} - g = 0$$

der Reihe nach mit x, y, z multiplicirt und addirt, dabei aber berücksichtigt, dass aus der Kugelgleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ durch ein- und zweimalige Differentiiren folgt:

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0, \quad x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} = -\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = -v^2.$$

Man erhält damit: $N = \frac{v^2 + gz}{r}$ u. s. w. Für positive z, d. h. so lange der bewegliche Punkt sich auf der unteren Halbkugel befindet, ist N positiv, d. h. von dem Punkte nach dem Kugelmittelpunkte gerichtet. Erhebt sich der Punkt aber auf die obere Halbkugel, so wird gz negativ und kann auch $v^2 + gz$ und damit N negativ werden; d. h. damit der Punkt auf der Kugelfläche erhalten werde, ist eine nach aussen gerichtete Widerstandsbeschleunigung erforderlich. Für $z = 0$ ist $N = \frac{v^2}{r}$.

Für den Fall, dass das sphärische Pendel sich nur wenig von dem vertikalen Kugelradius entfernt, lässt sich die Untersuchung mit grosser Annäherung leicht durchführen. In diesem Falle nimmt nämlich z nur Werthe an, welche von r sehr wenig verschieden sind und ist, damit dies überhaupt möglich sei, z_0 und folglich h sehr klein. Setzt man daher $z = r - u$, $z_0 = r - u_0$, so erhält man für die Beschleunigung des Widerstandes

$$N = \frac{g}{r}\left\{r - 2u_0 - 2h + 3u\right\} = g\left\{1 - \frac{2u_0 + 2h - 3u}{r}\right\},$$

d. h. sehr nahe $\qquad N = g.$

Hiermit werden aber die Bewegungsgleichungen, wenn man bedenkt, dass $\frac{g}{r}z - g = \frac{g}{r}(z - r) = -\frac{g}{r}u$, $\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{d^2u}{dt^2}$ ist:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{r}x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{r}y = 0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{r}u = 0.$$

Die vollständigen Integrale dieser linearen Gleichungen sind:

$$x = A\cos t\sqrt{\frac{g}{r}} + B\sin t\sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$y = A'\cos t\sqrt{\frac{g}{r}} + B'\sin t\sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$u = A''\cos t\sqrt{\frac{g}{r}} + B''\sin t\sqrt{\frac{g}{r}}$$

und hieraus erhält man mit Rücksicht auf $z = r - u$ für die Componenten der Geschwindigkeit:

$$\frac{dx}{dt} = -A\sqrt{\frac{g}{r}}\sin t\sqrt{\frac{g}{r}} + B\sqrt{\frac{g}{r}}\cos t\sqrt{\frac{g}{r}}$$
$$\frac{dy}{dt} = -A'\sqrt{\frac{g}{r}}\sin t\sqrt{\frac{g}{r}} + B'\sqrt{\frac{g}{r}}\cos t\sqrt{\frac{g}{r}}$$
$$\frac{dz}{dt} = A''\sqrt{\frac{g}{r}}\sin t\sqrt{\frac{g}{r}} - B''\sqrt{\frac{g}{r}}\cos t\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Zur Bestimmung der 6 Constanten mögen die Anfangsbedingungen sein:

$$x = \alpha \qquad y = 0 \qquad z = \gamma$$
$$\frac{dx}{dt} = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = \beta \qquad \frac{dz}{dt} = 0 \qquad \text{für } t = 0,$$

d. h. es möge die xz-Ebene durch einen tiefsten Punkt gehen. Dadurch wird

$$\alpha = A \qquad 0 = A' \qquad r - \gamma = A''$$
$$0 = B \qquad \beta = B'\sqrt{\frac{g}{r}} \qquad 0 = B''$$

und hiermit weiter

$$x = \alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{r}}, \quad y = \sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\beta\sin t\sqrt{\frac{g}{r}}, \quad r - z = (r - \gamma)\cos t\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen ergibt sich, dass die Projection der Bahn des beweglichen Punktes auf die xy-Ebene ist:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{\frac{r}{g}}\,\beta}\right)^2 = 1,$$

also eine Ellipse mit den Halbaxen α und $\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\beta$. Die volle Umlaufszeit T ergibt sich aus dem Ausdrucke für x, indem man $T\sqrt{\frac{g}{r}} = 2\pi$ setzt, nämlich:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}};$$

sie ist also ebenso gross, als die Oscillationsdauer eines einfachen Pendels von derselben Länge r, wie das sphärische, bei kleiner Elongation. — Für die Winkel φ und ψ erhält man:

$$tg\,\varphi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{r}{g}}\,tg\left(t\sqrt{\frac{g}{r}}\right), \quad \sin\psi = \frac{1}{r}\sqrt{\alpha^2\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{r}} + \frac{r}{g}\beta^2\sin^2 t\sqrt{\frac{g}{r}}}.$$

§. 9. Das tiefere Studium der Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Fläche hat bis jetzt nicht sonderlich grosse Fortschritte gemacht. Das einzige bedeutende Beispiel, welchem eine sehr sorgfältige Behandlung zu Theil geworden ist, ist die Bewegung des sphärischen Pendels. Indessen haben Newton und Euler bereits manche werthvolle Andeutung gegeben, welche weiter ausgebeutet werden kann. In dieser Hinsicht ist das 10. Capitel in der *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure* von P. Serret, Paris 1860, von Bedeutung, dessen hauptsächlichsten Inhalt wir hier wiedergeben wollen. Die Möglichkeit, Probleme der fraglichen Art mit Erfolg zu behandeln, wird durch die Kenntniss der geodätischen Krümmung der Curven auf gegebenen Flächen und durch die besondere Beschaffenheit

der Componente der Beschleunigung ψ_t bestimmt, welche in die Tangentenebene der Fläche fällt. Mit Rücksicht hierauf wollen wir die Beschleunigung immer in zwei Componenten zerlegt denken, von denen die eine in die Richtung der Normalen der Fläche, die andere in die Tangentenebene derselben fällt. Bildet ψ mit der Flächennormale den Winkel γ, so ist die erstere von diesen beiden Componenten $\psi \cos \gamma$, die zweite $\psi \sin \gamma$. Die letztere zerlegen wir weiter in zwei Componenten, von denen die eine die Richtung der Tangente an die Bahn des Punktes hat und wie früher mit ψ_t bezeichnet werden soll, während die andere der Normalebene derselben angehört und deren Werth nach §. 6. $\frac{v^2}{\overset{*}{\varrho}}$ ist. Ist α der Winkel, den $\psi \sin \gamma$ mit der Tangente der Bahn bildet, so bestehen demzufolge die Gleichungen

$$\psi_t = \psi \cos \alpha \sin \gamma, \quad \frac{v^2}{\overset{*}{\varrho}} = \psi \sin \alpha \sin \gamma = \psi_n \cos \lambda .$$

Nach demselben §. 6. ist alsdann weiter

$$N = \frac{v^2}{R} - \psi \cos \gamma,$$

wenn R den Radius des Normalschnitts der Fläche bedeutet, welcher die Bahn berührt.

Man kann nun zunächst eine sehr brauchbare Formel für die Geschwindigkeit construiren, durch welche diese Grösse von dem geodätischen Contingenzwinkel abhängig gemacht wird. Nach dem Principe der lebendigen Kraft ist

$$d \cdot \tfrac{1}{2} v^2 = \psi \sin \gamma \cos \alpha \cdot ds;$$

hiermit combiniren wir den Ausdruck für v^2, welcher sich aus der obigen Relation für $\frac{v^2}{\overset{*}{\varrho}}$ ergibt, nämlich:

$$v^2 = \psi \sin \alpha \sin \gamma \cdot \overset{*}{\varrho}$$

und erhalten

$$\frac{d \cdot v^2}{v^2} = \frac{2}{tg\, \alpha} \cdot \frac{ds}{\overset{*}{\varrho}},$$

oder, wenn wir den geodätischen Contingenzwinkel mit $d\varkappa$ bezeichnen, d. h

$$\frac{ds}{\overset{*}{\varrho}} = d\varkappa$$

setzen:

$$\frac{d \cdot v^2}{v^2} = 2 \frac{d\varkappa}{tg\, \alpha}.$$

Hieraus folgt für die Geschwindigkeit:

$$v = C \cdot e^{\int \frac{d\varkappa}{tg\, \alpha}}$$

und ist diese Formel in vielen Fällen sehr brauchbar, weil die Integration oft sehr leicht ausgeführt werden kann. Dieselbe enthält die Grösse

von ψ nicht, sondern nur ihre Richtung, indessen ist die Unabhängigkeit der Geschwindigkeit von der Grösse der Beschleunigung ψ nur scheinbar und spielt dieselbe darin versteckt eine Rolle, indem sie auf die Bahn bestimmenden Einfluss übt und von diesem $d\varkappa$ abhängt.

Die Combination der beiden Gleichungen

$$\frac{v^2}{\overset{*}{\varrho}} = \psi \sin\alpha \sin\gamma$$

$$\frac{v^2}{R} - N = \psi \cos\gamma$$

führt durch Elimination von γ noch zu der weiteren Relation

$$\left(\frac{v^2}{\varrho \sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R} - N\right)^2 = \psi^2.$$

§. 10. Für die Bewegung eines Punktes auf der **Ebene** fällt der Radius der geodätischen Krümmung mit dem Radius ϱ der absoluten Krümmung zusammen (denn jener ist der Krümmungsradius der Deformationscurve des §. 4.) und ist der Radius R für den Normalschnitt unendlich gross; man erhält daher für diese Bewegung

$$\psi_t = \psi \cos\alpha \sin\gamma, \quad \frac{v^2}{\varrho} = \psi \sin\alpha \sin\gamma, \quad N = -\psi\cos\gamma$$

$$v = C \cdot e^{\int \frac{d\tau}{tg\,\alpha}}, \quad \left(\frac{v^2}{\varrho \sin\alpha}\right)^2 + N^2 = \psi^2,$$

wo der absolute Contingenzwinkel $d\tau$ an die Stelle des geodätischen Contingenzwinkels $d\varkappa$ getreten ist.

Ist insbesondere die Componente der Beschleunigung, welche in die Ebene fällt, nämlich $\psi \sin\gamma$, der Richtung nach constant, so sieht man leicht, dass der Contingenzwinkel $d\tau$ die unendlichkleine Abnahme des Winkels α darstellt, welchen die Richtung von $\psi \sin\gamma$ mit der Tangente der Bahn bildet. Es lenkt nämlich diese Beschleunigung die Tangente der Bahn nach der Seite hin ab, auf welche sie selbst fällt. Man hat also zu setzen $d\tau = -d\alpha$ und findet damit

$$\int \frac{d\tau}{tg\,\alpha} = \int -\frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sin\alpha} = -l \sin\alpha$$

und folglich

$$v = \frac{C}{\sin\alpha},$$

d. h. **für jede ebene Bewegung eines Punktes bei einer Beschleunigung von constanter Richtung ist die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn dem Sinus der Neigung der Bahn gegen die constante Beschleunigungsrichtung umgekehrt proportional oder also die Componente der Geschwindigkeit parallel der Normalen constant.**

§. 11. Für die Bewegung auf einer beliebigen **Cylinderfläche** wollen wir die Voraussetzung eintreten lassen, dass die Componente

$\psi \sin \gamma$ der Beschleunigung, welche in die Tangentenebene der Fläche fällt, in jedem Punkte der Bahn die Richtung der Erzeugungslinie habe, während ihre Grösse keiner weiteren Beschränkung unterworfen sei. Der geodätische Contingenzwinkel $d\varkappa$ ist nun der Contingenzwinkel der ebenen Deformationscurve, in welche die Bahn des beweglichen Punktes bei der Abwickelung der Cylinderfläche auf einer Ebene übergeht (Fig. 128.). Derselbe ist aber das Differential des Winkels α, welchen die Erzeugungslinie mit der Tangente der abgewickelten Bahn bildet, welcher bei der Abwickelung keine Veränderung erleidet. Diesen Winkel nehmen wir so, dass der Sinn der Tangente der der Bewegung und der Sinn der Erzeugungslinie der der Beschleunigung ist; dann wird das Differential eine Abnahme von α darstellen, weil die Beschleunigung die Tangente ihrem Sinne entsprechend ablenkt. Daher ist wie in §. 10. $d\varkappa = -d\alpha$ und findet man wie dort

Fig. 128.

$$v = \frac{C}{\sin \alpha}, \quad \frac{v^2}{\varrho} = \psi \sin \gamma \cdot \cos \alpha .$$

Dies sind aber genau die Gleichungen der Bewegung eines Punktes in der Ebene, wenn $\psi \sin \gamma$ eine Beschleunigung von constanter Richtung in derselben und α der Winkel ist, den die Tangente der Bahn mit dieser Richtung bildet. Man gewinnt hieraus den Satz:

Wenn ein Punkt sich auf einer beliebigen Cylinderfläche zu bewegen genöthigt ist und ausser der normalen Widerstandsbeschleunigung der Fläche auf ihn eine Beschleunigung wirkt, deren Projection auf die Tangentenebene des Cylinders fortwährend die Richtung der Erzeugungslinie hat und wenn in einem beliebigen Zeitpunkte die Cylinderfläche sammt der Bahn des Punktes in eine Ebene ausgebreitet würde, zugleich aber jene Beschleunigungscomponente die Richtung der Erzeugungslinie beibehielte, so würde der Punkt die Deformationscurve seiner Bahn mit derselben Geschwindigkeit beschreiben, welche er auf der cylindrischen Bahn besitzt.

Der Widerstand der Fläche ist, wenn man für v den obigen Werth einsetzt

$$N = \frac{C^2}{R \sin^2 \alpha} - \psi \cos \gamma .$$

Es ist aber nach Cap. I, §. 14, Nr. 5. der Krümmungshalbmesser R einer unter dem Winkel α gegen die Erzeugungslinien des Cylinders geneigten (die Bahn berührenden) Schraubenlinie (geodätischen Linie des Cylinders), oder also der Krümmungshalbmesser des berührenden Normalschnitts

$$R = \frac{\varrho}{\sin^2 \alpha},$$

wenn ϱ den Krümmungshalbmesser des zu den Erzeugungslinien senkrechten Schnittes bedeutet. Entnimmt man daher aus dieser Gleichung $R\sin^2\alpha$ und führt seinen Werth ϱ in der Formel für N ein, so kommt

$$N = \frac{C^2}{\varrho} - \psi \cos\gamma .$$

Diese Betrachtungen lehren, dass man die Theorie der Bewegung eines Punktes in der Ebene unter Einfluss einer Beschleunigung von constanter Richtung unmittelbar auf die Cylinderflächen übertragen kann. Ein schwerer Punkt beschreibt daher auf einem Cylinder mit vertikalen Erzeugungslinien eine Curve, welche durch die Abwickelung des Cylinders in eine Parabel übergeht. Ist der Cylinder zugleich ein Kreiscylinder, so sind R und ϱ constant und wird mithin der Druck auf die Fläche gleichfalls durchaus constant sein.

§. 12. Für die Bewegung eines Punktes auf einer Kegelfläche habe $\psi \sin\gamma$ gleichfalls die Richtung der Erzeugungslinie. Aus Fig. 129. ist ersichtlich, dass zwischen dem Contingenzwinkel $d\varkappa$ der Deformationscurve, dem Differentiale von α und dem Winkel $d\sigma$ an der Spitze O des Kegels, zwischen dessen Schenkeln das Bogenelement $MM' = ds$ liegt, die Beziehung besteht:

$$d\varkappa = - d\alpha + d\sigma .$$

Fig. 129.

Es zerfällt nämlich der Winkel $\alpha + d\sigma$ an der Erzeugungslinie, welche durch den Endpunkt M' von ds geht, in zwei Theile, $d\varkappa$ und den geänderten Werthe $\alpha + d\alpha$ von α. Zugleich ist, wenn $OM = r$ gesetzt wird

$$tg\,\alpha = - \frac{r\,d\sigma}{dr},$$

wobei das Zeichen (—) erforderlich ist, weil α bei wachsendem r stumpf, bei abnehmendem r spitz ist. Die Combination beider Formeln liefert

$$\frac{d\varkappa}{tg\,\alpha} = - \frac{d\alpha}{tg\,\alpha} - \frac{dr}{r}$$

und folglich

$$\int \frac{d\varkappa}{tg\,\alpha} = - \int \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sin\alpha} - \int \frac{dr}{r} = - l\,(r \sin\alpha)$$

und hiermit

$$v = \frac{C}{r\sin\alpha} = \frac{C}{p},$$

wenn p das von O auf die Tangente der Bahn gefällte Perpendikel ist. Hierzu tritt wieder die Formel

$$\frac{v^2}{\overset{*}{\varrho}} = \psi \sin\gamma \cdot \sin\alpha .$$

Die erste dieser beiden Gleichungen ergab sich bereits Cap. I, §. 3, Nr. 2. für jede ebene Centralbewegung. Wir erhalten daher wie im vorigen §. den Satz:

Wenn ein Punkt sich auf einer Kegelfläche zu bewegen genöthigt ist und auf ihn eine Beschleunigung wirkt, deren Projection auf die Tangentenebene der Fläche in die Richtung der Erzeugungslinie fällt, so wird derselbe, wenn zu irgend einer Zeit die Kegelfläche sich zu einer Ebene ausbreitet und jene Beschleunigung die Richtung der Erzeugungslinie behält, die ebene Deformationscurve seiner Bahn mit derselben Geschwindigkeit beschreiben, mit welcher er seine conische Bahn durchläuft.

Für den Widerstand N der Fläche ergibt sich, wenn man den oben gefundenen Werth der Geschwindigkeit einführt

$$N = \frac{C^2}{R \sin^2 \alpha \cdot r^2} - \psi \cos \gamma.$$

Die geometrische Bedeutung von $R \sin^2 \alpha$ ist leicht zu erkennen. Zu dem Ende sei $d\Sigma$ der Neigungwinkel zweier aufeinanderfolgender Tangentenebenen des Kegels, welche längs der Erzeugungslinien OM, OM' berühren. Sie bilden mit der Ebene des Normalschnittes der Fläche, welcher durch MM' geht, eine unendlich schmale rechtwinklige körperliche Ecke. Aus dieser ergibt sich für den Contingenzwinkel $d\tau$ des Normalschnittes

$$d\tau = d\Sigma \cdot \sin \alpha.$$

Bedeutet nun ds_1 das Bogenelement des zur Erzeugungslinie OM senkrechten, durch M geführten Normalschnittes, so wird

$$ds \cdot \sin \alpha = ds_1$$

und folglich

$$R = \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{ds_1}{d\Sigma}.$$

Nun ist aber offenbar $\frac{ds_1}{d\Sigma} = \varrho$ der Krümmungshalbmesser dieses zu OM senkrechten Normalschnittes. Daher ist $R \sin^2 \alpha = \varrho$ und geht die Formel für N über in

$$N = \frac{C^2}{r^2 \varrho} - \psi \cos \gamma.$$

Diese Betrachtungen lehren, dass man die Theorie der ebenen Centralbewegung auf die Kegelflächen übertragen kann, wenn man die Spitze des Kegels zum Centrum nimmt.

Mit Rücksicht auf die Formel (§. 10.)

$$\psi^2 = \left(\frac{v^2}{\varrho \sin \alpha}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R} - N\right)^2$$

lässt sich z. B. leicht die Frage beantworten, wie $\psi \sin \gamma$ beschaffen sein müsse, damit die Bahn des beweglichen Punktes eine kürzeste Linie des Kegels (Kegelloxodrome) werde. Da nämlich die kürzeste Linie

bei der Abwickelung des Kegels in eine Gerade übergehen muss, so ist $\overset{*}{\varrho} = \infty$ und da $\frac{v^2}{R} = \frac{C^2}{r^2 \varrho}$, $N = \frac{C^2}{r^2 \varrho} - \psi \cos \gamma$ ist, so folgt

$$\psi \sin \gamma = \frac{C}{r^2 \varrho}.$$

Für den Fall eines Kreiskegels ist ϱ proportional r. Soll daher der Punkt eine Kegelloxodrome beschreiben, so muss die durch die Spitze des Kegels gehende Beschleunigungscomponente der dritten Potenz der Entfernung von der Spitze umgekehrt proportional sein.

§. 13. Die Methode des §. 9. lässt sich mit derselben Leichtigkeit auf die Bewegung eines Punktes auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche anwenden, sobald nur die in die Tangentenebene der Fläche fallende Beschleunigungscomponente die Richtung der Erzeugungslinie besitzt. Man bedarf zur Behandlung hierher gehöriger Aufgaben bloss der Kenntniss der Elemente der geodätischen Krümmung der Curven auf abwickelbaren Flächen. Die beiden Formeln

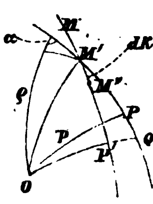
$$v = Ce^{\int \frac{d\varkappa}{tg\,\alpha}}, \quad \frac{v^2}{\overset{*}{\varrho}} = \psi \sin \gamma \cdot \sin \alpha,$$

welche für eine ebene Bewegung gelten, wenn $d\varkappa$ und $\overset{*}{\varrho}$ den absoluten Contingenzwinkel und Krümmungshalbmesser der Bahn bedeuten, führen auch hier zu dem Satze, dass, wenn die Fläche sich zu einer Ebene ausbreitet, der bewegliche Punkt die Deformationscurve seiner Bahn mit ungeänderter Geschwindigkeit beschreibt, vorausgesetzt, dass die Componente $\psi \sin \gamma$ die Richtung der Erzeugungslinie beibehält.

§. 14. Für die Bewegung eines Punktes auf der Kugelfläche wollen wir annehmen, dass die Componente der Beschleunigung, welche in die Tangentenebene der Kugel fällt, immer in der Ebene enthalten sei, welche durch den beweglichen Punkt M und einen festen Kugeldurchmesser hindurchgeht und die wir die Meridianebene des Punktes nennen wollen. Der Winkel, welchen diese Meridianebene mit der Meridianebene der Anfangslage bildet, heisse φ und der Bogen grössten Kreises von dem einen Endpunkte O des festen Durchmessers bis zum Punkte M sei ϱ. Beide Grössen, ϱ und φ sind die sphärischen Polarcoordinaten, nämlich Radiusvector und Polarwinkel des Punktes M. Es kommt nun zunächst darauf an, den Contingenzwinkel und den Radius der geodätischen Krümmung einer sphärischen Curve zu bestimmen. Da die kürzesten Linien der Kugel grösste Kreise sind, so ist der geodätische Contingenzwinkel der Winkel zweier grösster Kreise, welche die Curve in zwei aufeinanderfolgenden Punkten berühren. Vom Pole O (Fig. 130.) fällen wir nun auf diese beiden Kreise die sphärischen Perpendikel $OP = p$, $OP' = p + dp$ und bezeichnen die Winkel OMP, $OM'P'$, welche die

sphärischen Radienvectoren, ϱ und $\varrho + d\varrho$ mit den Kreisen bilden, mit α und $\alpha + d\alpha$, dem Früheren entsprechend, da auch hier α der Winkel ist, den die Beschleunigung $\psi \sin \gamma$ mit der Tangente der Bahn des beweglichen Punktes bildet. Wird α immer auf der Seite der Tangente gerechnet, auf welche die Beschleunigung $\psi \sin \gamma$ fällt, die wir dem Pole zugewandt annehmen, so entspricht wieder ein spitzer Winkel α einer Abnahme von ϱ und hat man daher

Fig. 130.



$$ds \cdot \cos \alpha = - d\varrho.$$

Ist ferner Q der Schnittpunkt von OP' mit MP, so wird $QP' = PM'P' \cdot \sin M'P'$, d. h.

$$d\varkappa \cdot \sin (MP) = - dp.$$

Andererseits ist aber

$$\sin (MP) = tg\, p \cdot cotg\, \alpha = \frac{\sin \varrho \cdot \sin \alpha}{\cos p} \cdot cotg\, \alpha = \frac{\sin \varrho \cdot \cos \alpha}{\cos p}.$$

Durch Combination dieser Gleichungen erhält man

$$\frac{ds}{d\varkappa} = - \frac{\sin \varrho \cdot d\varrho}{\cos p \cdot dp} = - \frac{\sin \varrho \cdot d\varrho}{d \cdot \sin p},$$

d. h. es wird der Radius $\overset{*}{\varrho}$ der geodätischen Krümmung der Bahn des beweglichen Punktes

$$\overset{*}{\varrho} = - \frac{\sin \varrho \cdot d\varrho}{d \cdot \sin p}$$

und der geodätische Contingenzwinkel

$$d\varkappa = - \frac{d \cdot \sin p}{\sin \varrho \, \cos \alpha}.$$

Man erhält hiermit weiter

$$\frac{d\varkappa}{tg\, \alpha} = - \frac{d \cdot \sin p}{\sin \varrho \cdot \sin \alpha} = - \frac{d \cdot \sin p}{\sin p} = - d \cdot l \sin p$$

und folglich wird nach §. 9. die Geschwindigkeit

$$v = \frac{C}{\sin p} = \frac{C}{\sin \varrho \, \sin \alpha},$$

d. h. die Geschwindigkeit ist dem Sinus des sphärischen Abstandes des Poles von dem ihre Richtung im beweglichen Punkte berührenden grössten Kreise umgekehrt proportional.

Weiter erhält man durch die Formel

$$\frac{v^2}{\overset{*}{\varrho}} = \psi \sin \gamma,$$

wenn man in dieselbe für v und $\overset{*}{\varrho}$ ihre Werthe einsetzt,

$$\frac{\sin \varrho \cdot d\varrho}{d \cdot \sin p} = \frac{C^2}{\psi \sin \gamma \, \sin^2 p \, \sin \alpha},$$

welche in Bezug auf p und ϱ als Coordinaten die Differentialgleichung der Bahn darstellt, sobald $\psi \sin \gamma$ durch Elemente der Bahn gegeben ist

Für N findet man, wenn der Radius R des Normalschnittes, welcher der Kugelradius ist, gleich 1 gesetzt wird, wie bisher stillschweigend vorausgesetzt wurde,

$$N = v^2 - \psi \cos\gamma = \frac{C^2}{\sin^2 p} - \psi \sin\gamma.$$

Die hier entwickelte Formel für die Geschwindigkeit v ist das Analogon zu der Formel $v = \frac{C}{p}$, welche bei der ebenen Centralbewegung (Cap. III, §. 10.) vorkommt. Dort ging die Richtung der Beschleunigung durch einen festen Punkt der Ebene, hier geht ihre Projection auf die Kugelfläche durch den Pol.

Man kann diese Analogie noch weiter verfolgen. Da das Bogenelement ds durch die Formel $ds^2 = d\varrho^2 + \sin^2\varrho \cdot d\varphi^2$ in ϱ und φ ausgedrückt werden kann, so wird

$$v^2 = \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \sin^2\varrho \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Weil ferner in dem vorliegenden Falle offenbar das Princip der Flächen für die Projection der Bewegung vom Pole aus auf irgend eine Ebene, z. B. auf die Tangentenebene des Poles gilt, so hat man auch

$$\sin^2\varrho \cdot \frac{d\varphi}{dt} = C;$$

durch Combination beider Gleichungen erhält man, ähnlich wie Cap. III, §. 10, S. 262.

$$v^2 = C^2\left[\frac{1}{\sin^2\varrho} + \left(\frac{\frac{d\varrho}{\sin^2\varrho}}{d\varphi}\right)^2\right]$$

oder

$$v^2 = C^2\left[\frac{1}{\sin^2\varrho} + \left(\frac{d\cdot\frac{1}{tg\,\varrho}}{d\varphi}\right)^2\right].$$

Ferner ist vermöge des Princips der lebendigen Kraft

$$d\cdot\tfrac{1}{2}v^2 = -\psi\sin\gamma\cdot\cos\alpha\cdot ds = -\psi\sin\gamma\cdot d\varrho.$$

Die Differentiation der vorigen Formel liefert daher mit Rücksicht auf diese Gleichung ähnlich, wie Cap. III, §. 10, S. 262.

$$\psi\sin\gamma = \frac{C^2}{\sin^2\varrho}\left[\frac{1}{tg\,\varrho} + \frac{d^2\left(\frac{1}{tg\,\varrho}\right)}{d\varphi^2}\right].$$

§. 15. Die Formeln des vorigen §. liefern unter der Voraussetzung, dass $\psi\sin\gamma$ die Beschleunigung g der Schwere und also der feste Kugeldurchmesser, in welchem sich alle Meridianebenen schneiden, vertikal ist, nicht nur die in §. 8. entwickelten Formeln, sondern auch verschiedene Sätze über das sphärische Pendel. Es ist für diesen Fall $\gamma = \frac{1}{2}\pi - \varrho$, $\psi\sin\gamma = g$ zu setzen. Dadurch wird

$$v = \frac{C}{\sin p}, \quad \overset{*}{\varrho} = \frac{\sin \varrho \, d\varrho}{d \cdot \sin p} = \frac{C^2}{g} \cdot \frac{1}{\sin^3 p}$$

$$N = v^2 - g \cos \varrho .$$

Die erste Gleichung sagt aus, dass für das sphärische Pendel die Geschwindigkeit dem Sinus ihres sphärischen Abstandes vom tiefsten oder höchsten Punkte der Kugel umgekehrt proportional sei. Die zweite ist in Bezug auf ϱ und p als Coordinaten die Differentialgleichung der Bahn. Das Integral derselben ist daher von der Form

$$(A + \cos \varrho) \sin^2 p = \frac{C^2}{2g},$$

worin die Constante A durch die Anfangslage (ϱ_0, p_0) der Geschwindigkeitsrichtung zu bestimmen ist. Zwischen der Pendelbewegung und der ebenen Bewegung eines Punktes, welcher nach einem festen Centrum hin der ersten Potenz der Entfernung proportional beschleunigt wird, besteht ausser der Analogie in Bezug auf das Gesetz, welches die Geschwindigkeit befolgt, noch eine andere. Dort ist der Krümmungshalbmesser der elliptischen Bahn dem Cubus des Abstandes der Geschwindigkeit vom Centrum, hier ist der Radius der geodätischen Krümmung der Bahn dem Cubus des Sinus von p umgekehrt proportional. Der tiefere Grund dieser Analogieen liegt darin, dass bei dem sphärischen Pendel die Beschleunigungscomponente in der Richtung der Tangente an den Bogen ϱ dem Sinus von ϱ proportional ist. Die Bahn ist übrigens keine sphärische Ellipse, sondern im Allgemeinen eine transcendente Curve, wie bereits aus den Betrachtungen in §. 8. hervorging.

Auch die Bedingung, dass der Punkt einen Kugelkreis beschreibe, ist leicht aufzustellen. Hierzu ist erforderlich, dass der Radius der geodätischen Krümmung constant sei. Die Formel für $\overset{*}{\varrho}$ zeigt, dass alsdann p constant sein müsse. Da aber in diesem Falle p und ϱ identisch sind, so ist auch ϱ constant, also kann der Kugelkreis nur horizontal sein; endlich ergibt sich auch, dass v constant bleiben muss. Der Radius $\overset{*}{\varrho}$ für den Kugelkreis ist nun $tg\,\varrho$, wie man sieht, wenn man denselben als den Radius der Deformationscurve ansieht, in welche der Kugelkreis bei der Abwickelung mit dem die Kugel längs ihm berührenden Kegel übergeht. Daher hat man

$$v = \frac{C}{\sin \varrho}; \quad tg\,\varrho = \frac{C^2}{g \sin^3 \varrho},$$

woraus für die Geschwindigkeit folgt

$$v^2 = g \cdot \frac{\sin^2 \varrho}{\cos \varrho}.$$

was mit §. 8., S. 358 übereinstimmt.

Um von den hier gebrauchten Formeln zu denen des §. 8. überzugehen, dient die Bemerkung, dass $\varrho = \psi$, $d\varrho \cdot tg\,\alpha = \sin \varrho \, d\varphi$, also

$tg\alpha = \sin\varrho \cdot \frac{d\varphi}{d\psi}$, $\sin\alpha = \frac{\sin\psi}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\psi}}$ und wenn man die Formel $v = \frac{C}{\sin\varrho \sin\alpha}$ mit $v^2 = 2gz + C'$, welche durch das Princip der lebendigen Kraft gegeben wird, behufs Elimination von v combinirt und die entstehende Gleichung nach $d\varphi$ auflöst, erhält man die eine Formel des §. 8. Wenn man ferner statt v seinen Werth $\frac{ds}{dt}$ setzt und aus der so gewonnenen Gleichung

$$\frac{ds}{dt} = \frac{C}{\sin\varrho \sin\alpha}$$

dt darstellt, $ds : \sin\varrho = d\varphi : \sin\alpha$ zu Hülfe ruft und in ähnlicher Weise α und ϱ eliminirt, erhält man die andere dortselbst für t und ψ gegebene Formel.

§. 16. Um die Theorie des §. 9. auf die Bewegung auf **Rotationsflächen** anzuwenden, bedürfen wir eines bereits von **Clairaut** in den *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris. 1733* aufgestellten Satzes über die kürzesten Linien auf diesen Flächen. Ein ebener Schnitt der Rotationsfläche, geführt durch ihre Axe, heisst ein Meridian, ein ebener Schnitt senkrecht zu ihr ein Parallelkreis und die Neigung einer Curve auf der Fläche gegen die Meridiancurve das Azimuth dieser Curve. Ist nun r der Radius eines durch den Punkt M einer kürzesten Linie gehenden Parallelkreises und i das Azimuth einer kürzesten Linie in M, so sagt der **Clairaut'sche** Satz:

Das Produkt $r \sin i$ aus dem Radius r des Parallelkreises und dem Sinus des Azimuths i ist für alle Punkte einer kürzesten Linie eine constante Grösse.

Es hat nämlich nach §. 2. die kürzeste Linie jeder Fläche die Eigenschaft, dass ihre Schmiegungsebene senkrecht auf der Tangentenebene steht und mithin die Richtung des Krümmungshalbmessers in die Normale fällt. Nach Cap. IV, §. 8. Anm. S. 315 und 316 sind aber die Cosinusse der Winkel λ, μ, ν, welche der Krümmungshalbmesser einer Curve mit drei rechtwinkligen Coordinatenaxen bildet, den Grössen $\frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{ds}$, $\frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{ds}$, $\frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds}$, oder wenn wir s als unabhängige Veränderliche für die kürzeste Linie wählen, den Grössen $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ proportional. Nehmen wir nun die x- und y-Axe in irgend einem Parallelkreise an, zur z-Axe aber die Rotationsaxe, so bildet die Tangente des Parallelkreises in M (x, y, z) mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinusse $-\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, 0 sind und da die Normale der Rota-

tionsfläche und mithin der Krümmungshalbmesser der kürzesten Linie in die Meridianebene fällt und folglich auf der Tangente des Parallelkreises senkrecht steht, so hat man die Bedingung

$$\frac{x}{r}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{y}{r}\frac{d^2x}{ds^2} = 0.$$

Integrirt man diese Gleichung, nachdem man sie mit r multiplicirt hat, so ergibt sich

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = \alpha.$$

Nun sind aber $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Richtungscosinusse für die Tangente der kürzesten Linie und da $-\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, 0 wie vorher die Richtungscosinusse der Tangente des Parallelkreises bedeuten, so stellt $\frac{x}{r}\frac{dy}{ds} - \frac{y}{r}\frac{dx}{ds}$ den Cosinus der Neigung der Tangente der kürzesten Linie gegen die Tangente des Parallelkreises oder den Sinus des Azimuths der kürzesten Linie dar. Es ist daher $\sin i = \frac{\alpha}{r}$ oder

$$r \sin i = \alpha,$$

w. z. b. w.

Um nun den geodätischen Contingenzwinkel für irgend eine Curve auf der Rotationsfläche in einem ihrer Punkte M zu bestimmen, denken wir uns die zwei nächsten Punkte M' und M'' und legen durch das Element MM', sowie durch das Element $M'M''$ kürzeste Linien, welche die Curve demnach in M und M' berühren. Der Winkel beider kürzesten Linien ist der gesuchte geodätische Contingenzwinkel $d\varkappa$. Nun seien r, $r + dr$ die Radien der Parallelkreise in M, M' und i und $i + di$ die Neigungen der beiden kürzesten Linien resp. gegen die Meridiane von M und M', i' aber sei die Neigung der ersten kürzesten Linie gegen den Meridian von M'. Man hat alsdann einerseits

$$d\varkappa = i' - (i + di),$$

andererseits ist aber nach dem soeben bewiesenen Satze

$$(r + dr) \sin i' - r \sin i = 0.$$

Aus der zweiten dieser Relationen folgt

$$-\frac{\sin i - \sin i'}{\sin i} = \frac{dr}{r},$$

oder unter Anwendung des Satzes $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)$ und mit Rücksicht auf die unendliche Kleinheit der Differenz $i' - i$ und darauf, dass in der Grenze $\frac{1}{2}(i + i') = i$ wird

$$-\frac{\cos i}{\sin i}(i' - i) = \frac{dr}{r}.$$

Entnimmt man hieraus $i' - i$ und substituirt es in die obige Gleichung zwischen dx, i, i' und di, so kommt

$$dx = -\left(di + \frac{\sin i}{\cos i}\frac{dr}{r}\right) = -\frac{d\,(r \sin i)}{r \cos i},$$

welches die gesuchte Formel für dx ist.

Nehmen wir jetzt an, auf einen auf der Rotationsfläche beweglichen Punkt wirke eine Beschleunigung ein, welche fortwährend in die Meridianebene desselben fällt; dann hat die Projection derselben auf die Tangentenebene der Fläche die Richtung der Tangente des Meridians und der frühere Winkel α ist das Azimuth i der Bahn. Daher ist

$$dx = -\frac{d\,(r \sin \alpha)}{r \cos \alpha}$$

und folglich

$$\int \frac{dx}{tg\,\alpha} = -\int \frac{d\,(r \sin \alpha)}{r \sin \alpha} = -\,l\,(r \sin \alpha)$$

und daher weiter

$$v = \frac{C}{r \sin \alpha},$$

sowie

$$\varrho = \frac{v^2}{\psi \sin \gamma \sin \alpha} = \frac{C^2}{\psi \sin \gamma \cdot r^2 \sin^3 \alpha},$$

wozu noch die Formel für den Widerstand hinzutritt:

$$N = \frac{v^2}{R} - \psi \cos \gamma\,.$$

Mit Hülfe dieser Formeln kann man z. B. leicht die Bedingungen aufstellen, unter welchen ein schwerer Punkt einen Parallelkreis der Rotationsfläche, deren Axe vertikal steht, durchläuft. Hierfür ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $r = Const. = r_0$, $\varrho = \frac{r}{\cos \vartheta}$, wo ϑ den Winkel zwischen der Ebene des Parallels und der Tangentenebene, oder, was dasselbe ist, den Winkel zwischen der Axe und der Normalen der Fläche bedeutet und $\gamma = \vartheta$. Man findet

$$v = \frac{C}{r_0} = v_0, \quad \frac{r_0}{\cos \vartheta} = \frac{C^2}{g \sin \vartheta \cdot r_0^{\,2}}, \text{ also } \frac{C}{r_0} = \sqrt{g r_0 \cdot tg\,\vartheta},$$

und mithin

$$v = \sqrt{g r_0 \cdot tg\,\vartheta}.$$

Der Punkt bewegt sich gleichförmig und die Umlaufszeit ist

$$T = 2\pi \cdot \frac{r_0}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{r_0}{g\,tg\,\vartheta}} = 2\pi \sqrt{\frac{S_n}{g}},$$

wenn S_n die Subnormale $\frac{r}{tg\,\vartheta}$ des Meridians bedeutet. Es ist also die Umlaufszeit T gleich der Oscillation eines Pendels von der Länge der Subnormalen des Meridians bei kleinen Elongationen.

Für N erhält man

$$N = \frac{v^2}{r_0} \sin \vartheta - g \cos \vartheta,$$

oder mit Rücksicht auf den Werth von v:

$$N = \frac{g}{\cos \vartheta}.$$

VI. Capitel.

Beschleunigung im unveränderlichen System. Beschleunigung der Translation und der Rotation. Beschleunigung im System, welches sich einer Ebene parallel bewegt.

§. 1. Die Bewegung eines unveränderlichen Systems ist bestimmt durch die Bewegungen dreier Punkte desselben. Sind daher die Geschwindigkeiten dieser nach Grösse und Richtung gegeben, sei es als Functionen der Zeit oder des Ortes oder durch andere Bedingungen, so können mit ihrer Hülfe die Geschwindigkeiten aller übrigen Systempunkte ermittelt werden. Die Lösung dieser und anderer damit in Verbindung stehender Aufgaben war Gegenstand des zweiten Theiles. Auf ähnliche Weise sind aber auch die Beschleunigungen aller Systempunkte von den Beschleunigungen dreier Punkte abhängig. Die Untersuchungen hierüber werden Gegenstand des vorliegenden und der nächstfolgenden Capitel sein.

Zunächst untersuchen wir die Beschleunigung der Punkte eines unveränderlichen Systems, welches zur Zeit t eine einfache Bewegung, d. h. eine Translation oder eine Rotation besitzt.

Im Falle einer Translation haben alle Systempunkte zur Zeit t parallele und gleiche Geschwindigkeiten von demselben Sinne und beschreiben mit ihnen in dem nächstfolgenden Zeitelemente dt parallele und gleiche Elementarwege ds in demselben Sinne, sodass $v = \frac{ds}{dt}$ die Grösse ihrer gemeinsamen Geschwindigkeit darstellt. Besteht nun für das folgende Zeitelement die Translationsbewegung des Systems fort, so beschreiben während desselben die Systempunkte gleichfalls parallele und gleiche Elementarwege in demselben Sinne von derselben oder von unendlich wenig abweichender Richtung, wie im vorhergehenden Zeitelemente mit gemeinsamer Geschwindigkeit v', in welche v übergegangen ist. Daher besitzen alle Systempunkte dieselbe Elementarbeschleunigung, welche ihre Geschwindigkeit v nach Grösse und Richtung ändert und in Folge dessen auch dieselbe Beschleunigung φ und dieselbe Tangential- und Normalbeschleunigung $\varphi_t = \frac{dv}{dt}$ und $\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho}$. Es genügt

die Kenntniss der Beschleunigung eines einzigen Systempunktes, um die Beschleunigung aller zu ermitteln. Besitzt das System nicht blos zur Zeit t, sondern während eines endlichen Zeitraumes eine Translationsbewegung, so gelten diese Betrachtungen für alle Momente dieses Zeitraumes. Die Beschleunigungen aller Punkte sind in jedem Momente gleich, parallel und von demselben Sinne, ändern aber von Moment zu Moment im Allgemeinen ihre gemeinsame Grösse und Richtung.

Besitzt das System zur Zeit t eine Rotation, so sind die Geschwindigkeiten v der Systempunkte den Abständen r der Punkte von der Rotationsaxe proportional und werden, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, durch die Gleichung $v = r\omega$ dargestellt. Vermöge dieser Geschwindigkeiten beschreiben die Punkte im nächsten Zeitelemente dt Wege $ds = r\omega\, dt$, welche Kreisen angehören, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen und deren Radien die Abstände r sind. Besteht nun auch im folgenden Zeitelemente die Rotation um dieselbe Axe fort, so werden die Radien r die Krümmungshalbmesser der Bahnen der Systempunkte und da sie für beide Zeitelemente nach t constant sind, so erhält man für die Tangential- und Normalcomponente der Beschleunigung die Werthe

$$\varphi_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}, \qquad \varphi_n = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$$

und weiter für die Beschleunigung φ selbst und ihre Neigung α gegen die Richtung der Geschwindigkeit v:

$$\varphi = \sqrt{\varphi_n^2 + \varphi_t^2} = r\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}, \qquad tg\,\alpha = \frac{\omega^2}{\frac{d\omega}{dt}}.$$

Für die Punkte in der Entfernung $r = 1$ erhält man

$$\varphi_t = \frac{d\omega}{dt}, \quad \varphi_n = \omega^2, \quad \varphi = \sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}, \quad tg\,\alpha = \frac{\omega^2}{\frac{d\omega}{dt}}.$$

Wir können daher den Inhalt der vorstehenden Formeln in folgenden Sätzen aussprechen:

Die Beschleunigung der Punkte eines rotirenden Systems, sowie ihre Tangential- und Normalcomponente sind dem Abstande r des Punktes von der Rotationsaxe proportional und werden aus den entsprechenden Grössen für die Einheit der Entfernung durch Multiplication mit r gefunden. Für die Einheit der Entfernung ist die Tangentialbeschleunigung die Derivirte der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit, die Normalbeschleunigung aber ist gleich dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit. Die Neigung der Beschleunigung gegen die Richtung der Geschwindigkeit ist

für alle Systempunkte dieselbe; die Richtung der Normalbeschleunigung schneidet die Rotationsaxe rechtwinklig.

Die Tangentialcomponente $\frac{d\omega}{dt}$ heisst die Winkelbeschleunigung des Systems.

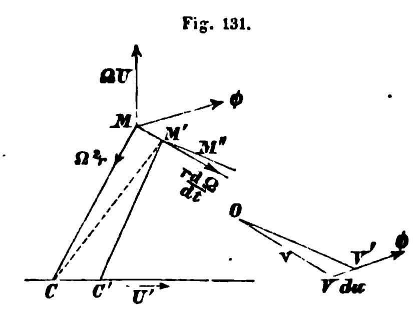
Besitzt das System eine endliche Zeit hindurch eine Rotation um dieselbe Axe, so gelten diese Betrachtungen für jeden Moment derselben. Ist die Rotation gleichförmig, also ω constant, so ist $\varphi_t = 0$, $\varphi_n = r\omega^2 = \varphi$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$; die Totalbeschleunigung φ reducirt sich dann auf die Normalbeschleunigung und ist senkrecht zur Axe.

Aus der Beschleunigung eines einzigen nicht in der Axe gelegenen Punktes eines rotirenden Systems können die Beschleunigungen aller Punkte gefunden werden.

§. 2. Bewegt sich ein unveränderliches System einer Ebene parallel oder, was auf dasselbe hinauskommt, bewegt sich ein ebenes System in seiner Ebene, so genügt die Kenntniss der Bewegung zweier Punkte desselben, um die Bewegung aller übrigen zu bestimmen. Mit Hülfe dieser Kenntniss kann das Momentancentrum C und der mit ihm zusammenfallende Punkt Γ für jedes Stadium der Bewegung und können die Orte (C) und (Γ), die Winkelgeschwindigkeit Ω um das Momentancentrum C und die Wechselgeschwindigkeit U desselben bestimmt werden. Wir wollen zunächst die Lage von C und die Geschwindigkeiten Ω und U für eine beliebige Zeit t als bekannt annehmen und mit ihrer Hülfe die Beschleunigung der Systempunkte bestimmen.

Zur Zeit t besitze das System die Winkelgeschwindigkeit Ω um C (Fig. 131.) und vermöge dieser beschreibt ein beliebiger Systempunkt M um C den unendlich kleinen Kreisbogen MM' mit der Geschwindigkeit $\Omega \cdot CM$. Zur Zeit $t + dt$ aber ist das Momentancentrum ein anderer Punkt C' und dreht sich um diesen das System mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega + d\Omega$, in Folge dessen der bewegliche Punkt einen zweiten unendlich kleinen Kreisbogen $M'M''$ um C' mit der Geschwindigkeit $(\Omega + d\Omega) C'M'$ beschreibt. Die Richtungen der Geschwindigkeiten $\Omega \cdot CM$ u. $(\Omega + d\Omega) C'M'$ sind senkrecht zu CM und $C'M'$; die unendlich kleine Geschwindigkeitscomponente du, welche zu $\Omega \cdot CM$ hinzutreten muss, um $(\Omega + d\Omega) C'M'$ nach Grösse und Richtung zu bestimmen, ist die Elementarbeschleunigung des Punktes M und sie liefert dessen Beschleunigung, wenn man sie mit dt dividirt. Nun ist die Winkelgeschwindigkeit $\Omega + d\Omega$ des Systems um C' nach Thl. II, Cap. III, §. 3. äquivalent derselben Winkel

Fig. 131.



geschwindigkeit $\Omega + d\Omega$ um C in Verbindung mit einer Translationsgeschwindigkeit senkrecht zu CC', welche durch die Geschwindigkeit des mit C zusammenfallenden Systempunktes angegeben wird, welche dieser durch die Rotation um C' besitzt. Diese Translationsgeschwindigkeit ist $(\Omega + d\Omega)\,CC'$ oder da $U = \frac{CC'}{dt}$ ist, $(\Omega + d\Omega)\,U dt$. Ihr Sinn bestimmt sich, indem man die im Sinne von U gerichtete Tangente der Curve (C) um das Momentancentrum im Sinne von Ω um $\frac{1}{2}\pi$ sich umdrehen lässt. Man erhält daher für M' dieselbe Geschwindigkeit, wenn man sich statt der Rotation des Systems um C' mit der Winkelgeschwindigkeit $(\Omega + d\Omega)$ dasselbe um C auch während des zweiten Zeitelementes rotirend denkt und die Translationsgeschwindigkeit $\Omega U dt + U d\Omega dt$ oder, mit Unterdrückung der unendlich kleinen Grösse $U d\Omega dt$ zweiter Ordnung, $\Omega U dt$ hinzufügt, d. h. es ist

$$(\Omega + d\Omega)\,C'M' = Res.\,((\Omega + d\Omega)\,CM',\ \Omega U dt).$$

Die Geschwindigkeit $(\Omega + d\Omega)\,CM'$ auf der rechten Seite dieser Gleichung, welche der bewegliche Punkt zur Zeit $t + dt$ besitzen würde, wenn er sich im zweiten Zeitelemente gleichfalls um C drehte, geht aus der Geschwindigkeit $\Omega \cdot CM$, welche er zur Zeit t wirklich besitzt, hervor, indem zu dieser die Elementarbeschleunigung der Rotation um C hinzutritt, welche ihrerseits in die beiden Componenten, die tangentiale $CM \cdot \frac{d\Omega}{dt}\,dt$ und die centripetale $CM \cdot \Omega^2 dt$ gespalten werden kann, d. h. es ist

$$(\Omega + d\Omega)\,C'M = Res.\,(\Omega \cdot CM,\ CM \cdot \frac{d\Omega}{dt}\,dt,\ CM \cdot \Omega^2 dt,\ \Omega U dt).$$

Es sind daher $CM \cdot \frac{d\Omega}{dt}\,dt$, $CM \cdot \Omega^2 dt$, $\Omega U dt$ die Componenten der Elementarbeschleunigung du des Punktes M, welche in Verbindung mit dessen Geschwindigkeit $\Omega \cdot CM$ seine Geschwindigkeit $(\Omega + d\Omega)\,C'M'$ für die Zeit $t + dt$ bilden. Dividiren wir sie sämmtlich mit dem Zeitelemente dt, so erhalten wir, wenn wir noch r für CM schreiben, als Componenten der Beschleunigung des Punktes M

$$r\frac{d\Omega}{dt},\quad \Omega^2 r,\quad \Omega U.$$

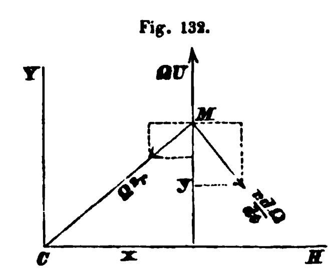
Man kann dies Resultat in folgendem Satze aussprechen:

Die Beschleunigung der Punkte eines ebenen Systems, welches sich in seiner Ebene bewegt, kann in jedem Augenblicke in zwei Componenten zerlegt werden, nämlich in die Beschleunigung, welche die Punkte der Rotation um das Momentancentrum allein verdanken und welche sie besitzen würden, wenn dies Centrum nicht wechselte, und eine Beschleunigung, welche von der Wechselgeschwindigkeit des Momen-

tancentrums abhängt. Die erstere Componente kann in zwei weitere zerfällt werden, nämlich in eine tangentiale $r\frac{d\Omega}{dt}$, senkrecht zu dem von dem Momentancentrum nach dem Systempunkte hinführenden Radiusvector r und eine centripetale $\Omega^2 r$, welche nach dem Momentancentrum hin gerichtet ist. Die von der Wechselgeschwindigkeit U des Momentancentrums herrührende Beschleunigung ist für alle Systempunkte von derselben Grösse, Richtung und Sinn und hat den Werth ΩU; ihre Richtung und ihr Sinn werden erhalten, wenn man die Wechselgeschwindigkeit U im Sinne der Winkelgeschwindigkeit Ω nur $\frac{1}{2}\pi$ um das Momentancentrum umdreht; sie ist parallel der Normalen der Curve (C).

§. 3. Wir wollen jetzt die Componenten der Beschleunigung eines Systempunktes parallel zwei zu einander senkrechten Richtungen suchen (Fig. 132.). Die erste derselben sei die Richtung der Tangente an die Curve der Momentancentra in C, positiv im Sinne der Geschwindigkeit V, die zweite die Richtung der Normalen derselben Curve in C, positiv im Sinne der gemeinsamen Beschleunigungscomponente ΩU genommen und der positive Sinn von Ω werde von der positiven y- zur positiven x-Axe gewendet angenommen. Dann sind für x und y als Coordinaten von M die Richtungscosinusse der Tangentialcomponente $r\frac{d\Omega}{dt}$ gleich $\frac{y}{r}$, $-\frac{x}{r}$, mithin ihre Componenten parallel zur x- und y-Axe $\frac{d\Omega}{dt}y$, $-\frac{d\Omega}{dt}x$. Für die Richtungscosinusse der Normalcomponente $r\Omega^2$ erhält man dagegen $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$ und daher werden deren Componenten $-\Omega^2 x$, $-\Omega^2 y$. Da nun ΩU selbst die Richtung der y-Axe besitzt, so ergeben sich für die Gesammtcomponenten X, Y der Beschleunigung von M parallel zur Tangente und Normalen der Curve (C):

Fig. 132.



$$X = -\Omega^2 x + \frac{d\Omega}{dt}y$$

$$Y = -\Omega^2 y - \frac{d\Omega}{dt}x + \Omega U.$$

Alle Punkte des Systems, deren Beschleunigung parallel der Normalen der Curve (C) ist, genügen der Bedingung $X = 0$ und liegen mithin auf der Geraden

$$-\Omega^2 x + \frac{d\Omega}{dt}y = 0,$$

welche durch das Momentancentrum geht und mit der Tangente der Curve (C) einen Winkel α bildet, für welchen

$$tg\,\alpha = \frac{\Omega^2}{\frac{d\Omega}{dt}}.$$

Dieser Winkel ist nach §. 2. gleich dem Winkel, welchen die Beschleunigung eines Systempunktes bei der Rotation des Systems mit der Tangente der Bahn bilden würde, wenn das Centrum C nicht wechselte.

Alle Punkte des Systems, deren Beschleunigung parallel zur Tangente der Curve (C) ist, erfüllen die Bedingung $Y = 0$ und liegen daher auf der Geraden

$$\frac{d\Omega}{dt}x + \Omega^2 y - \Omega U = 0.$$

Diese Gerade schneidet auf der Tangente und Normalen der Curve (C), von C an gerechnet, die Strecken

$$CH = \frac{\Omega U}{\frac{d\Omega}{dt}} = \frac{\Omega^2}{\frac{d\Omega}{dt}} \cdot \frac{U}{\Omega} = \frac{U}{\Omega}\,tg\,\alpha \text{ und } CJ = \frac{U}{\Omega}$$

(Fig. 133.) ab und ist von C um

$$\delta = \frac{\Omega U}{\sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}} = \frac{\Omega^2}{\sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}} \cdot \frac{U}{\Omega} = \frac{U}{\Omega} \cdot \sin\alpha \text{ entfernt.}$$

Hieraus ergibt sich sofort, dass die zweite Gerade auf der ersten senkrecht steht. Uebrigens folgt dies auch aus der Natur der Gleichungen beider Geraden. Denn die Bedingung des Senkrechtstehens zweier Geraden

$$Ax + By + C = 0$$

und

$$A'x + B'y + C' = 0$$

aufeinander, nämlich die Gleichung $AA' + BB' = 0$ ist erfüllt, da

$$A = B' = -\Omega^2, \quad B = -A' = \frac{d\Omega}{dt}.$$

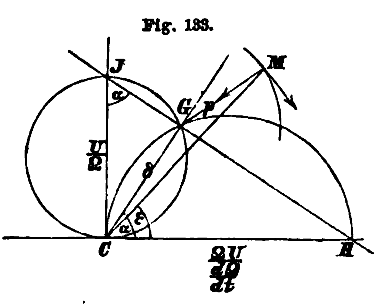


Fig. 133.

Die Grösse $\frac{U}{\Omega}$ ist der Thl. II, Cap. III, §. 8. definirte Radius der relativen Krümmung der Curven (C) und (Γ), den wir mit $\overset{*}{\varrho}$ bezeichnen und für welchen die Gleichung besteht:

$$\frac{1}{\overset{*}{\varrho}} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'},$$

welche man behufs der Construction auf folgende Weise umschreiben kann:

$$\overset{*}{\varrho} = \frac{\varrho\varrho'}{\varrho' - \varrho} = \varrho + \frac{\varrho^2}{\varrho' - \varrho}.$$

Ist $\frac{d\Omega}{dt} = 0$, also Ω zwei Zeitelemente hindurch constant, so wird $CA = \infty$ und $\delta = \overset{*}{\varrho}$.

§. 4. Die beiden Geraden des vorigen §. schneiden sich in einem Punkte, dessen Beschleunigung gleich Null ist. Derselbe heisst das Beschleunigungscentrum des Systems und existirt, da er Schnittpunkt zweier zu einander rechtwinkliger Geraden ist, in jedem Momente der Bewegung, wechselt aber von Moment zu Moment. Sind x_1, y_1 die Coordinaten dieses Punktes, so genügen dieselben dem System der Gleichungen

$$\Omega^2 x_1 - \frac{d\Omega}{dt} y_1 = 0$$

$$\frac{d\Omega}{dt} x_1 + \Omega^2 y_1 = \Omega U,$$

aus welchen für sie die Werthe folgen:

$$x_1 = \frac{\Omega \frac{d\Omega}{dt}}{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2} \cdot U = \frac{\Omega^2 \frac{d\Omega}{dt}}{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2} \cdot \frac{U}{\Omega} = \frac{U}{\Omega} \sin\alpha \cos\alpha$$

$$y_1 = \frac{\Omega^3}{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2} \cdot U = \frac{\Omega^4}{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2} \cdot \frac{U}{\Omega} = \frac{U}{\Omega} \sin^2\alpha,$$

wie sich auch aus Figur 133. unmittelbar ergibt. Das Beschleunigungscentrum kann nur dann unbestimmt werden, wenn $\frac{U}{\Omega}$ unbestimmt wird. was nur für besondere Punkte der Curven (C) und (Γ) eintreten kann

Mit Hülfe der Coordinaten x_1, y_1 des Beschleunigungscentrums 6 kann man die Componenten X, Y der Beschleunigung des Systempunktes M etwas einfacher darstellen. Ziehen wir nämlich von den allgemeinen Gleichungen des §. 3. für X, Y die Gleichungen für x_1, y_1 ab. so folgt

$$X = -\Omega^2 (x - x_1) + \frac{d\Omega}{dt} (y - y_1)$$

$$Y = -\Omega^2 (y - y_1) - \frac{d\Omega}{dt} (x - x_1),$$

oder wenn wir den Coordinatenursprung in das Beschleunigungscentrum (x, y_1) verlegen und hierfür $x - x_1 = \xi$, $y - y_1 = \eta$ setzen

$$X = -\Omega^2 \xi + \frac{d\Omega}{dt} \eta$$

$$Y = -\Omega^2 \eta - \frac{d\Omega}{dt} \cdot \xi.$$

Nun sind aber, wenn p die Länge der Strecke bezeichnet, welche von

Beschleunigungscentrum nach dem Punkte M hinführt, $-\frac{\xi}{p}$, $-\frac{\eta}{p}$ die Richtungscosinusse dieser Linie in dem Sinne nach dem Beschleunigungscentrum hin genommen und $\frac{\eta}{p}$, $-\frac{\xi}{p}$ die Richtungscosinusse einer auf dieser Linie senkrechten Geraden, deren Sinn mit dem Drehungssinne von Ω harmonirt. Daher sind $-\Omega^2\xi = \Omega^2 p \cdot \left(-\frac{\xi}{p}\right)$ und $-\Omega^2\eta = \Omega^2 p \cdot \left(-\frac{\eta}{p}\right)$ die Componenten einer Beschleunigung $\Omega^2 p$, deren Richtung durch das Beschleunigungscentrum geht und deren Sinn nach diesem hin gerichtet ist; ebenso sind $\frac{d\Omega}{dt}\eta = p\frac{d\Omega}{dt}\cdot\left(\frac{\eta}{p}\right)$ und $-\frac{d\Omega}{dt}\xi = p\frac{d\Omega}{dt}\left(-\frac{\xi}{p}\right)$ die Componenten einer anderen Beschleunigung $p\frac{d\Omega}{dt}$, welche senkrecht zu der Linie p ist und bei positivem $\frac{d\Omega}{dt}$ dem Sinne nach mit Ω übereinstimmt. Hierdurch erhält man den Satz:

Für die Bewegung eines unveränderlichen ebenen Systems in seiner Ebene zerfällt die Beschleunigung jedes Systempunktes in jedem Zeitelemente in zwei Componenten, von denen die eine nach dem Beschleunigungscentrum hin gerichtet ist, während die andere senkrecht zu der Richtung dieser ist und bei positivem $\frac{d\Omega}{dt}$ dem Sinne nach mit Ω harmonirt. Ist p der Abstand des Systempunktes vom Beschleunigungscentrum, so ist die Grösse der ersteren Componente $\Omega^2 p$, die der letzteren $p\frac{d\Omega}{dt}$. Die Beschleunigung der Systempunkte ist also dieselbe, als ob das System zur Zeit t statt um das Momentancentrum, um das Beschleunigungscentrum, aber zwei Zeitelemente hindurch rotirte.

Der Ort aller Punkte des Systems, welche dieselbe Beschleunigung β besitzen, ergibt sich aus den obigen Gleichungen zwischen ξ und η, indem man $X^2 + Y^2 = \beta^2$ setzt, nämlich

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{\beta^2}{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}.$$

Die Punkte gleicher Beschleunigung β liegen also auf einem um das Beschleunigungscentrum als Mittelpunkt beschriebenen Kreise. Der Radius dieses Kreises ergibt sich, indem man die Beschleunigung β durch die Beschleunigung $\sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}$ in der Einheit der Entfernung vom Beschleu-

nigungscentrum dividirt. Dieser Satz folgt auch unmittelbar daraus, dass beide Componenten der Beschleunigung, also auch diese selbst p proportional sind.

Ist die Winkelgeschwindigkeit Ω des Systems constant, so fällt das Beschleunigungscentrum in die Normale der Curve (C).

§. 5. Die Gerade CM, welche das Momentancentrum C mit dem Systempunkte M verbindet, ist die Normale der Bahn des letzteren in M; indem wir die Componenten X, Y auf diese Gerade projiciren und ihre Projectionssumme bilden, erhalten wir die Normalbeschleunigung φ_n des Punktes M. Nun sind die Richtungscosinusse von CM gegen die Axen des x, y gleich $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ und folglich wird

$$\varphi_n = X\frac{x}{r} + Y\frac{y}{r} = -\frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{r^2} + \Omega U\frac{y}{r}$$

oder

$$\varphi_n = -\Omega^2 r + \Omega U \sin\varepsilon,$$

wenn ε den Winkel bezeichnet, welchen CM mit der x-Axe bildet. Die Normalbeschleunigung wird dabei positiv oder negativ gerechnet, je nachdem ihr Sinn mit dem Sinne von CM übereinstimmt oder diesem entgegengesetzt ist.

Der Ort aller Systempunkte, für welche die Normalbeschleunigung φ_n verschwindet, hat die Gleichung

$$\Omega^2(x^2+y^2) - \Omega U y = 0,$$

oder

$$x^2 + y^2 - \frac{U}{\Omega}y = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung eines Kreises vom Radius $\frac{1}{2}\frac{U}{\omega}$, welcher im Punkte C die x-Axe berührt. Auf ihm liegt das Beschleunigungscentrum, weil für dieses die totale Beschleunigung, mithin auch φ_n gleich Null ist. Man hat daher den Satz:

Der Ort aller Systempunkte, deren Normalbeschleunigung φ_n zur Zeit t verschwindet, ist ein Kreis, welcher die Curve der Momentancentra im Momentancentrum C, welches der Zeit t entspricht, berührt, dessen Radius gleich dem halben Radius der relativen Krümmung der aufeinander rollenden Curven (C) und (Γ) ist und welcher durch das Beschleunigungscentrum hindurchgeht.

Die Tangente der Bahn des Systempunktes M bildet mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinusse sind $\frac{y}{r}$, $-\frac{x}{r}$, daher wir dessen Tangentialbeschleunigung

$$\varphi_t = X\frac{y}{r} - Y\frac{x}{r} = \frac{d\Omega}{dt}\frac{x^2+y^2}{r^2} - \Omega U\frac{x}{r}$$

oder

$$\varphi_t = r\frac{d\Omega}{dt} - \Omega U \cos\varepsilon.$$

Für die Systempunkte, deren Tangentialbeschleunigung Null ist, erhält man

$$\frac{d\Omega}{dt}(x^2 + y^2) - \Omega U x = 0, \text{ d. h.:}$$

Der Ort aller Systempunkte, deren Tangentialbeschleunigung φ_t zur Zeit t verschwindet, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Tangente der Curve der Momentancentra im Abstande $\frac{1}{2}\frac{\Omega U}{\frac{d\Omega}{dt}}$ vom Momentancentrum liegt; derselbe enthält auch das Beschleunigungscentrum.

Die beiden hier erwähnten Kreise, für welche resp. φ_n und φ_t verschwinden, wurden zuerst von Bresse gefunden (*Mémoire sur un théorème nouveau concernant les mouvements plans et sur l'application de la cinématique à la détermination des rayons de courbure. Journal de l'école polytechn. T. XX, p. 104, a. 1853*). Sie schneiden sich beide im Beschleunigungscentrum und sind über den Strecken CH, CJ in Fig. 133. als Durchmesser beschrieben. Die Punkte des ersten Kreises haben nur Tangentialbeschleunigung, aber keine Normalbeschleunigung. Da nun die letztere $\frac{v^2}{\varrho}$ zum Ausdrucke hat und v nicht Null ist, so folgt, dass für diese Punkte der Krümmungshalbmesser ihrer Bahnen zur Zeit t unendlich gross wird, dass sie also in diesem Momente einen Wendepunkt ihrer Bahnen passiren. Der Punkt J, in welchem die Normale der Curve der Momentancentra den Ort der Wendepunkte des Systems zur Zeit t schneidet und welcher dem Momentancentrum diametral gegenüber liegt, hat eine wichtige Bedeutung für die Bestimmung des Krümmungshalbmessers der Bahnen und wird der Wendepol des Systems für die Zeit t genannt. Der Ort der Wendepunkte ist in der absoluten Ebene wie im System mit der Lage des Systems veränderlich.

Der zweite Kreis enthält alle Punkte des Systems, für welche zur Zeit t die Tangentialbeschleunigung Null ist, für welche also die Geschwindigkeit zwei Zeitelemente hindurch constant bleibt. Im Allgemeinen erreichen diese Punkte zur Zeit t ein Maximum oder Minimum ihrer Geschwindigkeit.

§. 6. Durch die etwas speciell gewählte Lage des Coordinatensystems wurde der vorstehenden Untersuchung eine gewisse geometrische Durchsichtigkeit bewahrt. Indessen ist es nicht schwer, diese Betrachtungen auch in allgemeinerer Form durchzuführen und das Bedürfniss hierfür stellt sich heraus, wenn es sich z. B. um die Aufsuchung des Ortes aller Beschleunigungscentra für ein bestimmtes Bewegungsproblem oder des Ortes aller Systempunkte handelt, welche nach und nach mit dem Beschleunigungscentrum zusammenfallen oder wenn man die Enveloppe aller Wendekreise untersuchen wollte u. s. w.

Nehmen wir in der absoluten Ebene ein festes Coordinatensystem der x, y, in dem beweglichen System ein mit diesem bewegliches, mit ihm aber fest verbundenes der x', y' an und bezeichnen ausserdem mit x_1, y_1 die Coordinaten des Ursprungs des letzteren und mit a, b; a', b' die Richtungscosinusse seiner Axen gegen die Axen des festen Coordinatensystems, so bestehen für den Systempunkt x', y', welcher zur Zeit t die absoluten Coordinaten x, y hat, die Relationen:

$$x = x_1 + ax' + a'y'$$
$$y = y_1 + bx' + b'y'.$$

Differentiiren wir dieselben zweimal mit Rücksicht darauf, dass x', y' von der Zeit unabhängig sind, nach t, so kommt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + x'\frac{da}{dt} + y'\frac{da'}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + x'\frac{db}{dt} + y'\frac{db'}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + x'\frac{d^2a}{dt^2} + y'\frac{d^2a'}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2} + x'\frac{d^2b}{dt^2} + y'\frac{d^2b'}{dt^2},$$

welche Formeln die Componenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Punktes x', y' parallel den absoluten Axen liefern.

Für die Coordinaten x_1', y_1' des Beschleunigungscentrums gelten, weil für diesen Punkt $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ sind, die Gleichungen

$$0 = \frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1'\frac{d^2a}{dt^2} + y_1'\frac{d^2a'}{dt^2}$$

$$0 = \frac{d^2y_1}{dt^2} + x_1'\frac{d^2b}{dt^2} + y_1'\frac{d^2b'}{dt^2}$$

Indem man diese Gleichungen von den vorigen abzieht, eliminirt man die Componenten der Beschleunigung des beweglichen Ursprungs und erhält für die Componenten der Beschleunigung eines beliebigen Systempunktes die etwas einfacheren Formeln:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (x' - x_1')\frac{d^2a}{dt^2} + (y' - y_1')\frac{d^2a'}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (x' - x_1')\frac{d^2b}{dt^2} + (y' - y_1')\frac{d^2b'}{dt^2}$$

Für die Punkte x', y', deren Normalbeschleunigung $\frac{v^2}{\varrho}$ verschwindet, hat man wegen

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \qquad \varrho = \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}$$

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

die Gleichung

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

in welcher die Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ mit Hülfe der obigen Formeln durch die Grössen x', y' auszudrücken sind.

Für die Punkte x', y', deren Tangentialbeschleunigung $\frac{dv}{dt}$ verschwindet, ist

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

in derselben Weise zu behandeln.

Um in diesen Gleichungen die beiden Bresse'schen Kreise wiederzuerkennen, wollen wir die Tangente und Normale der Curve (C) zu Axen der x, y und die mit ihnen zusammenfallenden Geraden des Systems zu Axen der x', y' nehmen. Es ist dann, weil im Allgemeinen, wenn α den Winkel bedeutet, den die Axe des x' mit der Axe des x bildet

$$\begin{array}{llll}
a = \cos\alpha, & & \frac{da}{dt} = -\sin\alpha\cdot\Omega = -b\Omega, & \frac{d^2a}{dt^2} = -a\Omega^2 - b\frac{d\Omega}{dt} \\
b = \sin\alpha, & \frac{d\alpha}{dt} = \Omega & \frac{db}{dt} = \cos\alpha\cdot\Omega = a\Omega, & \frac{d^2b}{dt^2} = -b\Omega^2 + a\frac{d\Omega}{dt} \\
a' = -\sin\alpha, & & \frac{da'}{dt} = -\cos\alpha\cdot\Omega = -a\Omega, & \frac{d^2a'}{dt^2} = b\Omega^2 - a\frac{d\Omega}{dt} \\
b' = \cos\alpha, & & \frac{db'}{dt} = -\sin\alpha\cdot\Omega = -b\Omega, & \frac{d^2b'}{dt^2} = -a\Omega^2 - b\frac{d\Omega}{dt}
\end{array}$$

im vorliegenden Falle

$$\begin{array}{llll}
a = 1 & & \frac{da}{dt} = 0 & \frac{d^2a}{dt^2} = -\Omega^2 \\
b = 0 & \frac{d\alpha}{dt} = \Omega & \frac{db}{dt} = \Omega & \frac{d^2b}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dt} \\
a' = 0 & & \frac{da'}{dt} = -\Omega & \frac{d^2a'}{dt^2} = -\frac{d\Omega}{dt} \\
b' = 1 & & \frac{db'}{dt} = 0 & \frac{d^2b'}{dt^2} = -\Omega^2.
\end{array}$$

Ferner sind $x_1 = y_1 = 0$, ebenso $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt} = 0$, weil der Punkt x_1, y_1 im Momentancentrum liegt und also seine Geschwindigkeit Null ist, $\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0$, weil in Folge der Rotation um das folgende Momentancentrum derselbe Punkt keine Beschleunigung in der Richtung der x-Axe erhält, $\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\Omega U$. Daher wird

$$\frac{dx}{dt} = -\Omega y', \qquad \frac{dy}{dt} = \Omega x'$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\Omega^2 x' - \frac{d\Omega}{dt} y' \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\Omega U + \frac{d\Omega}{dt} x' - \Omega^2 y'$$

und also

$$\frac{v^3}{\varrho} = \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -\Omega^3 (x'^2 + y'^2) + \Omega^2 U y'$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = \Omega \frac{d\Omega}{dt}(x'^2 + y'^2) - \Omega^2 U x',$$

wodurch sich die Gleichungen der Orte $\frac{v^2}{\varrho} = 0$ und $\frac{dv}{dt} = 0$ ergeben als

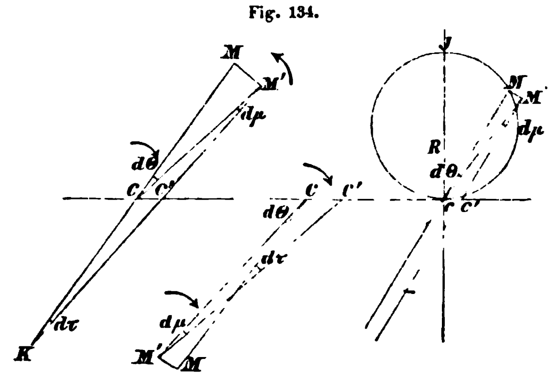
$$x'^2 + y'^2 + \frac{U}{\Omega} y' = 0$$

$$\frac{d\Omega}{dt}(x'^2 + y'^2) - \frac{\Omega U}{dt} x' = 0,$$

wie früher, nur mit dem Unterschiede, dass wir den Sinn von Ω und damit die Axe des y' im entgegengesetzten Sinne, wie früher, gerechnet haben.

§. 7. Die vorstehenden Lehren vom Beschleunigungscentrum, dem Orte der Wendepunkte und dem Wendepole stehen in innigstem Zusammenhange mit der Theorie der Krümmung der von den Systempunkten beschriebenen Bahnen. Wir wollen die Hauptsätze dieser Theorie im Zusammenhange synthetisch entwickeln, wenn auch eines der Resultate bereits Thl. I. Cap. III, §. 14. in etwas anderer Form gefunden wurde.

Fig. 134.



Es sei (Fig. 134) C das der Zeit t entsprechende Momentancentrum, C' dasselbe für die Zeit $t + dt$ und M ein Systempunkt, M' seine Lage zur Zeit $t + dt$. Dann sind MC, $M'C'$ d…

Normalen in M, M', folglich ihr Schnittpunkt K der Krümmungsmittelpunkt und MK der Krümmungshalbmesser der Bahn für den Punkt M. Die Tangente der Curve (C) theilt die Ebene in zwei Felder; ein in dem Sinne CC' sehender Punkt hat das eine von ihnen zur Rechten, das andere zur Linken. Nehmen wir an, der Punkt M liege in dem linken Felde und die Rotation $d\Theta$ um das Momentancentrum erfolge im Sinne der Uhrzeigerbewegung; die anderen Fälle lassen sich durch Sinn- und Zeichenwechsel leicht auf diesen zurückführen. Aus dem Dreiecke KCM', dessen Aussenwinkel MCM' gleich $d\Theta$, dessen Winkel K der unendlich kleine Winkel $d\tau$ der beiden Normalen MK, $M'K$ oder der Contingenzwinkel ist und dessen dritten gleichfalls unendlich kleinen Winkel $CM'C'$ wir mit $d\mu$ bezeichnen wollen, folgt dann

$$d\tau = d\Theta - d\mu.$$

Liegt der Punkt M in dem Felde rechts, so wird $d\tau = d\Theta + d\mu$, sodass man allgemein die Formel

$$d\tau = d\Theta + d\mu$$

gelten lassen kann, wenn man nur $d\mu$ als negativ in dem Felde ansieht, welches auf derjenigen Seite von CC' liegt, nach welcher hin die Rotation nicht erfolgt. Um eine Gerade aus der Lage CM der Normalen in M in die Lage $C'M'$ der Normalen in M' überzuführen, kann man sie zuerst um C um den Winkel $d\Theta$ und hierauf um M' um $d\mu$ drehen. Für die Punkte des linken Feldes ist die Drehung $d\mu$ der Drehung $d\Theta$ entgegengesetzt, für die Punkte des rechten Feldes ist sie von demselben Sinne. Ist also der Sinn von $d\Theta$ als positiv angenommen, so ist im ersten Felde $d\mu$ negativ, im zweiten positiv. Im Felde der negativen $d\mu$ allein kann $d\tau$ verschwinden. Für die Punkte M', für welche dies eintreten soll, muss $d\mu = d\Theta$ werden. Sie liegen daher auf einem Kreise, welcher die Curve (C) im Momentancentrum berührt und $d\Theta$ als Peripheriewinkel fasst. Der Radius R dieses Kreises ist daher, wenn CC' mit $d\sigma$ bezeichnet wird,

$$R = \frac{1}{2}\frac{d\sigma}{d\Theta} = \frac{1}{2}\frac{U}{\Omega},$$

d. h. gleich dem halben Radius der relativen Krümmung. Die Punkte dieses Kreises besitzen einen unendlich grossen Krümmungshalbmesser. Für alle Punkte ausserhalb dieses Kreises auf der Seite der negativen $d\mu$ ist $d\tau < d\Theta$, mithin liegt für sie der Krümmungsmittelpunkt auf der Seite von CC', nach welcher hin die Rotation $d\Theta$ erfolgt; für alle Punkte innerhalb des Kreises ist $d\tau > d\Theta$ und liegt folglich der Krümmungsmittelpunkt auf der entgegengesetzten Seite von CC'. Ebendahin fällt er auch für alle Punkte M, welche dem Felde der positiven $d\mu$ angehören. Daher trennt jener Kreis die Punkte, deren Bahnen Krümmungsmittelpunkte K diesseits der Tangente der Curve (C) besitzen von denen,

deren Krümmungsmittelpunkt jenseits liegt; für Punkte des Kreises selbst findet die Wendung des Krümmungsmittelpunktes durch das Unendliche statt. Wir haben daher den Satz:

Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Krümmungshalbmesser ihrer Bahnen zugleich unendlich gross werden und welche zugleich Wendepunkte ihrer Bahnen passiren, ist ein Kreis, welcher die Curve der Momentancentra im Momentancentrum berührt und auf die Seite der gemeinschaftlichen Tangente fällt, nach welcher die Rotation nicht erfolgt. Der Durchmesser dieses Kreises ist gleich dem Radius der relativen Krümmung der Curven (C) und (Γ) und wird durch das Verhältniss des Bogenelementes der Curve (C) zum Winkel $d\Theta$ der Elementarrotation um das Momentancentrum, oder also auch durch $\frac{\dot{U}}{\Omega}$, d. h. durch den Quotienten der Wechselgeschwindigkeit des Momentancentrums durch die Winkelgeschwindigkeit des Systems um dies Centrum angegeben. Die Bahnen aller Punkte, welche im Innern dieses Kreises, sowie der Punkte, welche auf der entgegengesetzten Seite der Tangente der Curve (C) liegen, kehren dem Momentancentrum ihre concave, die Bahnen aller übrigen, ausserhalb des Kreises gelegenen Punkte ihre convexe Seite zu, die Punkte des Kreises selbst verhalten sich in dieser Hinsicht indifferent.

Der erwähnte Kreis heisse der Ort der Wendepunkte und der Punkt auf ihm, welcher dem Momentancentrum diametral gegenüber liegt, der Wendepol des Systems für die dem Momentancentrum C entsprechende Lage desselben. Dem Obigen zufolge liegt dieser Kreis immer an derjenigen Seite der Tangente an die Curve (C), nach welcher die Rotation um das Momentancentrum nicht erfolgt. Liegen daher die Curven (C) und (Γ) auf entgegengesetzten Seiten dieser Tangente, so findet er sich auf der Seite, wo (Γ) liegt; liegen beide auf derselben Seite der Tangente und ist der Krümmungshalbmesser ϱ' von (Γ) kleiner als der Krümmungshalbmesser ϱ von (C), so liegt er gleichfalls auf derselben Seite mit (Γ); ist aber $\varrho' > \varrho$, auf der entgegengesetzten. Dies folgt aus dem obigen Satze in Verbindung mit Thl. III, Cap. III, §.

Es seien wieder C, C' (Fig. 135.) zwei aufeinanderfolgende Momentancentra, M ein beliebiger Systempunkt, M' seine folgende Lage, K der Krümmungsmittelpunkt für M, i der Winkel, den CM mit der gemeinschaftlichen Normalen der Curven (C), (Γ) bildet, J der Wendepol und J' seine Projection auf CM, $CC' = d\sigma$. Man hat dann

$$M'C \cdot d\mu = CM \cdot d\mu = d\sigma \cdot \cos i, \quad CK \cdot d\tau = d\sigma \cos i.$$

Hieraus folgt $d\mu = \frac{d\sigma}{CM} \cos i$, $d\tau = \frac{d\sigma}{CK} \cos i$ und wenn man dies in die Gleichung

$$d\tau = d\Theta - d\mu$$

einsetzt und berücksichtigt, dass

$$2R = \frac{d\sigma}{d\Theta}$$

ist, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{2R \cos i} = \frac{1}{CM} + \frac{1}{CK}.$$

Es ist aber $2R \cos i$ die Projection CJ' des Durchmessers des Wendekreises auf die Verbindungslinie des Systempunktes M mit dem Momentancentrum. Daher ist

$$\frac{1}{CJ'} = \frac{1}{CM} + \frac{1}{CK}.$$

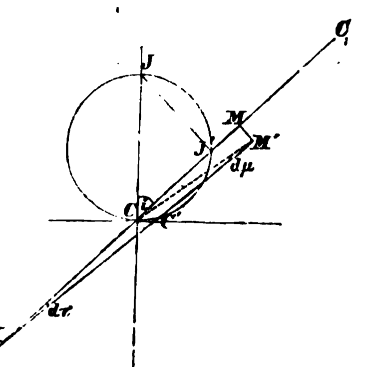


Fig. 135.

Drückt man hierin alle Längen durch MC, MJ', MK aus, indem man setzt $CJ' = MC - MJ'$, $CK = MK - MC$, so geht diese Gleichung über in

$$\overline{MC}^2 = MJ' \cdot MK.$$

Dieselbe Gleichung erhält man auch für den Fall, dass $d\tau = d\Theta + d\mu$ zu Grunde gelegt wird, wenn man den Zeichenwechsel der Liniendifferenzen genau verfolgt. Es ist also der Abstand des Systempunktes vom Momentancentrum das geometrische Mittel zwischen den Abständen desselben vom Krümmungsmittelpunkte und der Projection des Wendepols auf die Normale seiner Bahn. Nimmt man jenseits M den Punkt C_1 symmetrisch zu C an, so wird die Strecke CC_1 von J' und K harmonisch getheilt und ist CC_1 das harmonische Mittel zu C_1J' und C_1K. Man kann daher den vorstehenden Satz auch so fassen:

Die Projection J' des Wendepols J auf die Normale der Bahn eines Systempunktes M und der Krümmungsmittelpunkt K theilen die Strecke zwischen dem Momentancentrum C und dem in Bezug auf den Systempunkt zu C symmetrischen Punkt C_1 harmonisch.

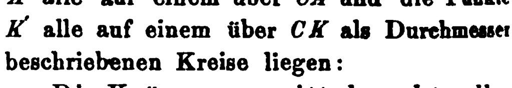
Derselbe Satz ergab sich bereits auf andere Weise in Thl. I, Cap. III, §. 14. Der Rollkreis Abel Transon's ist ein Kreis von doppelt so grossem Halbmesser, als der Wendekreis.

Nehmen wir auf der gemeinsamen Normale der Curve (C), (Γ) einen Punkt A beliebig an (Fig. 136.), und suchen den Krümmungsmittel-

punkt K seiner Bahn, so sind die vier Punkte C, C_1, J, K harmonisch, wobei A in der Mitte von CC_1 liegt. Ziehen wir durch C irgend eine Gerade und projiciren die fünf Punkte A, C, C_1, J, K auf sie, so sind von den Projectionen A', C, C_1', J', K' gleichfalls C, C_1, J', K' harmonisch und A' in der Mitte von CC_1'. Daher ist K' der Krümmungsmittelpunkt der Bahn des Punktes A', d. h.:

Der Krümmungsmittelpunkt der Bahn eines Systempunktes ist die Projection des Krümmungsmittelpunktes eines auf der gemeinschaftlichen Normalen der Curven (C), (Γ) gelegenen Punktes, dessen Projection der Systempunkt ist.

Oder, weil die Punkte A' alle auf einem über CA und die Punkte



K' alle auf einem über CK als Durchmesser beschriebenen Kreise liegen:

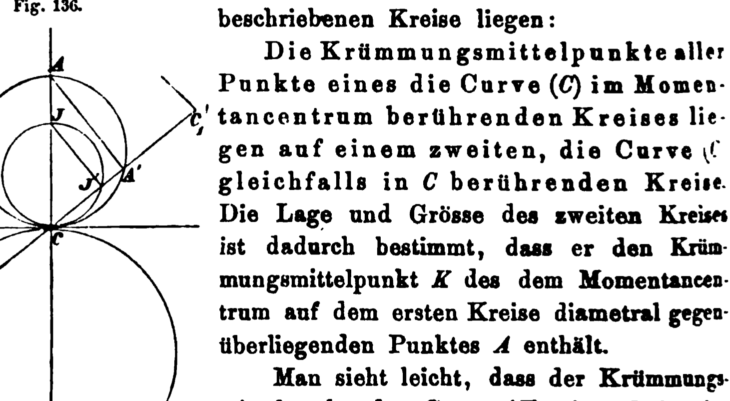


Fig. 136.

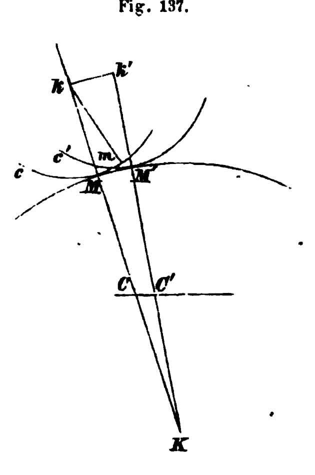
Die Krümmungsmittelpunkte aller Punkte eines die Curve (C) im Momentancentrum berührenden Kreises liegen auf einem zweiten, die Curve (C) gleichfalls in C berührenden Kreise. Die Lage und Grösse des zweiten Kreises ist dadurch bestimmt, dass er den Krümmungsmittelpunkt K des dem Momentancentrum auf dem ersten Kreise diametral gegenüberliegenden Punktes A enthält.

Man sieht leicht, dass der Krümmungsmittelpunkt der Curve (Γ) eine Bahn beschreibt, deren Krümmungsmittelpunkt in den Krümmungsmittelpunkt der Curve (C) der Momentancentra fällt. Denn die Normalen in C, C' schneiden sich im Krümmungsmittelpunkte von (C); die Linie des Systems aber, welche nach der Elementarrotation in die Normale von C' eintritt, ist eine unendlich nahe Normale von (Γ), welche die gemeinschaftliche Normale in C im Krümmungsmittelpunkte von (Γ) schneidet. Dieser Krümmungsmittelpunkt beschreibt daher eine Bahn, für welche die Normalen in C und C' gleichfalls zwei aufeinanderfolgende Normalen sind, für welche also ihr Durchschnitt ebenfalls der Krümmungsmittelpunkt ist.

§. 8. Man kann leicht die Krümmungsverhältnisse der Curven ermitteln, welche Enveloppen von irgend welchen Curven des beweglichen Systems sind. Es seien (Fig. 137.) c, c' zwei aufeinanderfolgende Lagen einer Curve des beweglichen Systems. Von dem Momentancentrum C, entsprechend der Lage c, fällen wir auf c die Normale CM, ebenso von dem folgenden Momentancentrum C' auf c' die Normale $C'M'$. Die Curve c berührt die Enveloppe in M und hat mit ihr die Normale CM

gemein; gleiches gilt von c' in Bezug auf M'. Daher sind CM, $C'M'$ zwei aufeinanderfolgende Normalen der Enveloppe der beweglichen Curve und mithin ist deren Schnittpunkt K ihr Krümmungsmittelpunkt für den Punkt M. Suchen wir nun die erste Lage der Normalen $C'M'$ auf, so ist sie eine Normale von c in einem dem Punkte M unendlich nahen Punkte m und schneidet daher CM in dem Krümmungsmittelpunkte k der beweglichen Curve c entsprechend dem Punkte M, mit welchem sie die Enveloppe berührt. Diese Normale mk geht aber durch die Elementarrotation des Systems in die Normale $C'M'$ über und dabei beschreibt der Punkt k ein Bogenelement kk' seiner Bahn. Da nun die Geraden, welche durch das Momentancentrum gehen, Normalen sind für die Bahnen ihrer sämmtlichen Punkte, so folgt, dass Ck, $C'k'$ zwei aufeinanderfolgende Normalen der Curve sind, welche der Krümmungsmittelpunkt der beweglichen Curve beschreibt und da sie sich in dem Punkte K schneiden, so ergibt sich der Satz:

Fig. 137.



Der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe, welche von einer Curve des beweglichen Systems erzeugt wird in dem Punkte, in welchem die Curve die Enveloppe berührt, ist identisch mit dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn, welche der Krümmungsmittelpunkt der beweglichen Curve selbst bei der Bewegung des Systems beschreibt.

Durch diesen Satz kann also die Untersuchung der Krümmung der Enveloppen auf die Untersuchung der Krümmung der Punktcurven zurückgeführt werden.

Wenden wir den eben entwickelten Satz auf die Enveloppe einer Geraden an. Der Krümmungsmittelpunkt der Geraden beschreibt eine unendlich ferne Curve; der Punkt C_1, welcher in Bezug auf ihn mit C auf der Normalen symmetrisch liegt, ist daher gleichfalls unendlich fern, C und C_1 müssen aber die Entfernung $J'K$ harmonisch theilen, daher muss C in der Mitte von $J'K$ liegen. Daher liegt der Krümmungsmittelpunkt K jener unendlich fernen Curve und damit auch der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe der Geraden für den Punkt, in welchem sie diese letztere berührt, auf einem zu dem Wendekreise gegen die Tangente der Curve (C) symmetrisch liegenden Kreise. Da dasselbe von allen Enveloppen sämmtlicher Geraden des Systems gilt, so haben wir den Satz:

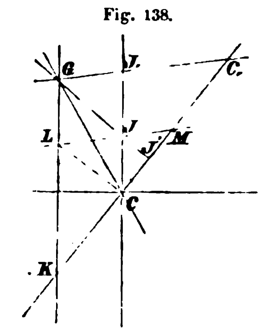
Die Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen, welche

die Geraden eines beweglichen Systems erzeugen, liegen für eine gegebene Lage des Systems sämmtlich auf einem Kreise, welcher die Curve der Momentancentra in dem der betreffenden Lage des Systems entsprechenden Momentancentrum berührt und mit dem Wendekreise dieser Lage von gleicher Grösse ist, aber mit ihm auf entgegengesetzten Seiten der Tangente der Curve der Momentancentra liegt.

Man erkennt die Richtigkeit dieses Satzes auch direct, wenn man bedenkt, dass die Normalen, welche man von C und C' auf die beiden aufeinanderfolgenden Lagen der beweglichen Geraden fällt, mit einander den Winkel $d\Theta$ der Elementarrotation des Systems bilden und dass dieser für alle Geraden desselben derselbe ist, woraus folgt, dass die Schnittpunkte der verschiedenen Normalenpaare, welche verschiedenen Geraden entsprechen, auf einem Kreise liegen müssen, welcher den Winkel $d\Theta$ als Peripheriewinkel fasst. Die nämliche Eigenschaft hat aber der Wendekreis u. s. w.

§. 9. Auf die Betrachtungen der beiden vorigen §§. gründet sich folgende (Fig. 138.) einfache und elegante Construction der Krümmungshalbmesser der Curven, welche von den Punkten des beweglichen Systems beschrieben und mithin auch der Enveloppen welche von den Curven desselben erzeugt werden. Diese Construction setzt nichts voraus, als die Kenntniss des Momentancentrums C' und des Wendepols J.

Fig. 138.



Trägt man auf der gemeinschaftlichen Normalen der Curven (C), (Γ) die Strecke CJ, welche das Momentancentrum mit dem Wendepole verbindet, in dem Sinne CJ als JJ_1 nochmals auf, verbindet den Systempunkt M mit dem Wendepole und zieht durch J_1 mit MJ eine Parallele, so wird letztere von der Geraden JJ', welche den Wendepol auf die Verbindungslinie des Momentancentrums mit dem Systempunkte projicirt, in einem Punkte G getroffen, durch welchen zur gemeinsamen Normalen eine Parallele zu legen ist, um auf CM den gesuchten Krümmungsmittelpunkt K der Bahn des Systempunktes für die Lage M zu erhalten.

Da nämlich J in der Mitte von CJ_1 liegt, so sind C, J_1 das eine, J und der unendlich ferne Punkt der gemeinschaftlichen Normalen von (C) und (Γ) das andere Paar von vier harmonischen Punkten, daher sind GC, GJ das eine und GJ, GK das andere Paar von vier harmonischen Strahlen. Ist also C_1 der Schnittpunkt von GJ_1 mit CM, so sind C, C_1 das eine und J', K das andere Paar von vier harmonischen Punkten und zwar liegt

wegen $JC = JJ_1$ der Punkt M in der Mitte zwischen C und M_1. Die Construction erfüllt also die Bedingungen des §. 7. und da zu C, C', J_1 bei der bestimmt gegebenen Zuordnung der Punkte nur ein vierter harmonischer Punkt K möglich ist, so muss dieser der gesuchte Krümmungsmittelpunkt sein. — Die Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Enveloppen erledigt sich nach §. 8. gleichfalls durch diese Construction.

Man kann diese Construction übrigens noch ein wenig vereinfachen. Die Gerade JM schneidet nämlich GK in einem Punkte L, so dass $\triangle LCJ \cong \triangle GJJ_1$, also LC parallel GJ, d. h. senkrecht zur Normalen CM ist. Es genügt nun, L zu finden und durch diesen Punkt die Linie LK parallel CJ zu ziehen, d. h.:

Verbindet man den Systempunkt M mit dem Wendepol J und errichtet in dem Momentancentrum C auf die Normale CM ein Perpendikel, so bestimmt eine zur gemeinschaftlichen Normale der Curven (C) und (Γ) durch den Schnittpunkt L dieser beiden Geraden geführte Parallele auf CM den Krümmungsmittelpunkt K.

Je nach der Beschaffenheit der Bedingungen, welche die Bewegung des Systems bestimmen, ergibt sich der Wendepol auf eine mehr oder weniger einfache Weise. Sind die beiden Curven (C), (Γ) gegeben, welche aufeinander rollen, so findet sich der Durchmesser des Wendekreises und damit der Wendepol aus den Krümmungsradien beider Curven nach Thl. II, Cap. III, §. 8. Sind die Bahnen zweier Systempunkte A, B gegeben, so erhält man zunächst das Momentancentrum C für die fragliche Lage des Systems durch den Durchschnitt der Normalen dieser Curven in A und B und hat auf ihnen die Krümmungsmittelpunkte K_1, K_2 für diese Curven zu bestimmen. Indem man hierauf auf diesen Normalen die Punkte A_1, B_1 in den Richtungen CA, CB so annimmt, dass $AA_1 = AC$, $BB_1 = BC$ wird, liefern die vierten harmonischen Punkte zu C, A_1; K_1 und C, B_1; K_2 die Punkte J_1', J_2', welche die Projectionen des Wendepoles auf die Linien CA, CB sind. Errichtet man also in J_1', J_2' auf CA, CB Normalen, so ist ihr Durchschnitt der gesuchte Wendepol J des Systems.

Folgende Specialsätze führen oft leicht zur Bestimmung des Wendepols.

Wenn ein Punkt des Systems eine Gerade beschreibt, so geht diese durch den Wendepol. Fällt man nämlich vom Momentancentrum C die Normale auf die Gerade, so bestimmt ihr Fusspunkt die Lage M des beschreibenden Punktes für die durch das Momentancentrum charakterisirte Lage des Systems. Verlängert man CM um $MC_1 = CM$, so müssen der Krümmungsmittelpunkt und der Punkt J' der Projection des Wendepols auf die Normale CM die Strecke CC_1 harmonisch theilen. Da aber der Krümmungsmittelpunkt der Geraden

im Unendlichen liegt, so fällt J' mit der Mitte M von CC_1 zusammen. Die Gerade, welche M beschreibt, ist also selbst die Linie, welche den Wendepol auf die Normale CM projicirt.

Wenn eine Curve des beweglichen Systems fortwährend eine feste Curve berührt, so dass also die gemeinschaftliche Normale beider das Momentancentrum C enthält, und man bestimmt auf dieser Normalen den Punkt K_1', so, dass der Abstand $K'K_1'$ dieses Punktes vom Krümmungsmittelpunkte K' der beweglichen Curve gleich dem Abstande CK' des Momentancentrums von K' wird, so ist der vierte harmonische Punkt J' zu C, K_1' und dem Krümmungsmittelpunkte K der festen Curve die Projection des Wendepoles auf die gemeinsame Normale. Dies folgt daraus, dass der Krümmungsmittelpunkt K zusammenfällt mit dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn, welche K_1' beschreibt, indem die feste Curve die Enveloppe des beweglichen ist.

Als Specialitäten dieses Satzes ergeben sich folgende:

Wenn eine Gerade fortwährend eine feste Curve berührt, so liegt C in der Mitte zwischen K und J'. Denn K_1' und C theilen KJ' harmonisch, aber K_1' liegt im Unendlichen.

Wenn eine Curve des Systems fortwährend eine feste Gerade berührt, so fällt J' in den Krümmungsmittelpunkt K' der Curve. Denn K liegt im Unendlichen, also J in der Mitte zwischen C und K_1', d. h. in K'.

Wenn die feste Curve sich auf einen Punkt reducirt, also eine Curve des Systems fortwährend durch einen festen Punkt geht, so ist J' vierter harmonischer Punkt zum festen Punkte, dem Momentancentrum und zu K_1'. Denn K fällt in den festen Punkt.

Wenn eine Gerade fortwährend durch einen festen Punkt geht, so liegt das Momentancentrum in der Mitte zwischen J' und dem festen Punkte.

§. 10. Als Beispiele zu den Methoden der vorstehenden §§. 7—9 dienen folgende.

1. Krümmungsmittelpunkt der Ellipsen, welche die Systempunkte bei der elliptischen Hypocycloïdenbewegung (S. 36) beschreiben. Da die beiden Punkte A und B zwei gerade Linien beschreiben (Fig. 139.), so geht jede dieser Geraden durch den Wendepol; dieser ist also ihr Schnittpunkt O. Das Perpendikel auf die Verbindungslinie des Systempunktes M mit dem Momentancentrum C, in C errichtet, trifft OM in L; eine Parallele durch L mit OC liefert den Krümmungsmittelpunkt K.

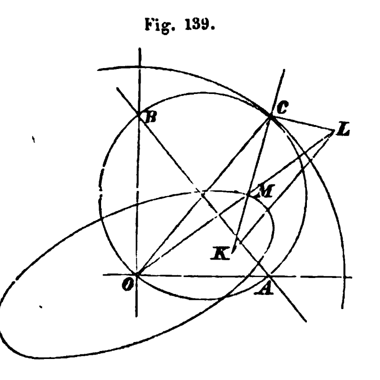
2. Krümmungsmittelpunkt der Curven der Conchoidenbewegung (S. 47). Da der Punkt B eine Gerade beschreibt, so geht diese durch J und liegt B auf dem Wendekreise. Da die Gerade OB sich um den festen Punkt O dreht, so liegt das Momentancentrum C auf OC in der Mitte zwischen O und dem Punkte J'; letzterer liegt also gleichfalls auf dem Wendekreise. Ausserdem geht

dieser Kreis durch C, er kann mithin mit Hülfe dieser drei Punkte construirt werden. Die feste Leitlinie g bestimmt auf ihm den Wendepol u. s. w.

3. Krümmungsmittelpunkt der Curven der Schleifenbewegung (S. 42). Zwei Punkte A, B des Systems beschreiben Kreise, man suche also auf den Normalen dieser Kreise die Punkte J' und errichte in ihnen Perpendikel auf sie, so schneiden sich dieselben im Wendepole u. s. w.

4. Krümmungsmittelpunkte der Cycloïden. Der Mittelpunkt des rollenden Kreises beschreibt eine Gerade parallel der Basis der Cycloïde, mithin geht diese durch den Wendepol und da der Berührungspunkt des rollenden Kreises mit der Basis des Momentancentrums C ist und der Wendepol in der gemeinschaftlichen Normale beider Linien liegt, so fällt er mit dem Mittelpunkte des rollenden Kreises selbst zusammen. Ein Perpendikel vom Wendepole auf die Normale des beschreibenden Punktes M liefert J' und indem man zu C den Punkt C_1 bestimmt und die vier harmonischen Punkte C_1, C; J', K näher untersucht, für welche $J'C_1 : J'C = 3 : 1$ ist, so folgt, dass $CK = CM$ sein muss, wie bekannt. Der Wendekreis behält während der ganzen Bewegung des Systems dieselbe Grösse und relative Lage gegen die Basis. Von allen Cycloïden, welche die verschiedenen Punkte des Systems beschreiben, haben nur diejenigen Wendepunkte, welche von Punkten auf seinem Umfange beschrieben werden.

Fig. 139.



§. 11. Wir wollen noch die Beziehungen der Geschwindigkeiten der Systempunkte zu dem Wendepole entwickeln. Es ist bekanntlich die Geschwindigkeit v des Punktes M

$$v = \Omega \cdot \overline{CM}.$$

Nun war für den Radius R des Wendekreises $2R = \frac{U}{\Omega}$; daher wird

$$v = \frac{U}{2R} \cdot \overline{CM},$$

d. h.: Die Geschwindigkeit eines Systempunktes M ist die vierte Proportionale zu seiner Entfernung vom Momentancentrum, dem Durchmesser des Wendekreises und der Wechselgeschwindigkeit des Momentancentrums.

Hieraus folgt, dass die Geschwindigkeit des Wendepols gleich der Wechselgeschwindigkeit U ist. Man hat ferner für einen beliebigen Punkt des Wendekreises $CM = 2R \cos i$, mithin

$$v = U \cdot \cos i.$$

Für den Punkt Γ, welcher mit dem Momentancentrum C zusammenfällt, hat die Geschwindigkeit die Richtung dieser Normalen und ist wegen $i = 0$ die Grösse derselben $v = U$, also ebenfalls gleich der Wechselgeschwindigkeit des Momentancentrums. Für die übrigen Punkte des Wendekreises

ist sie die Projection der Wechselgeschwindigkeit des Momentancentrums auf die Tangente ihrer Bahnen.

§. 12. Das Beschleunigungscentrum wechselt im Allgemeinen von Moment zu Moment und zwar sowohl in der festen Ebene, als auch im System, sodass jeden Augenblick ein anderer Systempunkt in dasselbe eintritt und immer an einer anderen Stelle. Die Orte der Beschleunigungscentra bildet in der festen Ebene eine Curve, die Punkte des Systems, welche in sie eintreten, eine andere Curve im System; beide stehen aber nicht in einer ähnlichen Beziehung zu einander, wie die Curven (C) und (Γ); im Allgemeinen berühren sie einander nicht.

Für $U = 0$ fällt das Beschleunigungscentrum mit dem Momentancentrum zusammen, wie man aus dem Abstande

$$\delta = \frac{\Omega^2}{\sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}} \cdot \frac{U}{\Omega}$$

ersieht, wie aber auch daraus erhellt, dass in diesem Falle das Momentancentrum nicht wechselt, also zwei Zeitelemente hindurch die Bewegung des Systems eine Rotation um dasselbe Centrum ist und mithin die Beschleunigung die dieser Rotation entsprechende ist.

Für $\Omega = 0$ findet dasselbe statt, nur kann in diesem Falle blos von einer Grenzlage des Momentancentrums die Rede sein.

Rückt das Beschleunigungscentrum ins Unendliche, so werden die Beschleunigungen aller Systempunkte gleich und parallel. Man kann die Beschleunigung in diesem Falle eine Translationsbeschleunigung nennen, darf daraus aber nicht etwa auf eine Translationsbewegung schliessen, denn diese hängt von der Gleichheit und dem Parallelismus der Geschwindigkeiten ab. Im Gegensatze hierzu dürfte es nicht unzweckmässig sein, die Beschleunigung des Systems bei einem Beschleunigungscentrum in endlicher Entfernung eine Rotationsbeschleunigung um dies Centrum zu nennen.

§. 13. Die Geschwindigkeiten zweier Systempunkte genügten, (Thl. II, Cap. III, §. 7.), um den Geschwindigkeitszustand des Systems für eine bestimmte Zeit t zu charakterisiren. Die bekannte Lage und die Richtung der beiden Geschwindigkeiten gab das Momentancentrum, die Grösse der Geschwindigkeit des einen der beiden Punkte allein reichte sodann hin, die Winkelgeschwindigkeit des Systems um das Momentancentrum und damit die Geschwindigkeiten aller Systempunkte zu bestimmen. In ähnlicher Weise können die Beschleunigungen φ_a, φ_b zweier Punkte A und B benutzt werden, um den Beschleunigungszustand durch sie zu definiren.

Ist nämlich G das zu suchende Beschleunigungscentrum, so müssen die Beschleunigungen φ_a, φ_b den Entfernungen GA, GB proportional sein

Daher liegt G auf dem geometrischen Orte aller Punkte G der Ebene, für welche das Verhältniss ihrer Abstände von A und B constant und gleich $\varphi_a : \varphi_b = \lambda$ ist, d. h. auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt auf der Richtung AB liegt und welcher Kreis die Strecke AB nach dem Verhältnisse λ harmonisch theilt. Ferner bilden aber die Beschleunigungen aller Systempunkte mit den Verbindungslinien von ihnen und dem Beschleunigungscentrum gleiche Winkel, deren Tangente durch $\frac{d\Omega}{dt} : \Omega^2$ angegeben wird. Daher muss das Beschleunigungscentrum auch auf einem durch A, B und den Schnittpunkt von φ_a, φ_b gehenden Kreise liegen, denn dieser ist der Ort aller Punkte G, für welche GA mit φ_a, und GB mit φ_b gleiche Winkel bilden. Das Beschleunigungscentrum muss also da liegen, wo beide Kreise sich schneiden. Von den beiden Schnittpunkten dieser Kreise kann aber nur einer das gesuchte Centrum sein. Die Entscheidung hierüber gibt der Umstand, dass die Componenten von φ_a und φ_b, welche in die Linien GA, GB fallen, nach G hin gerichtet sein müssen. Sobald auf diese Weise das Beschleunigungscentrum gefunden ist, genügt die Beschleunigung eines Punktes, um alle weiteren Fragen zu erledigen. Aus den Geschwindigkeiten von A und B kann das Momentancentrum C und die Winkelgeschwindigkeit Ω als gefunden erachtet werden. Daher hat man mit Rücksicht auf §. 2. zwischen der Entfernung GC und GA die Relation

$$GA = \frac{\varphi_a \cdot GC}{\Omega U},$$

aus welcher U seiner Grösse nach erhalten wird. Zerlegt man ferner φ_a nach der Richtung GA und senkrecht dazu, so erhält man, wenn μ den Winkel bedeutet, den φ_a mit der letzteren Richtung, im Sinne von Ω genommen bildet,

$$\varphi_a \cdot \cos\mu = \frac{d\Omega}{dt} \cdot \overline{GA}, \qquad \varphi_a \cdot \sin\mu = \Omega^2 \cdot \overline{GA};$$

die erstere dieser Gleichungen liefert $\frac{d\Omega}{dt}$. Trägt man nun auf AC und der dazu senkrechten Richtung $\Omega^2 \cdot \overline{AC}$ und $\frac{d\Omega}{dt} \cdot \overline{AC}$ auf, letztere Componente im Sinne von Ω, erstere im Sinne von A nach C und sucht zu diesen beiden die dritte Componente, welche mit ihnen zusammen der Beschleunigung φ_a äquivalent sind, so ist diese gleich ΩU, nämlich gleich der gemeinschaftlichen Beschleunigungscomponente aller Systempunkte. Ihre Richtung gibt die Normale der Curve (C).

Aus diesen Entwickelungen erhellt, dass zur Bestimmung des Beschleunigungscentrums die Beschleunigungen zweier Punkte, zur Bestimmung der Grösse der Beschleunigung aller Systempunkte und der Normalen an die Curve (C) nur die eines einzigen Punktes erforderlich ist.

§. 13. Wenn die Bewegung eines ebenen Systems aus mehreren anderen Bewegungen resultirt, so kann man für jeden Augenblick das Momentancentrum und seine Winkelgeschwindigkeit aus den Momentancentris und Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen Bewegungen nach Thl. II, Cap. III, §§. 5, 6. ermitteln. Ebenso kann man auch das Beschleunigungscentrum und die Rotationsbeschleunigung um dasselbe für die zusammengesetzte Bewegung aus den entsprechenden Elementen der Componenten bilden. Hierauf kann man die Theorie der Aequivalenz der Beschleunigungen ebener Systeme begründen, ähnlich wie wir dies Thl. II, Cap. III für die Aequivalenz der Geschwindigkeiten gethan haben. Dabei wird die Beschleunigung der Bewegung eines Systems als bekannt angesehen, sobald das Beschleunigungscentrum und die Componenten Ω^2, $\frac{d\Omega}{dt}$ der Beschleunigung eines Punktes in der Einheit der Entfernung von diesem Centrum ermittelt sind. Das Mittel, diese Betrachtung durchzuführen, besteht in folgendem. Sind z. B. die Beschleunigungen zweier Bewegungen zusammenzusetzen, so wähle man irgend zwei Punkte A und B des beweglichen Systems, welches beide Bewegungen besitzt und setze ihre aus beiden Bewegungen stammenden Beschleunigungen zu ihren Gesammtbeschleunigungen φ_a, φ_b zusammen; hierauf bestimme man aus diesen das Beschleunigungscentrum und die Beschleunigungscomponenten in der Einheit der Entfernung um dasselbe nach den Constructionen des vorigen §. Sollen z. B. zwei Rotationsbeschleunigungen um zwei Beschleunigungscentra G, G' zusammengesetzt werden, so wird man zu A, B diese Centra selbst wählen; jedes von ihnen besitzt bl s von Seiten des anderen eine Beschleunigung. Das resultirende Beschleunigungscentrum fällt nicht in die Gerade $G'G''$.

§. 14. Alle in diesem Capitel entwickelten Lehren gelten auch für die Bewegung eines Systems, welches sich einer Ebene parallel bewegt; statt „Beschleunigungscentrum" hat man nur „Beschleunigungsaxe" zu setzen; sie ist eine Axe senkrecht zur Ebene, mit welcher parallel das System sich bewegt.

An Literatur zu den in diesem Capitel entwickelten Theorieen führen wir ausser der oben bereits citirten Abhandlung von Bresse noch an.

Chelini: *Dei moti geometrici e loro leggi nello spostamento di una figura di forma invariabile. Memoire de l'accademia di Bologna. Ser. II, Vol. 1, p. 66 (1862).*

Gilbert: *Recherches sur les propriétés géométriques des mouvements plans. Mémoires couronnés de l'académie de Bruxelles. T. XXX, p. 1 (1861).*

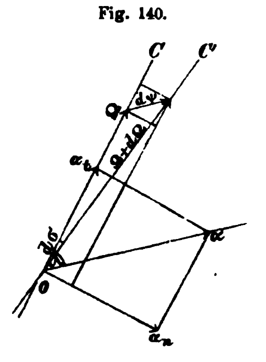
Resal: *Mémoire sur les propriétés géométriques du mouvement le plus général d'un corps solide. Journ. de l'école polytechn. T. XXI, p. 227, a. 1858,* oder: *Tr. de cinématique pure. Paris, 1862. Chap. IV, p. 174.*

VII. Capitel.

Beschleunigung im unveränderlichen System, welches um einen Punkt rotirt.

§. 1. Ein unveränderliches System rotire um den Punkt O (Fig. 140), es sei C die Momentanaxe, entsprechend der Zeit t und Ω die Winkelgeschwindigkeit um sie, C' die Momentanaxe für die Zeit $t + dt$ und $\Omega + d\Omega$ die ihr entsprechende Winkelgeschwindigkeit. Tragen wir Ω und $\Omega + d\Omega$ auf den Axen C und C' nach Grösse und Sinn auf und zerlegen $\Omega + d\Omega$ mit Hülfe des Satzes vom Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten (Thl. II, Cap. IV, §. 1.) in zwei Componenten, von denen die eine mit Ω nach Grösse, Axenrichtung und Sinn übereinstimmt, so ist die andere Componente, welche wegen des unendlich kleinen Winkels $d\sigma$ beider Momentanaxen selbst eine unendlich kleine Grösse $d\psi$ ist, die unendlich kleine Winkelgeschwindigkeitscomponente, welche zu Ω hinzutritt, um Ω nach Grösse und Axenrichtung in $\Omega + d\Omega$ überzuführen. Sie heisst die Elementarwinkelbeschleunigung und der Quotient $\frac{d\psi}{dt}$, den man erhält, indem man sie durch das Zeitelement dividirt, ist die Winkelbeschleunigung des Systems zur Zeit t. Ihre Axenrichtung ist dieselbe wie für $d\psi$ und fällt in die Ebene der beiden aufeinanderfolgenden Momentanaxen C, C', d. h. in die gemeinsame Tangentenebene der Kegelflächen (C) und (Γ), von welchen der zweite während der Bewegung des Systems auf der ersten rollt. Ist also α die Winkelbeschleunigung, so wird sie definirt durch die Gleichung

Fig. 140.



$$\alpha = \frac{d\psi}{dt}.$$

Denkt man sich die Winkelgeschwindigkeit Ω für jedes Element der auf t folgenden Zeiteinheit auf dieselbe Weise nach Grösse und Axenrichtung abgeändert, wie sie sich für das auf t folgende Zeitelement durch die Elementarwinkelbeschleunigung $d\psi$ ändert, so würde α die Gesammtcomponente für diese Aenderung darstellen.

Man kann die Winkelbeschleunigung α in zwei Componenten α_t, α_n zerlegen, von deren Axenrichtungen die eine mit der Momentanaxe zusammenfällt, die andere aber in der Tangentenebene der beiden Kegel senkrecht zu ihr ist. Die erstere heisst die Tangentialcomponente, die zweite die Normalcomponente der Winkelbeschleunigung. Bedeutet λ den Winkel, welchen α mit C bildet, so hat man zunächst

$$\alpha_t = \alpha \cos \lambda, \qquad \alpha_n = \alpha \sin \lambda.$$

Indem man aber die Elementarwinkelbeschleunigung $d\psi$ in demselben Sinne zerlegt, erhält man durch eine analoge Betrachtung, wie Cap. I. §. 9., S. 195:

$$\cos\lambda = \frac{(\Omega + d\Omega)\cos d\sigma - \Omega}{d\psi} = \frac{d\Omega}{d\psi}, \quad \sin\lambda = \frac{(\Omega + d\Omega)\sin d\sigma}{d\psi} = \Omega \cdot \frac{d\sigma}{d\psi}$$

und folglich mit Hülfe des obigen Ausdrucks für α:

$$\alpha_t = \frac{d\Omega}{dt}, \quad \alpha_n = \Omega \cdot \frac{d\sigma}{dt} = \Omega U,$$

wenn man, wie Thl. II, Cap. III, §. 8. die Wechselgeschwindigkeit der Momentanaxe $\frac{d\sigma}{dt}$ mit U bezeichnet, sowie

$$tg\,\lambda = \frac{\alpha_n}{\alpha_t} = \frac{\Omega U}{\frac{d\Omega}{dt}}, \quad \alpha^2 = \alpha_t^2 + \alpha_n^2.$$

Es findet vollkommene Analogie zwischen den hier vorliegend[en] Betrachtungen und denen von Cap. I, §§. 1. und 9. statt. Die Elementarwinkelbeschleunigung ist das geometrische Differential der Winkelgeschwindigkeit, die Winkelbeschleunigung die geometrische Derivirte derselbe[n]. Die Tangentialcomponente α_t der Winkelbeschleunigung stellt die Derivir[te] der Winkelgeschwindigkeit im gewöhnlichen Sinne dar; sie ändert der[en] Grösse, ohne auf die Aenderung der Axenrichtung Einfluss zu hab[en]. Die Axenrichtung wird allein von der Normalcomponenten α_n geänder[t]; diese Componente ist $\frac{d\sigma}{dt}$ proportional, welche Grösse die Wechselgeschwindigkeit U der Momentanaxe darstellt.

Bleibt die Momentanaxe dieselbe, so ist $U = \frac{d\sigma}{dt} = 0$, $\alpha_n = 0$, $\alpha_t = \alpha$, d. h. die Winkelbeschleunigung reducirt sich auf ihre Tangentialcomponente. Ist Ω constant, so wird $\alpha_t = 0$, d. h. es findet blos Norm[al]winkelbeschleunigung statt, durch welche nur die Lage der Momentanaxe geändert wird.

Findet die Rotation gleichförmig zwei Zeitelemente hindurch u[m] dieselbe Axe statt, so sind α_t und α_n beide gleich Null. Das Syst[em] besitzt nur Winkelgeschwindigkeit, aber keine Winkelbeschleunigung.

§. 2. Man kann die Bewegung eines um einen Punkt O rotirend[en] Systems in jedem Momente in drei Elementarrotationen um drei durc[h] hindurchgehende Axen von constanter Richtung zerlegen. Die Wink[el]geschwindigkeiten um sie erhält man, indem man vermöge des Sat[zes] vom Parallelepiped der Winkelgeschwindigkeiten die Grösse Ω na[ch] diesen Axen zerlegt. Die Componenten von Ω, welche dieser Zerlegu[ng] zur Zeit t entsprechen, seien Ω_x, Ω_y, Ω_z. Zur Zeit $t + dt$ ist [die] Winkelgeschwindigkeit $\Omega + d\Omega$ und von geänderter Axenrichtung;

Componenten um jene Axen sind $\Omega_x + d\Omega_x$, $\Omega_y + d\Omega_y$, $\Omega_z + d\Omega_z$ und da für sie die Axenrichtungen sich nicht geändert haben, so findet in Bezug auf sie nur Tangentialwinkelbeschleunigung statt und sind $d\Omega_x$, $d\Omega_y$, $d\Omega_z$ die Elementarwinkelbeschleunigungen, sowie

$$\frac{d\Omega_x}{dt}, \quad \frac{d\Omega_y}{dt}, \quad \frac{d\Omega_z}{dt}$$

die endlichen Winkelbeschleunigungen für die drei Bewegungscomponenten, in welche wir die Rotation des Systems um den Punkt O zur Zeit t zerlegen können. Sind $d\Theta_x$, $d\Theta_y$, $d\Theta_z$ die drei unendlich kleinen Bahnelemente, welche ein Punkt in der Einheit der Entfernung vermöge der drei Elementarrotationen einzeln durchlaufen würde, sodass also

$$\Omega_x = \frac{d\Theta_x}{dt}, \quad \Omega_y = \frac{d\Theta_y}{dt}, \quad \Omega_z = \frac{d\Theta_z}{dt}$$

wird, so können die drei Winkelbeschleunigungscomponenten auch durch

$$\frac{d^2\Theta_x}{dt^2}, \quad \frac{d^2\Theta_y}{dt^2}, \quad \frac{d^2\Theta_z}{dt^2}$$

ausgedrückt werden. Projicirt man nun das unendlich schmale Dreieck, welches Ω, $d\psi$ und $\Omega + d\Omega$ zu Seiten hat (Fig. 140), auf jede der drei Axen, so ergibt sich, dass $d\Omega_x$, $d\Omega_y$, $d\Omega_z$ die Projectionen von $d\psi$ und in Folge dessen $\frac{d\Omega_x}{dt}$, $\frac{d\Omega_y}{dt}$, $\frac{d\Omega_z}{dt}$ die Projectionen von $\frac{d\psi}{dt} = \alpha$ auf diese Axen sind. Bezeichnen wir daher letztere mit α_x, α_y, α_z, so bestehen die Gleichungen

$$\alpha_x = \frac{d\Omega_x}{dt} = \frac{d^2\Theta_x}{dt^2}, \quad \alpha_y = \frac{d\Omega_y}{dt} = \frac{d^2\Theta_y}{dt^2}, \quad \alpha_z = \frac{d\Omega_z}{dt} = \frac{d^2\Theta_z}{dt^2}$$

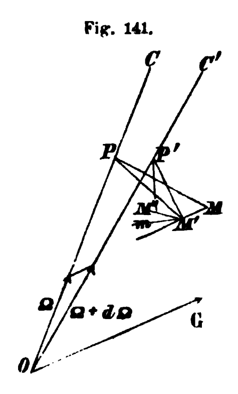
und wenn insbesondere die Zerlegung nach drei zu einander rechtwinkligen Axen geschieht und λ, μ, ν die Winkel bedeuten, welche die Axe α mit diesen Axen bildet, so treten hierzu noch die Relationen

$$\frac{\cos\lambda}{\alpha_x} = \frac{\cos\mu}{\alpha_y} = \frac{\cos\nu}{\alpha_z} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2.$$

§. 3. Wir suchen jetzt die Beschleunigung eines beliebigen Systempunktes M durch die Winkelgeschwindigkeit, die Winkelbeschleunigung und die Lage des Punktes gegen die Axen beider darzustellen. Es sei wieder Ω (Fig. 141.) die Winkelgeschwindigkeit des Systems um die Momentanaxe C zur Zeit t, $\Omega + d\Omega$ die der Zeit $t + dt$ entsprechende Winkelgeschwindigkeit um die folgende Momentanaxe C'. Der Systempunkt beschreibt zunächst das Bogenelement MM' eines Kreises senkrecht zur Axe C vom Radius $MP = r$ und hierauf das Element $M'M''$ eines anderen Kreises senkrecht zu C' vom Radius $M'P' = r + dr$, wenn r und $r + dr$ die Abstände des Punktes von den Axen C und C'

bezeichnen. Seine Geschwindigkeit in M ist $\Omega \cdot \overline{MP}$ und hat die Richtung der Tangente in M an den ersten Kreis; seine Geschwindigkeit in M' ist $(\Omega + d\Omega)\, \overline{M'P'}$ und ihre Richtung ist die Richtung der Tangente in M' an den zweiten Kreis. Nun geht die Winkelgeschwindigkeit $\Omega + d\Omega$ um C' als Resultante hervor aus der Winkelgeschwindigkeit Ω um C und der Elementarwinkelbeschleunigung $d\psi = \alpha dt$, deren Axe G sei. Daher ist die Geschwindigkeit $(\Omega + d\Omega)\, \overline{M'P'}$, welche der Punkt der Winkelgeschwindigkeit $\Omega + d\Omega$ um C' verdankt, die Resultante der Geschwindigkeit $\Omega \cdot \overline{M'P}$, welche ihm die Winkelgeschwindigkeit Ω um C ertheilt und der unendlich kleinen Geschwindigkeitscomponente $\alpha dt \cdot \overline{M'Q'}$, welche ihm die Winkelbeschleunigung α um A gibt, wo $M'Q'$ das Perpendikel von M' auf G gefällt bedeutet. Die Richtung der ersteren ist die Richtung $M'm$ der Tangente in M' an den ersten Kreis um C, die Richtung der letzteren ist senkrecht zur Ebene, welche durch M' und die Axe G der Winkelbeschleunigung gelegt werden kann. Die Geschwindigkeit $\Omega \cdot \overline{M'P}$ längs der zweiten Tangente $M'm$ an den ersten Kreis ist aber nichts anderes, als die Geschwindigkeit, welche der Systempunkt besitzen würde, wenn das System auch zur Zeit $t + dt$ um C die Winkelgeschwindigkeit Ω besässe, d. h. Ω für zwei Zeitelemente denselben Werth hätte. Daher ist $\Omega \cdot \overline{M'P}$ die Resultante aus $\Omega \cdot \overline{MP}$, nämlich der Geschwindigkeit des Systempunktes zur Zeit t um C längs der Tangente MM' und der Normalcomponente der Elementarbeschleunigung, $\Omega^2 \cdot dt\, \overline{MP}$, senkrecht zur Axe C, im Sinne nach ihr hin gerichtet allein, da eine Tangentialcomponente der Beschleunigung hierbei nicht vorhanden ist. Aus allem diesem ergibt sich, dass



$$(\Omega + d\Omega) \cdot \overline{M'P'} = Res. (\Omega \cdot \overline{MP}, \quad \Omega^2 \cdot \overline{MP}\, dt, \quad \alpha dt \cdot \overline{M'Q'})$$

und dass
$$\Omega^2 \cdot \overline{MP} \cdot dt, \quad \alpha dt \cdot \overline{M'Q'}$$

die Componenten der Elementarbeschleunigung des Systempunktes M sind. Dividirt man dieselben mit dt und bemerkt, dass in der Grenze $M'Q'$ in das Perpendikel p übergeht, welches von M auf die Axe G der Winkelbeschleunigung gefällt werden kann, so ergeben sich

$$\Omega^2 r, \quad \alpha p$$

als Componenten der Beschleunigung des Systempunktes und man erhält den Satz:

Während der Rotation eines unveränderlichen Systems um einen Punkt hat die Beschleunigung jedes Systempunktes zwei Componenten; eine centripetale, die Momentanaxe rechtwinklig schneidende und dem Sinne nach ihr zug-

wandte, deren Grösse durch das Produkt aus dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe und dem Abstande r des Systempunktes von ihr angegeben wird und eine weitere, zur Ebene, welche durch die Axe der Winkelbeschleunigung und den Systempunkt geführt werden kann, senkrecht gerichtete und dem Sinne nach mit der Winkelbeschleunigung harmonirende, deren Grösse das Produkt der Winkelbeschleunigung α und des Abstandes p des Systempunktes von deren Axe ist.

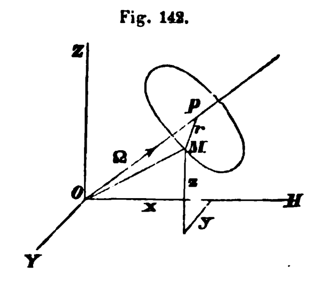
Indem man die Winkelbeschleunigung α in ihre beiden Componenten, die tangentiale $\frac{d\Omega}{dt}$ um die Momentanaxe und die normale $\Omega \frac{d\sigma}{dt}$ senkrecht zur Momentanaxe auflöst, zerfällt die Beschleunigungscomponente αp des Systempunktes selbst gleichfalls in zwei Componenten, die eine $r \frac{d\Omega}{dt}$ in der Richtung der Tangente MM' und die andere $r_1 \Omega \frac{d\sigma}{dt}$ senkrecht zur Berührungsebene des Kegels der Momentanaxen, wenn r_1 den Abstand des Systempunktes von der zur Momentanaxe senkrechten in der Tangentenebene dieses Kegels gelegenen Geraden bedeutet. Die Componente $r \frac{d\Omega}{dt}$ bildet mit $\Omega^2 r$ die Gesammtbeschleunigung, welche der Punkt besitzen würde, wenn das System um die Momentanaxe rotirte, ohne dass dieselbe ihre Richtung änderte. Man kann daher auch den Satz aufstellen:

Während der Rotation eines unveränderlichen Systems um einen Punkt hat die Beschleunigung eines jeden Systempunktes zwei Componenten: die eine ist die Beschleunigung, welche er der Rotation um die Momentanaxe verdankte, wenn diese ihre Richtung nicht ändern würde, die andere ist senkrecht zur Tangentenebene des Kegels der Momentanaxe und proportional dem Abstande des Punktes von der in dieser Ebene liegenden zur Momentanaxe senkrechten Geraden, der Winkelgeschwindigkeit des Systems und der Wechselgeschwindigkeit der Momentanaxe.

Wechselt die Momentanaxe nicht, so ist $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ und reducirt sich αp auf $r \frac{d\Omega}{dt}$. Rückt der Punkt, um welchen das System rotirt, ins Unendliche, so geht die hier entwickelte Theorie in die des vorigen Capitels über. Es wird dann $d\sigma = 0$, $r_1 = \infty$, aber $r_1 \frac{d\sigma}{dt}$ geht über in die dortige Grösse U, von welcher die allen Punkten gemeinsame Beschleunigungscomponente ΩU herrührt.

§. 4. Wir wollen jetzt die Componenten X, Y, Z der Beschleunigung eines Systempunktes in Bezug auf drei rechtwinklige, sich im Rotationscentrum O des Systems schneidende Axen von constanter Richtung darstellen. Dieselben setzen sich aus den Bestandtheilen zusammen, welche von der centripetalen Beschleunigungscomponente $\Omega^2 r$ herrühren und anderen, welche die Winkelbeschleunigung α veranlasst. In Bezug auf die ersteren seien (Fig. 142.) α, β, γ die Richtungswinkel der Momentanaxe, λ, μ, ν die Richtungscosinusse für MP und x, y, z die Coordinaten des Systempunktes M. Man hat dann für die fraglichen Componenten von $\Omega^2 r$:

Fig. 142.



$$\Omega^2 r \cos\lambda, \quad \Omega^2 r \cos\mu, \quad \Omega^2 r \cos\nu$$

und indem man den Linienzug $OMPO$ auf die Axen projicirt

$$x + r\cos\lambda - OP\cos\alpha = 0$$
$$y + r\cos\mu - OP\cos\beta = 0$$
$$z + r\cos\nu - OP\cos\gamma = 0$$

und indem man mit Hülfe der Projection des Zuges der x, y, z, MP, PO auf die Richtung OP die Linie OP darstellt, nämlich

$$OP = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

ergeben sich

$$r\cos\lambda = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\alpha - x$$
$$r\cos\mu = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\beta - y$$
$$r\cos\nu = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\gamma - z.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit Ω^2 und ersetzt $\Omega\cos\alpha$, $\Omega\cos\beta$, $\Omega\cos\gamma$ durch die gleichbedeutenden Ω_x, Ω_y, Ω_z, so stellen sich die gesuchten Bestandtheile von X, Y, Z unter der Form dar

$$\Omega^2 r\cos\lambda = \Omega_x(x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) - \Omega^2 x$$
$$\Omega^2 r\cos\mu = \Omega_y(x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) - \Omega^2 y$$
$$\Omega^2 r\cos\nu = \Omega_z(x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) - \Omega^2 z.$$

Nach §. 3. sind die Componenten der Winkelbeschleunigung bezüglich der Coordinatenaxen: $\alpha_x = \frac{d\Omega_x}{dt}$, $\alpha_y = \frac{d\Omega_y}{dt}$, $\alpha_z = \frac{d\Omega_z}{dt}$. Durch sie erlangt das System um diese Axen die unendlich kleinen Winkelgeschwindigkeiten $\alpha_x dt = d\Omega_x$, $\alpha_y dt = d\Omega_y$, $\alpha_z dt = d\Omega_z$ (Componenten der Elementarwinkelbeschleunigung) und diese ertheilen der Systempunkte (xyz) nach Thl. II, Cap. IV, §. 8. die Elementarbeschleunigungen parallel den Coordinatenaxen:

$$(\alpha_y \cdot z - \alpha_z \cdot y)\,dt$$
$$(\alpha_z \cdot x - \alpha_x \cdot z)\,dt$$
$$(\alpha_x \cdot y - \alpha_y \cdot x)\,dt,$$

indem an die Stelle der dortigen Ω_x, Ω_y, Ω_z hier $\alpha_x dt$, $\alpha_y dt$, $\alpha_z dt$ treten. Dividirt man diese drei Ausdrücke mit dt, so erhält man die Componenten der Beschleunigung des Systempunktes, herrührend von der Winkelbeschleunigung, nämlich

$$\alpha_y z - \alpha_z y$$
$$\alpha_z x - \alpha_x z$$
$$\alpha_x y - \alpha_y x.$$

Die Gesammtbeschleunigung des Systempunktes hat also folgende Componenten:

$$X = \Omega_x (x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) - \Omega^2 x + \alpha_y z - \alpha_z y$$
$$Y = \Omega_y (x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) - \Omega^2 y + \alpha_z x - \alpha_x z$$
$$Z = \Omega_z (x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) - \Omega^2 z + \alpha_x y - \alpha_y x.$$

Wählt man insbesondere die Momentanaxe zur Axe der z und zwar so, dass der Sinn von Ω mit dem positiven Sinne der z übereinstimmt; ferner zur xz-Ebene die gemeinsame Tangentenebene der Kegel (C) und (Γ) und zwar so, dass der positive Sinn der x-Axe mit dem Sinne der Normalwinkelbeschleunigung übereinstimmt, so sind $\Omega_x = \Omega_y = 0$, $\Omega_z = \Omega$, $\alpha_x = \frac{d\Omega_x}{dt} = \Omega U$, $\alpha_y = \frac{d\Omega_y}{dt} = 0$, $\alpha_z = \frac{d\Omega_z}{dt} = \frac{d\Omega}{dt}$ und erhält man für die Componenten der Beschleunigung des Systempunktes xyz die einfacheren Ausdrücke:

$$X = -\Omega^2 x - \frac{d\Omega}{dt} \cdot y$$
$$Y = -\Omega^2 y + \frac{d\Omega}{dt} \cdot x - \Omega U \cdot z$$
$$Z = \Omega U \cdot y.$$

§. 5. Die Systempunkte, deren Beschleunigung der gemeinsamen Tangentenebene der Kegel (C) und (Γ) parallel ist, liegen in der Ebene $Y = 0$, d. h.

$$\frac{d\Omega}{dt} \cdot x - \Omega^2 y - \Omega U z = 0,$$

welche durch den Punkt O hindurchgeht, um welchen das System rotirt. Für die Punkte, deren Beschleunigung senkrecht zur Momentanaxe ist, wird $Z = 0$, sie liegen daher in der Ebene $y = 0$, d. h. in der Tangentenebene der beiden Kegel. Alle Punkte, deren Beschleunigung parallel zur Momentanaxe ist, genügen den Bedingungen $X = 0$, $Y = 0$ zugleich. Sie liegen in der zur Momentanaxe senkrechten Geraden

$$\Omega^2 x + \frac{d\Omega}{dt} y = 0$$
$$\frac{d\Omega}{dt} x - \Omega^2 y - \Omega U z = 0.$$

Ein Punkt, dessen Beschleunigung zur Zeit t verschwindet, soll

ein Beschleunigungscentrum für diese Zeit heissen. Seine Coordinaten seien x_1, y_1, z_1; sie müssen den drei Bedingungen genügen:

$$0 = \Omega^2 x_1 + \frac{d\Omega}{dt} y_1$$
$$0 = \frac{d\Omega}{dt} x_1 - \Omega^2 y_1 - \Omega U z_1$$
$$0 = \Omega U y_1 .$$

Da diesem Gleichungssystem im Allgemeinen durch $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ genügt wird, so folgt, dass das Beschleunigungscentrum immer existirt, aber mit dem Rotationscentrum des Systems zusammenfällt. In besonderen Fällen gibt es eine continuirliche geradlinige Folge solcher Beschleunigungscentra, oder eine Beschleunigungsaxe. Dies ist der Fall, wenn $\Omega = 0$ ist; denn dann ist die dritte Gleichung von selbst erfüllt und liefern die beiden andern $x_1 = y_1 = 0$, d. h. die Beschleunigungsaxe fällt mit der Momentanaxe zusammen. Im strengen Sinne kann freilich, wenn $\Omega = 0$ ist, von einer Momentanaxe nur als einer Grenzlage die Rede sein. Auch wenn $U = 0$ ist, d. h. wenn die Momentanaxe nicht wechselt, liefert das Gleichungssystem $x_1 = y_1 = 0$, d. h. gleichfalls die Momentanaxe als Beschleunigungsaxe.

Ein sphärisches System, welches sich auf seiner Kugelfläche bewegt, ist der Schnitt eines um einen Punkt rotirenden Systems mit einer Kugel, welche um diesen Punkt als Mittelpunkt beschrieben ist. Dasselbe besitzt zwar stets zwei diametral gegenüberliegende Momentancentra, ein Beschleunigungscentrum (oder eigentlich auch zwei solche) aber nur dann, wenn die Winkelgeschwindigkeit verschwindet oder die Momentancentra nicht wechseln. Denn ein Beschleunigungscentrum des sphärischen Systems kann nur der Schnitt einer Beschleunigungsaxe mit der Kugel sein. Wir sahen im vorigen Capitel, dass das ebene System, welches der Schnitt eines körperlichen, sich einer Ebene parallel bewegenden Systems ist, stets ein Beschleunigungscentrum besitzt. Dasselbe ist der Schnitt der für das körperliche System stets existirenden Beschleunigungsaxe mit der Ebene des Systems.

§. 6. Mit Hülfe der im vorigen §. entwickelten Ausdrücke für die Componenten X, Y, Z der Beschleunigung eines Systempunktes (xyz) wollen wir jetzt dessen Normal- und Tangentialbeschleunigung φ_n und τ bestimmen, dieser Bestimmung aber die zuletzt gegebenen einfacheren Formeln jener Ausdrücke zu Grunde legen. Der Abstand des Systempunktes von der Momentanaxe sei r; die Richtung desselben in dem Sinne von dem Schnittpunkte mit der Momentanaxe nach dem Systempunkte hin genommen bildet mit den Coordinatenaxen Richtungswinkel, deren Cosinusse $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, 0 sind. Daher liefern X, Y in dieser Richtung den Bestandtheil der Normalbeschleunigung φ_n

$$X \cdot \frac{x}{r} + Y \cdot \frac{y}{r} = -\Omega^2 r - \Omega U \frac{yz}{r}.$$

Hierzu tritt aber noch $Z = \Omega U y$ als weiterer Bestandtheil von φ_n, da es rechtwinklig zur Geschwindigkeit ist. Wir erhalten demnach jetzt für das Quadrat der Normalbeschleunigung:

$$\varphi_n^2 = \frac{\Omega^2}{r^2}(\Omega r^2 + Uyz)^2 + \Omega^2 U^2 y^2.$$

Die Tangentialbeschleunigung wird erhalten, indem man die Componenten von X und Y in der Richtung der Geschwindigkeiten vereinigt. Nun bildet die Richtung der Geschwindigkeit des Systempunktes mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinusse $-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0$ sind; daher erhält man

$$\varphi_t = -X\frac{y}{r} + Y\frac{x}{r} = \frac{d\Omega}{dt} \cdot r - \Omega U \frac{xz}{r}.$$

Die Systempunkte, welche keine Beschleunigung in der Richtung von r, also nur Normalbeschleunigung parallel zur Momentanaxe besitzen, genügen der Bedingung $\Omega^2 r + \Omega U \frac{yz}{r} = 0$, oder wenn wir für r^2 seinen Werth $x^2 + y^2$ einsetzen

$$\Omega(x^2 + y^2) + Uyz = 0.$$

Sie liegen daher auf einem Kegel zweiten Grades, welcher senkrecht zur Momentanaxe Kreisschnitte besitzt. Dieser Kegel enthält die Momentanaxe selbst und berührt die Kegel (C) und (Γ) längs ihr.

Die Systempunkte, deren Normalbeschleunigung senkrecht zur Momentanaxe ist, genügen der Bedingung

$$\Omega U y = 0$$

und sind also, wenn nicht Ω oder U verschwindet, die Punkte der gemeinsamen Tangentenebene der Kegel (C) und (Γ).

Die Systempunkte, deren Normalbeschleunigung vollständig verschwindet, genügen den beiden Bedingungen

$$\Omega(x^2 + y^2) + Uyz = 0, \qquad \Omega U y = 0$$

zugleich. Ist nun Ω nicht Null, so sind sie die Punkte der Momentanaxe; ist aber $\Omega = 0$, so sind beide Bedingungen für alle Systempunkte erfüllt und besitzen in demselben Momente alle Punkte des Systems nur Tangentialbeschleunigung.

Die Systempunkte, deren Tangentialbeschleunigung verschwindet, welche also im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum der Geschwindigkeit besitzen, genügen der Bedingung $\frac{d\Omega}{dt} \cdot r - \Omega U \frac{xz}{r} = 0$; sie liegen daher auf dem Kegel zweiten Grades

$$\frac{d\Omega}{dt}(x^2 + y^2) - \Omega U xz = 0.$$

Derselbe hat senkrecht zur Momentanaxe gleichfalls Kreisschnitte und geht durch die Momentanaxe hindurch. Die gemeinsame Tangentenebene der Kegel (C) und (Γ) ist für ihn eine Hauptebene; er schneidet daher den vorigen Kegel rechtwinklig, für welchen die yz-Ebene eine Hauptebene ist.

Ausser der Momentanaxe haben die beiden genannten Kegel noch eine weitere Gerade gemein. Die Punkte derselben besitzen keine Tangentialbeschleunigung, haben also zwei Zeitelemente unveränderliche Geschwindigkeit und werden blos parallel zur Momentanaxe beschleunigt.

Die beiden hier erwähnten Kegel zweiten Grades sind das Analogon zu den beiden Bresse'schen Kreisen des vorigen Capitels und ihre gemeinschaftliche Erzeugungslinie, welche nicht Momentanaxe ist, entspricht dem Beschleunigungscentrum der ebenen Systeme. Da φ_n^2 zwei Bestandtheile hat, welche unabhängig von einander verschwinden müssen, wenn φ_n selbst verschwinden soll und dies im Allgemeinen nur für das Rotationscentrum des Systems eintreten kann, so sieht man deutlich den inneren Grund, weshalb ein sphärisches, sich auf seiner Kugelfläche bewegendes System kein Beschleunigungscentrum besitzen kann. Für den Schnittpunkt der genannten gemeinschaftlichen Erzeugungslinie beider Kegel mit der Kugel wird von der Beschleunigung des sphärischen Systems möglichst viel gleich Null.

Die beiden Kegel schneiden das sphärische System in zwei sphärischen Kegelschnitten, deren Gleichungen in sphärischen Polarcoordinaten ϱ, ϑ für das Momentancentrum als Pol und den Schnitt der Kugel mit der Tangentenebene der Kegel (C) und (Γ) als Polaraxe erhalten werden, wenn man $r = \sin\varrho$, $x = \sin\varrho\cos\vartheta$, $y = \sin\varrho\sin\vartheta$, $z = \cos\varrho$ setzt, wobei der Radius der Kugel als Einheit angenommen ist, nämlich:

$$\Omega\, tg\varrho + \quad U \sin\vartheta = 0$$
$$\frac{d\Omega}{dt}\, tg\varrho - \Omega U \cos\vartheta = 0.$$

§. 7. Da das Bogenelement MM' der Bahn eines Systempunktes M durch Rotation um die Momentanaxe beschrieben wird, so ist die Ebene welche durch den Systempunkt und die Momentanaxe C geht, die Normalebene der Bahn im Punkte M. Ebenso ist die Ebene durch M' und die folgende Momentanaxe C' die Normalebene für den Punkt M' oder das folgende Bahnelement $M'M''$, welches um C' beschrieben wird. Diese beiden aufeinander folgenden Normalebenen bilden miteinander einen unendlich kleinen Winkel, welcher gleich dem Contingenzwinkel der Bahn in M ist und schneiden sich in einer Geraden, welche im Krümmungsmittelpunkte K der Bahn auf der Schmiegungsebene derselben senkrecht steht, der Krümmungsaxe. Die Hauptnormale der Bahn in M ist die Schnittlinie der Schmiegungsebene mit der Normalebene und ha-

die Richtung des Krümmungshalbmessers und folglich auch die der Normalbeschleunigung. Die Richtung der Normalbeschleunigung gewinnt man durch das Verhältniss ihrer beiden Componenten $-\left(\Omega^2 r + \Omega U \frac{yz}{r}\right)$ und $\Omega U y$. Ist μ ihre Neigung gegen die Momentanaxe, so hat man

$$tg\,\mu = -\frac{\Omega r^2 + Uyz}{Ury};$$

$\frac{1}{2}\pi - \mu$ ist die Neigung der Krümmungsaxe gegen die Momentanaxe. Die Länge ϱ des Krümmungshalbmessers ist

$$\varrho = \frac{\Omega^2 r^2}{\varphi_n} = \frac{\Omega r^3}{\sqrt{(\Omega r^2 + Uyz)^2 + U^2 y^2 r^2}}.$$

Das Maximum, dessen der Krümmungshalbmesser fähig ist für Punkte, welche auf derselben um O beschriebenen Kugelfläche liegen, ist der Radius dieser Kugel; denn der Krümmungskreis einer sphärischen Curve liegt mit dieser zugleich auf der Kugel, da er mit dieser die drei aufeinander folgenden Curvenpunkte gemein hat. Alle Punkte, für deren Bahn in dem betrachteten Momente ϱ dies Maximum erreicht, liegen so, dass die Schmiegungsebene ihrer Bahn durch den Kugelmittelpunkt O hindurchgeht. Damit dies eintrete, muss

$$tg\,\mu = \frac{r}{z}$$

d. h.

$$-\frac{\Omega r^2 + Uyz}{Ury} = \frac{r}{z}$$

werden. Die fraglichen Punkte liegen daher auf der Kegelfläcke dritten Grades

$$(\Omega z + Uy)(x^2 + y^2) + Uyz^2 = 0.$$

VIII. Capitel.

Beschleunigung im unveränderlichen System, welches die allgemeinste Art der Bewegung besitzt.

§. 1. Im Falle der allgemeinsten Bewegung eines unveränderlichen Systems besitzt dasselbe zur Zeit t eine Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe C und eine Translationsgeschwindigkeit T parallel derselben. Ebenso hat es zur Zeit $t + dt$ eine Winkelgeschwindigkeit $\Omega + d\Omega$ um die folgende Momentanaxe C' und eine Translationsgeschwindigkeit $T + dT$ parallel zu ihr. Die Momentanaxe C' hat aber von C einen unendlich kleinen kürzesten Abstand de und bildet mit ihr einen unendlich kleinen Winkel $d\sigma$; es besitzt daher die Momentanaxe selbst eine Orthogonalgeschwindigkeit $U = \frac{de}{dt}$, vermöge welcher sie im Raume

fortschreitet und eine Winkelgeschwindigkeit $\Psi = \frac{d\sigma}{dt}$, vermöge welcher sie sich neigt und beide zusammen bilden die Wechselgeschwindigkeit der Momentanaxe. U und Ψ sind die Componenten einer Schraubengeschwindigkeit um die Richtung des kürzesten Abstandes von C und C' als Axe. Durch Ψ wird die Momentanaxe C parallel zu C' gerichtet, durch U hierauf in die Lage C' hineingeschoben.

Ein Systempunkt, welcher zur Zeit t den Abstand r von der Momentanaxe C besitzt, beschreibt in Folge der Elementarschraubenbewegung um diese das Element einer Schraubenlinie mit einer Geschwindigkeit v, welche die beiden Componenten $r\Omega$ senkrecht zu C und T parallel C hat. Zur Zeit $t + dt$ beschreibt er das folgende Element seiner Bahn als das Element einer Schraubenlinie um C' mit einer Geschwindigkeit, deren Componenten in ähnlicher Weise durch $(r + dr)$ $(\Omega + d\Omega)$ und $T + dT$ dargestellt werden. Die unendlich kleine Geschwindigkeitscomponente, welche zu seiner Geschwindigkeit v hinzutreten muss, um diese nach Grösse und Richtung in die Geschwindigkeit umzuändern, welche der Systempunkt zur Zeit $t + dt$ besitzt, ist dessen Elementarbeschleunigung und der Quotient aus ihr und dem Zeitelemente dt seine Beschleunigung. Die Elementarbeschleunigung bildet sich aus mehreren Componenten, die wir sofort bestimmen wollen und die Beschleunigung hat diesen entsprechende Componenten, welche man erhält, indem man jene mit dt dividirt.

Damit die Translationsgeschwindigkeit T parallel C in die Translationsgeschwindigkeit $T + dT$ parallel C' übergehe, muss zu T die Elementarbeschleunigung $d\tau$ hinzutreten, die man durch die unendlich kleine dritte Seite eines Dreiecks erhält, dessen beiden anderen Seiten T und $T + dT$ nach Grösse und Richtung darstellen, die ihr entsprechende endliche Beschleunigung $u = \frac{d\tau}{dt}$ der Translationsgeschwindigkeit T ist parallel der Ebenenschicht, welche durch C und C' bestimmt wird und kann zerfällt werden in eine Componente $\frac{dT}{dt}$ parallel C und eine andere $T\frac{d\sigma}{dt} = T\Psi$ senkrecht zu C und parallel zur Schicht.

Um zu bestimmen, welche Elementarbeschleunigung zu der Rotationscomponente $r\Omega$ der Geschwindigkeit des Systempunktes um C hinzutreten müsse, damit sie übergehe in $(r + dr)$ $(\Omega + d\Omega)$ um C', verfahren wir folgendermassen. Es sei $OO' = de$ der kürzeste Abstand der beiden Momentanaxen C, C' und durch O mit C' die Parallele C'' gezogen. Die Winkelgeschwindigkeit $\Omega + d\Omega$ des Systems um C' ist alsdann äquivalent der Winkelgeschwindigkeit $\Omega + d\Omega$ um C'' und ein-

Translationsgeschwindigkeit $\overline{O'O}\,(\Omega + d\Omega)$ oder mit Unterdrückung des Unendlichkleinen zweiter Ordnung Ωde des Systems senkrecht zu C' und OO' und übereinstimmend im Sinne mit $\Omega + d\Omega$. Daher ist auch die Geschwindigkeit $(r + dr)(\Omega + d\Omega)$ des Systempunktes, welche er dieser Winkelgeschwindigkeit verdankt, äquivalent der Geschwindigkeit $r''(\Omega + d\Omega)$ (unter r'' den Abstand desselben von C'' verstanden), die er besitzen würde, wenn das System mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega + d\Omega$ um C'' rotirte und der Translationsgeschwindigkeit Ωde. Nun ist aber eine Winkelgeschwindigkeit $\Omega + d\Omega$ um die Axe C'' die Resultante der Winkelgeschwindigkeit Ω um C und der Elementarwinkelbeschleunigung αdt, welche Ω nach Grösse in $\Omega + d\Omega$ zu ändern und die Axe C in die Lage C'' zu neigen vermag. Daher ist auch die Geschwindigkeitscomponente $r''(\Omega + d\Omega)$ äquivalent der Geschwindigkeit $r\Omega$, welche der Systempunkt der Winkelgeschwindigkeit Ω um C verdankt, der nach der Momentanaxe C hin gerichteten Elementarbeschleunigungscomponente $r^2\Omega dt$ und der von der Winkelbeschleunigung α herrührenden Elementarcomponente $\alpha p dt$, wenn p den Abstand des Punktes von der Axe der Winkelbeschleunigung bedeutet und unter der Axe der Winkelbeschleunigung diejenige Axe verstanden wird, welche sich bei der Zerlegung von $\Omega + d\Omega$ um die Axe C'' ergibt, welche durch den Punkt O des kürzesten Abstandes OO' geht. Aus diesen Betrachtungen erhellt, dass die Geschwindigkeit $(r + dr)(\Omega + d\Omega)$ die Resultante von

$$r\Omega, \quad r^2\Omega dt, \quad \alpha p dt, \quad \Omega de$$

ist und dass mithin $r^2\Omega dt$, $\alpha p dt$ und Ωde die Componenten der Elementarbeschleunigung sind, welche zu $r\Omega$ hinzutreten, um diese Geschwindigkeitscomponente in $(r + dr)(\Omega + d\Omega)$ überzuführen. Dividirt man dieselben mit dt und fügt zu ihnen die oben dargestellte Beschleunigung u der Translationsgeschwindigkeit hinzu, so ergeben sich mit Rücksicht auf $\frac{de}{dt} = U$ als Componenten der Beschleunigung des Systempunktes folgende:

$$r^2\Omega, \quad \alpha p, \quad \Omega U, \quad u$$

und erhält man den Satz:

Für die allgemeinste Bewegung eines unveränderlichen Systems besteht die Beschleunigung jedes Systempunktes aus folgenden vier Componenten: 1. einer centripetalen, die Momentanaxe senkrecht schneidenden Beschleunigung $\Omega^2 r$ gleich dem Produkte aus dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe und dem Abstande r des Systempunktes von dieser; 2. der Beschleunigung αp, welche herrührt von der Winkelbeschleunigung des Systems, deren Richtung senkrecht ist zu der Ebene, welche der Momentanaxe und der Axe der Winkelbeschleunigung parallel

läuft und deren Grösse durch das Produkt aus der Winkelbeschleunigung α und den Abstand p des Systempunktes von deren Axe dargestellt wird; 3. aus einer für alle Systempunkte gleichen Beschleunigung ΩU, deren Richtung normal zu der durch die Momentanaxe und die Richtung der Orthogonalgeschwindigkeit gelegten Ebene ist, deren Sinn erhalten wird, indem man die Orthogonalgeschwindigkeit U um den Winkel $\frac{1}{2}\pi$ um die Momentanaxe rotiren lässt und deren Grösse das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit Ω und dieser Orthogonalgeschwindigkeit ist; endlich 4. der gleichfalls allen Systempunkten gemeinsame Translationsbeschleunigung u des Systems.

Die Winkelbeschleunigung α kann in ihre beiden Componenten, die tangentiale $\frac{d\Omega}{dt}$ um die Momentanaxe und die normale $\Omega \frac{d\sigma}{dt} = \Omega\Psi$ senkrecht zu ihr in der Ebene der Axen C, C', d. h. also senkrecht zur Momentanaxe und der Richtung des kürzesten Abstandes aufgelöst werden. Demnach zerfällt auch die Beschleunigung αp in zwei Componenten, nämlich $r\frac{d\Omega}{dt}$ und $r_1 \Omega\Psi$, wenn r_1 den Abstand des Systempunktes von der Axe der Normalwinkelbeschleunigung darstellt. Die Tangentialcomponente $r\frac{d\Omega}{dt}$ bildet aber mit der centripetalen Componente $\Omega^2 r$ zusammen die Beschleunigung, welche der Systempunkt besitzen würde um die Momentanaxe, wenn diese nicht wechselte. Man kann daher den vorstehenden Satz auch so fassen:

Die Beschleunigung des Systempunktes ist die Resultante 1. von der Beschleunigung, welche derselbe besitzen würde, wenn die Momentanaxe nicht wechselte; 2. einer Beschleunigung $r_1 \Omega\Psi$, herrührend von der normalen Winkelbeschleunigung, parallel gerichtet zur Ebene, welche durch die Momentanaxe und die Richtung ihres kürzesten Abstandes von der folgenden Momentanaxe geht und proportional dem Abstande des Systempunktes von einer zu dieser Ebene senkrechten, durch den Fusspunkt des kürzesten Abstandes gehenden Axe, der Winkelgeschwindigkeit und der Rotationscomponente der Wechselgeschwindigkeit der Momentanaxe, 3. der gemeinsamen Beschleunigung ΩU aller Systempunkte, senkrecht zur eben erwähnten Ebene und 4. der Translationsbeschleunigung u des Systems, welche dieser Ebene parallel ist.

Die Fläche (C), welche der Ort aller Momentanaxen im absoluten Raume ist, und die Fläche (Γ), welche alle Axen des Systems begreift,

welche nach und nach zu Momentanaxen werden, berühren sich längs den zusammenfallenden Erzeugungslinien C, Γ dieser beiden im Allgemeinen windschiefen Flächen so, dass sie in allen Punkten derselben gemeinschaftliche Tangentenebenen besitzen. Denn durch die Elementarschraubenbewegung um C gelangt die nächstfolgende Systemlinie Γ' in die Lage C'. Während der Elementarbewegung bleibt aber Γ mit C vereinigt. Nach Ausführung derselben haben also beide Flächen zwei aufeinander folgende Erzeugungslinien gemein und berühren sich mithin längs C in allen Punkten dieser Geraden. Die oben erwähnte Ebene, welche den kürzesten Abstand OO' und die Axe C enthält, ist die gemeinschaftliche Tangentenebene beider Flächen im Fusspunkte O des kürzesten Abstandes. Sie kam dadurch in die Untersuchung, dass wir die Axe C' durch O legten. Wir können aber ebenso gut jeden anderen Punkt A der Momentanaxe an die Stelle von O treten lassen, der Effect davon ist der, dass die Axe von α alsdann durch A geht und an die Stelle der Beschleunigung $\Omega \frac{de}{dt}$ oder ΩU eine andere $\Omega \cdot \frac{\overline{AA'}}{dt}$ tritt, wenn A' den Fusspunkt des von A auf C' gefällten Perpendikels angibt und diese ist senkrecht zur gemeinschaftlichen Tangentenebene beider Flächen (C) und (Γ) im Punkte A. Auf die Grösse von α und deren Axenrichtung hat diese Aenderung keinen Einfluss, wohl aber auf die Länge p.

In dem obigen allgemeinen Satze sind die entsprechenden Sätze der beiden vorigen Capitel als Spezialfälle enthalten; um den Fall des vorigen Capitels wieder zu erhalten, genügt es, $U = 0$ zu setzen; für den des zweitvorhergehenden ist $\Psi = 0$.

§. 2. Wir wollen jetzt die Componenten X, Y, Z der Beschleunigung eines beliebigen Systempunktes (xyz) parallel dreien rechtwinkligen Axen darstellen. Zur x-Axe wählen wir die Richtung der Orthogonalgeschwindigkeit U, positiv im Sinne derselben, zur y-Axe die Richtung der Beschleunigung ΩU, positiv in dem Sinne dieser und zur z-Axe die Momentanaxe dem positiven Sinne nach übereinstimmend mit dem Sinne von Ω. Es seien α_x, α_y, α_z die Componenten der Winkelbeschleunigung α, deren Axe durch den Coordinatenursprung gehend angenommen werde. Man hat dann

$$\alpha_x = 0, \quad \alpha_y = \Omega\Psi, \quad \alpha_z = \frac{d\Omega}{dt}$$

und hiermit erhält man für die von der Winkelbeschleunigung herrührenden Bestandtheile X, Y, Z, wie in Cap. VII, §. 4.:

$$\begin{aligned}
\alpha_y z - \alpha_z y &= \Omega\Psi z - \frac{d\Omega}{dt} \cdot y \\
\alpha_z x - \alpha_x z &= \frac{d\Omega}{dt} \cdot x \\
\alpha_x y - \alpha_y x &= - \Omega\Psi x.
\end{aligned}$$

Die Componenten der centripetalen Beschleunigungscomponente $\Omega^2 r$ sind

$$- \Omega^2 x, \quad - \Omega^2 y, \quad 0;$$

die von $u : 0$, $T\Psi$, $\frac{dT}{dt}$ und die Beschleunigung ΩU fällt in die y-Axe. Demnach erhalten wir:

$$X = - \Omega^2 x - \frac{d\Omega}{dt} y + \Omega \Psi z$$

$$Y = \frac{d\Omega}{dt} x - \Omega^2 y + \Omega U + T\Psi$$

$$Z = - \Omega \Psi x + \frac{dT}{dt}.$$

Fragen wir zunächst nach dem Orte der Punkte, deren Beschleunigung zur Zeit t gleich Null ist, so genügen die Coordinaten x_1, y_1, z_1 eines solchen den Gleichungen

$$- \Omega^2 x_1 - \frac{d\Omega}{dt} y_1 + \Omega \Psi z_1 = 0$$

$$\frac{d\Omega}{dt} x_1 - \Omega^2 y_1 + \Omega U + T\Psi = 0$$

$$\Omega \Psi x_1 - \frac{dT}{dt} = 0$$

zugleich. Dies sind die Gleichungen dreier Ebenen, deren Durchschnitt den fraglichen Ort darstellt.

Von diesen Ebenen sind die beiden ersten zu einander senkrecht; denn die Bedingung des Senkrechtstehens zweier Ebenen

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

und

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

aufeinander, nämlich $AA' + BB' + CC' = 0$ ist wegen $A = - \Omega^2$, $B = - \frac{d\Omega}{dt}$, $C = \Omega \Psi$; $A' = \frac{d\Omega}{dt}$, $B' = - \Omega^2$, $C' = 0$ erfüllt. Die erste der drei Ebenen geht durch den Fusspunkt O des kürzesten Abstandes und ihre Normale bildet mit den Richtungen der Orthogonalgeschwindigkeit U, der Normalen zur Fläche (C) in O und der Momentanaxe Winkel, deren Cosinusse den Grössen $- \Omega^2$, $- \frac{d\Omega}{dt}$, $\Omega \Psi$ proportional sind. Die zweite Ebene ist der Momentanaxe parallel, besitzt den Abstand

$$\frac{\Omega U + T\Psi}{\sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}}$$

von dieser und die Richtungscosinusse ihrer Normalen sind proportional den Grössen $\frac{d\Omega}{dt}$, $- \Omega^2$, 0. Die dritte Ebene ist senkrecht zur Richtung der Orthogonalgeschwindigkeit U und hat von O den Abstand $\frac{1}{\Omega \Psi} \frac{dT}{dt}$.

Die drei Ebenen liefern als Durchschnitt im Allgemeinen einen Punkt ohne Beschleunigung, das **Beschleunigungscentrum**, welches übrigens auch ins Unendliche rücken kann. In besonderen Fällen, wenn nämlich die drei Ebenen durch dieselbe Gerade hindurchgehen, existirt eine **Beschleunigungsaxe**, d. h. eine geradlinige continuirliche Reihe von Systempunkten ohne Beschleunigung. Die Coordinaten des Beschleunigungscentrums sind

$$x_1 = \frac{\frac{dT}{dt}}{\Omega\Psi}, \quad y_1 = \frac{\frac{d\Omega}{dt}\frac{dT}{dt}}{\Omega^3\Psi} + \frac{U}{\Omega} + \frac{T\Psi}{\Omega^2},$$

$$z_1 = \frac{\frac{dT}{dt}}{\Psi^2} + \left(\frac{U}{\Omega} + \frac{T\Psi}{\Omega^2}\right) \cdot \frac{\frac{d\Omega}{dt}}{\Omega\Psi^2} - \frac{\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2 \frac{dT}{dt}}{\Omega^4\Psi^2}.$$

Die Bedingungen, dass eine Beschleunigungsaxe bestehe, erhält man, indem man ausdrückt, dass eine lineäre Verbindung zweier der Gleichungen der drei Ebenen identisch mit der dritten Gleichung werde, d. h. dass sich Coefficienten α, β finden lassen, welche bewirken, dass

$$\left(\alpha\frac{d\Omega}{dt} - \beta\Omega\Psi\right)x_1 - \alpha\Omega^2 y_1 + \alpha(\Omega U + T\Psi) + \beta\frac{dT}{dt}$$
$$\equiv -\Omega^2 x_1 - \frac{d\Omega}{dt}y_1 + \Omega\Psi z_1$$

werde. Dies liefert

$$\alpha\frac{d\Omega}{dt} - \beta\Omega\Psi + \Omega^2 = 0, \quad \alpha\Omega^2 - \frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad \Omega\Psi = 0,$$

$$\alpha(\Omega U + T\Psi) + \beta\frac{dT}{dt} = 0.$$

Eliminirt man hieraus α und β, so bleiben die Bedingungen

$$\Omega\Psi = 0, \quad \frac{dT}{dt}\left[\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2\right] + (\Omega U + T\Psi)\,\Omega\Psi\frac{d\Omega}{dt} = 0,$$

von denen die erste sagt, dass entweder Ω oder Ψ verschwinden müsse, wenn eine Beschleunigungsaxe existiren soll. Ist nun 1. $\Omega = 0$, aber $\frac{d\Omega}{dt} \gtrless 0$, so muss $\frac{dT}{dt} = 0$ sein, d. h. es muss die Translationsgeschwindigkeit des Systems parallel der Momentanaxe zwei Zeitelemente hindurch dieselbe sein. Ist $\frac{d\Omega}{dt} = 0$, so kann T sich ändern. 2. Es sei $\Psi = 0$, d. h. es neige sich die Momentanaxe nicht, dann muss zugleich $\frac{dT}{dt} = 0$ sein. Dies ist z. B. der Fall beim System, welches einer Ebene parallel bleibt.

§. 3. Ziehen wir die Gleichungen für x_1, y_1, z_1 von den Ausdrücken X, Y, Z ab, so erhalten wir

$$X = -\Omega^2(x - x_1) - \frac{d\Omega}{dt}(y - y_1) + \Omega\Psi(z - z_1)$$
$$Y = \frac{d\Omega}{dt}(x - x_1) - \Omega^2(y - y_1)$$
$$Z = -\Omega\Psi(x - x_1),$$

oder indem wir das Beschleunigungscentrum als Ursprung eines Coordinatensystems der ξ, η, ζ wählen, dessen Axen den Axen der x, y, z parallel laufen, d. h. $x - x_1 = \xi$, $y - y_1 = \eta$, $z - z_1 = \zeta$ setzen:

$$X = -\Omega^2\xi - \frac{d\Omega}{dt}\eta + \Omega\Psi\zeta$$
$$Y = \frac{d\Omega}{dt}\xi - \Omega^2\eta$$
$$Z = -\Omega\Psi\cdot\xi.$$

Nun sind aber $-\Omega^2\xi = \Omega^2 p\left(-\frac{\xi}{p}\right)$, $-\Omega^2\eta = \Omega^2 p\left(-\frac{\eta}{p}\right)$ die Componenten einer Beschleunigung $\Omega^2 p$, welche senkrecht nach einer durch das Beschleunigungscentrum zur Momentanaxe parallel gezogenen Geraden hin gerichtet ist, wobei p den Abstand des Systempunktes von dieser Geraden bedeutet; ebenso sind

$$\frac{d\Omega}{dt}\xi = \frac{d\Omega}{dt}p\cdot\left(\frac{\xi}{p}\right) \text{ und } -\frac{d\Omega}{dt}\eta = \frac{d\Omega}{dt}p\cdot\left(-\frac{\eta}{p}\right)$$

die Componenten einer Beschleunigung $\frac{d\Omega}{dt}\cdot p$, senkrecht zu jener Axe und zu p. Beide Componenten zusammen bilden die Beschleunigung, welche der Systempunkt haben würde, wenn die Momentanaxe durch das Beschleunigungscentrum ginge und nicht wechselte. Endlich sind

$$\Omega\Psi\zeta = \Omega\Psi\cdot r_1\left(\frac{\zeta}{r_1}\right) \text{ und } -\Omega\Psi\xi = \Omega\Psi\cdot r_1\left(-\frac{\xi}{r_1}\right)$$

die Componenten einer zur Ebene der $\xi\zeta$ parallelen Beschleunigung $\Omega\Psi r_1 = \Omega\frac{d\sigma}{dt}r_1$, welche nichts anderes ist, als die Normalcomponente der durch die Winkelbeschleunigung hervorgerufenen Beschleunigung des Systempunktes, wobei r_1 den Abstand desselben von der y-Axe, d. h. von der Axe der Normalwinkelbeschleunigung bedeutet, wenn dieselbe durch das Beschleunigungscentrum geführt gedacht wird. Diese und die vorige Componente bilden die gesammte, von der Winkelbeschleunigung herrührende Beschleunigung. Man kann daher den Satz aufstellen:

Die Beschleunigung eines Punktes im unveränderlichen System, welches die allgemeinste Art der Bewegung besitzt, ist dieselbe, welche er besitzen würde, wenn das System um das Beschleunigungscentrum rotirte, und zwar um eine

zur Momentanaxe parallele Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit Ω und derselben Winkelbeschleunigung α.

Die Punkte gleicher Beschleunigung ordnen sich auf folgende Weise um das Beschleunigungscentrum. Alle Punkte, welche von der durch dies Centrum zur Momentanaxe parallel gelegten Geraden denselben Abstand p besitzen, haben dieselbe centripetale und tangentiale Beschleunigungscomponente $\Omega^2 p$ und $\frac{d\Omega}{dt}p$; sie liegen daher auf einem Cylinder, welcher um diese Gerade als Axe in dem Abstande p beschrieben werden kann. Alle Punkte, welche von der durch das Beschleunigungscentrum zur Axenrichtung der Normalwinkelbeschleunigung (also zur gemeinschaftlichen Normalen der Flächen (C) und (Γ) im Punkte O, dem Fusspunkte kürzesten Abstandes der Momentanaxe von ihrer nächsten Lage) parallelen Geraden denselben Abstand r_1 besitzen, haben gleiche Beschleunigungscomponente $\Omega\Psi r_1$. Sie liegen mithin auf einer mit dem Abstande r_1 von dieser Axe beschriebenen Cylinderfläche.

Hieraus folgt:

Alle Systempunkte, welche sich auf der Durchschnittscurve zweier Cylinder befinden, deren Axen sich im Beschleunigungscentrum rechtwinklig schneiden und von denen die Axe des ersten der Momentanaxe, die des andern der Axe der Normalwinkelbeschleunigung parallel ist, besitzen gleiche Beschleunigung.

§. 4. Wir wollen jetzt die Normal- und Tangentialcomponente der Beschleunigung eines Systempunktes M (xyz) bilden. Zu dem Ende haben wir die Grössen X, Y, Z jede zu zerlegen in zwei Componenten, von denen die eine in der Richtung der Tangente der Bahn des Punktes fällt, während die andere dazu senkrecht ist. Indem wir hierauf die Componenten der ersten Art summiren, erhalten wir die gesuchte Tangentialbeschleunigung φ_t und indem wir aus den Componenten der zweiten Art die Resultante ziehen, ergibt sich die Normalbeschleunigung φ_n. Die Richtung der Tangente an die Bahn des Systempunktes ist die Tangente einer Cylinderschraube um die Momentanaxe, deren Bogenelement der Systempunkt beschreibt. Durch den Systempunkt legen wir eine Ebene senkrecht zur Momentanaxe und beschreiben in ihr um den Schnittpunkt mit dieser Axe einen Kreis im Abstande r. Die Richtungen Mt, Mt_1, MX der Tangente an die Schraubenlinie, an den Kreis und die Richtung parallel der x-Axe bilden in M eine dreiflächige Ecke, in welcher die Ebene tt_1 senkrecht auf $t_1 x$ ist. Daher erhalten wir

$$\cos(tX) = \cos(tt_1) \cdot \cos(t_1 X).$$

Ebenso bildet die y-Richtung mit Mt und Mt_1 eine Ecke, aus welcher sich ergibt

$$\cos(tY) = -\cos(tt_1)\cdot\cos(t_1 Y).$$

Nun ist aber, wie leicht zu sehen, $\cos(tt_1) = \frac{r\Omega}{\sqrt{r^2\Omega^2+T^2}}$, $\cos(t_1 X) = \frac{y}{r}$, $\cos(t_1 Y) = -\frac{x}{r}$ und deshalb

$$\cos(tX) = \frac{\Omega y}{\sqrt{r^2\Omega^2+T^2}}, \qquad \cos(tY) = -\frac{\Omega x}{\sqrt{r^2\Omega^2+T^2}}$$

und hierzu erhält man weiter sofort

$$\cos(tZ) = \frac{T}{\sqrt{r^2\Omega^2+T^2}}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergibt sich die Tangentialbeschleunigung φ_t des Systempunktes:

$$\varphi_t = X\cos(tX) + Y\cos(tY) + Z\cos(tZ),$$

oder indem man die Ausdrücke für X, Y, Z aus §. 2. einführt:

$$\varphi_t = \frac{\Omega\frac{d\Omega}{dt}\cdot r^2 - \Omega^2\Psi yz - \Omega^2 Ux + T\frac{dT}{dt}}{\sqrt{r^2\Omega^2+T^2}}$$

Die Bestandtheile, welche die Normalbeschleunigung φ_n bilden, sind auf folgende Art leicht darzustellen. Die beiden Componenten X und Y, welche in die Ebene senkrecht zur Momentanaxe fallen, zerlegen wir jede in zwei Componenten, eine in der Richtung von r, die andere senkrecht dazu, letztere Richtung übereinstimmend mit dem Sinne von Ω genommen. Da diese beiden Richtungen mit den Coordinatenaxen Winkel bilden, deren Cosinusse sind: $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ für die erste, $\frac{y}{r}$, $-\frac{x}{r}$ für die zweite, so erhalten wir durch diese Zerlegung in der Richtung von r die Componente

$$S = X\frac{x}{r} + Y\frac{y}{r} = -\Omega^2 r - \Omega\Psi\frac{xz}{r} + (\Omega U + T\Psi)\frac{y}{r}$$

und senkrecht dazu

$$W = X\frac{y}{r} - Y\frac{x}{r} = \frac{d\Omega}{dt}r - \Omega\Psi\frac{yz}{r} - (\Omega U + T\Psi)\frac{x}{r}.$$

W aber spaltet sich wieder in zwei Bestandtheile, einen von der Richtung der Tangente an die Bahn des Systempunktes, welcher bereits in φ_t enthalten ist, und einen andern, welcher normal dazu in die Tangentenebene des Cylinders um die Momentanaxe fällt. Letzterer ist $W\cos\left(\frac{\pi}{2} + tt_1\right) = -W\cos tt_1 = -\frac{r\Omega}{\sqrt{r^2\Omega^2+T^2}}\cdot W$. Hierzu tritt nun noch von Z der normale Bestandtheil $Z\cdot\frac{r\Omega}{\sqrt{r^2\Omega^2+T^2}}$ in

derselben Richtung wie $-W\cos(tt_1)$, sodass beide zusammengehen in einen, nämlich

$$S' = (Z - W)\frac{r\Omega}{\sqrt{r^2\Omega^2 + T^2}}$$

$$= \frac{r\Omega}{\sqrt{r^2\Omega^2 + T^2}}\left[-\frac{d\Omega}{dt}r + \Omega\Psi\frac{yz}{r} + (\Omega U + T\Psi)\frac{x}{r} + \Omega\Psi x + \frac{dT}{dt}\right].$$

Die beiden Componenten S, S' fallen in die Normalebene der Bahn und sind zu einander rechtwinklig. Ihre Resultante ist φ_n, hat die Richtung der Hauptnormalen, d. h. der Schnittlinie der Normalebene und der Schmiegungsebene oder die des Krümmungshalbmessers, mit welchem sie auch dem Sinne nach übereinstimmt. Man hat demnach

$$r^2\varphi_n^2 = [-\Omega^2 r^2 - \Omega\Psi xz + (\Omega U + T\Psi)y]^2$$

$$+ \frac{r^2\Omega^2}{r^2\Omega^2 + T^2}\left[-\frac{d\Omega}{dt}r^2 + \Omega\Psi yz + (\Omega U + T\Psi)x + \left(\Omega\Psi x - \frac{dT}{dt}\right)r\right]^2$$

und erhält weiter für die Tangente der Neigung α der Hauptnormalen gegen die Richtung von r

$$tg\,\alpha = \frac{S'}{S} = \frac{r\Omega}{\sqrt{r^2\Omega^2 + T^2}}\cdot\frac{-\frac{d\Omega}{dt}r^2 + \Omega\Psi yz + (\Omega U + T\Psi + \Omega\Psi r)x + r\frac{dT}{dt}}{-\Omega^2 r^2 - \Omega\Psi xz + (\Omega U + T\Psi)y},$$

während die Neigung λ der Normalebene gegen Ebenen senkrecht zur Momentanaxe, oder was dasselbe ist, die Neigung der Bahn gegen die Momentanaxe angegeben wird durch

$$tg\,\lambda = \frac{r\Omega}{T}.$$

Die Richtung der Hauptnormalen oder des Krümmungshalbmessers der Bahn des Systempunktes schneidet die Momentanaxe nicht, sondern kreuzt sie unter einem Winkel μ, für welchen

$$\cos\mu = \frac{T\sin\alpha}{\sqrt{r^2\Omega^2 + T^2}}.$$

Der Krümmungshalbmesser der Bahn ergibt sich mit Hülfe der Gleichung $\frac{v^2}{\varrho} = \varphi_n$, nämlich:

$$\varrho = \frac{r^2\Omega^2 + T^2}{\varphi_n}.$$

§. 5. Die Systempunkte, deren Tangentialbeschleunigung φ_t Null ist, welche also im Allgemeinen eben ein Maximum oder Minimum der Geschwindigkeit besitzen, liegen auf der Fläche zweiten Grades

$$\Omega\frac{d\Omega}{dt}(x^2 + y^2) - \Omega^2\Psi yz - \Omega^2 Ux + T\frac{dT}{dt} = 0.$$

Diese Fläche besitzt einen Mittelpunkt, dessen Coordinaten

$$x = \frac{1}{2}\frac{\Omega U}{\frac{d\Omega}{dt}}, \qquad y = z = 0$$

sind. Die x-Axe ist eine Hauptaxe der Fläche und von den beiden anderen Hauptaxen, welche parallel der yz-Ebene laufen, bildet die eine mit den Axen der y und z Winkel, deren Cosinusse den Grössen $-\Omega^2\Psi$ und $\Omega\left(\frac{d\Omega}{dt}+\sqrt{\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2+\Omega^2\Psi^2}\right)$ proportional sind. Wählt man unter Beibehaltung der x-Axe diese letztere Axe zur y-Axe, so ist die Gleichung der Fläche in Bezug auf Mittelpunkt und Hauptaxen:

$$\Omega\frac{d\Omega}{dt}x^2+\tfrac{1}{2}\Omega\left(\frac{d\Omega}{dt}-\sqrt{\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2+\Omega^2\Psi^2}\right)y^2$$
$$+\tfrac{1}{2}\Omega\left(\frac{d\Omega}{dt}+\sqrt{\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2+\Omega^2\Psi^2}\right)z^2-\tfrac{1}{4}\frac{\Omega^3 U}{\frac{d\Omega}{dt}}+T\frac{dT}{dt}=0.$$

Die Fläche ist daher im Allgemeinen ein Hyperboloid und zwar ein einfaches oder ein doppeltes, je nachdem $\frac{d\Omega}{dt}$ positiv oder negativ ist. Für constante T und $U=0$ wird sie ein Kegel, für $\Psi=0$ ein Cylinder. Für $\frac{d\Omega}{dt}=0$ stellt die Fläche ein hyperbolisches Paraboloid dar:

$$\Omega^2\Psi yz+\Omega^2 Ux-T\frac{dT}{dt}=0.$$

§. 6. Die Punkte, deren Normalbeschleunigungscomponente $S=0$ ist, welche also blos senkrecht zur Richtung von r beschleunigt werden, liegen auf der Fläche zweiter Ordnung

$$\Omega^2(x^2+y^2)+\Omega\Psi xz-(\Omega U+T\Psi)y=0,$$

welche die Momentanaxe enthält. Der Mittelpunkt derselben hat die Coordinaten $x=z=0$, $y=\tfrac{1}{2}\left(\frac{U}{\Omega}+\frac{T\Psi}{\Omega^2}\right)$; die y-Axe ist die Richtung einer Hauptaxe und von den beiden anderen, welche in die xz Ebene fallen, bildet die eine mit den Axen der y und z Winkel, deren Cosinusse proportional $\Omega\Psi$ und $\Omega+\sqrt{\Omega^4+\Omega^2\Psi^2}$ sind. Wählt man diese Axe zur x-Axe, so wird die Gleichung der Fläche in Bezug auf Mittelpunkt und Hauptaxen

$$\tfrac{1}{2}\left(\Omega^2-\sqrt{\Omega^4+\Omega^2\Psi^2}\right)x^2+\Omega^2y^2+\tfrac{1}{2}\left(\Omega^2+\sqrt{\Omega^4+\Omega^2\Psi^2}\right)z^2$$
$$-\tfrac{1}{4}\left(\frac{\Omega U+T\Psi}{\Omega}\right)^2=0.$$

Die Fläche ist ein einfaches Hyperboloid mit der y- und z-Axe als reellen Hauptaxen. Für $T=0$ und $U=0$, d. h. für die Rotation des Systems um einen Punkt geht dasselbe in einen Kegel über, dessen Mittelpunkt im Rotationscentrum liegt. Für $T=0$ und $\Psi=0$, d. h. für das System, welches sich parallel einer Ebene bewegt, wird aus ihr ein Cylinder; ebenso wenn Ψ allein verschwindet.

Die Systempunkte, für welche die Normalbeschleunigungscomponente $S' = 0$ wird, welche also senkrecht zur Momentanaxe beschleunigt werden und welche Bahnen beschreiben, deren Krümmungshalbmesser eben die Momentanaxe rechtwinklig schneiden, liegen auf der Fläche vierter Ordnung:

$$\frac{d\Omega}{dt}(x^2+y^2) - \Omega\Psi yz + (\Omega U + T\Psi)x + \left(\frac{dT}{dt} - \Omega\Psi x\right)\sqrt{x^2+y^2} = 0,$$

welche blos für $\frac{dT}{dt} = 0$ und $\Omega\Psi = 0$ sich auf eine Fläche zweiter Ordnung reducirt.

Der geometrische Ort aller Systempunkte, deren totale Normalbeschleunigung Null ist, ist die Durchschnittscurve der beiden zuletzt genannten Flächen und mithin im Allgemeinen eine Curve doppelter Krümmung der achten Ordnung. Nur in dem Falle, dass $\frac{dT}{dt} = 0$ und $\Omega\Psi = 0$, in welchem Falle beide Flächen sich auf die Cylinder

$$x^2 + y^2 - \frac{U}{\Omega^2}y = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{U}{\Omega^2}x = 0$$

reduciren, besteht der Ort aus zwei Geraden, nämlich der Momentanaxe und der Beschleunigungsaxe.

§. 7. Man kann die bisher geführten Untersuchungen auch rein analytisch in grösster Allgemeinheit behandeln. Es sei hierfür ein festes Coordinatensystem der x, y, z und ein bewegliches der x', y', z', welches mit dem System, um dessen Bewegung es sich handelt, fest verbunden ist. Man hat dann wie früher die Transformationsformeln

$$x = x_0 + ax' + a'y' + a''z'$$

$$y = y_0 + bx' + b'y' + b''z'$$

$$z = z_0 + cx' + c'y' + c''z',$$

worin x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des beweglichen Ursprungs O, den wir auf der Momentanaxe im Fusspunkte ihres kürzesten Abstandes von der folgenden Momentanaxe annehmen wollen, $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ aber die Richtungscosinusse der Axen x', y', z' gegen die festen Axen bedeuten. Differentiirt man diese Gleichungen zweimal und bedenkt, dass x', y', z' von der Zeit nicht abhängen, sondern die unveränderliche Lage des Systempunktes im System bestimmen, so erhält man für die Componenten $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ der Beschleunigung φ des Systempunktes parallel den festen Axen die Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_0}{dt^2} + x'\frac{d^2a}{dt^2} + y'\frac{d^2a'}{dt^2} + z'\frac{d^2a''}{dt^2}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_0}{dt^2} + x'\frac{d^2b}{dt^2} + y'\frac{d^2b'}{dt^2} + z'\frac{d^2b''}{dt^2}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z_0}{dt^2} + x'\frac{d^2c}{dt^2} + y'\frac{d^2c'}{dt^2} + z'\frac{d^2c''}{dt^2}.$$

Die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Beschleunigungscentrums genügen den Bedingungen

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} = 0,$$

seine Lage im System wird daher durch die Gleichungen

$$0 = \frac{d^2x_0}{dt^2} + x_1'\frac{d^2a}{dt^2} + y_1'\frac{d^2a'}{dt^2} + z_1'\frac{d^2a''}{dt^2}$$
$$0 = \frac{d^2y_0}{dt^2} + x_1'\frac{d^2b}{dt^2} + y_1'\frac{d^2b'}{dt^2} + z_1'\frac{d^2b''}{dt^2}$$
$$0 = \frac{d^2z_0}{dt^2} + x_1'\frac{d^2c}{dt^2} + y_1'\frac{d^2c'}{dt^2} + z_1'\frac{d^2c''}{dt^2}$$

bestimmt. Subtrahirt man diese Gleichungen von den vorigen, für die Componenten der Beschleunigung aufgestellten, so erhält man diese Componenten etwas einfacher dargestellt, falls man das Beschleunigungscentrum zum Ursprunge der Coordinaten $\xi = x' - x_1'$, $\eta = y' - y_1'$, $\zeta = z' - z_1'$ wählt, nämlich:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \xi\frac{d^2a}{dt^2} + \eta\frac{d^2a'}{dt^2} + \zeta\frac{d^2a''}{dt^2}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \xi\frac{d^2b}{dt^2} + \eta\frac{d^2b'}{dt^2} + \zeta\frac{d^2b''}{dt^2}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \xi\frac{d^2c}{dt^2} + \eta\frac{d^2c'}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c''}{dt^2}.$$

Nachdem man die Coordinaten x_1', y_1', z_1' des Beschleunigungscentrums im System gefunden, ergeben sich mit Hülfe der zu Anfang des §. aufgestellten Gleichungen auch dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 im absoluten Raume.

Die Normal- und Tangentialbeschleunigung φ_n, φ_t eines Systempunktes ergeben sich auf folgende Weise. Nach S. 316, Anm. ist der Contingenzwinkel $d\varepsilon$ der Bahn eines Punktes (wenn wir die Differentiationen alle auf die Zeit t als unabhängige Variabele beziehen und $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$, $\frac{dz}{dt} = z'$, $\frac{ds}{dt} = s'$ setzen, woraus $s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ und wenn zwei Accente eine zweimalige Differentiation nach t bedeuten, $s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z''$ folgen) gegeben durch die Gleichung

$$d\varepsilon^2 = \left(d\cdot\frac{x'}{s'}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{y'}{s'}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{z'}{s'}\right)^2$$

und folglich nach Ausführung der Differentiationen:

$$s'^4 \cdot \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2$$

$$= (s'x'' - s''x')^2 + (s'y'' - s''y')^2 + (s'z'' - s''z')^2$$

$$= s'^2(x''^2 + y''^2 + z''^2) + s''^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2s's''(x'x'' + y'y'' + z'z'')$$

$$= (x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2$$

$$= (x'y'' - x''y')^2 + (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - x'z'')^2.$$

Da der Krümmungshalbmesser ϱ durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{s'}{\frac{d\varepsilon}{dt}}$$

bestimmt wird, so hat man zufolge der vorstehenden Relationen und mit Rücksicht auf die Bedeutung der zur Abkürzung gebrauchten Schreibweise

$$\frac{s'^6}{\varrho^2} = \left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2.$$

Da aber $\frac{ds}{dt} = v$, so stellt dieser Ausdruck das Quadrat von

$$\frac{v^2}{\varrho} \cdot v = \varphi_n \cdot v$$

dar, wodurch φ_n als gefunden zu betrachten ist. Ferner ergibt sich durch Differentiation von

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

die weitere Gleichung

$$v\frac{dv}{dt} = v\varphi_t = \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Hiermit erhält man für die geometrischen Orte der Systempunkte ohne Normalbeschleunigung und ohne Tangentialbeschleuuigung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} : \frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} : \frac{dy}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} : \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

der erste Ort ist stets eine Curve, der zweite eine Fläche.

In den Ausdrücken für die Componenten der Beschleunigung kommen die ersten und zweiten Derivirten der Cosinusse $a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''$ vor. Um dieselben zu entwickeln, bedenken wir, dass

$$a = \cos(XX'), \quad a' = \cos(XY'), \quad a'' = \cos(XZ')$$

die Coordinaten eines Punktes P sind in der Einheit der Entfernung von dem beweglichen Ursprunge O, dessen Radiusvector OP parallel der x-Axe ist, in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem der x', y', z'. Daher sind $\frac{da}{dt}, \frac{da'}{dt}, \frac{da''}{dt}$ die Componenten der relativen Geschwindigkeit des Punktes P bezüglich dieser Axen. Zerlegt man nun die Winkel-

geschwindigkeit Ω um die Momentanaxe in ihre Componenten $\Omega_{x'}$, $\Omega_{y'}$, $\Omega_{z'}$ parallel den Axen der x', y', z', so sind

$$a'\Omega_{z'} - a''\Omega_{y'}, \quad a''\Omega_{x'} - a\Omega_{z'}, \quad a\Omega_{y'} - a'\Omega_{x'}$$

die Componenten jener relativen Geschwindigkeit, also

$$\frac{da}{dt} = a'\Omega_{z'} - a''\Omega_{y'}$$

$$\frac{da'}{dt} = a''\Omega_{x'} - a\Omega_{z'}$$

$$\frac{da''}{dt} = a\Omega_{y'} - a'\Omega_{x'}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{d^2a}{dt^2} = a''\frac{d\Omega_{x'}}{dt} - a\frac{d\Omega_{z'}}{dt} + \Omega_{z'}\frac{da'}{dt} - \Omega_{y'}\frac{da''}{dt}$$

und in ähnlicher Weise $\frac{d^2a'}{dt^2}$, $\frac{d^2a''}{dt^2}$.

In jenen Ausdrücken kommen auch die Grössen $\frac{d^2x_0}{dt^2}$, $\frac{d^2y_0}{dt^2}$, $\frac{d^2z_0}{dt^2}$ vor, welche die Componenten der Beschleunigung des beweglichen Coordinatenursprungs darstellen. Wir wollen auch diese zweckmässig umformen. Der Punkt x_0, y_0, z_0 besitzt die Componenten der Geschwindigkeit

$$\frac{dx_0}{dt} = T\frac{\Omega_{x'}}{\Omega}, \quad \frac{dy_0}{dt} = T\frac{\Omega_{y'}}{\Omega}, \quad \frac{dz_0}{dt} = T\frac{\Omega_{z'}}{\Omega_z}$$

parallel der Momentanaxe und erlangt von Seiten der Translationsgeschwindigkeit des Systems die Elementarbeschleunigungscomponenten

$$d\left(T\frac{\Omega_{x'}}{\Omega}\right), \quad d\left(T\frac{\Omega_{y'}}{\Omega}\right), \quad d\left(T\frac{\Omega_{z'}}{\Omega}\right).$$

Durch die Rotation um die folgende Momentanaxe, deren kürzester Abstand von der ersteren de sei, erlangt er aber weitere Elementarbeschleunigungscomponenten, nämlich wenn λ, μ, ν die Cosinusse der Richtungswinkel von de gegen die beweglichen Axen sind

$$(\mu\cdot\Omega_{z'} - \nu\cdot\Omega_{y'})\,de, \quad (\nu\cdot\Omega_{x'} - \lambda\cdot\Omega_{z'})\,de, \quad (\lambda\cdot\Omega_{y'} - \mu\cdot\Omega_{x'})\,de$$

Daher sind seine Beschleunigungscomponenten überhaupt:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(T\frac{\Omega_{x'}}{\Omega}\right) + (\mu\cdot\Omega_{z'} - \nu\cdot\Omega_{y'})\frac{de}{dt}$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(T\frac{\Omega_{y'}}{\Omega}\right) + (\nu\cdot\Omega_{x'} - \lambda\cdot\Omega_{z'})\frac{de}{dt}$$

$$\frac{d^2z_0}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(T\frac{\Omega_{z'}}{\Omega}\right) + (\lambda\cdot\Omega_{y'} - \mu\cdot\Omega_{x'})\frac{de}{dt}$$

Bisher liessen wir die Wahl der Coordinatenaxen ganz frei; nehmen wir aber jetzt an, dass die Axe der z' mit der Momentanaxe und die Axe der x' mit der Richtung des kürzesten Abstandes de zusammen-

falle, sowie dass zu Anfang des Zeitelementes dt die Richtungen der beweglichen Axen in den Richtungen der correspondirenden festen Axe liegen, durch die Bewegung des Systems aber aus dieser Lage herausgehoben werden. Dann erhält man folgendes System von Werthen für

$$x_0 y_0 z_0, \quad \lambda \mu \nu, \quad a a' a'', \quad b b' b'', \quad c c' c''$$

und ihre Derivirten der ersten und zweiten Ordnung:

$$\Omega_{x'} = 0, \quad \Omega_{y'} = 0, \quad \Omega_{z'} = \Omega, \quad \lambda = 1, \quad \mu = \nu = 0$$

$$\frac{dx_0}{dt} = 0, \quad \frac{dy_0}{dt} = 0, \quad \frac{dz_0}{dt} = T,$$

$$\begin{array}{lll} a = 1 & a' = 0 & a'' = 0 \\ b = 0 & b' = 1 & b'' = 0 \\ c = 0 & c' = 0 & c'' = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \frac{da}{dt} = 0 & \frac{da'}{dt} = -\Omega & \frac{da''}{dt} = 0 \\ \frac{db}{dt} = \Omega & \frac{db'}{dt} = 0 & \frac{db''}{dt} = 0 \\ \frac{dc}{dt} = 0 & \frac{dc'}{dt} = 0 & \frac{dc''}{dt} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \frac{d^2a}{dt^2} = -\Omega^2, & \frac{d^2a'}{dt^2} = -\frac{d\Omega_z}{dt}, & \frac{d^2a''}{dt^2} = \frac{d\Omega_y}{dt} \\ \frac{d^2b}{dt^2} = -\Omega^2, & \frac{d^2b'}{dt^2} = -\frac{d\Omega_x}{dt}, & \frac{d^2b''}{dt^2} = \frac{d\Omega_z}{dt} \\ \frac{d^2c}{dt^2} = 0 & \frac{d^2c'}{dt^2} = -\frac{d\Omega_y}{dt}, & \frac{d^2c''}{dt^2} = \frac{d\Omega_x}{dt} \end{array}$$

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = \frac{T}{\Omega}\frac{d\Omega_x}{dt}, \quad \frac{d^2y_0}{dt^2} = \frac{T}{\Omega}\frac{d\Omega_y}{dt} - \Omega\frac{de}{dt}, \quad \frac{d^2z_0}{dt^2} = \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dx'}{dt} = -\Omega y', \quad \frac{dy'}{dt} = \Omega x', \quad \frac{dz'}{dt} = T$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x_0}{dt^2} - \Omega^2 x' - \frac{d\Omega_z}{dt} y' + \frac{d\Omega_y}{dt} z'$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y_0}{dt^2} - \Omega^2 y' - \frac{d\Omega_x}{dt} z' + \frac{d\Omega_z}{dt} x'$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z_0}{dt^2} - \frac{d\Omega_y}{dt} x' + \frac{d\Omega_x}{dt} y',$$

welche Ausdrücke für die weitere Verfolgung eines Problems in die obigen Gleichungen einzuführen sind.

§. 8. Die oben §. 1—6. entwickelten Lehren verdankt man zum Theil **Rivals**, zum Theil **Résal** (*Mémoire sur les propriétés géométriques du mouvement le plus général d'un corps solide. Journ. de l'école polyt. T. XXI (37ième Cah.) 1858*). Wir sind bei Darstellung derselben vorzugsweise dem Ideengange des Letzteren gefolgt, haben aber mancherlei Ungenauigkeiten und Unrichtigkeiten, welche sich in seine Betrach-

tungen eingeschlichen haben, berichtigt und die Rechnung nicht unbedeutend vereinfacht. Indessen kann man der ganzen Untersuchung über die Beschleunigung des Systems für den Fall der allgemeinsten Bewegung auch leicht folgende, etwas andere Grundlage geben.

Das System besitze zur Zeit t die Schraubengeschwindigkeit (T, Ω) um die Momentanaxe C, wie früher, zur Zeit $t + dt$ aber die Schraubengeschwindigkeit (T', Ω') um die folgende Momentanaxe C', welche von C den kürzesten Abstand $OO' = de$ habe und mit ihr den unendlich kleinen Winkel $d\sigma$ bilde. Wir fragen zunächst, welche unendlich kleine Schraubengeschwindigkeit und was sonst noch muss zu (T, Ω) hinzutreten, um diese Grösse in (T', Ω') überzuführen? Während des ersten Zeitelementes besitzt das System der Schraubengeschwindigkeit (T, Ω), während des zweiten (T', Ω'). Nun ist Ω' äquivalent der Winkelgeschwindigkeit Ω' um eine durch O gehende, zu C' parallele Axe C'' und der unendlich kleinen Translationsgeschwindigkeit. $U dt$ senkrecht zu C' oder C, parallel der Ebene $C''C$, also senkrecht zu OO'. Die Winkelgeschwindigkeit Ω' um C'' ist aber äquivalent Ω um C und der unendlich kleinen Winkelgeschwindigkeit αdt, welche durch die Winkelbeschleunigung gegeben wird um die Axe α, welche in die Ebene $C''C$ fällt und durch O geht. Die Translationsgeschwindigkeit T' parallel C' ist äquivalent der Translationsgeschwindigkeit T parallel C und der unendlich kleinen Translationsgeschwindigkeit $u dt$, welche von der Translationsbeschleunigung u gegeben wird und gleichfalls der Ebene $C''C$ parallel ist. Die beiden Translationsgeschwindigkeiten $U dt$ und $u dt$, welche beide der Ebene $C''C$ parallel sind, vereinigen wir nun zu einer einzigen, gleichfalls dieser Ebene parallelen und zerlegen wir diese wieder parallel der Axe der Winkelbeschleunigung α durch O und senkrecht zu ihr, wobei die letztere Componente immerhin parallel $C''C$ wird. Die zur Axe α senkrechte Componente gibt nun mit αdt zusammen eine unendlich kleine Winkelgeschwindigkeit derselben Grösse um eine zur Axe α parallele Axe, welche in einer durch diese Axe gehenden, zu jener rechtwinkligen Componente senkrechten Ebene in endlichem Abstande von der Axe c liegt. Die zu dieser Axe parallele Componente der Translationen gibt mit αdt eine unendlich kleine Schraubengeschwindigkeit, welche $U dt$, $u dt$ und αdt zusammen äquivalent ist. Die Componente Ω um C, welche sich aus der Zerlegung von Ω' um C'' ergab, findet nun während des zweiten Zeitelementes um C statt und damit dies eintrete, muss zu Ω, welches während des ersten Zeitelementes um dieselbe Axe C stattfindet, blos die centripetale Elementarbeschleunigung $\Omega^2 dt$ für die Entfernung gleich der Einheit hinzutreten, während eine tangentiale Beschleunigung nicht hinzutritt, da die Grösse von Ω sich für das folgende Zeitelement nicht ändert. Aus dem Entwickelten geht hervor, dass wenn die Schraubengeschwindigkeit (T, Ω) um C in die geänderte Schraubengeschwindigkeit

(T', Ω') um C' übergeführt werden soll, zu ihr hinzutreten muss: 1. eine unendlich kleine Schraubengeschwindigkeit um eine bestimmte Axe, welche in endlicher Entfernung von der Momentanaxe liegt und 2. eine unendlich kleine Geschwindigkeit senkrecht zu dieser Axe und nach ihr hin gerichtet, deren Werth für die Einheit der Entfernung $\Omega^2 dt$ ist. Die Schraubengeschwindigkeit, mit dt dividirt, d. h. auf die Zeiteinheit bezogen, nennen wir die Schraubenbeschleunigung und ihre Axe die Axe der Schraubenbeschleunigung; die nach der Momentaxe hin gerichtete zweite Componente, durch dt dividirt, nämlich die Grösse Ω^2, nennen wir die Axialbeschleunigung und den Inbegriff beider, der Schrauben- und der Axialbeschleunigung, die Systembeschleunigung. Aus ihr erhalten wir leicht die Beschleunigung jedes Systempunktes, indem wir die Rotationscomponente der Schraubenbeschleunigung und die Axialbeschleunigung mit den Abständen des Systempunktes von den Axen dieser Grössen multipliciren und mit der Translationscomponente der Schraubenbeschleunigung verbinden.

Aus dem Gesagten ergibt sich, dass es, damit die Bewegung des Systems zu Stande komme, nicht genügt, dass zu der Schraubengeschwindigkeit (T, Ω) eine blose Schraubenbeschleunigung hinzutrete, dass vielmehr in dem Systeme noch eine Beschleunigung auftreten muss, welche die Punkte desselben gegen die Momentanaxe hindrängt, die Axialbeschleunigung.

An diese Betrachtung kann man leicht die Auffindung des Beschleunigungscentrums mit Hülfe der Beschleunigung dreier Systempunkte, der oben entwickelten geometrischen Oerter ausgezeichneter Systempunkte und die Bestimmung der Beschleunigung der Bewegung eines Systems, dessen Bewegung aus mehreren anderen Bewegungen zusammengesetzt ist, anschliessen.

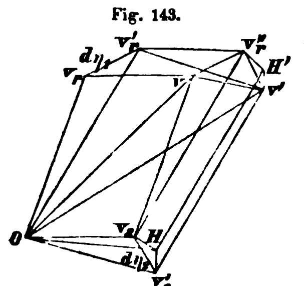
IX. Capitel.

Die Beschleunigung der relativen Bewegung eines Punktes im unveränderlichen System; Beschleunigung der relativen Bewegung eines unveränderlichen Systems in einem anderen.

§. 1. Bereits im V. Cap., §. 1. des II. Theiles wurde gezeigt, dass die absolute Geschwindigkeit eines Punktes die Resultante seiner relativen Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Systempunktes ist, welcher eben mit ihm zusammenfällt. Hier soll nun untersucht werden, in welcher Weise die Beschleunigung der absoluten Geschwindigkeit von den Beschleunigungen der relativen Geschwindigkeit und der Beschleunigung der Geschwindigkeit des Systempunktes abhängt. Es wird sich zeigen, dass die erstere nicht blos aus den beiden letzteren

allein sich bildet, sondern dass zu diesem noch eine dritte Componente hinzutritt, die zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung.

Es sei v die absolute Geschwindigkeit des beweglichen Punktes M zur Zeit t; sie ist die Resultante seiner relativen Geschwindigkeit v_r im System und der Geschwindigkeit v_s des Systempunktes m, der zur Zeit t mit ihm zusammenfällt. Ebenso seien v', v_r', v_s' die absolute und relative Geschwindigkeit des beweglichen Punktes zur Zeit $t + dt$, zu welcher er die absolute Lage M' hat, sowie die Geschwindigkeit des Systempunktes m', der zur Zeit $t + dt$ mit ihm zusammentrifft. Auch hier ist v' die Resultante von v_r', v_s'. Ziehen wir nun durch irgend einen Punkt O (Fig. 143.) des Raumes zwei Gerade OV, OV' gleich, parallel und von demselben Sinne mit den absoluten Geschwindigkeiten v, v', so stellt VV' die Elementarbeschleunigung du der absoluten Bewegung zur Zeit t dar. Ziehen wir ebenso durch O zwei andere Gerade OV_r, OV_r' gleich parallel und von gleichem Sinne mit den Geschwindigkeiten v_r, v_r' der relativen Bewegung, so würde $V_r V_r' = d\eta_1$ die Elementarbeschleunigung der relativen Bewegung du_r sein, wenn die relative Bahn ruhte und nicht selbst in Folge der Elementarschraubenbewegung des Systems eine Lagenänderung erlitte und dadurch eine Richtungsänderung der relativen Geschwindigkeit herbeigeführt würde. So aber zerfällt $d\eta_1$ in zwei Componenten, von denen nur eine die relative Elementarbeschleunigung ist, während die zweite eine ganz andere Bedeutung hat, wie sich nachher zeigen wird. Zwei Gerade endlich durch O, parallel, gleich und gleichen Sinnes mit den Geschwindigkeiten v_s, v_s' der Systempunkte m und m' zu den Zeiten t und $t + dt$, nämlich OV_s, OV_s' liefern eine dritte unendlich kleine Beschleunigung $V_s V_s' = d\eta_2$, welche zwar nicht unmittelbar die Elementarbeschleunigung du_s des Systempunktes m zur Zeit t darstellt, wohl aber durch diese und die Elemente der Bewegung des Systems zu dieser Zeit ausdrückbar ist, wie sich sogleich ergeben wird. Durch parallele Uebertragung der Linienelemente $d\eta_1$, $d\eta_2$ an VV' zeigt sich, dass $VV' = du$ die Resultante von $VV_r'' = d\eta_1$ und $V_r''V' = d\eta_2$ ist. Wir ziehen nun durch O eine weitere Gerade OH, welche die Geschwindigkeit des Systempunktes m' zur Zeit t darstellt; dann wird HV_s' die Elementarbeschleunigung du_s' dieses Punktes m' zur Zeit t, $V_s H$ aber eine unendlich kleine Beschleunigungcomponente $d\zeta$ darstellen, welche zu der Geschwindigkeit v_s des Systempunktes m hinzutreten muss, um diese in die Geschwindigkeit des Systempunktes m' zu derselben Zeit t überzuführen. Diese Componente tritt dadurch in die Untersuchung ein, dass der Punkt M im System vom Punkte m zum Punkte m' wandert. Die unendlich kleine


Fig. 143.

Beschleunigung $V_s V_s' = d\eta_2$ ist demnach die Resultante aus der Elementarbeschleunigung $V_s H = du_s$ des Systempunktes m und jener unendlich kleinen Beschleunigung $d\zeta$. Durch parallele Uebertragung ergibt sich der Punkt H', sodass $V_r'' H' = du_s'$ und $H' V' = d\zeta$ wird und erscheint demnach die absolute Elementarbeschleunigung du als die Resultante der drei Componenten $d\eta_1$, du_s' und $d\zeta$. Dividirt man diese drei unendlich kleinen Grössen durch das Zeitelement, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass $\frac{du_s'}{dt}$ in der Grenze in die Beschleunigung $\frac{du_s}{dt}$ des Systempunktes m zur Zeit t übergeht, die Beschleunigung $\varphi = \frac{du}{dt}$ der absoluten Bewegung als die Resultante von $\frac{d\eta_1}{dt}$, $\frac{du_s}{dt} = \varphi_s$ und einer weiteren, noch näher zu ermittelnden Beschleunigung $\frac{d\zeta}{dt}$, mit deren Bedeutung wir uns sofort beschäftigen wollen.

Es stellt $d\zeta$ die unendlich kleine Geschwindigkeitscomponente dar, um welche die Geschwindigkeit des Systempunktes m von der Geschwindigkeit des Systempunktes m' zur Zeit t verschieden ist. Nun haben beide Punkte eine Geschwindigkeitscomponente T parallel der Momentanaxe gemein; in diese Richtung fällt mithin kein Bestandtheil von $d\zeta$. Sie haben aber beide auch Geschwindigkeitscomponenten $r\Omega$, $r'\Omega$ senkrecht zu den Ebenen, welche man durch sie und die Momentanaxe legen kann, unter r, r' ihre Abstände von dieser Axe verstanden. Stellt daher die Ebene der Fig. 144. die Projectionen von m, m', r, r' auf eine zur Momentanaxe senkrechte Ebene dar und zieht man zu $mV = r\Omega$ noch die Linie mV' gleich, parallel und gleichen Sinnes mit $m'V' = r'\Omega$, so bedeutet VV' die gesuchte unendlich kleine Grösse $d\zeta$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke mVV' und Omm' ergibt sich aber sofort

$$VV' : r\Omega = mm' : r,$$

d. h. $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\overline{mm'}}{dt} \cdot \Omega$. Nun wandert der Punkt M im System von m nach m' und ist mm' die Projection seines Elementarweges in demselben auf die Ebene senkrecht zur Momentanaxe. Daher stellt $\frac{\overline{mm'}}{dt}$ die Projection U_r seiner relativen Geschwindigkeit auf dieselbe Ebene dar und wird folglich $\frac{d\zeta}{dt} = \Omega U_r$. Diese Componente ist senkrecht zu mm', also senkrecht zu der Ebene, welche durch die relative Geschwindigkeit parallel zur Momentanaxe gelegt werden kann und ihr Sinn stimmt überein mit dem Sinne von Ω. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

Fig. 144.

mVV' und Omm', von denen zwei Seitenpaare zu einander rechtwinklig sind, folgt nämlich, dass VV' senkrecht ist zu mm'.

Es bleibt uns nun noch übrig, die oben angeführte Componente $d\eta_1$ in die Elementarbeschleunigung du_r der relativen Bewegung und eine weitere unendlich kleine Beschleunigungscomponente zu spalten, welche durch die Lagenänderung der relativen Bahn herbeigeführt wird. Durch die Translationsgeschwindigkeit T tritt zur relativen Geschwindigkeit keine Elementarbeschleunigung, da ihre Grösse überhaupt nicht durch die Schraubenbewegung des Systems, ihre Richtung aber blos durch die Rotationscomponente dieser geändert wird. Die Rotation um die Momentanaxe ist aber äquivalent derselben Rotation um eine durch m gehende, ihr parallele Axe und einer Translation. Letztere übt auf die relative Geschwindigkeit ebenso wenig, wie die eben erwähnte einen verändernden Einfluss. Die gesuchte Beschleunigungscomponente hängt also blos von der Rotation um die durch m gehende Axe ab. Nun beschreibt aber der Endpunkt von v_r in Folge dieser einen unendlich kleinen zur Ebene, welche durch v_r und die Momentanaxe geführt werden kann, senkrechten Kreisbogen im Sinne von Ω, dessen Grösse gleich Ωdt multiplicirt mit dem Abstande dieses Endpunktes von der Rotationsaxe ist. Dieser Abstand ist aber die Projection U_r von v_r auf die zur Momentanaxe senkrechten Ebene und daher wird $\Omega U_r dt$ die gesuchte unendlich kleine Beschleunigungscomponente, welche mit du_r zusammen $d\eta_1$ äquivalent ist, und ΩU_r die ihr entsprechende endliche Beschleunigung φ_r'.

Da die beiden Componenten $\frac{d\zeta}{dt}$ und φ_r' der Grösse, Richtung und dem Sinne nach übereinstimmen, so liefern sie eine Resultante $\varphi_\Omega = 2\Omega U_r$.

Die bisherigen Entwickelungen liefern uns daher den folgenden zuerst von **Coriolis**, wenn auch in etwas anderer Form, auf analytischem Wege gefundenen Satz:

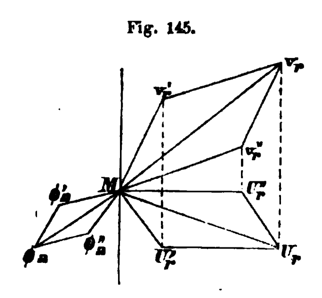
Die Beschleunigung φ der absoluten Geschwindigkeit eines Punktes M hat drei Componenten: 1. die Beschleunigung φ_r der relativen Geschwindigkeit, 2. die Beschleunigung φ_s des Systempunktes m, mit welchem eben M zusammentrifft und 3. eine Beschleunigung $\varphi_\Omega = 2\Omega U_r$, an Grösse gleich dem doppelten Produkte aus der Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe und der Projection der relativen Geschwindigkeit auf eine zur Momentanaxe rechtwinklige Ebene, der Richtung nach senkrecht zu der Ebene, welche durch den beweglichen Punkt zur Momentanaxe parallel geführt werden kann und dem Sinne nach mit Ω übereinstimmend.

Die letztere Componente heisst, freilich wenig passend, die zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung des Punktes M und wenn sie in umgekehrtem Sinne genommen auftritt, die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung, von der wir bald reden werden. Sie ist aus zwei gleichen Bestandtheilen gebildet, von denen der eine aus dem Fortschreiten des Punktes im System, der andere aus der Drehung der relativen Bahn um die Momentanaxe entspringt.

§. 2. Besitzt das System blos eine Translationsgeschwindigkeit T, aber keine Winkelgeschwindigkeit Ω, so ist die zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung $\varphi_\Omega = 0$. Dasselbe findet statt, wenn der bewegliche Punkt sich in relativer Ruhe befindet, dann ist $v_r = 0$ und folglich auch seine Projection U_r auf die zur Momentanaxe senkrechte Ebene. Ebenso verhält es sich, wenn v_r der Momentanaxe parallel läuft.

Ist die relative Bewegung eines Punktes in einem unveränderlichen System aus zwei anderen relativen Bewegungen in demselben Systeme zusammengesetzt oder wird sie in zwei solche zerlegt, so ist die zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung derselben die Resultante aus den zusammengesetzten Centripetalbeschleunigungen jener in Beziehung auf dasselbe System. Sind nämlich v_r', v_r'' die beiden Componenten der relativen Geschwindigkeit v_r des beweglichen Punktes M (Fig. 145.), so ziehe man durch M eine Gerade parallel der Momentanaxe des Systems und lege durch sie und die Richtungen dieser drei Geschwindigkeiten drei Ebenen. Diese liefern die Projectionen U_r', U_r'', U_r derselben auf eine zur Momentanaxe senkrechte Ebene und es sind die letzteren drei Linien die Seiten und die Diagonale eines Parallelogramms, welches die Projection des Parallologramms der drei ersteren auf dieselbe Ebene darstellt.

Fig. 145.

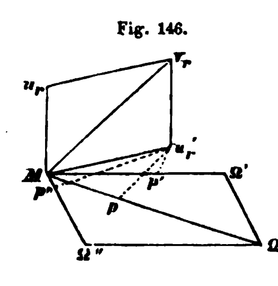


Zu diesen drei Ebenen senkrecht sind die drei zusammengesetzten Centripetalbeschleunigungen $\varphi_\Omega' = 2\,\Omega U_r'$, $\varphi_\Omega'' = 2\,\Omega U_r''$, $\varphi_\Omega = 2\,\Omega U_r$; sie bilden untereinander dieselben Winkel, wie die drei Ebenen, auf denen sie senkrecht stehen und also auch dieselben Winkel, welche U_r', U_r'', U_r untereinander bilden. Da sie nun zugleich diesen drei Grössen proportional sind, so ist φ_Ω die Diagonale eines über φ_Ω' und φ_Ω'' construirten Parallelogramms, mithin die Resultante dieser beiden. Der Satz lässt sich für beliebig viele Componenten erweitern.

Wird die Winkelgeschwindigkeit Ω des Systems um die Momentanaxe in zwei Componenten Ω', Ω'' um irgend zwei andere Axen zerlegt, so ist die zusammengesetzte Centri-

petalbeschleunigung der Bewegung eines Punktes M in Bezug auf die Winkelgeschwindigkeit Ω des Systems die Resultante der beiden zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigungen, entsprechend den Winkelgeschwindigkeiten Ω', Ω''. Zerlegt man nämlich (Fig. 146.) die relative Geschwindigkeit v_r des Punktes M in zwei Componenten u_r, u_r', von denen die erstere senkrecht zur Ebene des Axenparallelogramms der Ω ist, während die letztere in diese Ebene hineinfällt; bezeichnet man ferner die zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung, welche irgend einer relativen Geschwindigkeit v in Bezug auf die Bewegung des Systems um eine Axe von der Winkelgeschwindigkeit ω entspricht, mit $\varphi_\omega^{(v)}$ und bedient sich des Zeichens $\doteq$ um die Aequivalenz der Beschleunigungen auszudrücken, so hat man dem vorigen Satze zufolge:

Fig. 146.



$$\varphi_\Omega^{(vr)} \doteq \left(\varphi_\Omega^{(ur)},\ \varphi_\Omega^{(ur')}\right)$$
$$\varphi_{\Omega'}^{(vr)} \doteq \left(\varphi_{\Omega'}^{(ur)},\ \varphi_{\Omega'}^{(ur')}\right)$$
$$\varphi_{\Omega''}^{(vr)} \doteq \left(\varphi_{\Omega''}^{(ur)},\ \varphi_{\Omega''}^{(ur')}\right).$$

Da nun u_r auf der Ebene der drei Axen senkrecht steht, so liegt es in der Schnittlinie der drei Ebenen, welche durch die Axen von Ω, Ω', Ω'' gehen und fällt mit seiner Projection auf drei durch M gelegte zu den drei Axen senkrechte Ebenen zusammen; daher fallen die drei zusammengesetzten Centripetalbeschleunigungen

$$\varphi_\Omega^{(ur)} = 2\,\Omega u_r,\quad \varphi_{\Omega'}^{(ur)} = 2\,\Omega' u_r,\quad \varphi_{\Omega''}^{(ur)} = 2\,\Omega'' u_r$$

in die Ebene der Axen, stehen senkrecht auf diesen Axen und bilden, da sie Ω, Ω', Ω'' proportional sind, eine Parallelogramm, aus welchem folgt:

$$\varphi_\Omega^{(ur)} \doteq \left(\varphi_{\Omega'}^{(ur)},\ \varphi_{\Omega''}^{(ur)}\right).$$

Da ferner u_r' in die Ebene der Axen Ω, Ω', Ω'' fällt, so sind seine Projectionen auf drei zu diesen Axen senkrechten Ebenen den drei Perpendikeln p, p', p'' gleich, welche von dem Endpunkte von u_r auf diese Axen gefällt werden können und fallen die drei zusammengesetzten Centripetalbeschleunigungen

$$\varphi_\Omega^{(ur')} = 2\,\Omega p,\quad \varphi_{\Omega'}^{(ur')} = 2\,\Omega' p',\quad \varphi_{\Omega''}^{(ur')} = 2\,\Omega'' p''$$

sämmtlich in die Richtung von u_r. Die Grössen Ωp, $\Omega' p'$, $\Omega'' p''$ stellen aber die Momente der Seiten Ω, Ω', Ω'' des Axenparallelogramms in Bezug auf den Endpunkt von u_r' dar und ist daher, wie S. 211.

$$\Omega p = \Omega' p' + \Omega'' p''.$$

Daher wird
$$\varphi_\Omega^{(ur')} \equiv \left(\varphi_{\Omega'}^{(ur')},\ \varphi_{\Omega''}^{(ur')}\right) = \varphi_{\Omega'}^{(ur')} + \varphi_{\Omega''}^{(ur')}.$$
Durch Substitution der für $\varphi_\Omega^{(ur)}$ und $\varphi_\Omega^{(ur')}$ gefundenen äquivalenten Grössen in die erste der obigen Aequivalenzen erhält man daher:
$$\varphi_\Omega^{(vr)} \equiv \left(\varphi_{\Omega'}^{(ur)},\ \varphi_{\Omega''}^{(ur)};\ \varphi_{\Omega'}^{(ur')},\ \varphi_{\Omega''}^{(ur')}\right) \equiv \left(\varphi_{\Omega'}^{(ur)},\ \varphi_{\Omega'}^{(ur')};\ \varphi_{\Omega''}^{(ur)},\ \varphi_{\Omega''}^{(ur')}\right),$$
d. h.:
$$\varphi_\Omega^{(vr)} \equiv \left(\varphi_{\Omega'}^{(vr)},\ \varphi_{\Omega''}^{(vr)}\right).$$

§. 3. Nach Thl. I, Cap. VI kann man die relative Bewegung eines Punktes M auf eine absolute reduciren, indem man dem System jeden Augenblick die entgegengesetzte Elementarbewegung ertheilt, die es besitzt und den beweglichen Punkt an dieser Bewegung Theil nehmen lässt. Zu der absoluten Geschwindigkeit v tritt dann die entgegengesetzte Geschwindigkeit $-v_s$ des Systempunktes hinzu, welcher eben mit M zusammenfällt und aus beiden geht die relative Geschwindigkeit v_r als Resultante hervor; zu der absoluten Beschleunigung φ aber gesellt sich ausser der entgegengesetzten Beschleunigung φ_{-s} des Systempunktes noch die der zusammengesetzten Centripetalbeschleunigung φ_Ω entgegengesetzte zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung $\varphi_{-\Omega}$, um mit jenen beiden zusammen die relative Beschleunigung φ_r als ihre Resultante zu bilden. Man erkennt dies insbesondere deutlich, wenn man (Fig. 147.) zu dem Parallelepipede aus φ_r, φ_s, φ_Ω als Eckkanten, dessen Diagonale φ ist, dies Parallelepiped aus φ, φ_{-s}, $\varphi_{-\Omega}$ als Kanten construirt, als dessen Diagonale alsdann die relative Beschleunigung φ_r auftritt. Man hat daher den wichtigen, von Coriolis (*Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps. Journ. de l'école polytechn. T. XV. Cah. XXIV, p. 142*) aufgestellten Satz:

Fig. 147.

Die relative Beschleunigung eines Punktes M in Bezug auf ein bewegliches System Σ hat drei Componenten: 1. die absolute Beschleunigung des Punktes, 2. die entgegengesetzt genommene Beschleunigung des mit ihm zusammenfallenden Systempunktes und 3. die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung, welche letztere dem Werthe nach dem doppelten Produkte aus der Winkelgeschwindigkeit des Systems um die Momentanaxe und der Projection der relativen Geschwindigkeit auf die zur Momentanaxe senkrechte Ebene gleich, ihrer Richtung nach senkrecht zu der durch die relative Geschwindigkeit zur Momentanaxe parallel geführten Ebene ist, deren Sinn aber erhalten wird, wenn man die genannte Projection der relativen Geschwindigkeit im Sinne der Winkelgeschwindigkeit um $\frac{1}{2}\pi$ sich umdrehen lässt.

Die Beschleunigung φ_{-s} wird dabei den Principien der drei letzten Capitel gemäss bestimmt. Alle Lehren, welche in den vorhergehenden Capiteln über die absolute Bewegung eines Punktes aufgestellt worden sind, gelten jetzt unmittelbar auch für die relative Bewegung, sobald der Beschleunigung der absoluten Bewegung des Punktes die beiden Beschleunigungen φ_{-s} und $\varphi_{-'\Omega}$ zugefügt werden.

Der bewegliche Punkt befindet sich in relativer Ruhe, sobald v_r und φ_r gleich Null sind; da $\varphi_{-\Omega}$ in diesem Falle wegen $v_r = 0$ verschwindet, so tritt dies ein, sobald die absolute Beschleunigung φ der Beschleunigung φ_s des Systempunktes entgegengesetzt gleich wird. Die relative Bewegung ist gleichförmig, wenn φ die Resultante von φ_s und φ_Ω ist.

Ein beobachtender Punkt, welcher dem Systeme angehört und die Bewegung des Systems nicht bemerkt, sieht die relative Bewegung als absolute an; für ihn sind φ_{-s}, $\varphi_{-\Omega}$ Beschleunigungen, welche ihm der bewegliche Punkt zu besitzen scheint. Sie heissen deshalb vielfach auch die scheinbaren Beschleunigungen.

Die Elementararbeit der relativen Beschleunigung längs des Elementes ds der relativen Bahn heisst die relative Elementararbeit; sie ist zufolge Thl. III, Cap. I, §. 18. die Summe der Elementararbeiten der absoluten Beschleunigung φ, der Beschleunigungen φ_{-s} und $\varphi_{-\Omega}$ längs dieses Elementes. Da $\varphi_{-\Omega}$ aber senkrecht ist zur Richtung der relativen Geschwindigkeit, also auch senkrecht zum Elemente der relativen Bahn, so ist die Elementararbeit der zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung Null. Bezeichnen also α und β die Winkel, welche die absolute Beschleunigung φ und die Beschleunigung φ_s des Systempunktes mit der Tangente der relativen Bahn bilden, sodass also insbesondere $\pi - \beta$ der Winkel ist, den φ_{-s} mit dieser Richtung einschliesst, so ist

$$\varphi \cos \alpha \, ds - \varphi_{-s} \cos \beta \, ds$$

die Elementararbeit der relativen Beschleunigung φ_r und folglich nach dem Principe der lebendigen Kraft, welches nach der obigen Bemerkung jetzt auch für die relative Bewegung Gültigkeit hat,

$$d \cdot \tfrac{1}{2} v_r^2 = \varphi \cos \alpha \, ds - \varphi_{-s} \cos \beta \, ds,$$

und weiter unter Anwendung bekannter Bezeichnungen:

$$\tfrac{1}{2} v_r^2 - \tfrac{1}{2} (v_r)_0^2 = \int_{s=s_0}^{s=s} \varphi \cos \alpha \, ds - \int_{s=s_0}^{s=s} \varphi_{-s} \cos \beta \, ds.$$

Besitzt das System blos eine Rotation von constanter Winkelgeschwindigkeit ω, so ist $\varphi_s = \omega^2 r$, die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung φ_{-s} reducirt sich auf die blose Centrifugalbeschleunigung und man hat

$$\int_{s=s_0}^{s=s} \varphi_{\,s} \cos \beta \, ds = \int_{r_0}^{r} - \omega^2 r \, dr = - \tfrac{1}{2} \omega^2 (r^2 - r_0^2),$$

da $ds\cos\beta = dr$ wird, wenn r den Abstand des beweglichen Punktes von der Momentanaxe des Systems angibt. Daher wird in diesem Falle

$$\tfrac{1}{2}v_r^2 - \tfrac{1}{2}(v_r)_0^2 = \int_{s=s_0}^{s=s} \varphi \cos\alpha\, ds + \tfrac{1}{2}\omega^2(r^2 - r_0^2).$$

Die Erde ist ein System der Art; für einen fallenden Punkt hat man daher, wegen der ausserordentlich kleinen Differenz zwischen r und r_0 und mit Rücksicht darauf, dass die Beschleunigung $\varphi = G$ der Schwere für die ruhend gedachte Erde vertikal und constant ist,

$$\tfrac{1}{2}v_r^2 - \tfrac{1}{2}(v_r)_0^2 = Gh,$$

wenn h die Fallhöhe bezeichnet.

§. 4. Wir wollen jetzt die Componenten der relativen Beschleunigung parallel dreien mit dem System beweglichen Coordinatenaxen, deren Ursprung O' heissen mag, darstellen. Die relativen Coordinaten des Punktes M in Bezug auf dieses Coordinatensystem seien x', y', z', die Componenten der absoluten Beschleunigung von M parallel denselben Axen seien X', Y', Z', die der Beschleunigung des mit ihm zur Zeit t zusammenfallenden Systempunktes X_s', Y_s', Z_s' und X_Ω', Y_Ω', Z_Ω' die der zusammengesetzten Centripetalbeschleunigung. Die Componenten der entgegengesetzten Beschleunigung des Systempunktes und der zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung ergeben sich aus diesen durch Vorsetzung des Zeichens (—) und da die zweiten Derivirten der relativen Coordinaten x', y', z' die Componenten der relativen Beschleunigung gleichfalls darstellen, so erhalten wir zunächst folgende Gleichungen für die relative Bewegung des Punktes M, wenn auch noch in unentwickelter Form:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = X' - X_s' - X_\Omega'$$
$$\frac{d^2y'}{dt^2} = Y' - Y_s' - Y_\Omega'$$
$$\frac{d^2z'}{dt^2} = Z' - Z_s' - Z_\Omega'.$$

Was die Componenten X', Y', Z' betrifft, so erhält man sie durch Projection der entsprechenden Componenten X, Y, Z der absoluten Beschleunigung parallel dreien festen Axen auf die beweglichen. Sind nämlich wie früher abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ die Richtungscosinusse der beweglichen Axen gegen die festen, so ergibt sich:

$$X' = a\,X + b\,Y + c\,Z$$
$$Y' = a'X + b'Y + c'Z$$
$$Z' = a''X + b''Y + c''Z.$$

Da die absolute Bewegung des Punktes M und die Bewegung des Systems bekannt sind, so sind in diesen Formeln X, Y, Z, a, b, c;

$a', b', c'; a'', b'', c''$ gegebene Functionen der Zeit und können insbesondere die neun Cosinusse durch die drei Euler'schen Winkel (s. S. 153) ausgedrückt werden.

Die Beschleunigungscomponenten des Systempunktes in Bezug auf die festen Axen seien X_s, Y_s, Z_s; sie werden durch zweimalige Differentiation der Transformationsformeln

$$x = x_1 + ax' + a'y' + a''z'$$
$$y = y_1 + bx' + b'y' + b''z'$$
$$z = z_1 + cx' + c'y' + c''z'$$

erhalten, wenn darin x', y', z' als nicht von der Zeit abhängig angesehen werden, unter welcher Voraussetzung sie und x, y, z die Coordinaten des Systempunktes für das bewegliche und für das feste Coordinatensystem darstellen, während x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des beweglichen Ursprungs als gegebene Functionen der Zeit anzusehen sind. Man erhält:

$$X_s = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + x'\frac{d^2a}{dt^2} + y'\frac{d^2a'}{dt^2} + z'\frac{d^2a''}{dt^2}$$
$$Y_s = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2} + x'\frac{d^2b}{dt^2} + y'\frac{d^2b'}{dt^2} + z'\frac{d^2b''}{dt^2}$$
$$Z_s = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z_1}{dt^2} + x'\frac{d^2c}{dt^2} + y'\frac{d^2c'}{dt^2} + z'\frac{d^2c''}{dt^2}$$

und hiermit in ähnlicher Weise, wie bei den Componenten X', Y', Z':

$$X_s' = a\,X_s + b\,Y_s + c\,Z_s$$
$$Y_s' = a'X_s + b'\,Y_s + c'Z_s$$
$$Z_s' = a''X_s + b''\,Y_s + c''Z_s.$$

Will man übrigens die als bekannt anzusehende Lage der Momentanaxe benutzen, so kann man X_s', Y_s', Z_s' auch unmittelbar darstellen. Man löst dann die Bewegung des Systems in die Translation des Ursprungs O' und die Rotation um die zur Momentanaxe parallele durch O' geführte Axe auf. Sind $\Omega_{x'}, \Omega_{y'}, \Omega_{z'}$ die Componenten der Winkelgeschwindigkeit um die Axen der x', y', z', so erhält man, wie Cap. VII, §. 4.:

$$X_s' = \psi_{x'} + z'\frac{d\Omega_{y'}}{dt} - y'\frac{d\Omega_{z'}}{dt} + (\Omega_{x'}x' + \Omega_{y'}y' + \Omega_{z'}z')\,\Omega_{x'} - \Omega^2 x'$$
$$Y_s' = \psi_{y'} + x'\frac{d\Omega_{z'}}{dt} - z'\frac{d\Omega_{x'}}{dt} + (\Omega_{x'}x' + \Omega_{y'}y' + \Omega_{z'}z')\,\Omega_{y'} - \Omega^2 y'$$
$$Z_s' = \psi_{z'} + y'\frac{d\Omega_{x'}}{dt} - x'\frac{d\Omega_{y'}}{dt} + (\Omega_{x'}x' + \Omega_{y'}y' + \Omega_{z'}z')\,\Omega_{z'} - \Omega^2 z'$$

worin $\psi_{x'}, \psi_{y'}, \psi_{z'}$ die Componenten der Beschleunigung des Punktes O' parallel den beweglichen Axen bedeuten.

Um die Componenten der zusammengesetzten Centripetalbeschleunigung $\varphi_\Omega = 2\,\Omega U_r$ parallel den beweglichen Axen zu finden, zerlegt

wir v_r in ihre drei Componenten $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ und 2Ω in die ibrigen: $2\Omega_{x'}$, $2\Omega_{y'}$, $2\Omega_{z'}$ und bestimmen die Beschleunigungsbestandtheile, welche diese sechs Componenten für den Punkt M veranlassen. Die Componente $\frac{dx'}{dt}$ liefert mit $\Omega_{x'}$ keinen Beschleunigungsbestandtheil, weil ihre Projection auf die zur Axe von $\Omega_{x'}$ senkrechte $y'z'$-Ebene Null ist, mit $\Omega_{y'}$ und $\Omega_{z'}$ aber liefern sie $-2\Omega_{y'}\frac{dx'}{dt}$, $2\Omega_{z'}\frac{dx'}{dt}$ in den Richtungen der z'- und y'-Axe. Ebenso liefert $\frac{dy'}{dt}$ mit $\Omega_{z'}$ und $\Omega_{x'}$ die Bestandtheile $-2\Omega_{z'}\cdot\frac{dy'}{dt}$, $2\Omega_{x'}\frac{dy'}{dt}$ in den Richtungen der x'- und z'-Axe, endlich $\frac{dz'}{dt}$ mit $\Omega_{x'}$ und $\Omega_{y'}$ die Bestandtheile $-2\Omega_{x'}\frac{dz'}{dt}$, $2\Omega_{y'}\frac{dz'}{dt}$ in den Richtungen der y'- und x'-Axe. Sammelt man die denselben Axen entsprechenden Bestandtheile, so findet man:

$$X_\Omega' = 2\left(\Omega_{y'}\frac{dz'}{dt} - \Omega_{z'}\frac{dy'}{dt}\right)$$

$$Y_\Omega' = 2\left(\Omega_{z'}\frac{dx'}{dt} - \Omega_{x'}\frac{dz'}{dt}\right)$$

$$Z_\Omega' = 2\left(\Omega_{x'}\frac{dy'}{dt} - \Omega_{y'}\frac{dx'}{dt}\right).$$

Auch kann man diese Componenten auf folgende Art finden. Es seien λ, μ, ν die Richtungscosinusse von φ_Ω gegen die beweglichen Axen; dann bestehen vermöge des Senkrechtstehens von φ_Ω auf der Richtung der Momentanaxe und der relativen Geschwindigkeit:

$$\Omega_{x'}\cdot\lambda + \Omega_{y'}\cdot\mu + \Omega_{z'}\cdot\nu = 0$$

$$\frac{dx'}{dt}\cdot\lambda + \frac{dy'}{dt}\cdot\mu + \frac{dz'}{dt}\cdot\nu = 0,$$

woraus

$$\frac{\lambda}{\Omega_{y'}\frac{dz'}{dt} - \Omega_{z'}\frac{dy'}{dt}} = \frac{\mu}{\Omega_{z'}\frac{dx'}{dt} - \Omega_{x'}\frac{dz'}{dt}} = \frac{\nu}{\Omega_{x'}\frac{dy'}{dt} - \Omega_{y'}\frac{dx'}{dt}} = \frac{1}{L},$$

$$\text{wo } L^2 = \left(\Omega_{y'}\frac{dz'}{dt} - \Omega_{z'}\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\Omega_{z'}\frac{dx'}{dt} - \Omega_{x'}\frac{dz'}{dt}\right)^2 + \left(\Omega_{x'}\frac{dy'}{dt} - \Omega_{y'}\frac{dx'}{dt}\right)^2$$

$$= (\Omega_{x'}^2 + \Omega_{y'}^2 + \Omega_{z'}^2)\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]$$

$$-\left(\Omega_{x'}\frac{dx'}{dt} + \Omega_{y'}\frac{dy'}{dt} + \Omega_{z'}\frac{dz'}{dt}\right)^2$$

$$= \Omega^2 v_r^2 - \Omega^2 v_r^2 \cos^2(\Omega, v_r) = [\Omega v_r \sin(\Omega, v_r)]^2 = \Omega^2 U_r^2 = \tfrac{1}{4}\varphi_\Omega^2.$$

Daher hat man:

$$\varphi_\Omega \cdot \lambda = X'_\Omega = 2\left(\Omega_y \cdot \frac{dz'}{dt} - \Omega_z \cdot \frac{dy'}{dt}\right)$$

$$\varphi_\Omega \cdot \mu = Y'_\Omega = 2\left(\Omega_z \cdot \frac{dx'}{dt} - \Omega_x \cdot \frac{dz'}{dt}\right)$$

$$\varphi_\Omega \cdot \nu = Z'_\Omega = 2\left(\Omega_x \cdot \frac{dy'}{dt} - \Omega_y \cdot \frac{dx'}{dt}\right),$$

wie oben.

Mit Hülfe der entwickelten Ausdrücke für X', Y', Z'; X_s', Y_s', Z_s'; X'_Ω, Y'_Ω, Z'_Ω können die zu Anfang des §. gegebenen Gleichungen der relativen Bewegung ausgeführt werden. Ist der Punkt M nicht frei, sondern auf eine dem Systeme angehörige Fläche der Curve gezwungen, so treten auf den rechten Seiten dieser Gleichungen noch die Componenten der Widerstandsbeschleunigung dieser Fläche oder Curve hinzu.

Soll der bewegliche Punkt sich in relativer Ruhe befinden, so müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$v_r = 0, \quad X' - X_s' - X'_\Omega = 0, \quad Y' - Y_s' - Y'_\Omega = 0, \quad Z' - Z_s' - Z'_\Omega = 0,$$

oder, da φ_Ω mit v_r verschwindet,

$$v_r = 0, \quad X' = X_s', \quad Y' = Y_s', \quad Z' = Z_s'.$$

§. 5. Als ein umfangreiches Beispiel zu den Lehren dieses Capitels wollen wir die relative Bewegung eines schweren Punktes in der Nähe der Erdoberfläche in Bezug auf das bewegliche System der Erde untersuchen. Dies Problem zerfällt in mehrere einzelne, welche Gegenstand des Studiums ausgezeichneter Mathematiker geworden sind. Die betreffenden Gleichungen für die Behandlung derselben wurden zuerst von Gauss, später von Poisson (*Mémoire sur le mouvement des projecteles dans l'air. Journ. de l'école polytechn. XV*^{er}. *Cah., p. 21*) gegeben. Eine Arbeit über das Pendel mit Rücksicht auf die Rotation der Erde, wenn auch auf kleine Schwingungen beschränkt, von Binet, findet sich in den *Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, T. XXXII. 1851, 1er sem., p. 197*; eine vollständig durchgeführte Bearbeitung dieses Gegenstandes ohne Beschränkung auf kleine Schwingungen mit Hülfe der elliptischen Functionen gab Dumas (Crelle, Journ. Bd. L, S. 52). Neuerdings lieferte Paul in den Nouvelles annales de Gerono et Bourget eine Reihe von Abhandlungen: *Mouvements relatifs à la surface de la terre, 2ième Serie, T. VI (1867), p. 97, … u. 451; T. VII (1868), p. 337*, welche sämmtliche hierher gehörige Einzelprobleme behandeln; sie reihen sich einer früheren kleinen Arbeit ihres Verfassers: *Note sur les mouvements relatifs (Nouv. ann. T. VI (1866) p. 414)* an.

Die Erde ist ein System, dessen Elementarbewegung eine Schraubenbewegung ist um eine Axe, welche sich nahezu parallel bleibt und unter einem Winkel von 66½ Grad gegen die Ebene der Bahn ihres Mittelpunktes geneigt ist. Die Winkelgeschwindigkeit Ω dieser Bewegung ist constant und wird erhalten, wenn man 2π durch die Länge des Sterntages, in Secunden mittlerer Zeit ausgedrückt, dividirt. Letzterer beträgt 86164,1 Secunden (23^h, 56^m, 4^s,1), daher ist

$$\Omega = \frac{2\pi}{86164,1} = 0^m,000073,$$

eine sehr kleine Grösse. Die Translationsgeschwindigkeit T parallel der Axe ist unveränderlich und wird erhalten, wenn man die Geschwindigkeit des Er-

mittelpunktes in der elliptischen Bahn auf die Axe projicirt. Sie tritt in den folgenden Untersuchungen ebenso wenig, als die Translationsbeschleunigung auf, denn dieselben Ursachen, welche allen Punkten der Erde Translationsgeschwindigkeit und Translationsbeschleunigungen ertheilen, ertheilen sie auch in gleicher Grösse dem Punkte, dessen relative Bewegung in Bezug auf das System der Erde untersucht wird und da sie als Bewegungselemente des mit dem beweglichen Punkte zusammenfallenden Systempunktes jenem in umgekehrtem Sinne zugefügt werden müssen, so tilgen sie die ihm eigenthümlichen, sodass die Erde für Untersuchungen der relativen Bewegung als ein blos rotirendes System von constanter Winkelgeschwindigkeit anzusehen ist.

Um die relative Bewegung eines Punktes M als eine absolute behandeln zu können, müssen zu der absoluten Beschleunigung desselben noch hinzutreten die entgegengesetzte Beschleunigung des Systempunktes m, der mit M zusammenfällt und die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung. Ausser der Translationsbeschleunigung, welche wir bereits eliminirt haben, besitzt nun m noch die Centripetalbeschleunigung $\Omega^2 r$, wenn r seinen Abstand von der Erdaxe angibt, senkrecht zu der letzteren und ihr zugewandt, ferner die von der Winkelbeschleunigung α herrührende Beschleunigung αp und die Beschleunigung ΩU senkrecht zur Ebene durch die Momentanaxe und ihren kürzesten Abstand von ihrer folgenden Lage. Die entgegengesetzte Centripetalbeschleunigung ist die Centrifugalbeschleunigung und verbindet sich mit der absoluten Beschleunigung des Punktes M. Die von der Winkelbeschleunigung α herrührende Beschleunigung αp des Systempunktes zerfällt in zwei Componenten, die Tangentialbeschleunigung $\frac{d\Omega}{dt}$, welche Null ist, weil Ω constant ist, und die Normalbeschleunigung $\Omega \Psi r$, welche aus doppeltem Grunde ausserordentlich klein ist, erstens vermöge der Kleinheit von Ω und zweitens vermöge der Kleinheit der Geschwindigkeit, mit welcher sich die Erdaxe neigt. Diese Grösse kann daher vernachlässigt werden.

Es bleibt nun noch übrig, die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung $\varphi_{-\Omega}$ zu bestimmen. Ihr Werth ist das Doppelte des Produktes aus der Projection U_r der relativen Geschwindigkeit v_r des Punktes M auf die zur Erdaxe senkrechte Ebene des Aequators und der Winkelgeschwindigkeit Ω. Ihr Sinn wird leicht erkannt, wenn man durch den Punkt M zur Erdaxe eine Parallele zieht und durch diese und v_r eine Ebene legt; $\varphi_{-\Omega}$ ist nach derjenigen Seite dieser Ebene gewandt, nach welcher die Rotation nicht erfolgt und ist senkrecht zu dieser Ebene.

Als scheinbare Beschleunigungen treten demnach zu der absoluten Beschleunigung φ des Punktes M, um dessen relative Beschleunigung zu bilden, blos hinzu: 1. die Centrifugalbeschleunigung $\Omega^2 r$ senkrecht die Richtung der Erdaxe schneidend und von dieser abgewandt und 2. die zusammengesetzte Centrifugulbeschleunigung $2\,\Omega U_r$ senkrecht zu der Richtung der Ebene, welche zugleich parallel läuft mit der Erdaxe und der relativen Geschwindigkeit von M und zwar nach der Seite hin gerichtet, welche dem Drehungssinne von Ω abgewandt ist. Für die relative Ruhe des Punktes M verschwindet auch noch die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung und ist die relative Beschleunigung blos die Resultante aus der absoluten und der Centrifugalbeschleunigung.

Die Beschleunigung g der Schwere, welche wir beobachten, ist die Resultante der absoluten Beschleunigung der Schwere G und der Centrifugalbeschleunigung $\Omega^2 r$. Die absolute Beschleunigung G ist die Resultante, welche sich aus den sämmtlichen Beschleunigungen bildet, welche ein beweglicher Punkt durch die Einwirkung der materiellen Punkte der Erde erleidet. Für die Erde als

homogene oder auch als aus homogenen Schichten gebildete Kugel ist G nach dem Mittelpunkte gerichtet und variirt mit dem reciproken Quadrate des Abstandes des Punktes von diesem Mittelpunkte. Da aber der mittlere Abstand der Erdoberfläche vom Mittelpunkte 859,5 Meilen oder 6,376,000 Meter beträgt, so ist für geringe Erhebungen G als constant anzusehen. Die Centrifugalbeschleunigung variirt mit dem Abstande r des Punktes von der Erdaxe; für mittlere Breiten ist dieser gleichfalls sehr gross (gegen 4,780,000 Meter) und bringen geringere Ortsveränderungen daher in der Grösse der Centrifugalbeschleunigung nur sehr schwache Differenzen hervor. Daher kann in den folgenden Untersuchungen, wenn für dieselben nur geringe Ortsunterschiede in Anspruch genommen werden, die relative Beschleunigung g der Schwere als constant nach Intensität und Richtung angesehen werden. Da aber in g bereits die Centrifugalbeschleunigung mit aufgenommen ist, so kommt, wenn es sich um die Bewegung eines blos schweren Punktes handelt, für denselben blos noch die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung in Frage. Indessen gilt dies nur unter der Voraussetzung, dass in der Grösse $\Omega^2 r$ der Abstand r von der Erdaxe sich nur wenig mit der Lagenänderung des beweglichen Punktes ändere. In der Nähe des Poles sind solche Aenderungen aber bedeutend, daher wird in gewissen Fällen für die Nähe des beweglichen Punktes am Pole eine besondere Untersuchung geführt werden müssen.

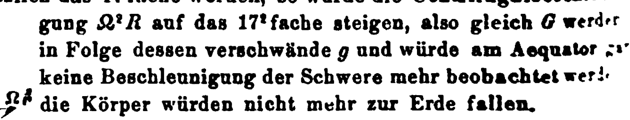
Um den Einfluss der Centrifugalbeschleunigung deutlich zu erkennen, wollen wir zunächst annehmen, der bewegliche Punkt befinde sich unter dem Aequator. Dort sind sich die absolute Schwere und die Centrifugalbeschleunigung direct entgegengesetzt; man hat also, wenn R den Radius des Aequators bedeutet,

$$g = G - \Omega^2 R.$$

Mit Rücksicht darauf, dass der Umfang des Aequators $2\pi R = 40{,}000{,}000$ Meter und wenn $T = 86164{,}1$ Sec. die Umdrehungszeit der Erde, also $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ und für $g = 9{,}808{,}896$ erhält man für das Verhältniss der Centrifugalbeschleunigung am Aequator zur beobachteten Beschleunigung der Schwere nahezu

$$\left(\frac{4\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{g} = \frac{1}{289} = \frac{1}{17^2},$$

d. h. für die Centrifugalbeschleunigung am Aequator $\frac{g}{17^2}$, sodass $g = G - \frac{g}{17^2}$, also $g = G\left(1 + \frac{1}{17^2}\right)^{-1} = G - \frac{G}{17^2}$ wird. Es tilgt also dortselbst die Centrifugalbeschleunigung $\frac{1}{17^2}$ der absoluten Schwere. Würde also die Winkelgeschwindigkeit der Erde plötzlich das 17fache werden, so würde die Centrifugalbeschleunigung $\Omega^2 R$ auf das 17^2fache steigen, also gleich G werden, in Folge dessen verschwände g und würde am Aequator gar keine Beschleunigung der Schwere mehr beobachtet werden, die Körper würden nicht mehr zur Erde fallen.



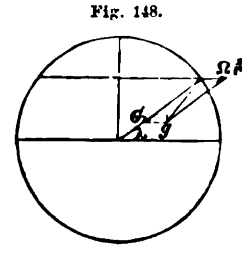


Fig. 148.

Um die Rechnung für die Breite λ durchzuführen, hat man unter Voraussetzung der kugelförmigen Erde (Fig. 148) $g^2 = G^2 + \Omega^4 r^2 - 2 G \Omega^2 r \cos \lambda$, woraus mit Rücksicht auf $r = R \cos \lambda$ und darauf, dass $\Omega^2 R = \frac{G}{17^2}$, nämlich gleich der Centrifugalbeschleunigung am Aequator ist, folgt:

$$g = G\left(1 - \frac{2}{17^2} \cos \lambda^2\right)^{\frac{1}{2}} = G - \frac{G}{17^2} \cos^2 \lambda.$$

Es wird demnach die absolute Schwere durch die Centrifugalbeschleunigung um ein Glied vermindert, welches dem Quadrate des Cosinus der geographischen Breite proportional ist. Hierbei ist auf die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt keine Rücksicht genommen; würde auch diese in Rechnung gezogen, so würde sich eine weitere, gleichfalls dem Quadrate des Cosinus der Breite proportionale Verminderung ergeben.

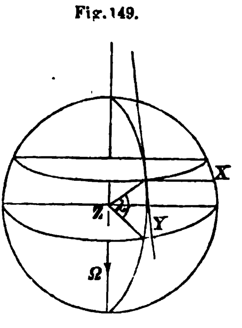


Fig. 149.

§. 6. **Relative Bewegung eines schweren Punktes auf der Horizontalebene unter der Breite λ.** Wir wählen mit Tilgung der Accente an den Coordinaten zur xy-Ebene die Horizontalebene, auf welcher der bewegliche Punkt bleiben soll und zwar zur Axe der x die Tangente des Parallelkreises (Fig. 149.), positiv nach Osten gerechnet, zur y-Axe die Tangente des Meridians oder die Mittagslinie, positiv nach Süden gerichtet, und zur z-Axe die Vertikale, positiv im Sinne der Beschleunigung g der Schwere. Da die Erde sich von Westen nach Osten dreht, so ist die Linie, welche Ω darstellt, auf der Erdaxe nach Süden gerichtet aufzutragen und bildet mit den positiven Axen der x, y, z die Winkel $\frac{1}{2}\pi$, λ, $\frac{1}{2}\pi - \lambda$; daher werden $\Omega_x = 0$, $\Omega_y = \Omega \cos \lambda$, $\Omega_z = \Omega \sin \lambda$. Die Componenten der zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung sind daher:

$$X_{-\Omega} = 2\Omega \cos \lambda \frac{dz}{dt} - 2\Omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}, \quad Y_{-\Omega} = \Omega \sin \lambda \frac{dx}{dt}, \quad Z_{-\Omega} = -2\Omega \cos \lambda \frac{dx}{dt}$$

und hiermit werden die Gleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\Omega \sin \lambda \cdot \frac{dy}{dt} + 2\Omega \cos \lambda \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\Omega \sin \lambda \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -2\Omega \cos \lambda \cdot \frac{dx}{dt} + g - N,$$

wo N die Widerstandsbeschleunigung der Horizontalebene bedeutet. Da der Punkt auf dieser Horizontalebene bleiben muss, so ist zu allen Zeiten $\frac{dz}{dt} = 0$, $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$; hiermit werden diese Gleichungen einfacher:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\Omega \sin \lambda \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\Omega \sin \lambda \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$0 = -2\Omega \cos \lambda \cdot \frac{dx}{dt} + g - N.$$

Bildet man mit ihrer Hülfe die Grösse $\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}$, so verschwindet diese und erhält man, wenn v_0 die relative Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v_0^2,$$

d. h. es bleibt die Geschwindigkeit der Grösse nach constant. Dies ist auch von vornherein einleuchtend, denn die relative Beschleunigung der Schwere ist als constant nach Grösse und Richtung angenommen und da sie senkrecht zur Bahn des Punktes ist, so ist ihre Elementararbeit Null; die Elementararbeit der zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung ist aber ohnehin immer Null; es ist also alle Elementararbeit zu jeder Zeit Null und daher auch $d \cdot \frac{1}{2} v^2 = 0$.

Integrirt man die beiden ersten Gleichungen einzeln, so erhält man, wenn die Anfangslage des Punktes der Coordinatenursprung und α der Winkel ist, den v_0 mit der x-Axe bildet, für die Componenten die Geschwindigkeit

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha - 2\,\Omega \sin\lambda \cdot y$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha + 2\,\Omega \sin\lambda \cdot x$$

und indem man diese Werthe in die Gleichung $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v_0^2$ einsetzt, ergibt sich als relative Bahn des Punktes der Kreis

$$\left(y - \frac{v_0 \cos\alpha}{2\,\Omega \sin\lambda}\right)^2 + \left(x + \frac{v_0 \sin\alpha}{2\,\Omega \sin\lambda}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{2\,\Omega \sin\lambda}\right)^2$$

vom Radius $\frac{v_0}{2\,\Omega \sin\lambda}$ und den Mittelpunktscoordinaten $x_1 = -\frac{v_0 \sin\alpha}{2\,\Omega \sin\lambda}$, $y_1 = \frac{v_0 \cos\alpha}{2\,\Omega \sin\lambda}$. Dividirt man v_0 durch den Radius des Kreises, so drückt der Quotient $\omega = 2\,\Omega \sin\lambda$ die Winkelgeschwindigkeit aus, mit welcher der Radius der Bewegung des Punktes folgt; dieselbe ist unabhängig von v_0, also für alle Bewegungen dieselbe. Für die Breite von 30° ist der Radius des Kreises $\frac{v_0}{0{,}000073} = 13698 \cdot v_0$. Die Zeit t, nach welcher der Punkt an seinen Ausgangsort zurückzukehren strebt, ist $t_1 = \frac{\pi}{\Omega \sin\lambda}$.

Nach der Zeit t_1 hat der bewegliche Punkt auf dem Kreise einen Weg zurückgelegt, dessen Projection auf die Richtung von v_0 den Werth $e = \frac{v_0}{2\,\Omega \sin\lambda} \cdot \sin\omega t$ hat und seine Abweichung von dieser Richtung beträgt $d = \frac{v_0}{2\,\Omega \sin\lambda}(1 - \cos\omega t)$. Entwickelt man $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ in Reihen und nimmt für kleine t deren Anfangsglieder, so erhält man vermöge der Bedeutung von ω die Ausdrücke: $e = v_0 t$, $d = v_0 \Omega \sin\lambda \cdot t^2 = \frac{\Omega \sin\lambda}{v_0} \cdot e^2$.

Die dritte der obigen Gleichungen: $0 = -2\,\Omega \cos\lambda \frac{dx}{dt} + g - N$ liefert die Widerstandsbeschleunigung, welche die Horizontalebene leisten muss. Für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ bewegt sich der Punkt anfangs in der Richtung des Meridians und es ist $\frac{dx}{dt} = 0$, also $N = g$; für $\alpha = 0$ geht er von Westen nach Osten und es ist $y = 0$, $\frac{dx}{dt} = v_0$, also $N = g - 2\,\Omega v_0 \cos\lambda$; für $\alpha = \pi$ wird $N = g + 2\,\Omega v_0 \cos\lambda$.

Unter dem Aequator ist $\lambda = 0$, also der Radius der Bahn unendlich gross; dort beschreibt der Punkt eine Gerade und weicht also nicht von der Richtung von v_0 ab, indessen ist der Widerstand $N = g - 2\,\Omega \frac{dx}{dt}$.

Für den Pol muss die ganze Untersuchung etwas anders geführt werden, da dort die Voraussetzung nicht mehr zulässig ist, dass der Abstand des beweglichen Punktes von der Erdaxe sich nur wenig im Laufe der Bewegung ändere. Am Pole ist die relative Geschwindigkeit senkrecht zur Erdaxe; es fällt mithin die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung in die Horizontalebene. Man erhält dort die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\,\Omega \frac{dy}{dt} + \Omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\,\Omega \frac{dx}{dt} + \Omega^2 y, \quad 0 = g - N,$$

worin die Glieder $\Omega^2 x$, $\Omega^2 y$ von der Centrifugalbeschleunigung $\Omega^2 r$ herrühren. Behufs der Integration ist

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = \Omega^2\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right),$$

d. h.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v_0^2 + \Omega^2(x^2 + y^2)$$

oder

$$v^2 = v_0^2 + \Omega^2 r^2, \text{ sowie } x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 2\,\Omega\,(x\,dx + y\,dy),$$

d. h.

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \Omega\,(x^2 + y^2).$$

Diese beiden Gleichungen liefern nach Elimination des Zeitelementes dt als Differentialgleichung der Bahn:

$$\Omega\,(x\,dx + y\,dy) = v_0\frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = v_0\frac{d\cdot\frac{y}{x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}},$$

welche in Polarcoordinaten ϱ, ϑ heisst: $\Omega\,d\varrho = v_0 d\vartheta$, und zeigt, dass der bewegliche Punkt eine archimedische Spirale $\varrho = \frac{v_0}{\Omega}\vartheta$ beschreibt.

§. 7. **Relative Bewegung eines freien schweren Punktes.** Zur Erleichterung der Rechnung wählen wir den Ursprung des Coordinatensystems in der Anfangslage des Punktes, die z-Axe in der Meridianebene parallel der Erdaxe und positiv nach Norden, die y-Axe in der Richtung des Radius des Parallelkreises, positiv nach aussen, zur x-Axe die Tangente des Parallelkreises, positiv nach Osten gerichtet. Unter der Breite λ sind dann die Componenten der Beschleunigung der relativen Schwere: 0, $-g\cos\lambda$, $-g\sin\lambda$ und die der zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung $-2\,\Omega\frac{dy}{dt}$, $2\,\Omega\frac{dx}{dt}$, 0. Hiermit sind die drei Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\,\Omega\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\,\Omega\frac{dx}{dt} - g\cos\lambda, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g\sin\lambda;$$

dieselben gestatten eine unmittelbare Integration und liefern, wenn a, b, c die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit v_0 bezeichnen für die Componenten der Geschwindigkeit zur Zeit t:

$$\frac{dx}{dt} = a - 2\,\Omega y, \quad \frac{dy}{dt} = b + 2\,\Omega x - g\cos\lambda\cdot t, \quad \frac{dz}{dt} = c - g\sin\lambda\cdot t.$$

Dies Gleichungssystem ist lineär und also nach bekannten Methoden leicht integrirbar. Indessen da die dritte Gleichung unmittelbar $z = ct - \frac{1}{2}g\sin\lambda\cdot t$ liefert und also blos die beiden ersten übrig bleiben, so kann man ohne Anwendung der allgemeinen Methode folgendermassen zum Ziele kommen. Die Combination der ursprünglichen Gleichungen zweiter Ordnung, welche die Gleichung der lebendigen Kraft gibt, liefert hier:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = -g\cos\lambda\cdot\frac{dy}{dt}$$

und folglich

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] - \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) = -g\cos\lambda\cdot y.$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth $\frac{dx}{dt} = a - 2\,\Omega y$ ein, so folgt

$$dt = \frac{dy}{\sqrt{b^2 + 2\,(2\,a\Omega - g\cos\lambda)\,y - 4\,\Omega^2 y^2}}.$$

Hieraus ergibt sich, indem man abkürzend $\frac{b}{2\Omega} = \beta$, $\frac{2a\Omega - g\cos\lambda}{4\Omega^2} = \alpha$ setzt,

$$2\Omega\,dt = \frac{dy}{\sqrt{\beta^2 + 2\alpha y - y^2}} = \frac{dy}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2) - (y-\alpha)^2}},$$

also

$$2\Omega t = Arc\sin\frac{y-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - Arc\sin\frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

oder

$$2\Omega t - Arc\sin\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = Arc\sin\frac{y-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

und hieraus, indem man rechts und links Sinusse nimmt und berücksichtigt, dass $\cos Arc\sin\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ ist: $\beta\sin 2\Omega t - \alpha\cos 2\Omega t = y - \alpha$ und also nach Wiedereinführung der Werthe für α und β:

$$4\Omega^2 y = (2\Omega a - g\cos\lambda)(1 - \cos 2\Omega t) + 2\Omega b\sin 2\Omega t.$$

Hierzu liefert die Gleichung $\frac{dx}{dt} = a - 2\Omega y$:

$$x = at - \frac{2\Omega a - g\cos\lambda}{4\Omega^2}(2\Omega t - \sin 2\Omega t) - b(1 - \cos 2\Omega t).$$

Demnach ist die Lösung des Problems in folgendem Gleichungssystem enthalten:

$$x = \frac{g\cos\lambda}{4\Omega^2}(2\Omega t - \sin 2\Omega t) + \tfrac{1}{2}\frac{a}{\Omega}\sin 2\Omega t - \tfrac{1}{2}\frac{b}{\Omega}(1 - \cos 2\Omega t)$$

$$y = \tfrac{1}{2}\frac{b}{\Omega}\sin 2\Omega t + \left(\tfrac{1}{2}\frac{a}{\Omega} - \frac{g\cos\lambda}{4\Omega^2}\right)(1 - \cos 2\Omega t)$$

$$z = ct - \tfrac{1}{2}g\sin\lambda\cdot t^2$$

$$v_x = a - 2\Omega y$$

$$v_y = b + 2\Omega x - g\cos\lambda\cdot t$$

$$v_z = c - g\sin\lambda\cdot t.$$

Wir leiten hieraus in den folgenden §§. die Behandlung einiger specieller Fälle ab.

§. 8. **Relative Bewegung eines frei fallenden schweren Punktes.** Für dieselbe ist zu setzen $a = b = c = v_0 = 0$. Dann sind die Gleichungen für die Lage und Geschwindigkeit des Punktes

$$x = \frac{g\cos\lambda}{4\Omega^2}(2\Omega t - \sin 2\Omega t), \quad v_x = -2\Omega y$$

$$v^2 = -g(y\cos\lambda + z\sin\lambda)$$

$$y = -\frac{g\cos\lambda}{4\Omega^2}(1 - \cos 2\Omega t), \quad v_y = 2\Omega x - g\cos\lambda\cdot t$$

$$z = -\tfrac{1}{2}g\sin\lambda\cdot t^2 \quad v_z = -g\sin\lambda\cdot t.$$

Die beiden ersten Gleichungen zeigen, dass die Projection der Bahn des Punktes auf die Ebene des Parallelkreises der Anfangslage ein Cycloïdenbogen ist; die Cycloïde hat die Linie von Osten nach Westen zur Basis und liegt dem Mittelpunkte des Parallelkreises zugewandt; der Radius des Wälzungskreises ist $\frac{g\cos\lambda}{4\Omega^2}$ und der Wälzungswinkel zur Zeit t gleich $2\Omega t$. Der Wälzungskreis dreht sich daher mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit der Erde um den Berührungspunkt mit der Cycloïdenbasis um. Die übrigen Combinationen der drei ersten Gleichungen zu zweien geben die Projectionen der Bahn auf den Meridian und die zur Erdaxe parallele Ebene der xz. Da y und z negativ sind, so folgt, dass die Projectionen des fallenden Punktes dem Mittelpunkte des Parallelkreises und der Ebene des Aequators zufallen.

Die vorliegende Untersuchung gilt übrigens nur für mittlere Breiten. Um die Grenze der Präcision der Formeln zu bestimmen, muss daran erinnert werden

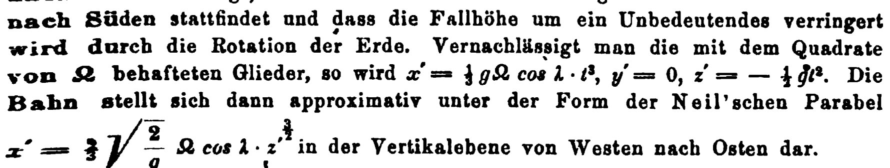
dass die Intensität g' der Beschleunigung der Schwere in der Höhe h über der Erdoberfläche (s. S. 228) durch die Formel $\frac{g'}{g} = \frac{1}{(R+h)^2} : \frac{1}{R^2}$ gegeben wird, aus welcher man für die Differenz $\Delta g' = g - g'$ die Näherungsformel $\Delta g' = \frac{2gh}{R}$ construirt. Der Erdradius ist im Mittel $R = 6\,366\,000$ Meter, daher würde für $h = 3000$ Meter g um 0,001 variiren. Für mittlere Breiten, wie z. B. für Paris, beträgt der Radius des Wälzungskreises der Cycloïde $\frac{g \cos \lambda}{4\,\Omega^2} = 303\,743\,650$ Meter und da derselbe mit der Winkelgeschwindigkeit $2\,\Omega$ sich umdreht, so würde er zu einer vollen Umdrehung 43 082 Secunden, zu $\frac{1}{4}$ Grad also 29,918 Secunden gebrauchen. In dieser Zeit fällt der Punkt aber von der Höhe von 4 380 Meter, einer Höhe, für welche die Variation von g bereits grösser als 0,001 ist. Man wird also die obigen Formeln nicht über $t = 29{,}918$ oder 30 Secunden ausdehnen dürfen. Dafür bleibt $2\,\Omega t$ unter 0,00438 und wenn man x, y, z in Reihen nach t entwickelt, so wird $\frac{1}{5}(2\,\Omega t)^5$ erst an der 21. Stelle eine Ziffer liefern und werden für x, y, z folgende Formeln bis zur 16. Decimale exact sein:

$$x = \tfrac{1}{3} g\Omega \cos\lambda \cdot t^3, \quad y = -\tfrac{1}{2} g \cos\lambda \cdot t^2 + \tfrac{1}{6} g\Omega^2 \cos\lambda \cdot t^4, \quad z = -\tfrac{1}{2} g \sin\lambda \cdot t^2.$$

Transformirt man die Coordinatenaxen so (Fig. 150), dass die z-Axe die Vertikale der Anfangslage positiv aufwärts und die y-Axe die Tangente des Meridians, positiv von Norden nach Süden gerechnet wird, während die x-Axe bleibt, so werden die neuen Coordinaten x', y', z' sein $x' = x$, $y' = y \sin\lambda - z \cos\lambda$, $z' = y \cos\lambda + z \sin\lambda$ und folglich:

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{3} g\Omega \cos\lambda \cdot t^3, \\ y' &= \tfrac{1}{6} g\Omega^2 \sin\lambda \cos\lambda \cdot t^4, \\ z' &= -\tfrac{1}{2} g t^2 + \tfrac{1}{6} g\Omega^2 \cos^2\lambda \cdot t^4. \end{aligned}$$

Fig. 150.



Man sieht hieraus, dass die Abweichung des Punktes nach Osten vorwiegt, dass eine sehr kleine Abweichung nach Süden stattfindet und dass die Fallhöhe um ein Unbedeutendes verringert wird durch die Rotation der Erde. Vernachlässigt man die mit dem Quadrate von Ω behafteten Glieder, so wird $x' = \frac{1}{3} g\Omega \cos\lambda \cdot t^3$, $y' = 0$, $z' = -\frac{1}{2} g t^2$. Die Bahn stellt sich dann approximativ unter der Form der Neil'schen Parabel $x' = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{g}}\,\Omega \cos\lambda \cdot z'^{\frac{3}{2}}$ in der Vertikalebene von Westen nach Osten dar.

§. 9. **Relative Bewegung eines vertikal in die Höhe geschleuderten Punktes.** Für denselben ist $a = 0$, $b = v_0 \cos\lambda$, $c = v_0 \sin\lambda$, mithin nach §. 7.:

$$x = \frac{g \cos\lambda}{4\,\Omega^2}(2\,\Omega t - \sin 2\,\Omega t) - \frac{1}{2}\frac{v_0 \cos\lambda}{\Omega}(1 - \cos 2\,\Omega t), \quad v_x = -2\,\Omega y$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{v_0 \cos\lambda}{\Omega} \sin 2\,\Omega t - \frac{g \cos\lambda}{4\,\Omega^2}(1 - \cos 2\,\Omega t), \quad v_y = v_0 \cos\lambda + 2\,\Omega x - g \cos\lambda \cdot t$$

$$z = v_0 \sin\lambda \cdot t - \tfrac{1}{2} g \sin\lambda \cdot t^2 \quad v_z = v_0 \sin\lambda - g \sin\lambda \cdot t.$$

Man kann sehr leicht die Bahn der Projection des Punktes auf die Ebene des Parallelkreises ermitteln. Zu dem Ende schreiben wir die beiden ersten Gleichungen so:

$$x + \frac{1}{2}\frac{v_0 \cos\lambda}{\Omega}(1 - \cos 2\,\Omega t) = \frac{g \cos\lambda}{4\,\Omega^2}(2\,\Omega t - \sin 2\,\Omega t)$$

$$y - \frac{1}{2}\frac{v_0 \cos\lambda}{\Omega} \sin 2\,\Omega t = -\frac{g \cos\lambda}{4\,\Omega^2}(1 - \cos 2\,\Omega t)$$

und setzen

$$-\tfrac{1}{2}\frac{v_0 \cos\lambda}{\Omega}(1-\cos 2\,\Omega t)=\xi,\qquad \tfrac{1}{2}\frac{v_0\cos\lambda}{\Omega}\sin 2\,\Omega t=\eta,$$

wodurch wir erhalten

$$x-\xi=\frac{g\cos\lambda}{4\,\Omega^2}(2\,\Omega t-\sin 2\,\Omega t),\qquad y-\eta=-\frac{g\cos\lambda}{4\,\Omega^2}(1-\cos 2\,\Omega t),$$

welches in Bezug auf ein in Translation begriffenes, in der Ebene des Parallelkreises bewegliches System, dessen Punkte sämmtlich congruente Bahnen mit dem Punkte ξ, η beschreiben, die Gleichungen einer Cycloïde von derselben Beschaffenheit, wie die des §. 8. sind. Der Punkt ξ, η beschreibt aber einen Kreis $\left(\xi+\tfrac{1}{2}\frac{v_0\cos\lambda}{\Omega}\right)^2+\eta^2=\left(\tfrac{1}{2}\frac{v_0\cos\lambda}{\Omega}\right)^2$ vom Radius $\tfrac{1}{2}\frac{v_0\cos\lambda}{\Omega}$, dessen Mittelpunkt die Coordinaten $\xi=-\tfrac{1}{2}\frac{v_0\cos\lambda}{\Omega}$, $\eta=0$ hat. Der Radius dieses Kreises, welcher nach dem Projectionspunkte x, y führt, dreht sich in der Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit $2\,\Omega$ in entgegengesetztem Sinne wie die Erde. Die Projection des beweglichen Punktes ist also ein Punkt auf dem Umfange eines Kreises vom Radius $\frac{g\cos\lambda}{4\,\Omega^2}$, welcher auf einer zur Linie von Westen nach Osten parallel fortrückenden Geraden mit der Winkelgeschwindigkeit $2\,\Omega$ rollt, deren Punkte sämmtlich Kreise beschreiben, parallel und gleich dem vom Punkte (ξ, η) beschriebenen. Anfangs findet eine Abweichung nach Westen statt, später nach Osten. Das Maximum der westlichen Abweichung wird zur Zeit erreicht, welche $\frac{dx}{dt}=0$ macht. Diese Bedingung liefert $\frac{tg\,\Omega t}{\Omega t}\cdot t=\frac{2\,v_0}{g}$; da Ωt sehr klein bleibt, so folgt hieraus approximativ $t=\frac{2\,v_0}{g}$, also doppelt so gross, wie die Steigzeit eines Punktes von der Geschwindigkeit v_0 bei ruhender Erde.

Entwicket man in Reihen, so erhält man

$$\begin{aligned}
x&=-v_0\Omega\cos\lambda\cdot t^2+\tfrac{1}{3}g\Omega^2\cos\lambda\cdot t^3,\\
y&=v_0\cos\lambda\cdot t-\tfrac{1}{2}g\cos\lambda\,.\,t^2-\tfrac{2}{3}v_0\Omega^2\cos\lambda\cdot t^3+\tfrac{1}{6}g\,\Omega^2\cos\lambda\cdot t^4,\\
z&=v_0\sin\lambda\cdot t-\tfrac{1}{2}g\sin\lambda\cdot t^2.
\end{aligned}$$

Transformirt man das Coordinatensystem, sodass die y-Axe horizontal, die z-Axe vertikal wird, d. h. substituirt man in die Gleichungen $y'=y\sin\lambda-z\cos\lambda$, $z'=y\cos\lambda+z\sin\lambda$, wie §. 8., so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
y'&=\tfrac{1}{6}\,\Omega^2\sin\lambda\cos\lambda\,(gt^4-4\,v_0t^3),\\
z'&=v_0t-\tfrac{1}{2}gt^2-\tfrac{2}{3}v_0\Omega^2g\cos^2\lambda\cdot t^3+\tfrac{1}{6}\,\Omega g^2\cos^2\lambda\cdot t^4,
\end{aligned}$$

während $x'=x$ bleibt. Weiter:

$$\frac{dy'}{dt}=\tfrac{2}{3}\,\Omega^2\sin\lambda\cos\lambda\,(gt^3-3\,v_0t^2),\qquad \frac{dz'}{dt}=v_0-gt+\tfrac{2}{3}\,\Omega^2\cos^2\lambda\,(gt^3-3\cdot\ldots$$

Die Steigzeit ergibt sich aus der Bedingung $\frac{dz'}{dt}=0$. Sie ist nur sehr wenig verschieden von der Steigzeit bei ruhender Erde. Nimmt man für sie also $t=\frac{v_0}{g}$, so ergibt sich hierzu die Steighöhe h aus der Formel für z':

$$h=\frac{v_0^2}{2\,g}\left(1-\Omega^2\cos^2\lambda\cdot\frac{v_0^2}{g}\right).$$

Die Gleichung für y' zeigt, dass im Meridian eine Abweichung nach Norden stattfindet; für die höchste Lage ist dieselbe $\tfrac{1}{3}\,\Omega^2\sin\lambda\cdot\frac{h^2}{g}$; sie ist sehr gering. Die Abweichung nach Westen, welche die Formel für x ergibt, ist für die höchste H

$-\frac{4}{3}\Omega \cos\lambda \cdot h\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Diese Abweichung ist doppelt so gross, als die östliche Abweichung, welche der Punkt bei freiem Falle von der Höhe h erleiden würde.

§. 10. **Relative Bewegung eines schweren Punktes von beliebig gerichteter Anfangsgeschwindigkeit.** In diesem Falle sind alle drei Componenten a, b, c der Anfangsgeschwindigkeit von Null verschieden; daher hat man die allgemeinen Gleichungen des §. 7. zu discutiren. Wir schreiben dieselben behufs ihrer Interpretation so:

$$x - \left[\frac{1}{2}\frac{a}{\Omega}\sin 2\Omega t - \frac{1}{2}\frac{b}{\Omega}(1 - \cos 2\Omega t)\right] = \frac{g\cos\lambda}{4\Omega^2}(2\Omega t - \sin 2\Omega t)$$

$$y - \left[\frac{1}{2}\frac{b}{\Omega}\sin 2\Omega t + \frac{1}{2}\frac{a}{\Omega}(1 - \cos 2\Omega t)\right] = -\frac{g\cos\lambda}{4\Omega^2}(1 - \cos 2\Omega t)$$

$$z = ct - \frac{1}{2}g\sin\lambda \cdot t^2.$$

Setzt man wieder

$$\xi = \frac{1}{2}\frac{a}{\Omega}\sin 2\Omega t - \frac{1}{2}\frac{b}{\Omega}(1 - \cos 2\Omega t), \quad \eta = \frac{1}{2}\frac{b}{\Omega}\sin 2\Omega t + \frac{1}{2}\frac{a}{\Omega}(1 - \cos 2\Omega t),$$

so erkennt man, dass die Gleichungen

$$x - \xi = \frac{g\cos\lambda}{4\Omega^2}(2\Omega t - \sin 2\Omega t), \quad y - \eta = -\frac{g\cos\lambda}{4\Omega^2}(1 - \cos 2\Omega t)$$

auf einer im Parallelkreis in Translation begriffenen Ebene eine Cycloïde bestimmen. Die Basis derselben bleibt der Tangente des Parallelkreises parallel; der Wälzungskreis hat wie früher die Winkelgeschwindigkeit 2Ω, die Translationsbahn ist auch hier ein Kreis, dessen Mittelpunkt aber nicht mehr in der Tangente des Parallelkreises liegt. Die Gleichung dieses Kreises ist

$$\left(\xi + \frac{1}{2}\frac{b}{\Omega}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\frac{a}{\Omega}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{a}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{b}{\Omega}\right)^2;$$

der Mittelpunkt hat die Coordinaten $\xi = -\frac{1}{2}\frac{b}{\Omega}$, $\eta = \frac{1}{2}\frac{a}{\Omega}$ und der Radius beträgt $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\Omega}$.

Um alle übrigen Umstände der Bewegung mit genügender Genauigkeit zu erörtern, wollen wir x, y, z in Reihen entwickeln, aber die Glieder, welche Ω^2 enthalten, unterdrücken. Wir erhalten dadurch

$$x = at - b\Omega t^2 + \frac{1}{3}\Omega g\cos\lambda \cdot t^3$$
$$y = bt + \left(a\Omega - \frac{1}{2}g\cos\lambda\right)t^2$$
$$z = ct - \frac{1}{2}g\sin\lambda \cdot t^2.$$

Grösserer Bequemlichkeit wegen wollen wir aber als $x'y'$-Ebene den Horizont, als z'-Axe die Vertikale, positiv nach oben gerechnet, annehmen und dabei die y'-Axe in die Richtung der Projection der Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf den Horizont legen, positiv im Sinne dieser Projection gerechnet, während die x'-Axe senkrecht auf der durch v_0 gehenden Vertikalebene stehen soll, positiv nach links genommen für einen im Sinne der Projection von v_0 sehenden Punkt. Die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit sei bestimmt durch den Winkel α ihrer Vertikalebene mit dem Meridian (positiv nach links) und den Winkel φ, den sie mit dem Horizonte bildet. Aus den sphärischen Dreiecken, welche auf einer um den Ursprung beschrieben Kugel die Richtungen von x, y, z; x', y', z'; v_0 und seine Projection auf den Horizont bestimmen, ergeben sich dann

$$a = v_0\cos\varphi\sin\alpha, \quad b = v_0(\sin\varphi\cos\lambda + \cos\varphi\cos\alpha\sin\lambda)$$
$$c = v_0(\sin\varphi\sin\lambda - \cos\varphi\cos\alpha\cos\lambda)$$

$$x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha \sin\lambda + z \sin\alpha \cos\lambda$$
$$y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha \sin\lambda - z \cos\alpha \cos\lambda$$
$$z' = y \cos\lambda + z \sin\lambda$$

und hiermit also

$$x' = -\Omega v_0 (\cos\varphi \sin\lambda + \cos\alpha \sin\varphi \cos\lambda) t^2 + \tfrac{1}{3}\Omega g \cos\alpha \cos\lambda \cdot t^3$$
$$y' = v_0 \cos\varphi \cdot t - v_0 \Omega \sin\alpha \sin\varphi \cos\lambda \cdot t^2 + \tfrac{1}{3}\Omega g \sin\alpha \cos\lambda \cdot t^3$$
$$z' = v_0 \sin\varphi \cdot t + (v_0 \Omega \sin\alpha \cos\varphi \cos\lambda - \tfrac{1}{2} g) t^2.$$

Aus diesen Formeln zieht man nachstehende Folgerungen:

1. Für $z' = 0$ erhält man als Flugzeit t_1:

$$t_1 = \frac{2 v_0 \sin\varphi}{g - 2\Omega v_0 \sin\alpha \cos\varphi \cos\lambda}.$$

Fällt v_0 in den Meridian, so ist $\alpha = 0$, also $t_1 = \frac{2 v_0 \sin\varphi}{g}$, dieselbe Dauer, wie nach S. 249 bei stillstehender Erde. Ist α positiv, liegt also v_0 auf der Ostseite des Meridians, so ist t_1 etwas grösser, für die Westseite des Meridians ist t_1 etwas kleiner als dieser Werth, doch sind die Unterschiede sehr gering, sodass man $t_1 = \frac{2 v_0 \sin\varphi}{g}$ als Mittelwerth annehmen kann.

2. Die Formel für y' liefert die Wurfweite w, wenn man den Werth für t_1 in sie einführt. Mit Hülfe des eben gegebenen Näherungswerthes für t_1 erhält man w etwas grösser oder kleiner, als für die ruhende Erde, je nachdem v_0 östlich oder westlich gegen den Meridian geneigt ist; für den Meridian selbst ist er genau ebenso gross, wie bei ruhender Erde.

3. Die Formel für x' liefert, indem man t_1 in sie einsetzt, die Abweichung δ nach rechts oder links von der vertikalen Zielebene. Man findet

$$\delta = -\tfrac{4}{3}\Omega \cos\lambda \cdot \frac{v_0^3 \sin^2\varphi}{g^2}\left(\cos\alpha + 3\,\frac{tg\,\lambda}{tg\,\varphi}\right).$$

Die Abweichung ist nach rechts gerichtet, so lange die Parenthese positiv, welches immer stattfindet, so lange $tg\,\varphi < 3\,tg\,\lambda$ ist; sie ist in diesem Sinne bei gleichen Werthen φ ein Maximum für $\alpha = 0$, d. h. für das Zielen im Meridian von Norden nach Süden, sie wird ein Minimum für das Zielen von Süden nach Norden. Wird $tg\,\varphi > 3\,tg\,\lambda$, so wird bei einem gewissen Werthe von α die Parenthese negativ, dann fällt die Abweichung nach links von der Zielebene. Für den Aequator ist $\delta = -\tfrac{4}{3}\Omega \frac{v_0^3 \sin^3\varphi}{g^2}\cos\alpha$. Die Abweichung zeigt nach rechts beim Schuss von Süden nach Norden, links im umgekehrten Falle; sie ist Null für den Schuss von Westen nach Osten oder von Osten nach Westen.

Für die Breite $\lambda = \tfrac{1}{4}\pi$ wird bei $\varphi = \tfrac{1}{4}\pi$ die Abweichung $\delta = -\tfrac{1}{3}\frac{\Omega v_0^3}{g^2}(\cos\alpha + \ldots$

Bei $v_0 = 500$ Meter, wofür $w = 25{,}484$ sein würde, erhält man für den Schuss von Süden nach Norden $\delta = -25{,}2$ Meter, für den Schuss von Norden nach Süden aber $\delta = 412{,}6$ Meter.

§. 11. **Relative Bewegung des sphärischen Pendels.** Die xy-Ebene sei der Horizont, der Ursprung der Mittelpunkt der Kugel, die x-Axe die Tangente des Parallelkreises, positiv nach Osten gerechnet, die y-Axe die Tangente des Meridians, positiv nach Norden, die z-Axe aber die Vertikale, positiv nach oben gerichtet. Dann sind die Gleichungen der Bewegung unter der Breite λ für das Pendel von der Länge r, wenn N den Widerstand des Fadens bezeichnet:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \quad 2\,\Omega \sin\lambda \cdot \frac{dy}{dt} - 2\,\Omega \cos\lambda \cdot \frac{dz}{dt} - N\frac{x}{r}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\,2\,\Omega \sin\lambda \cdot \frac{dx}{dt} - N\frac{y}{r}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \quad 2\,\Omega \cos\lambda \cdot \frac{dx}{dt} - g - N\frac{z}{r},$$

wozu noch $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0$ kommen. Das Princip der lebendigen Kraft liefert $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = g(z_0 - z)$, wenn $z = z_0$ für $t = 0$. Die Combination, welche dem Principe der Flächen für die xy-Ebene entspricht, gibt mit Rücksicht auf $x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = -z\frac{dz}{dt}$:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 2\,\Omega\,(y\cos\lambda + z\sin\lambda)\frac{dz}{dt}.$$

Die Projection ϱ von r auf die xy-Ebene durchstreicht demnach einen Sector S, für welchen

$$\frac{d^2S}{dt^2} = \Omega\,(y\cos\lambda + z\sin\lambda)\frac{dz}{dt}.$$

Es sei nun φ der Winkel, den ϱ mit der x-Axe bildet, positiv gerechnet, von rechts nach links drehend; ferner sei ψ der Winkel, den r mit der Richtung der Schwere bildet, und seien $-\frac{d\psi}{dt} = \beta$, $\frac{d\varphi}{dt} = \gamma$ die beiden Winkelgeschwindigkeiten von r in der vertikalen Schwingungsebene und von ϱ in der Horizontalebene. Man hat dann

$$\varrho = r\sin\psi, \quad z = -r\cos\psi, \quad z_0 = -r\cos\psi_0, \text{ wenn } \psi = \psi_0 \text{ für } t = 0;$$
$$x = r\sin\psi\cos\varphi, \quad y = r\sin\psi\sin\varphi$$
$$\frac{dz}{dt} = -r\sin\psi\cdot\beta, \quad \frac{dy}{dt} = -r\sin\varphi\cos\psi\cdot\beta + r\cos\varphi\sin\psi\cdot\gamma,$$
$$\frac{dx}{dt} = -r\cos\varphi\cos\psi\cdot\beta - r\sin\varphi\sin\psi\cdot\gamma$$
$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = r^2\beta^2 + r^2\sin^2\psi\cdot\gamma^2,$$
$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{d^2S}{dt^2} = r^2\frac{d(\sin^2\psi\cdot\gamma)}{dt}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe gehen die Gleichungen der lebendigen Kraft und des Princips der Flächen über in

$$\beta^2 + \sin^2\psi\cdot\gamma^2 = \frac{2g}{r}(\cos\psi - \cos\psi_0) + \beta_0^2 + \sin^2\psi_0\cdot\gamma_0^2$$
$$\frac{d(\sin^2\psi\cdot\gamma)}{dt} = (\sin\lambda\cos\psi - \cos\lambda\sin\psi\sin\varphi)\cdot 2\,\Omega\sin\psi\cdot\beta,$$

auf welchen Gleichungen die weitere Behandlung des Problems beruht.

Setzen wir zunächst $\Omega = 0$, d. h. nehmen wir die Erde als ruhend an, so haben wir die beiden Integrale wie Cap. V, §. 8., S. 354 und 355. Das durch das Princip der lebendigen Kraft gegebene ist von Ω unabhängig, wie sich von selbst versteht, da die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung keine Arbeit leistet. Sie sind

$$\beta^2 + \sin^2\psi\cdot\gamma^2 = \frac{2g}{r^2}(\cos\psi - \cos\psi_0) + \beta_0^2 + \sin^2\psi_0\cdot\gamma_0^2$$
$$\sin^2\psi\cdot\gamma = \sin\psi_0\cdot\gamma_0,$$

wo die Grössen β_0 und γ_0 die dortigen $-\psi_0'$, φ_0'; $-\frac{2g}{r}\cos\psi_0 + \sin^2\psi_0\cdot\gamma_0^2 + \beta_0^2$ und $\sin^2\psi_0\cdot\gamma_0$ aber A und C bedeuten. Das zweite Integral liefert sofort auch

noch $S = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \psi_0 \cdot \gamma_0 t$. Eliminirt man γ aus dem ersten der beiden Integrale, so kommt, wenn $\beta_0 = 0$ angenommen wird,

$$\beta^2 = \frac{2g}{r}(\cos\psi - \cos\psi_0) + \frac{\sin^2\psi_0 \cdot \gamma_0^2}{\sin^2\psi}(\sin^2\psi - \sin^2\psi_0).$$

Für den Fall kleiner Werthe von ψ kann man $\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi}$, $\cos\psi_0 = \sqrt{1-\sin^2\psi_0}$ in Reihen entwickeln und davon nur die ersten Glieder beibehalten, wodurch man erhält:

$$\beta = -\frac{d\psi}{dt} = \frac{\sqrt{\sin^2\psi_0 - \sin^2\psi}}{\sin\psi}\sqrt{\frac{g}{r}\sin^2\psi - \sin^2\psi_0 \cdot \gamma_0^2},$$

welche Gleichung in Verbindung mit

$$\gamma = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sin^2\psi_0 \cdot \gamma_0}{\sin^2\psi}$$

liefert

$$d\varphi = \frac{-\sin^2\psi_0 \cdot \gamma_0 \cdot d\psi}{\sin\psi\sqrt{\sin^2\psi_0 - \sin^2\psi}\sqrt{\frac{g}{r}\sin^2\psi - \sin^2\psi_0 \cdot \gamma_0^2}}.$$

Dies ist die Differentialgleichung der sphärischen Bahn des Pendelpunktes für kleine Excursionen. Um ihre Projection auf die Horizontalebene mit grösserer Genauigkeit zu finden, als die S. 362 angewandte Methode sie gibt, nehmen wir ein bewegliches System zu Hülfe, welches sich um die vertikale z-Axe mit einer noch näher zu bestimmenden Winkelgeschwindigkeit γ_2 umdreht. Ist dann γ_1 die relative Winkelgeschwindigkeit der Schwingungsebene des Pendels gegen dies System, so wird $\gamma_1 = \gamma - \gamma_2$. Wählen wir die Bewegung unseres Hülfssystems nun so, dass $\gamma_1 = \gamma \cos\psi$ wird und bezeichnen mit φ_1 den γ_1 entsprechenden Drehungswinkel des Systems, sodass

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \gamma_1 = \gamma\cos\psi = \frac{\sin^2\psi_0 \cdot \gamma_0}{\sin^2\psi}\cos\psi = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\cos\psi$$

wird, so tritt in den obigen Ausdruck für $d\varphi$ noch im Zähler der Factor $\cos\psi$ ein und wird

$$d\varphi_1 = \frac{-\sin^2\psi_0 \cdot \gamma_0 \cos\psi\, d\psi}{\sin\psi\sqrt{\sin^2\psi_0 - \sin^2\psi}\sqrt{\frac{g}{r}\sin^2\psi - \sin^2\psi_0 \cdot \gamma_0^2}}.$$

Dieser Ausdruck ist integrabel, weil man ihn auch schreiben kann:

$$d\varphi_1 = \gamma_0\sqrt{\frac{r}{g}}\frac{d\cdot\left(\frac{\sin\psi_0}{\sin\psi}\right)^2}{\sqrt{\left[\left(\frac{\sin\psi_0}{\sin\psi}\right)^2 - 1\right]\left[1 - \frac{\gamma_0^2 r}{g}\left(\frac{\sin\psi_0}{\sin\psi}\right)^2\right]}}.$$

Man erhält, wenn man φ_1 so bestimmt, dass $\varphi_1 = 0$ wird für $\psi = 0$:

$$\left(\sin^2\varphi_1 + \frac{\gamma_0^2 r}{g}\cos^2\varphi_1\right)\sin^2\psi = \frac{\gamma_0^2 r}{g}\sin^2\psi_0$$

und wenn man mit x_1, y_1 die Coordinaten der Projection des Pendelpunktes auf die Horizontalebene bezeichnet, welche die Winkelgeschwindigkeit γ_2 besitzt und für welche

$$x_1 = r\sin\psi\cos\varphi_1, \quad y_1 = r\sin\psi\sin\varphi_1,$$

so ergibt sich als Gleichung der Projectionscurve:

$$\left(\frac{x_1}{r\sin\psi_0}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{\gamma_0\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot r\sin\psi_0}\right)^2 = 1.$$

Die Horizontalprojection beschreibt demnach eine Ellipse von den Halbaxen $r\sin\psi_0$ und $\gamma_0\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot r\sin\psi_0$, welche in ihrer Ebene um ihren Mittelpunkt sich

mit der Winkelgeschwindigkeit $\gamma_2 = \gamma\,(1 - \cos\psi)$ umdreht. Für kleine ψ, wie sie vorausgesetzt sind, ist $1 - \cos\psi$ sehr klein und daher kann die Drehung der Ellipse vernachlässigt werden, wie in der Behandlung S. 362 geschah.*)

Wir wollen jetzt unser Problem für den Fall der beweglichen Erde und kleine Winkel ψ behandeln, jedoch $\beta_0 = 0$ annehmen. Indem wir aus der Gleichung, welche die Combination des Flächenprincips lieferte, β mit Hülfe von $\frac{d\psi}{dt} = -\beta$ eliminiren, erhalten wir:

$$d\,(\sin^2\psi\cdot\gamma) = -(\sin\lambda\cos\psi - \cos\lambda\sin\psi\sin\varphi)\cdot 2\,\Omega\sin\psi\,d\psi.$$

In dieser Gleichung ist $\sin\varphi$ eine noch unbekannte Function von ψ und daher eine unmittelbare Integration nur möglich, wenn das Glied, welches diese Grösse enthält, wegfällt. Nehmen wir nun an, dass die Schwingungsebene des Pendels zur Zeit $t = 0$, welcher ψ_0 entspricht, senkrecht auf dem Meridian stehe, d. h. dass $\varphi = 0$ sei für $t = 0$, so schwankt zwar $\sin\varphi$ zwischen $+1$ und -1, aber $\sin\psi$ nimmt mit wachsendem $\sin\varphi$ ab und $\sin\varphi\sin\psi$ bleibt gegen $\cos\psi$ sehr klein; ferner haben $\sin\varphi$ und $d\psi$ bald gleiche, bald entgegengesetzte Zeichen, es tilgen sich also in dem Integrale des fraglichen Gliedes viele Elementarbestandtheile gegenseitig, endlich wenn wir dazu noch $\cos\lambda < \sin\lambda$, d. h. $\lambda > \frac{1}{4}\pi$ annehmen, so wird jenes Glied einen sehr kleinen Beitrag im Integrale der rechten Seite unserer Gleichung geben und wir werden approximativ setzen dürfen:

$$d\,(\sin^2\psi\cdot\gamma) = -2\,\Omega\sin\lambda\sin\varphi\cos\psi\,d\psi.$$

Nehmen wir an, dass $\gamma_0 = 0$, d. h. dass das Pendel keinen anfänglichen Impuls erleide, sondern blos der Schwere und dem Einflusse der Erdrotation folge, so gibt uns die Integration dieser Gleichung:

$$\gamma = \Omega\sin\lambda\left(\frac{\sin^2\psi_0}{\sin^2\psi} - 1\right).$$

Diesen Ausdruck haben wir nun in die Gleichung der lebendigen Kraft einzuführen, wodurch wir mit Rücksicht auf $\beta_0 = 0$ und $\gamma_0 = 0$ zu der Formel für β gelangen:

$$\beta^2 = \frac{2\,g}{r}(\cos\psi - \cos\psi_0) + \frac{\Omega^2\sin^2\lambda\,(\sin^2\psi_0 - \sin^2\psi)^2}{\sin^2\psi}.$$

In Bezug auf ein um die Vertikale mit der Winkelgeschwindigkeit $\gamma_2 = -\Omega\sin\lambda$ rotirendes System besitzt die Schwingungsebene des Pendels eine relative Winkelgeschwindigkeit γ_1, sodass

$$\gamma_1 = \gamma - \gamma_2 = \gamma + \Omega\sin\lambda$$

ist. Mit Hülfe des eben gefundenen Werthes für γ erhalten wir daher:

$$\gamma_1 = \Omega\sin\lambda\cdot\left(\frac{\sin\psi_0}{\sin\psi}\right)^2$$

und da ψ_0 nicht sehr von ψ verschieden ist, so ist γ_1 dem Sinus der geographischen Breite nahezu proportional.

Für den Pol muss aus dem bereits früher erwähnten Grunde die Untersuchung appart geführt werden, weil nämlich die Centrifugalbeschleunigung stark variirt. Für denselben gelten, da $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ ist, die Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\,\Omega\frac{dy}{dt} - N\frac{x}{r} + \Omega^2 x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\,\Omega\frac{dx}{dt} - N\frac{y}{r} + \Omega^2 y$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - N\frac{z}{r}.$$

---

*) In einer der Pariser Academie vorgelegten Note (s. *Comptes rendus de l'Académie des sciences T. LXVIII, 15. Mars 1869*) hat neuerdings Résal für diese Winkelgeschwindigkeit die Formel $\frac{3}{4}\psi_0\psi_1\sqrt{\frac{r}{g}}$ gegeben, worin ψ_0, ψ_1 das Minimum und Maximum des Elongationswinkels ψ bedeuten.

Sind x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Pendelpunktes für $t = 0$, so gibt das Princip der lebendigen Kraft, wenn die Anfangsgeschwindigkeit Null ist,

$$v^2 = 2g + \Omega^2 (x^2 + y^2 - x_1^2 - y_1^2).$$

Die Gleichungen für β und γ werden:

$$\beta^2 = \frac{2g}{r} (\cos\psi - \cos\psi_0) - \sin^2\psi \cdot \gamma^2 - \Omega^2 (\sin^2\psi_0 - \sin^2\psi)$$

$$\gamma = \Omega \frac{\sin^2\psi_0}{\sin^2\psi} (\sin^2\psi_0 - \sin^2\psi)$$

oder nach der Substitution von γ in die Gleichung für β:

$$\beta^2 = \frac{2g}{r} (\cos\psi - \cos\psi_0) - \Omega^2 \frac{\sin^2\psi_0}{\sin^2\psi} (\sin^2\psi_0 - \sin^2\psi).$$

§. 12. **Relative Bewegung zweier Punkte, welche sich gegenseitig beschleunigen.** Die beiden Punkte seien A und B; der Punkt B wird von einer Beschleunigung afficirt, welche nach A gerichtet ist und eine Function der Entfernung r beider Punkte sei; sie heisse φ. Der Punkt A wird von einer anderen Beschleunigung φ' ergriffen, welche nach B gerichtet ist. Um nun die relative Bewegung des Punktes B gegen A zu untersuchen, betrachten wir A als Ursprung eines mit A in Translation begriffenen Coordinatensystems der ξ, η, ζ, sodass ξ, η, ζ die relativen Coordinaten von B bedeuten. Da das System bloss eine Translation besitzt, so ist die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung des mit B zusammenfallenden Systempunktes Null, es ist mithin der absoluten Beschleunigung φ des Punktes B blos die Translationsbeschleunigung des Systempunktes, d. h. die Translationsbeschleunigung von A in entgegengesetztem Sinne zuzufügen. Diese ist die entgegengesetzt genommene Beschleunigung φ'. Nun sind die Componenten von φ, weil sie nach A hin gerichtet ist: $-\varphi\frac{\xi}{r}$, $-\varphi\frac{\eta}{r}$, $-\varphi\frac{\zeta}{r}$ und die Componenten der Beschleunigung von φ', weil sie nach B gerichtet ist: $\varphi'\frac{\xi}{r}$, $\varphi'\frac{\eta}{r}$, $\varphi'\frac{\zeta}{r}$ und folglich die Componenten der ihr entgegengesetzten Beschleunigung: $-\varphi'\frac{\xi}{r}$, $-\varphi'\frac{\eta}{r}$, $-\varphi'\frac{\zeta}{r}$. Daher erhält man für die Gesammtcomponenten der relativen Beschleunigung des Punktes B: $-(\varphi + \varphi')\frac{\xi}{r}$, $-(\varphi + \varphi')\frac{\eta}{r}$, $-(\varphi + \varphi')\frac{\zeta}{r}$ und folglich sind die Gleichungen der relativen Bewegung:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -(\varphi + \varphi')\frac{\xi}{r}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -(\varphi + \varphi')\frac{\eta}{r}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -(\varphi + \varphi')\frac{\zeta}{r}.$$

Die Gleichungen der absoluten Bewegung des Punktes B, wenn der Punkt A fest wäre, hätten die Form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi \cdot \frac{x}{r}$$

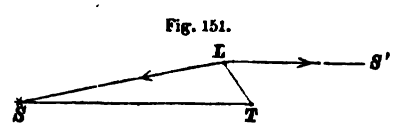
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi \cdot \frac{y}{r}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\varphi \cdot \frac{z}{r}.$$

Daher haben auch die Integrale jener dieselbe Form, wie die Integrale dieser und beruht der ganze Unterschied darin, dass $\varphi + \varphi'$ an die Stelle von φ tritt.

Es wurde am Schlusse von Cap. III. bemerkt, dass die Kepler'schen Gesetze Gesetze der relativen Bewegung seien. Newton hat von ihnen ausgehend die Theorie der allgemeinen Gravitation aufgestellt. Hiernach beschleunigt die Sonne den Planeten, aber dieser auch die Sonne, nur ist die letztere Beschleunigung ausserordentlich gering im Vergleich zu der ersteren, aber beide befolgen dasselbe Gesetz, wonach $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$, $\varphi' = \frac{\mu'}{r^2}$. Daher ist in den obigen Gleichungen $\varphi + \varphi' = \frac{1}{r^2}(\mu + \mu')$. Die Coefficienten μ, μ' hängen von der Menge der Sonnen- und Planetenmaterie ab und ist μ weit grösser als μ'. Ein Planet erleidet nicht blos von der Sonne, sondern auch von den übrigen Planeten eine Beschleunigung; die Beschleunigungen, welche ihm diese ertheilen, sind aber im Vergleich zu der von der Sonne herrührenden sehr klein (insbesondere noch wegen der grösseren Entfernung) und ist es nur eine geringe Aenderung, welche durch sie hervorgebracht wird. Wenn aber ein Planet einen Trabanten besitzt, wie z. B. die Erde den Mond, so bewirkt die grössere Nähe des Trabanten Störungen, welche nicht zu vernachlässigen sind. Um die Bewegung des Mondes relativ gegen die Erde zu untersuchen, hat man den Beschleunigungen, welche er von Seiten der Erde und Sonne erleidet, die entgegengesetzten Beschleunigungen zuzufügen, denen die Erde unterworfen ist. Sind daher μ, μ', μ'' die drei Coefficienten der Beschleunigung, welche der Sonne, der Erde und dem Monde zukommen, sind ferner d, d' die Entfernungen des Sonnenmittelpunktes von den Mittelpunkten der Erde und des Mondes, r die des Mondes von der Erde, so ist der Mond L (Fig. 151.) unterworfen:

Fig. 151.



1. der Beschleunigung von Seiten der Erde T in der Richtung LT gleich $\frac{\mu'}{r^2}$,
2. der Beschleunigung durch die Sonne S in der Richtung LS gleich $\frac{\mu}{d'^2}$.

Nun wird aber die Erde afficirt von zwei Beschleunigungen $\frac{\mu}{d^2}$, $\frac{\mu''}{r^2}$, herrührend von Sonne und Mond und gerichtet nach TS und TL. Daher treten zu den vorigen Beschleunigungen des Mondes noch hinzu:

1. eine Beschleunigung $\frac{\mu}{d^2}$, gerichtet nach LS', parallel ST, 2. eine Beschleunigung $\frac{\mu''}{r^2}$, gerichtet nach LT.

Die Resultante dieser genannten vier Beschleunigungen ist die relative Beschleunigung des Mondes in Bezug auf die Erde. Da die Entfernung r des Mondes von der Erde gegenüber seiner und der Erde Entfernung von der Sonne sehr klein ist $\left(r = \frac{d}{400}\right)$, so werden die beiden Beschleunigungen $\frac{\mu}{d'^2}$ und $\frac{\mu}{d^2}$ einen sehr stumpfen Winkel bilden und da sie nahezu gleich gross sind, so wird ihre Resultante sehr klein sein, so dass die Bewegung des Mondes der Hauptsache nach so erfolgen wird, als ob er nach der Erde zu die Beschleunigung $\frac{\mu' + \mu''}{r^2}$ besässe. Diese Bewegung wird also den beiden ersten Kepler'schen Gesetzen folgen. Jene Resultante der beiden anderen Beschleunigungen wird daher nur als „Störungsbeschleu-

nigung" auftreten, welche die elliptische Bewegung des Mondes etwas modificirt. Aehnliche Störungsbeschleunigungen treten von Seiten der übrigen Planeten hinzu.

Da die Hauptbeschleunigung des Mondes $\frac{\mu' + \mu''}{r^2}$ und der Coefficient μ'' des Mondes ungefähr $\frac{1}{88}\mu'$ ist, so kann man approximativ $\frac{\mu'}{r^2}$ als Beschleunigung des Mondes annehmen. Diese Beschleunigung ist aber nichts anderes, als die Beschleunigung, welche die irdische Schwere einem Punkte in der Entfernung r ertheilen würde. Ist also die Newton'sche Theorie richtig, so muss man aus der Bewegung des Mondes die Beschleunigung g der Schwere an der Oberfläche der Erde näherungsweise bestimmen können. Diese Prüfung seiner Theorie hat Newton selbst durchgeführt; anfangs gelangte er zu sehr abweichenden Resultaten, bis er seinen Rechnungen bessere Maasse zu Grunde legte, als die alten Picart'schen waren, worauf er sodann seine Theorie sehr wohl bestätigt fand. Der Mond vollendet seinen Umlauf um die Erde in 27,321661 Tagen oder 2 360 592 Secunden. Nimmt man seine Bahn als nahezu kreisförmig und ihren Radius als das 60fache des Erdradius an, so folgt, dass die Geschwindigkeit des Mondes 1016,7 Meter in der Secunde beträgt. Das Quadrat dieser Geschwindigkeit, dividirt durch den Radius der Bahn, gibt die Beschleunigung des Mondes nach dem Mittelpunkt der Erde zu im Werthe von 0,0027061 Meter. Um hieraus die Beschleunigung an der Oberfläche der Erde abzuleiten, deren Entfernung vom Mittelpunkt derselben den 60. Theil der Mondsentfernung von demselben beträgt, hat man diese Zahl mit 60^2 zu multipliciren. Dies liefert 9,7421 Meter, welches in der That ein sehr annähernder Werth für $g = 9,8088$ ist, um so mehr, wenn man bedenkt, dass man die störenden Einflüsse und die Elliptícität der Mondsbahn ausser Acht gelassen hat. — Die irdische Schwere ist ein specieller Fall der allgemeinen Gravitation, nach welcher alle materiellen Punkte einander dem Newton'schen Gesetze entsprechend sich gegenseitig beschleunigen.

In den vorstehenden Betrachtungen sind die Himmelskörper wie Punkte behandelt worden. Die Berechtigung liegt hierzu zum Theil in ihrer gegenseitigen grossen Entfernung, zum Theil in ihrer kugelähnlichen Gestalt. In der Theorie der Attractionskräfte der Massen, welche die Ursachen der hier auftretenden Beschleunigungen sind, wird gezeigt werden, dass solche kugelähnliche Massen auf einander einwirken, als ob sie im Punkte concentrirt wären.

§. 13. Einige Uebungsbeispiele.

Nr. 1. Ein Punkt wird nach einem beweglichen Centrum hin proportional seiner Entfernung von ihm beschleunigt; das Centrum beschreibt eine Gerade mit constanter Geschwindigkeit; die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Punktes fällt mit der Geraden, welche das Centrum beschreibt, in eine Ebene. Man soll die relative und die absolute Bewegung des Punktes bestimmen.

Die Gerade, welche das Centrum durchläuft, sei die x-Axe eines rechtwinkligen Systems der xy; α, β die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit des Centrums, a, b die der Anfangsgeschwindigkeit des Punktes, m, n die Coordinaten seiner Anfangslage, μ die Stärke der Beschleunigung in der Einheit der Entfernung vom Centrum.

Nr. 2. Ein schwerer Punkt fällt auf einer schiefen Ebene. Diese Ebene besitzt eine gleichförmige Translationsbewegung von geradliniger Beschaffenheit, so zwar, dass die Linie des steilsten Abfalles immer in derselben Vertikalebene bleibt. Man soll die absolute Bewegung des Punktes bestimmen. — Dieselbe Aufgabe für den Fall, dass die Translation der Ebene gleichförmig beschleunigt ist.

Nr. 3. Ein Punkt, der Schwere unterworfen, bewegt sich auf einer geneigten Geraden (befindet sich z. B. in einer engen Röhre); die Gerade beschreibt um die Vertikale eine Kegelfläche mit kreisförmigem Schnitt senkrecht zur Vertikalen mit constanter Winkelgeschwindigkeit, welches ist die Projection der absoluten Bewegung des Punktes auf die Horizontalebene?

Nr. 4. Ein schwerer Punkt wird längs einer Ebene geworfen, welche sich um eine horizontale Axe mit gleichförmiger Geschwindigkeit umdreht. Welches ist die Bewegung des Punktes, wo und wann verlässt er die Ebene?

Nr. 5. Ein schwerer Punkt bewegt sich in einer Vertikalebene, welche sich um eine vertikale Axe gleichförmig umdreht. Welches ist die Bewegung des Punktes?

Nr. 6. Eine horizontale Platte sinkt mit der Beschleunigung α vertikal abwärts, ein schwerer Punkt liegt auf ihr; welches ist die relative Druckbeschleunigung des Punktes gegen die Platte?

Nr. 7. Eine Hohlschaale (Rotationsfläche) dreht sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit um ihre vertikal stehende Rotationsaxe; in ihr liegt ein schwerer Punkt; in welchen Lagen kann der Punkt sich in relativer Ruhe gegen die Schaale befinden?

Nr. 8. Ein sphärisches Pendel beschreibt einen Kreis; man soll seine Bewegung bestimmen, indem man dasselbe als in relativer Ruhe befindlich ansieht in Bezug auf ein gleichförmig um die Vertikale rotirendes System.

§. 14. Wir wollen in diesem Capitel in Kürze noch die Hauptbetrachtungen über die relative Beschleunigung eines unveränderlichen Systems in einem anderen durchführen.

Es seien Σ', Σ'' zwei unveränderliche Systeme, welche sich ineinander bewegen. Die Elementarbewegung eines jeden ist eine Schraubenbewegung von bestimmter Translation und Rotation um eine bestimmte Axe. Die Elementarbewegung von Σ'' zur Zeit t lässt sich nun in zwei Componenten auflösen, nämlich in die relative Elementarbewegung von Σ'' im System Σ' und die Elementarbewegung des mit Σ'' zusammenfallenden, dem System Σ' angehörigen Systems σ'', welche letztere Bewegung unmittelbar durch die Bewegung von Σ' gegeben ist. Jede dieser Bewegungen zerfällt in eine Rotation und Translation. Nun seien Ω', T'; Ω'', T'' die Winkelgeschwindigkeiten und Translationsgeschwindigkeiten der absoluten Bewegungen von Σ', Σ'' zur Zeit t, ebenso Ω_r'', T_r'' die entsprechenden Grössen der relativen Bewegung von Σ'' in Σ' zu derselben Zeit und mögen dieselben auf den betreffenden Schraubenaxen als Längen aufgetragen werden. Die analoge Bedeutung für die Zeit $t + dt$ mögen Ω_1', T_1'; Ω_1'', T_1''; Ω_{1r}'', T_{1r}'' haben. Dann wird jede dieser drei Bewegungen zur Zeit t eine bestimmte Beschleunigung besitzen, welche ihrerseits durch Translations- und Winkelbeschleunigung dargestellt werden kann und es fragt sich, in welchem Zusammenhange diese verschiedenen Beschleunigungen untereinander stehen. Dabei können wir die Translationsbeschleunigungscomponenten hier übergehen, denn die Translationsbeschleunigung wird als die Beschleunigung irgend

eines Punktes nach den Capp. VI, VII, VIII zu bestimmen sein und brauchen wir blos von der Abhängigkeit der Winkelbeschleunigungen zu reden. Nun sei O (Fig. 152.) irgend ein Punkt der absoluten Momentanaxe von Σ' und auf ihr $O\Omega' = \Omega'$ nach Grösse und Sinn aufgetragen. Durch O legen wir $O\Omega_r'' = \Omega_r''$ parallel der relativen Momentanaxe von Σ'', dann liefert das Parallelogramm beider Linien durch seine Diagonale $O\Omega''$ die Grösse, Axenrichtung und den Sinn der absoluten Winkelgeschwindigkeit Ω'' von Σ''. Ziehen wir ferner durch O eine Linie $O\Omega_1' = \Omega_1'$ und eine andere $O\Omega_{1r}'' = \Omega_{1r}''$, so liefert ein weiteres Parallelogramm durch die Diagonale $O\Omega_1''$ die absolute Winkelgeschwindigkeit von Σ'' zur Zeit $t + dt$. Die unendlich kleine Linie $\Omega''\Omega_1''$ ist die Elementarwinkelbeschleunigung der absoluten Bewegung von Σ'', also $\frac{\Omega''\Omega_1''}{dt}$ dessen Winkelbeschleunigung selbst. Eine parallele Uebertragung genügt, um zu zeigen, dass $\Omega''\Omega_1''$ die Resultante von den beiden Elementarbeschleunigungen $\Omega_r''\Omega_{1r}''$ und $\Omega'\Omega_1'$ ist. Von diesen beiden ist die letztere die Elementarwinkelbeschleunigung von Σ' oder also auch von σ'', die erstere aber hängt mit der relativen Elementarwinkelbeschleunigung von Σ'' in Σ' folgendermassen zusammen. Sie würde die relative Elementarbeschleunigung selbst sein, wenn die relative Momentanaxe nicht durch die Rotation um die absolute Momentanaxe $O\Omega'$ von Σ' eine unendlich kleine Drehung erlitte, in Folge deren $\Omega_r''\Omega$. die Resultante der relativen Elementarbeschleunigung von Σ'' im System Σ' und einer weiteren unendlich kleinen Elementarbeschleunigung wird, welche durch die Rotation um $O\Omega'$ hervorgerufen wird. Vermöge dieser beschreibt nämlich der Endpunkt der relativen Winkelbeschleunigung um die Momentanaxe $O\Omega'$ einen kleinen Kreisbogen, dessen Radius die Projection U_r'' von Ω_r'' auf eine zu dieser Momentanaxe senkrechte Ebene ist. Seine Länge ist daher $U_r''\Omega_r dt$ und tritt als Componente der Elementarbeschleunigung $\Omega_r''\Omega_{1r}''$ auf. Dividirt man die erhaltenen unendlich kleinen Componenten mit dem Zeitelemente, wodurch man die entsprechenden endlichen Beschleunigungscomponenten erhält, so ergibt sich der Satz:

Fig. 152.

Die Winkelbeschleunigung Ω'' der absoluten Bewegung eines Systems Σ'' ist die Resultante aus drei Winkelbeschleunigungen: 1. der relativen Winkelbeschleunigung des Systems Σ'' in einem anderen System Σ', 2. der absoluten Winkelbeschleunigung Ω' dieses Systems Σ' oder, was dasselbe ist, der Winkelbeschleunigung des mit Σ'' zusammenfallenden Bestandtheils σ'' derselben und 3. einer Winke-

beschleunigung, welche erhalten wird, indem man die Projection U_r'' der relativen Winkelgeschwindigkeit des Systems Σ'' auf eine zur Momentanaxe von Σ' senkrechten Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit Ω' dieses Systems multiplicirt. Die Axe dieser Winkelbeschleunigung ist senkrecht zur Ebene, welche durch die Momentanaxe und die Axe der relativen Winkelbeschleunigung gelegt werden kann und ihr Sinn harmonirt mit dem Drehungssinne der letzteren.

Aus der Natur des Parallelogramms $O\Omega_r''\Omega''\Omega'$ erkennt man, dass der Endpunkt Ω'' der absoluten Winkelbeschleunigung Ω'' einen Kreisbogen von derselben Grösse wie Ω_r'' beschreibt, sodass die Projectionen U'' von Ω'' und U_r'' von Ω_r'' gleich sind und im Ausdruck des Satzes also auch für einander gebraucht werden können.

Die dritte Componente entspricht der zusammengesetzten Centripetalbeschleunigung eines Punktes; nur hat jene den Factor 2, weil sie aus einer doppelten Quelle entsprang, der Rotation um die Momentanaxe und dem Fortschreiten des Punktes im System, von welchem die letztere hier nicht mitwirkt, weil für die Winkelgeschwindigkeiten nur Rotationen von Einfluss sind. Die dritte Componente verschwindet, sobald Σ blos Translationsgeschwindigkeit besitzt oder Ω_r'' der Momentanaxe $O\Omega'$ parallel ist, oder Σ'' sich blos in relativer Translation oder in relativer Ruhe befindet.

Fügt man Σ'' die entgegengesetzte Bewegung von Σ' noch zu seiner absoluten Bewegung hinzu, so erhält man aus vorstehendem Satze sofort einen entsprechenden für die relative Bewegung von Σ'' in Σ', nämlich:

Die Winkelbeschleunigung der relativen Bewegung eines Systems Σ'' in einem anderen Systeme Σ' besteht 1. aus der absoluten Winkelbeschleunigung von Σ'', 2. aus der in entgegengesetztem Sinne genommenen Winkelbeschleunigung des Systems Σ'' und 3. aus einer Winkelbeschleunigung gleich dem Produkte aus der Projection der relativen oder absoluten Winkelgeschwindigkeit von Σ'' auf eine zur Momentanaxe von Σ' senkrechte Ebene in die Winkelgeschwindigkeit um diese Momentanaxe; die Axe derselben ist senkrecht zur Ebene der Momentanaxe und der Axe der relativen Winkelbeschleunigung und nach derjenigen Seite dieser Ebene gerichtet, nach welcher die Rotation um die Momentanaxe nicht hinzeigt.

Wird die relative Winkelgeschwindigkeit Ω_r'' in mehrere Componenten zerlegt, oder geschieht dies mit der Winkelgeschwindigkeit des Systems Σ', oder auch mit beiden Grössen zugleich, so ist die dritte Componente der Winkelbeschleunigung stets äquivalent den dritten Componenten, welche aus den einzelnen Winkelbeschleunigungen und Winkel-

geschwindigkeiten entspringen, zusammengenommen. Denn wird zunächst Ω_r'' in zwei Componenten $\omega_r^{(1)}$, $\omega_r^{(2)}$ vermöge des Parallelogramms der Winkelgeschwindigkeiten zerlegt und projicirt man dies Parallelogramm auf eine zur Momentanaxe von Σ' senkrechte Ebene, so bilden die Projectionen $u_r^{(1)}$, $u_r^{(2)}$ von $\omega_r^{(1)}$, $\omega_r^{(2)}$ wieder ein Parallelogramm, dessen Diagonale U_r'' die Projection von Ω_r'' ist. Errichtet man in dieser Ebene auf die Seiten und Diagonalen dieses Parallelogramms Perpendikel, so geben sie die Richtungen der drei fraglichen dritten Componenten der relativen Winkelbeschleunigung an und da diese $u_r^{(1)}\cdot\Omega'$, $u_r^{(2)}\cdot\Omega'$, $U_r''\cdot\Omega'$, also $u_r^{(1)}$, $u_r^{(2)}$, U_r'' proportional sind, so bilden sie wieder ein Parallelogramm, dessen Diagonale $U_r''\Omega'$ ist. Daher ist $U_r''\Omega'$ die Resultante von $u_r^{(1)}\Omega'$ und $u_r^{(2)}\Omega'$. In bekannter Weise dehnt man diese Betrachtung auf mehr als zwei Componenten aus.

Wird ferner Ω' in zwei Componenten $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ mit Hülfe eines Parallelogramms aufgelöst, so lege man durch Ω', $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ und Ω_r'' drei Ebenen. Dieselben projiciren jenes Parallelogramm auf die zu Ω_r'' senkrechte Ebene wiederum als ein Parallelogramm, dessen Diagonale und Seiten U', $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ resp. die Projectionen von Ω', $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ sind. Fällen wir nun vom Endpunkte von Ω_r'' die Perpendikel U_r'', U_1'', U_2'' auf Ω', $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, so sind $U_r''\Omega'$, $U_1''\omega^{(1)}$, $U_2''\omega^{(2)}$ die drei dritten Beschleunigungscomponenten, welche Ω', $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ entsprechen. Denkt man sich nun in jenen drei projicirenden Ebenen über Ω_r'' und Ω', Ω_r'' und $\omega^{(1)}$, Ω_r'' und $\omega^{(2)}$ Parallelogramme, so werden deren Inhalte sowohl durch $U_r''\Omega'$, $U_1''\omega^{(1)}$, $U_2''\omega^{(2)}$ als auch durch $\Omega'U'$, $\Omega'u^{(1)}$, $\Omega'u^{(2)}$ ausgedrückt. Letztere drei Grössen sind daher gleich jenen drei dritten Beschleunigungscomponenten. Sie sind aber senkrecht zu den Ebenen der drei Parallelogramme an O anzutragen und da diese drei Ebenen sich in Ω_r'' schneiden, so fallen sie alle in die zu Ω_r'' senkrechte Ebene und sind also senkrecht zu U', $u^{(1)}$, $u^{(2)}$. Da sie nun untereinander dieselben Winkel bilden, wie diese Linien, und ihnen proportional sind, so bilden sie ein Parallelogramm, in welchem

$$\Omega'U' = Res.\,(\Omega'u^{(1)}, \Omega'u^{(2)}),\ \text{d. h.}\ U_r''\Omega' = Res.\,(U_1''\omega^{(1)}, U_2''\omega^{(2)}).$$

Die beiden vorgetragenen Fälle unseres Satzes gestatten offenbar eine unmittelbare Combination zu dem allgemeinen Falle, dass sowohl Ω' als Ω_r'' zerlegt werde.

§. 15. Wir wollen jetzt den analytischen Ausdruck für die Projectionen der absoluten Winkelbeschleunigung von Σ'' auf drei rechtwinklige, mit dem System Σ' verbundene Coordinatenaxe der x', y', z' suchen und projiciren zu dem Ende den Linienzug der Winkelbeschleunigung des Systems Σ', der relativen Winkelbeschleunigung und der dritten Beschleunigungscomponente auf diese Axen, wodurch wir die gesuchten Projectionen erhalten. Nun sind

$$\frac{d\Omega_{x'}''}{dt}, \quad \frac{d\Omega_{y'}''}{dt}, \quad \frac{d\Omega_{z'}''}{dt}$$

die Projectionen der absoluten Winkelbeschleunigung von Σ'',

$$\frac{d\Omega_{rx'}''}{dt}, \quad \frac{d\Omega_{ry'}''}{dt}, \quad \frac{d\Omega_{rz'}''}{dt}$$

die der relativen Winkelbeschleunigung von Σ'' in Σ', es seien ferner $\alpha_{x'}$, $\alpha_{y'}$, $\alpha_{z'}$ die Projectionen der Winkelbeschleunigung von Σ' parallel den Coordinatenaxen; endlich ergeben sich die Projectionen der dritten Beschleunigungscomponente $U_r''\Omega'$ leicht mit Hülfe des vorigen Satzes, indem man sowohl Ω' in $\Omega_{x'}$, $\Omega_{y'}$, $\Omega_{z'}$, als auch U_r'' in drei Componenten auflöst. Indem man die jeder Axe entsprechenden Bestandtheile sammelt, erhält man für letztere Projectionen bezüglich der Axen der x', y', z':

$$\Omega_{ry'}''\Omega_{z'}' - \Omega_{rz'}''\Omega_{y'}', \quad \Omega_{rz'}''\Omega_{x'}' - \Omega_{rx'}''\Omega_{z'}', \quad \Omega_{rx'}''\Omega_{y'}' - \Omega_{ry'}''\Omega_{x'}'.$$

Aus allen einzelnen Bestandtheilen erhält man demnach jetzt:

$$\frac{d\Omega_{x'}''}{dt} = \frac{d\Omega_{rx'}''}{dt} + \alpha_{x'} + (\Omega_{ry'}''\Omega_{z'}' - \Omega_{rz'}''\Omega_{y'}')$$

$$\frac{d\Omega_{y'}''}{dt} = \frac{d\Omega_{ry'}''}{dt} + \alpha_{y'} + (\Omega_{rz'}''\Omega_{x'}' - \Omega_{rx'}''\Omega_{z'}')$$

$$\frac{d\Omega_{z'}''}{dt} = \frac{d\Omega_{rz'}''}{dt} + \alpha_{z'} + (\Omega_{rx'}''\Omega_{y'}' - \Omega_{ry'}''\Omega_{x'}').$$

Sind $\Omega_{x'}'$, $\Omega_{y'}'$, $\Omega_{z'}'$, $\alpha_{x'}$, $\alpha_{y'}$, $\alpha_{z'}$ nicht unmittelbar bekannt, dagegen Ω_x', Ω_y', Ω_z', $\alpha_x = \frac{d\Omega_x'}{dt}$, $\alpha_y = \frac{d\Omega_y'}{dt}$, $\alpha_z = \frac{d\Omega_z'}{dt}$ in Bezug auf ein festes Coordinatensystem, so erhält man erstere Grössen aus letzteren durch Projection und zwar am einfachsten mit Hülfe der drei Euler'schen Winkel, welche die Lage des Coordinatensystems der x', y', z' gegen das feste System der x, y, z bestimmen.

X. Capitel.

Beschleunigung zweiter und höherer Ordnung.

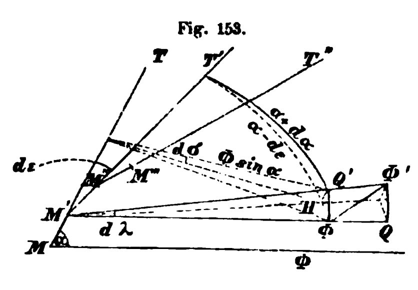
§. 1. Die Elementarbeschleunigung eines Punktes ist das geometrische Differential und die Beschleunigung selbst die geometrische Derivirte der Geschwindigkeit (S. 184). In derselben Weise heisst die geometrische Derivirte der Beschleunigung die Beschleunigung zweiter Ordnung, die geometrische Derivirte dieser die Beschleunigung dritter Ordnung u. s. f., das geometrische Differential der Beschleunigung die Elementarbeschleunigung zweiter Ordnung, das geometrische Differential der Beschleunigung zweiter Ordnung die Elementarbeschleuni-

gung dritter Ordnung u. s. f. Trägt man die Geschwindigkeit als Länge auf der Tangente auf, so erscheint die Beschleunigung als die Geschwindigkeit des Endpunktes derselben und wird diese selbst an jenem Endpunkte nach Grösse, Richtung und Sinn angetragen, so ist die Beschleunigung zweiter Ordnung die Geschwindigkeit ihres Endpunktes u. s. f. Zieht man von irgend einem Punkte des Raumes nach dem beweglichen Punkte den Radiusvector, so erscheint die Geschwindigkeit als die geometrische Derivirte dieses. Fängt man mit diesem an und construirt die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen aller Ordnungen, so erhält man ein Polygon, dessen Natur die Bewegung des Punktes vollkommen charakterisirt. Dasselbe ist mit der Bewegung des Punktes veränderlich. Der Ausdruck „Geschwindigkeit erster, zweiter, dritter Ordnung" u. s. w. oder selbst der Ausdruck „Radiusvector erster, zweiter, dritter Ordnung" u. s. w. würde ausreichen und das Wort „Beschleunigung" könnte entbehrt werden. Der Grund seiner Existenz ist, dass man die Bedeutung der ganzen Kette von Beschleunigungen und insbesondere den Umstand, dass jedes folgende Glied derselben für das vorhergehende dieselbe Bedeutung hat, wie dieses für das zweitvorhergehende, erst in neuerer Zeit erkannt hat. Indem man von irgend einem Punkte mit den Beschleunigungen n^{ter} Ordnung, welche den verschiedenen Zeiten entspricht, Strecken parallel, von gleicher Länge und gleichem Sinne zieht, erhält man durch deren Endpunkte eine Curve, den Hodographen $(n + 1)$ster Ordnung, ähnlich wie wir S. 186 den Hodographen erster Ordnung erhielten.

Die Kette der Beschleunigungen steht in innigem Zusammenhange mit der Evolutenkette der Bahn des beweglichen Punktes und lassen sich eigenthümliche Eigenschaften der Periodicität, des Abbrechens etc von der einen auf die andere überführen. Andererseits hängen beide mit der Theorie der Berührung höherer Ordnung der Curven zusammen. Es ist daher die Theorie der Beschleunigungen höherer Ordnung ein Gebiet, auf welchem Geometrie und Mechanik aufs Innigste verschmelzen. Es kann natürlich nicht im Plane dieses Buches liegen, diesen für den Fortschritt beider Disciplinen gewiss sehr fruchtbaren Speculationen hier weiteren Raum zu geben.

Aus dem Inhalte der SS. 298—304 ist ersichtlich, dass die Methode des Imaginären sich auf dem hier zu besprechenden Gebiete als äusserst fruchtbar erweisen muss. Da eine Strecke in der Ebene durch die Form $x + yi$ dargestellt wird, so folgt, dass wenn der reelle Bestandtheil und der Coefficient des imaginären Bestandtheils der Beschleunigung irgend einer Ordnung für jeden Werth von t Null sind, also die Beschleunigung dieser Ordnung selbst verschwindet, die Coordinaten des beweglichen Punktes algebraische Functionen der Zeit sein müssen und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, so muss die Kette der Beschleunigungen abbrechen.

§. 2. Wir wenden uns jetzt zunächst zur Bestimmung der Beschleunigung zweiter Ordnung eines Punktes. Es seien (Fig. 153.) M, M', M'', M''' aufeinanderfolgende Punkte der Bahn des beweglichen Punktes, entsprechend den Zeiten t, $t + dt$, etc., MT, $M'T'$, $M''T''$ die Tangenten in M, M', M'', also $MM'M''$, $M'M''M'''$ die Schmiegungsebenen in M und M'. Die Beschleunigung erster Ordnung $\varphi = M\Phi$ zur Zeit t fällt in die erstere dieser Schmiegungsebenen, die Beschleunigung $\varphi + d\varphi = M'\Phi'$ zur Zeit $t + dt$ in die letztere; jene bildet mit der Tangente MT des Punktes M einen Winkel α, diese mit der Tangente des Punktes M' den Winkel $\alpha + d\alpha$. Ziehen wir nun durch M' eine Linie $M'\Phi$ parallel, gleich und gleichen Sinnes mit φ, so stellt die unendlich kleine Strecke $\Phi\Phi'$ die Elementarbeschleunigung zweiter Ordnung nach Grösse, Richtung und Sinn dar und ist der Quotient



$\dfrac{\Phi\Phi'}{dt}$ die Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ zweiter Ordnung selbst, die wir in der Richtung $\Phi\Phi'$ an Φ oder auch an M antragen können. Wir zerlegen nun zunächst $\varphi^{(2)}$ in zwei Componenten, eine längs φ, die andere senkrecht zu φ; dieselben sind, wenn $d\lambda$ den unendlich kleinen Winkel $\Phi'M'\Phi$ bezeichnet, $\dfrac{d\varphi}{dt}$ und $\varphi\,\dfrac{d\lambda}{dt}$, nämlich $\dfrac{\Phi Q}{dt}$ und $\dfrac{Q\Phi'}{dt}$. Die erstere dieser Componenten zerlegen wir weiter in zwei andere, parallel der Tangente und der Hauptnormalen des Punktes M, nämlich in $\dfrac{d\varphi}{dt}\cos\alpha$ und $\dfrac{d\varphi}{dt}\sin\alpha$. Die zweite Componente $\varphi\,\dfrac{d\lambda}{dt}$ aber spalten wir in zwei andere, von denen die eine in die Schmiegungsebene des Punktes M fällt, während die andere zu dieser Ebene senkrecht ist. Beschreiben wir nämlich um M' mit $M'\Phi = \varphi$ als Radius eine Kugel, so bestimmen die Ebene $\Phi'M'\Phi$, in welcher φ und $\varphi + d\varphi$ liegen, die Schmiegungsebene $TM'\Phi$ des Punktes M und die Schmiegungsebene $T'M'\Phi'$ von M' ein sphärisches Dreieck $\Phi Q'T'$, dessen Seiten $\Phi Q' = \varphi d\lambda$, $\Phi T' = \varphi\cdot(\alpha - d\varepsilon)$, wo $d\varepsilon$ den Contingenzwinkel TMT' bedeutet und $Q'T' = \varphi\,(\alpha + d\alpha)$ sind. Fällen wir in demselben die Höhe $Q'H$, so zerfällt $\varphi d\lambda$ in die beiden Componenten ΦH und $Q'H$ und also $\varphi\,\dfrac{d\lambda}{dt}$ in $\dfrac{\Phi H}{dt}$ und $\dfrac{Q'H}{dt}$, oder weil $HT' = Q'T'$, also $\Phi H = \varphi\cdot(\alpha - d\varepsilon - \alpha - d\alpha) = -\varphi\,(d\alpha + d\varepsilon)$ und $Q'H = \varphi\sin\alpha\cdot d\sigma$ ist, wenn $d\sigma$ den unendlich kleinen Winkel der beiden Schmiegungsebenen in M und M' bedeutet, in die Componenten $-\varphi\left(\dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{d\varepsilon}{dt}\right)$ und $\varphi\sin\alpha\cdot\dfrac{d\sigma}{dt}$, erstere in der Schmiegungsebene

von M, letztere senkrecht zu ihr. Die erstere dieser beiden Componenten ist senkrecht zu φ und bildet, da φ gegen MT unter dem Winkel α geneigt ist, mit der Tangente und der Hauptnormalen in M die Winkel $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ und $\pi - \alpha$ und zerfällt daher in die tangentielle Componente $-\varphi\left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt}\right)\sin\alpha$ und die Componente längs der Hauptnormalen $\varphi\left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt}\right)\cos\alpha$. Demnach hätten wir nach passender Reduction an Componenten der Beschleunigung zweiter Ordnung längs der Tangente

$$\frac{d\varphi}{dt}\cos\alpha - \varphi\frac{d\alpha}{dt}\sin\alpha - \varphi\frac{d\varepsilon}{dt}\sin\alpha = \frac{d(\varphi\cos\alpha)}{dt} - \varphi\frac{d\varepsilon}{dt}\sin\alpha = \frac{d\varphi_t}{dt} - \varphi_n\frac{d\varepsilon}{dt}$$

und längs der Hauptnormalen

$$\frac{d\varphi}{dt}\sin\alpha + \varphi\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} + \varphi\cos\alpha\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d(\varphi\sin\alpha)}{dt} + \varphi\cos\alpha\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varphi_n}{dt} + \varphi_t\frac{d\varepsilon}{dt},$$

sowie endlich zur Schmiegungsebene senkrecht, also parallel der Binormalen oder der Krümmungsaxe*) $\varphi\sin\alpha\frac{d\sigma}{dt} = \varphi_n\frac{d\sigma}{dt}$. Wir wollen die drei Componenten von $\varphi^{(2)}$ parallel der Tangente, Hauptnormalen und Binormalen mit $\varphi_t^{(2)}$, $\varphi_n^{(2)}$, $\varphi_b^{(2)}$ bezeichnen, sodass wir also setzen:

$$\varphi_t^{(2)} = \frac{d\varphi_t}{dt} - \varphi_n\frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \varphi_n^{(2)} = \frac{d\varphi_n}{dt} + \varphi_t\frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \varphi_b^{(2)} = \varphi_n\frac{d\sigma}{dt},$$

worin φ_t, φ_n die Bedeutung der Tangential- und Normalbeschleunigung erster Ordnung haben, wie früher. Nun sind der Krümmungshalbmesser ϱ und der Schmiegungshalbmesser r einer Curve $\varrho = \frac{ds}{d\varepsilon}$, $r = \frac{ds}{d\sigma}$, daher erhält man mit Rücksicht auf $\frac{ds}{dt} = v$:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v}{\varrho}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{v}{r}$$

und kann die vorstehenden Formeln auch folgendermassen schreiben:

$$\varphi_t^{(2)} = \frac{d\varphi_t}{dt} - \varphi_n\frac{v}{\varrho} = \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{\varrho^2}$$

$$\varphi_n^{(2)} = \frac{d\varphi_n}{dt} + \varphi_t\frac{v}{\varrho} = \frac{d\cdot\frac{v^2}{\varrho}}{dt} + \frac{v}{\varrho}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{v}\frac{d\left(\frac{v^3}{\varrho}\right)}{dt} = 3\frac{v}{\varrho}\frac{dv}{dt} - \frac{v^2}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{dt}$$

$$\varphi_b^{(2)} = \varphi_n\frac{v}{r} = \frac{v^3}{\varrho r}.$$

Der Inhalt dieser Formeln, welche zuerst von **Résal** (*Traité de cinématique pure*, *Chap. VI*, *p. 171*) in etwas anderer Weise als hier abgeleitet wurden, kann in folgenden Satz gefasst werden:

*) Vgl. meine „Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung“, S. 6 u. …

Die Beschleunigung zweiter Ordnung eines Punktes zerfällt in drei Componenten, parallel der Tangente, der Hauptnormalen und der Binormalen der Bahn desselben. Die Tangentialcomponente ist der Ueberschuss der zweiten Derivirten der Geschwindigkeit über dem Quotienten des Cubus der Geschwindigkeit durch das Quadrat des Krümmungshalbmessers; die Normalcomponente in der Schmiegungsebene ist der Ueberschuss des dreifachen Produktes aus dem Quotienten der Geschwindigkeit durch den Krümmungshalbmesser in die Tangentialbeschleunigung erster Ordnung über das Produkt aus dem Quotienten vom Cubus der Geschwindigkeit durch das Quadrat des Krümmungshalbmessers in das Verhältniss des Differentials des Krümmungshalbmessers zum Bogenelemente der Bahn; die Binormalcomponente endlich ist gleich dem Cubus der Geschwindigkeit, dividirt durch das Produkt aus dem Krümmungshalbmesser und dem Schmiegungshalbmesser.

Die Formel für $\varphi_t^{(2)}$ ist bei Résal unrichtig; er findet eine Summe statt der Differenz, worauf bereits Somoff (*Mémoire sur les accélerations de divers ordres. St. Pétersbourg, 1864*, in den *Mém. de l'acad. des scienses de St. Pétersbourg, VIIe Serie, T. VIII, No. 5*) aufmerksam gemacht hat. Die beiden ersten Componenten enthalten den Krümmungshalbmesser der Bahn, die dritte ausser diesem auch den Schmiegungshalbmesser. Für ebene Bahnen ist $\varphi_b^{(2)} = 0$; für die gleichförmige Kreisbewegung ist $\varphi_n^{(2)} = 0$. Damit ein Punkt eine Curve doppelter Krümmung beschreibe, muss die Schmiegungsebene sich continuirlich ändern und da die Beschleunigung in sie hineinfällt, auch diese. Damit dies eintrete, muss zu der Beschleunigung jeden Augenblick die binormale, unendlich kleine Beschleunigungscomponente $\varphi_b^{(2)}dt$ hinzutreten.

§. 2. Einige Beispiele sollen das Vorstehende erläutern.

1. Ein Punkt besitzt eine nach Grösse und Richtung constante Beschleunigung. In diesem Falle ist $\varphi^{(2)} = 0$, $\varphi_t^{(2)} = \varphi_n^{(2)} = \varphi_b^{(2)} = 0$. Die Bedingung $\varphi_n^{(2)} = 0$ liefert die Gleichung $\frac{1}{3}\frac{d\varrho}{ds} = \frac{dv}{dt} : \frac{v^2}{\varrho}$ oder, da $d\varrho$ das Bogenelement der Evolute ist und diese Curve mit der Bahn gleichen Contingenzwinkel $d\varepsilon$ besitzt, also $\frac{d\varrho}{ds} = \frac{d\varrho : d\varepsilon}{ds : d\varepsilon} = \frac{\varrho_1}{\varrho}$ ist, wenn ϱ_1 den Krümmungshalbmesser der Evolute bezeichnet:

$$\frac{1}{3}\frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{dv}{dt} : \frac{v^2}{\varrho}.$$

Der bewegliche Punkt beschreibt in Folge der constanten Beschleunigung eine Parabel, deren Diameter die Richtung der Beschleunigung besitzen. Bildet nun diese mit der Normalen der Parabel den Winkel ϑ, so ist $\frac{dv}{dt} = \varphi \sin\vartheta$, $\frac{v^2}{\varrho} = \varphi \cos\vartheta$ und erhält man mithin

$$tg\,\vartheta = \frac{1}{3}\frac{\varrho_1}{\varrho},$$

d. h. bei jeder Parabel schneidet der durch den Curvenpunkt laufende Durchmesser auf einem im Krümmungsmittelpunkte auf der Normalen errichteten Perpendikel von dessem Fusspunkte aus ein Drittel des Krümmungshalbmessers der Evolute der Parabel ab.

2. Ein Punkt besitzt eine Beschleunigung, welche fortwährend nach einem festen Centrum C gerichtet und seinem Abstande von diesem proportional ist, welches ist seine Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ der zweiten Ordnung?

Es sei (Fig. 154.) C das feste Centrum, $MC = r$, $M'C = r + dr$, $M\Phi = \varphi = \varepsilon r$, $M'\Phi' = \varphi + d\varphi = \varepsilon(r + dr)$. Zieht man durch M' die Linie $M'\Phi$ parallel und gleich φ, so stellt $\Phi\Phi'$ die Elementarbeschleunigung zweiter Ordnung $\varphi^{(2)}dt$ dar und ist folglich $\varphi^{(2)} = \frac{\Phi\Phi'}{dt}$. Das Dreieck $M'\Phi\Phi'$ ist aber ähnlich CMM', weil zwei Seitenpaare einander proportional sind und der von ihnen eingeschlossene Winkel in beiden derselbe ist. Daher ist $\Phi\Phi'$ parallel der Tangente in M. Der bewegliche Punkt besitzt daher nur tangentielle Beschleunigung zweiter Ordnung und zwar liefern dieselben Dreiecke $\varphi^{(2)}dt : \varepsilon r = ds : r$, d. h. $\varphi^{(2)} = \varepsilon v$. Man hat also, da $\varphi_b^{(3)}$ für alle ebenen Bewegungen Null ist:

Fig. 154.

$$\varphi^{(2)} = \varphi_t^{(2)} = \varepsilon v, \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{v^3}{\varrho^2} + \varepsilon v$$

$$3\frac{dv}{dt} - \frac{v^2}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds} = 0\,.$$

Der Punkt beschreibt eine Ellipse um C als Mittelpunkt; wenn ϱ_1 den Krümmungshalbmesser der Evolute bedeutet, so wird $\frac{d\varrho}{ds} = \frac{\varrho_1}{\varrho}$. Ferner ist $\varphi_t = \frac{dv}{dt}$, $\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho}$ und wenn man wieder mit δ den Winkel bezeichnet, den die Normal mit dem Diameter des Punktes M bildet, so hat man $tg\,\delta = \frac{dv}{dt} : \frac{v^2}{\varrho}$ und mit Hülfe dieser Relation ergibt die letzte Gleichung

$$tg\,\delta = \tfrac{1}{3}\frac{\varrho_1}{\varrho}\,,$$

welche den Krümmungshalbmesser der Evolute der Ellipse liefert, ähnlich wie bei Nr. 1.

Man kann von der vorliegenden Aufgabe zur vorhergehenden zurückgehen, wenn man r ins Unendliche wachsen und ε Null werden lässt, aber so, dass φ constant bleibt. Der Mittelpunkt der Ellipse rückt ins Unendliche, es wird $\varphi^{(2)} = 0$ u. s. f.

Kennt man überhaupt für irgend eine Bewegung $\varphi_n^{(2)}$, so kann man das Verhältniss der Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ für die Evolute der Bahn und die Bahn selbst finden. Es ist nämlich, wenn δ wie oben den Winkel bedeutet, den die Beschleunigung φ mit der Normalen der Bahn bildet,

$$\varphi_n^{(2)} = \frac{v}{\varrho}\frac{dv}{dt}\left(3 - \frac{\varrho_1}{\varrho}\,tg\,\delta\right),$$

mithin

$$\tfrac{1}{3}\frac{\varrho_1}{\varrho} = \left(\frac{v}{\varrho}\frac{dv}{dt} - \tfrac{1}{3}\varphi_n{}^2\right)cotg\,\delta\,.$$

3. Ein Punkt besitzt eine nach einem festen Centrum F (s. Fig. 7!) gerichtete, dem Quadrate des Abstandes von demselben umgekehrt

proportionale Beschleunigung erster Ordnung, welches ist seine Beschleunigung zweiter Ordnung?

Nach Cap. I, §. 3., S. 188 ist die Beschleunigung $\varphi = \frac{c}{b^2} \cdot 2\,a\omega$ und also der Geschwindigkeit $2\,a\omega$ des Punktes H proportional und der Richtung nach um $\frac{1}{2}\pi$ von dieser verschieden. Daher ist die gesuchte Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ der zweiten Ordnung des Punktes M proportional der Beschleunigung des Punktes H, gleichfalls um $\frac{1}{2}\pi$ umgedreht. Der Punkt H ist ein Punkt eines Systems, welches um F rotirt und in welchem M eine relative Bewegung längs des Radiusvectors FM besitzt. Der Punkt H besitzt daher eine Tangentialbeschleunigung senkrecht zu MF und eine Normalbeschleunigung längs MF. Um die erstere zu bestimmen, müssen wir die Winkelbeschleunigung des Systems mit $2\,a$ multipliciren; die Normalbeschleunigung ist $2\,\omega^2 a$. Um aber die Winkelbeschleunigung des Systems zu finden, dividiren wir die Componente des mit M zusammenfallenden Systempunktes, welche senkrecht zu MF ist, durch r. Nun besteht die gesammte Beschleunigung dieses Systempunktes aus der absoluten Beschleunigung von M und dessen relativer Beschleunigung im entgegengesetzten Sinne genommen nebst der zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung. Die beiden ersteren sind längs MF gerichtet und liefern also keinen Beitrag zu der hier gesuchten Grösse, die letztere aber ist $2\,\omega \cdot v_r$, senkrecht zu MF und entgegengesetzt gerichtet mit der Geschwindigkeit ωr. Die relative Geschwindigkeit v_r von M ergibt sich mit Hülfe des Dreiecks $MM'Q$, nämlich $v_r = \frac{M'Q}{dt} = \frac{MQ}{dt} \cdot tg\,(M'MQ) = \frac{MQ}{dt}\,tg\,\beta$, wenn β den Winkel bedeutet, den die Normale in M mit dem Radiusvector MF bildet. Da nun $MQ = r\omega\,dt$ ist, so wird $v_r = \omega r\,tg\,\beta$ und folglich die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung $2\,\omega^2 r\,tg\,\beta$. Sie liefert daher für die Winkelbeschleunigung des Systems $2\,\omega^2\,tg\,\beta$ und hiermit die Tangentialbeschleunigung von H gleich $4\,\omega^2 a\,tg\,\beta$. Die Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ zweiter Ordnung des Punktes M hat demnach die Componenten: längs des Radiusvectors FM gleich $4\,\frac{ac}{b^2}\,tg\,\beta \cdot \omega^2$ und senkrecht dazu im entgegengesetzten Sinne von ωr, gleich $\frac{2\,ac}{b^2}\,\omega^2$. Indem wir die Projectionssumme dieser Componenten für die Tangente und Normale von M bilden, erhalten wir

$$\varphi_t^{(2)} = 4\,\frac{ac}{b^2}\,\sin\beta \cdot \omega^2 - 2\,\frac{ac}{b^2}\,\cos\beta \cdot \omega^2, \quad \varphi_n^{(2)} = -\,6\,\frac{ac}{b^2}\,\sin\beta \cdot \omega^2, \quad \varphi_b^{(2)} = 0\,.$$

4. Ein Punkt beschreibt mit constanter Geschwindigkeit v_0 eine Schraubenlinie auf einer beliebigen Cylinderfläche, welches sind die Componenten seiner Beschleunigung zweiter Ordnung?

Da v constant ist, so erhält man

$$\varphi_t^{(2)} = -\,\frac{v_0^3}{\varrho^2}, \quad \varphi_n^{(2)} = -\,\frac{v_0^3}{\varrho^2} \cdot \frac{d\varrho}{ds}, \quad \varphi_b = \frac{v_0^3}{\varrho r}\,.$$

Ist nun ds_0 das Bogenelement und ϱ_0 der Krümmungshalbmesser des zu den Erzeugungslinien senkrechten ebenen Cylinderschnittes und β der Neigungswinkel der Schraubenlinie gegen die Erzeugungslinie, so wird

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sin^2\beta}, \quad r = \frac{\varrho_0}{\sin\beta\,\cos\beta}\ ^{*)}, \quad d\varrho = \frac{d\varrho_0}{\sin^2\beta}, \quad ds = \frac{ds_0}{\sin\beta}$$

$$\frac{d\varrho}{ds} = \frac{1}{\sin\beta} \cdot \frac{d\varrho_0}{ds_0} = \frac{1}{\sin\beta} \cdot \frac{\varrho_1}{\varrho_0},$$

*) Vgl. meine „Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung" S. 83.

wenn ϱ_1 den Krümmungshalbmesser der Evolute jenes Cylinderschnitts bedeutet. Hierdurch gelangt man zu den Formeln

$$\varphi_t^{(2)} = -\frac{v_0^3}{\varrho_0^2}\cdot sin^4\beta, \quad \varphi_n^{(2)} = -\frac{v_0^3}{\varrho_0^3}\cdot\varrho_1 sin^3\beta, \quad \varphi_b = \frac{v_0^3}{\varrho_0^2}\cdot sin^3\beta\, cos\,\beta.$$

Die Grösse $v_0\, sin\,\beta$ ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Projection des beweglichen Punktes auf den Cylinderschnitt bewegt. Bezeichnen wir sie mit w_0, so gehen die Formeln über in

$$\varphi_t^{(2)} = -\frac{w_0^3}{\varrho_0^2}\, sin\,\beta, \quad \varphi_n^{(2)} = -\frac{w_0^3}{\varrho_0^3}\varrho_1, \quad \varphi_b = \frac{w_0^3}{\varrho_0^2}\, cos\,\beta$$

und sind $-\frac{w_0^3}{\varrho_0^2}$ und $-\frac{w_0^3}{\varrho_0^3}$ die Werthe von $\varphi_t^{(2)}$, $\varphi_n^{(2)}$, welche der Projectionsbewegung in dem Cylinderschnitt entsprechen.

Ist der Cylinder ein Kreiscylinder, so ist $\varrho_1 = 0$, also $\varphi_n^{(2)} = 0$.

§. 3. Für ebene Curven besteht zwischen der Normalcomponenten $\varphi_n^{(2)}$ der Beschleunigung zweiter Ordnung und der Schmiegungsparabel, d. h. der Parabel, welche die Curve vierpunktig berührt, ein inniger Zusammenhang. Wie sich §. 2., No. 1. ergab, bildet bei jeder Parabel der Diameter mit der Normalen seines Endpunktes einen Winkel δ, dessen Tangente gleich dem dritten Theile des Verhältnisses vom Krümmungshalbmesser der Parabelevolute zum Krümmungshalbmesser der Parabel ist. Die Schmiegungsparabel hat nun mit der Curve zwei aufeinanderfolgende Krümmungskreise, mithin auch zwei aufeinanderfolgende Krümmungsmittelpunkte und hat also ihre Evolute zwei Punkte oder ein Bogenelement mit der Evolute jener gemein. Da eine Curve und ihre Evolute gleichen Contingenzwinkel besitzen, so haben die Evolute der Schmiegungsparabel und der Curve auch gleichen Krümmungshalbmesser ϱ_1. Daher bildet der Diameter der Schmiegungsparabel mit der Normalen der Curve, welcher sie sich anschmiegt, einen Winkel δ, für welchen $tg\,\delta = \frac{1}{3}\frac{\varrho_1}{\varrho}$ ist. Es gibt, nebenbei bemerkt, eine ganze Schaar Kegelschnitte, welche von derselben Parabel in demselben Punkte vierpunktig berührt werden, weil ein Kegelschnitt erst durch fünf Punkte bestimmt ist. Nach §. 2., No. 2. besteht die Gleichung für δ auch für Ellipsen und Hyperbeln, wenn δ von dem Durchmesser mit der Normalen gebildet wird. Daher ist für alle Kegelschnitte der Schaar, welche von einer Parabel vierpunktig berührt werden, der Diameter des Berührungspunktes gemeinschaftlich und liegen also die Mittelpunkte aller dieser Kegelschnitte in gerader Linie, nämlich auf ihm. Nun haben wir, wenn β den Winkel bedeutet, den die Beschleunigung der ebenen Bewegung irgend eines Punktes mit der Normalen seiner Bahn bildet:

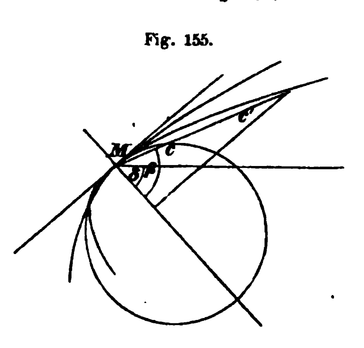
$$\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho}, \quad \varphi_t = \frac{dv}{dt} = \varphi_n\, tg\,\beta, \quad tg\,\delta = \frac{1}{3}\frac{\varrho_1}{\varrho},$$

und wenn man diese Werthe in die Formel $\varphi_n^{(2)} = 3\frac{v}{\varrho}\frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{\varrho^2}\frac{\varrho_1}{\varrho}$ einführt, ergibt sich

$$\varphi_n^{(2)} = \frac{3\,\varphi_n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varrho}}\,(tg\,\beta - tg\,\delta) = \frac{3\,\varphi_n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varrho}} \cdot \frac{\sin(\beta - \delta)}{\cos\beta \cdot \cos\delta}.$$

Die Richtung der Beschleunigung φ bestimmt nun in dem Krümmungskreise und in der Schmiegungsparabel zwei Sehnen, c, c' (Fig. 155.), durch welche sich die rechte Seite dieser Gleichung umgestalten lässt. Für c fanden wir bereits Cap. I, §. 11. die Gleichung $v^2 = \frac{1}{2}\,c\varphi$; für c' wollen wir jetzt die betreffende Relation suchen. Denkt man sich die Schmiegungsparabel von einem Punkte beschrieben, der von dem Berührungspunkte ausgehend in der Richtung der Tangente die Geschwindigkeit a hat und in der Richtung des Diameters von der constanten Beschleunigung α afficirt wird, so hätte man für den Diameter und die Tangente als x- und y-Axen: $y = at$, $x = \frac{1}{2}\alpha t^2$, also $y^2 = \frac{2a^2}{\alpha}x$;

Fig. 155.



es ist aber nach Cap. I, §. 11. $a^2 = \frac{1}{2}\,c\alpha$, mithin wird $y^2 = cx$, oder da $c = 2\,\varrho\,\cos\delta$ ist: $y^2 = 2\,\varrho\,\cos\delta \cdot x$ die Gleichung der Parabel. Nun seien x, y die Coordinaten des Endpunktes der Sehne c', welche die Beschleunigung φ in der Schmiegungsparabel bestimmt; dann ist

$$\frac{c'}{y} = \frac{\cos\delta}{\sin(\beta - \delta)}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\cos\beta}{\sin(\beta - \delta)},$$

also, wenn man hieraus x entnimmt und in die Parabelgleichung einführt

$$y = 2\,\varrho\,\frac{\cos\delta\,\cos\beta}{\sin(\beta - \delta)},$$

wodurch

$$c' = 2\,\varrho\,\frac{\cos^2\delta\,\cos\beta}{\sin^2(\beta - \delta)}$$

wird. Hiermit ergibt sich nun für $\varphi_n^{(2)}$:

$$\varphi_n^{(2)} = \frac{3\,\varphi_n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\,c'\cos\beta}} = 3\,\varphi_n\sqrt{\frac{\varphi}{\frac{1}{2}\,c'}},$$

oder mit Hülfe von $v^2 = \frac{1}{2}\,c\varphi$, $\varrho\varphi_n = v^2$:

$$\varphi_n^{(2)} = \frac{6\,v^3}{\varrho\sqrt{cc'}},$$

d. h. die Normalcomponente der Beschleunigung zweiter Ordnung der ebenen Bewegung eines Punktes ist der sechsfache Cubus der Geschwindigkeit, dividirt durch den Krümmungshalbmesser und das geometrische Mittel aus den Sehnen, welche die Richtung der Beschleunigung im Krümmungskreise und der Schmiegungsparabel bestimmt.

Den in der vorstehenden Untersuchung vorkommenden Diameter der Schmiegungsparabel nennt Abel Transon (Liouville, *Journal de mathém. T. VI.*) die Deviationsaxe. Da nämlich die Normale die der Tangente parallelen Sehnen des Krümmungskreises, jener Diameter aber die der Tangente parallelen Sehnen der Schmiegungsparabel halbirt, so gibt die Tangente des Winkels δ ein Mass für die Abweichung des Curvenpunktes von der Schmiegungsparabel an, wenn diese Abweichung auf einer der Tangente parallelen und ihr unendlich nahen Geraden geschätzt wird

§. 4. Für eine geradlinige Bewegung reducirt sich $\varphi^{(2)}$ auf $\varphi_t^{(2)} = \frac{d^3r}{dt^3}$. Projicirt man daher eine Bewegung auf eine Axe, etwa die x-Axe eines Coordinatensystems, so wird $\frac{d^3x}{dt^3}$ die Beschleunigung zweiter Ordnung $\varphi_x^{(2)}$ der Projectionsbewegung darstellen. Zugleich ersieht man, dass sie die Projection der Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ der Hauptbewegung auf diese Axe ist. Denn das Dreieck $\Phi M'\Phi'$ (Fig. 153.) liefert in der Projection für $\Phi\Phi'$ das Differential $d\varphi_x$. Bildet also $\Phi\Phi'$ mit der Projectionsaxe den Winkel α, so hat man

$$d\varphi_x = \Phi\Phi' \cdot \cos\alpha, \quad \frac{d\varphi_x}{dt} = \varphi_x^{(2)} = \frac{\Phi\Phi'}{dt} \cdot \cos\alpha = \varphi^{(2)} \cdot \cos\alpha.$$

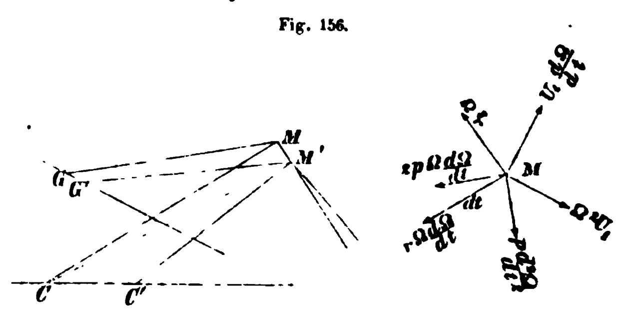
Projicirt man daher die Bewegung auf drei rechtwinklige oder schiefe Coordinatenaxen, so erhält man

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \varphi_x^{(2)}, \quad \frac{d^3y}{dt^3} = \varphi_y^{(2)}, \quad \frac{d^3z}{dt^3} = \varphi_z^{(2)}$$

als Gleichungen der Bewegung, wenn $\varphi_x^{(2)}$, $\varphi_y^{(2)}$, $\varphi_z^{(2)}$ als Functionen von t, x, y, z, v_x, v_y, v_z, φ_x, φ_y, φ_z gegeben sind. Ihre Integration führt neue willkürliche Constanten ein, welche durch die Anfangslage die Anfangsgeschwindigkeit und die Anfangsbeschleunigung bestimmt werden.

§. 5. Wir wollen jetzt die Beschleunigung zweiter Ordnung $\varphi^{(2)}$ der Punkte eines ebenen Systems bestimmen, welches sich in seiner

Fig. 156.



Ebene bewegt. Nach Cap. VI, §. 4. hat die Beschleunigung φ erster Ordnung eines solchen Punktes M zur Zeit t zwei Componenten, eine

centripetale, nach dem Beschleunigungscentrum G (Fig. 156.) gerichtete $\Omega^2 p$ und eine zu dieser senkrechte $\frac{d\Omega}{dt}\, p$, dem Sinne von Ω folgende, wobei p den Abstand MG des Punktes vom Beschleunigungscentrum bedeutet. Zur Zeit $t + dt$ sei G' das Beschleunigungscentrum des Systems und M' die Lage des Systempunktes, dann sind seine Beschleunigungscomponenten ebenso $(\Omega^2 + d\cdot\Omega^2)\,(p + dp)$ in der Richtung $M'G'$ und $\left(\frac{d\Omega}{dt} + d\,\frac{d\Omega}{dt}\right)(p + dp)$ senkrecht dazu. Betrachten wir zunächst die Componenten von $\varphi^{(2)}$, welche aus der centripetalen Beschleunigung entspringen.

Die centripetale Beschleunigung $(\Omega^2 + d\cdot\Omega^2)\,(p + dp)$ ist proportional der Linie $M'G' = p + dp$ und längs dieser gerichtet; wir zerlegen sie nun in drei Componenten parallel den drei übrigen Seiten des Vierecks $MGG'M'$. Die Zerlegung erfolgt durch ein diesem ähnliches Viereck, dessen Seiten durch Multiplication mit $\Omega^2 + d\cdot\Omega^2$ aus den Seiten desselben gefunden werden. Mit Rücksicht auf den Sinn der Linien, wie er in einem geschlossenen Polygon auftritt, hat man daher

$$(\Omega^2 + d\cdot\Omega^2)\,(p + dp)$$
$$= \mathit{Res.}\left\{(\Omega^2 + d\cdot\Omega^2)\,p,\quad (\Omega^2 + d\cdot\Omega^2)\cdot\overline{GG'},\quad (\Omega^2 + d\cdot\Omega^2)\cdot\overline{M'M}\right\},$$

resp. im Sinne MG, GG' und $M'M$ zu nehmen. Die Beschleunigung $(\Omega^2 + d\cdot\Omega^2)\,p$ zerfällt aber in $\Omega^2 p$, welches die Centripetalbeschleunigung zur Zeit t ist, und $p\cdot d\cdot\Omega^2$. Daher sind

$$p\cdot d\cdot\Omega^2,\quad (\Omega^2 + d\cdot\Omega^2)\,\overline{GG'},\quad (\Omega^2 + d\cdot\Omega^2)\,\overline{M'M}$$

die Componenten der Elementarbeschleunigung zweiter Ordnung, welche aus $\Omega^2 p$ entspringt und liefern als Componenten von $\varphi^{(2)}$, wenn wir die Wechselgeschwindigkeit des Beschleunigungscentrums, nämlich $\frac{\overline{GG'}}{dt} = U_1$ setzen und bedenken, dass $\overline{MM'} = \overline{CM}\cdot\Omega = r\Omega$ ist, indem wir alle drei mit dt dividiren und für die Grenze reduciren, $2\,p\Omega\,\frac{d\Omega}{dt}$ im Sinne MG, $\Omega^2 U_1$ parallel der Tangente der Curve (G) der Beschleunigungscentra, $\Omega^3 r$ parallel der Tangente der Bahn und der Geschwindigkeit $r\Omega$ entgegengesetzt.

In ähnlicher Weise behandeln wir nun auch die aus der zu MG senkrechten Componenten von φ entspringenden Componenten von $\varphi^{(2)}$. Es ist nämlich aus denselben Gründen

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} + d\cdot\frac{d\Omega}{dt}\right)(p + dp)$$
$$= \mathit{Res.}\left\{\left(\frac{d\Omega}{dt} + d\cdot\frac{d\Omega}{dt}\right)p,\quad \left(\frac{d\Omega}{dt} + d\,\frac{d\Omega}{dt}\right)\overline{GG'},\quad \left(\frac{d\Omega}{dt} + d\,\frac{d\Omega}{dt}\right)\overline{M'M}\right\}$$

und sind daher

$$d \cdot \frac{d\Omega}{dt} \cdot p, \quad \left(\frac{d\Omega}{dt} + d\,\frac{d\Omega}{dt}\right) \overline{GG'}, \quad \left(\frac{d\Omega}{dt} + d\,\frac{d\Omega}{dt}\right) \cdot M'M$$

die betreffenden Elementarcomponenten dieser Bestandtheile von $\varphi^{(2)}$. Dividiren wir mit dt und verfahren wie vorher, so erhalten wir noch folgende drei weitere Componenten von $\varphi^{(2)}$, deren Richtung und Sinn leicht aus der Richtung und dem Sinne von $\frac{d\Omega}{dt}\,p$ beurtheilt werden kann, nämlich: $\frac{d^2\Omega}{dt^2} \cdot p$, senkrecht zu MG, $U_1 \frac{d\Omega}{dt}$ normal zur Curve der Centra G, $r\Omega\frac{d\Omega}{dt}$ längs MC.

Beziehen wir den Systempunkt auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y, dessen x-Axe die Richtung von U_1, dessen y-Axe senkrecht dazu ist, beide positiv genommen im Sinne von U_1 und $U_1\frac{d\Omega}{dt}$ und bezeichnen wir die Coordinaten des Momentancentrums C in Bezug auf dieses System mit x_1, y_1, so sind die Richtungscosinusse der sechs vorstehenden Componenten von $\varphi^{(2)}$ gegen die Axen der Reihe nach

$$-\frac{x}{p},\ -\frac{y}{p};\ 1,\ 0;\ -\frac{y-y_1}{r},\ \frac{x-x_1}{r};\ \frac{y}{p},\ -\frac{x}{p};\ 0,\ 1;$$
$$-\frac{x-x_1}{r},\ -\frac{y-y_1}{r}$$

und daher die Componenten X, Y von $\varphi^{(2)}$ parallel diesen Axen:

$$X = -3\,\Omega\frac{d\Omega}{dt}\cdot x + \frac{d^2\Omega}{dt^2}\cdot y - \Omega^3(y-y_1) + \Omega\frac{d\Omega}{dt}x_1 + U_1\Omega^2$$

$$Y = -3\,\Omega\frac{d\Omega}{dt}\cdot y - \frac{d^2\Omega}{dt^2}\cdot x + \Omega^3(x-x_1) + \Omega\frac{d\Omega}{dt}y_1 + U_1\frac{d\Omega}{dt}$$

Die Systempunkte, deren Beschleunigungscomponenten zweiter Ordnung parallel der Tangente und Normale der Curve (G) der Beschleunigungscentra respective verschwinden, liegen auf den beiden Geraden

$$3\,\Omega\frac{d\Omega}{dt}\,x + \left(\Omega^3 - \frac{d^2\Omega}{dt^2}\right)y - \left(\Omega\frac{d\Omega}{dt}\cdot x_1 + \Omega^3\ y_1 + U_1\Omega^2\right) = 0$$

$$\left(\Omega^3 - \frac{d^2\Omega}{dt^2}\right)x - 3\,\Omega\frac{d\Omega}{dt}\,y + \left(-\Omega^3\cdot x_1 + \Omega\frac{d\Omega}{dt}y_1 + U_1\frac{d\Omega}{dt}\right) = 0,$$

welche aufeinander senkrecht stehen. Es ergibt sich hieraus die Existenz eines Beschleunigungscentrums G_2 der zweiten Ordnung, dessen Coordinaten x_2, y_2 diesen Gleichungen zugleich genügen. Setzt man dieselben in diese Gleichungen ein und addirt letztere zu den obigen für X, Y, so ergeben sich diese Grössen unter der etwas einfacheren Form

$$X = -3\,\Omega\frac{d\Omega}{dt}\,\xi + \left(\frac{d^2\Omega}{dt^2} - \Omega^3\right)\eta$$

$$Y = -3\,\Omega\frac{d\Omega}{dt}\,\eta - \left(\frac{d^2\Omega}{dt^2} - \Omega^3\right)\xi,$$

wo $\xi = x - x_2$, $\eta = y - y_2$ die Coordinaten von M in Bezug auf ein dem System (xy) paralleles Coordinatensystem $(\xi\eta)$ in G sind und wenn man die Entfernung des Systempunktes M von G_2 mit p_2 bezeichnet, so werden die Neigungscosinusse der Linie MG_2 und der auf ihr senkrechten Geraden, letztere dem Sinne nach mit Ω harmonirend genommen: $-\frac{\xi}{p_2}$, $-\frac{\eta}{p_2}$; $\frac{\eta}{p_2}$, $-\frac{\xi}{p_2}$ und sind daher $-3\Omega\frac{d\Omega}{dt}\cdot\xi$ und $-3\Omega\frac{d\Omega}{dt}\eta$ die Componenten einer von M nach G_2 gerichteten Beschleunigungscomponente zweiter Ordnung $3\Omega\frac{d\Omega}{dt}\cdot p_2 = 3p_2\frac{d\cdot\frac{1}{2}\Omega^2}{dt}$, sowie $\left(\frac{d^2\Omega}{dt^2} - \Omega^3\right)\eta$ und $-\left(\frac{d^2\Omega}{dt^2} - \Omega^3\right)\xi$ die einer anderen zu MG_2 senkrechten Componenten $p_2\left(\frac{d^2\Omega}{dt^2} - \Omega^3\right)$. Man kann daher den Satz aufstellen:

Die Beschleunigung zweiter Ordnung eines Systempunktes im unveränderlichen, in seiner Ebene sich bewegenden ebenen System zerfällt in jedem Momente in zwei Componenten, von denen die eine nach dem Beschleunigungscentrum der zweiten Ordnung hin gerichtet, die andere aber zu ihr senkrecht ist und dem Sinne nach mit der Winkelgeschwindigkeit des Systems harmonirt. Beide sind dem Abstande des Punktes vom Beschleunigungscentrum proportional und werden erhalten, die eine, indem man diesen mit der dreifachen Derivirten des halben Quadrates der Winkelgeschwindigkeit, die andere, indem man ihn mit dem Ueberschusse der zweiten Derivirten der Winkelgeschwindigkeit über den Cubus derselben multiplicirt. Die Beschleunigung der zweiten Ordnung selbst ist jenem Abstande gleichfalls proportional, also auf concentrischen Kreisen um das Beschleunigungscentrum der zweiten Ordnung constant und unter constantem Winkel gegen die Radien dieser Kreise geneigt.

Ist die Winkelgeschwindigkeit des Systems constant, so reducirt sich die Gesammtbeschleunigung zweiter Ordnung auf $-p_2\Omega^3$, senkrecht zum Abstande MG_2 und dem Sinne von Ω entgegengesetzt.

§. 6. Wir wollen jetzt die Normal- und Tangentialcomponente $\varphi_n^{(2)}$, $\varphi_t^{(2)}$ der Beschleunigung zweiter Ordnung bilden. Um dies bequemer auszuführen, bilden wir zunächst die Componenten derselben parallel zur Tangente und Normalen der Curve der Momentancentra. Betrachten wir diese Geraden als Axen der x und y, nennen x_1, y_1 die Coordinaten des Beschleunigungscentrums G erster Ordnung und λ den

Winkel, welchen die Tangente des Ortes (G) mit der Tangente der Curve (C) bildet, so sind die Richtungscosinusse für die früheren sechs Componenten der Reihe nach jetzt: $-\frac{x-x_1}{p}$, $-\frac{y-y_1}{p}$; $\cos\lambda$, $\sin\lambda$; $-\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$; $\frac{y-y_1}{p}$, $-\frac{x-x_1}{p}$; $-\sin\lambda$, $\cos\lambda$; $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$. Wir erhalten daher für jene Componenten, die wir wieder X, Y nennen:

$$X = -3\frac{d\cdot\frac{1}{2}\Omega^2}{dt}x + \left(\frac{d^2\Omega}{dt^2} - \Omega^3\right)y + \frac{d\cdot\Omega^2}{dt}x_1 - \frac{d^2\Omega}{dt^2}y_1$$
$$+ U_1\Omega^2\cos\lambda - U_1\frac{d\Omega}{dt}\sin\lambda$$

$$Y = -3\frac{d\cdot\frac{1}{2}\Omega^2}{dt}y - \left(\frac{d^2\Omega}{dt^2} - \Omega^3\right)x + \frac{d\cdot\Omega^2}{dt}y_1 + \frac{d^2\Omega}{dt^2}x_1$$
$$+ U_1\Omega^2\sin\lambda + U_1\frac{d\Omega}{dt}\cos\lambda.$$

Nun hat die Normale CM der Bahn des Systempunktes gegen die Axen die Richtungscosinusse $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, die Tangente aber $-\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$; wir erhalten daher:

$$\varphi_n^{(2)} = X\frac{x}{r} + Y\frac{y}{r} = 3\frac{d\cdot\frac{1}{2}\Omega^2}{dt}r + A\frac{x}{r} + B\frac{y}{r}$$

$$\varphi_t^{(2)} = -X\frac{y}{r} + Y\frac{x}{r} = -\left(\frac{d^2\Omega}{dt^2} - \Omega^3\right)r - A\frac{y}{r} + B\frac{x}{r}.$$

wo

$$A = \frac{d\cdot\Omega^2}{dt}x_1 - \frac{d^2\Omega}{dt^2}y_1 + U_1\Omega^2\cos\lambda - U_1\frac{d\Omega}{dt}\sin\lambda$$

$$B = \frac{d\cdot\Omega^2}{dt}y_1 + \frac{d^2\Omega}{dt^2}x_1 + U_1\Omega^2\sin\lambda + U_1\frac{d\Omega}{dt}\cos\lambda.$$

Die Systempunkte, deren Normalbeschleunigung zweiter Ordnung verschwindet, liegen auf dem Kreise

$$3\cdot\frac{d\cdot\frac{1}{2}\Omega^2}{dt}(x^2+y^2) + Ax + By = 0,$$

welcher durch das Momentancentrum geht, dessen Mittelpunkt die Coordinaten

$$x = -\frac{1}{6}\frac{A}{\frac{d\cdot\frac{1}{2}\Omega^2}{dt}}, \quad y = -\frac{1}{6}\frac{B}{\frac{d\cdot\frac{1}{2}\Omega^2}{dt}}$$

besitzt und dessen Radius

$$\frac{1}{6}\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\frac{d\cdot\frac{1}{2}\Omega^2}{dt}}$$

ist.

Die Systempunkte, deren Tangentialbeschleunigung zweiter Ordnung zur Zeit t Null ist, liegen auf einem zweiten Kreise

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dt^2} - \Omega^3\right)(x^2 + y^2) + Bx - Ay = 0$$

von den Mittelpunktscoordinaten

$$x = -\tfrac{1}{2}\frac{B}{\frac{d^2\Omega}{dt^2} - \Omega^3}, \quad y = \tfrac{1}{2}\frac{A}{\frac{d^2\Omega}{dt^2} - \Omega^3}$$

und dem Radius

$$\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\frac{d^2\Omega}{dt^2} - \Omega^3}.$$

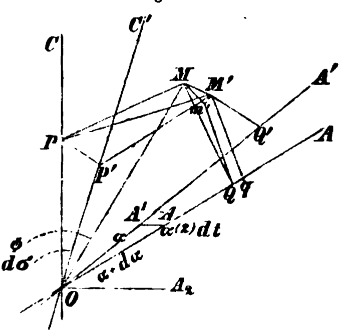
Auch dieser Kreis geht durch das Momentancentrum. Ausser dem Momentancentrum schneiden sich beide Kreise noch in dem Beschleunigungscentrum $(x_2 y_2)$ der zweiten Ordnung, da für dieses sowohl $\varphi_n^{(2)}$ als $\varphi_t^{(2)}$ verschwindet.

§. 7. Man kann ganz in derselben Weise, wie Cap. VI, §. 6. die vorstehenden Untersuchungen vollständig analytisch einkleiden und die Existenz des Beschleunigungscentrums so darthun, dass man die Ausdrücke für $\frac{d^3x}{dt^3}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^3z}{dt^3}$ gleich Null setzt, wodurch man zur Bestimmung dieses Punktes drei lineare Gleichungen erhält. Zugleich ersieht man hieraus, dass für alle Ordnungen der Beschleunigung ein solches Centrum existirt.

Die vorstehenden Lehren können in ähnlicher Weise zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers der Evoluten ebener Curven dienen, wie die Lehren des Cap. VI zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers der Bahnen der Systempunkte führten.

§. 8. Wir bestimmen jetzt die Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ der zweiten Ordnung eines Punktes in einem unveränderlichen System, welches um einen Punkt rotirt. Die Beschleunigung φ der ersten Ordnung dieses Systempunktes M (Fig. 157.) zur Zeit t hat zwei Componenten, eine centripetale $\Omega^2 r$ in der Richtung von $MP = r$ senkrecht zur Momentanaxe C und eine andere αp, von der Winkelbeschleunigung α herrührende, senkrecht zur Ebene, welche durch M und die Axe A der Winkelbeschleunigung gelegt werden kann. Ebenso hat der bewegliche Punkt zur Zeit $t + dt$, wo er in M' sich befindet, diecentripetale Beschleunigung $(\Omega^2 + d \cdot \Omega^2)(r + dr)$ in der Richtung $M'P'$ senkrecht

Fig. 157.



zur Momentanaxe C' und die Componente $(\alpha + d\alpha)(p + dp)$, welche er der Winkelbeschleunigung $\alpha + d\alpha$ verdankt und welche senkrecht zur Ebene ist, die durch die Axe A' und den Punkt M' hindurchgeht. Von jeder der beiden Beschleunigungscomponenten rühren nun Bestandtheile der Beschleunigung zweiter Ordnung her; wir bestimmen sie einzeln und beginnen mit denjenigen, welche die centripetale Componente veranlasst.

Wir zerlegen hierzu die Beschleunigung $(\Omega^2 + d \cdot \Omega^2)\,\overline{M'P'}$ in drei Componenten, welche die Richtungen MP, PP', $M'M$ dreier Seiten des Vierecks $MPP'M'$ besitzen, längs dessen vierter Seite jene Beschleunigung selbst gerichtet ist. Diese Componenten sind, da diese Beschleunigung der Seite $M'P'$ proportional ist, zufolge des Satzes vom Polygon der Beschleunigungen den drei anderen Seiten proportional und sind $(\Omega^2 + d \cdot \Omega^2) \cdot \overline{MP}$, $(\Omega^2 + d \cdot \Omega^2) \cdot \overline{PP'}$, $-(\Omega^2 + d \cdot \Omega^2) \cdot \overline{MM'}$, wobei das Zeichen (—) vor der letzten andeuten soll, dass diese Componente mit dem Sinne der Geschwindigkeit $\Omega \cdot r$ entgegengesetzten Sinn hat. Nun ist $(\Omega^2 + d \cdot \Omega^2) \cdot \overline{MP} = \Omega^2 \cdot MP + 2\,\Omega d\Omega \cdot \overline{MP}$ und da $\Omega^2 \cdot MP$ die centripetale Beschleunigung zur Zeit t ist, so folgt, dass

$$2\,\Omega d\Omega \cdot \overline{MP}, \quad (\Omega^2 + d \cdot \Omega^2)\,\overline{PP'}, \quad -(\Omega^2 + d \cdot \Omega^2)\,\overline{MM'}$$

die Componenten der Elementarbeschleunigung zweiter Ordnung des Punktes M sind, welche von der centripetalen Beschleunigungscomponente $\Omega^2 \cdot r$ herrühren. Dividirt man sie mit dt, reducirt und berücksichtigt $MM' = r\Omega\, dt$, so liefern sie als Beschleunigungscomponenten zweiter Ordnung $2\,\Omega\,\frac{d\Omega}{dt} \cdot r$ längs r, $\Omega^2 \cdot \frac{\overline{PP'}}{dt}$ parallel PP' und $\Omega^3 r$ längs der Tangente der Bahn und entgegengesetzt der Geschwindigkeit. Die zweite dieser Componenten zerlegen wir weiter parallel zur Momentanaxe und senkrecht zu ihr. Ist nämlich $d\sigma$ der Winkel der Momentanaxen C, C', so zerfällt PP' in $\overline{OP} \cdot d\sigma$ und $d \cdot \overline{OP}$ und mithin wird, wenn $OP = h$ gesetzt wird, $\Omega^2\,\frac{\overline{PP'}}{dt}$ äquivalent $\Omega^2 h\,\frac{d\sigma}{dt}$ senkrecht zur Momentanaxe und parallel der Ebene CC', nämlich der Tangentenebene des Kegels aller Momentanaxen und $\Omega^2\,\frac{dh}{dt}$ parallel der Momentanaxe. Es ist aber h die Projection von OM auf C, $h + dh$ die von OM' auf C' und wenn also ψ der Winkel ist, den $OM = R$ mit C bildet, so wird $dh = d\,(R \cdot \cos\psi) = R \cdot d\cos\psi$. Dies Differential erhalten wir also folgendermassen. Die beiden Momentanaxen und der Stral OM' bestimmen auf einer um O in der Einheit der Entfernung beschriebenen Kugel ein sphärisches Dreieck $pp'm'$, in welchem $pp' = d\sigma$, $pm' = pm = \psi$, $p'm' = \psi + d\psi$, während der Winkel, welcher $p'm'$ gegenüberliegt, gleich dem Neigungswinkel ϑ der durch M und die Momentanaxe gehenden

Ebene gegen die Ebene von $d\sigma$ geneigt ist, weniger dem Winkel Ωdt. Daher hat man

$$\cos(\psi + d\psi) = \cos\psi\, d\sigma + \sin\psi\, d\sigma \cdot \cos(\vartheta - \Omega dt),$$

also, indem man reducirt,

$$d\cos\psi = \sin\psi\cos\vartheta \cdot d\sigma.$$

Hiermit wird $dh = R\sin\psi\cos\vartheta d\sigma = r\cos\vartheta d\sigma$ und hiermit die gesuchte Componente $\Omega^2\frac{dh}{dt} = \Omega^2 r\cos\vartheta\frac{d\sigma}{dt}$ und hat man also schliesslich folgende von der Centripetalbeschleunigung herrührende Componenten von $\varphi^{(2)}$, nämlich: $2\Omega\frac{d\Omega}{dt}r$ längs r, $\Omega^2 R\cos\psi\frac{d\sigma}{dt}$ senkrecht zur Momentanaxe und parallel der Tangentenebene des Kegels (C), $\Omega^2 r\cos\vartheta\frac{d\sigma}{dt}$ parallel zur Momentanaxe und $\Omega^3 r$ der Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet.

Die von der Winkelbeschleunigung veranlassten Bestandtheile von $\varphi^{(2)}$ ergeben sich folgendermassen. Der Winkelbeschleunigung α zur Zeit t verdankt der Systempunkt M eine Beschleunigung $\alpha \cdot MQ = \alpha p$ in der Richtung der Tangente an einen mit MQ um die Axe A der Winkelbeschleunigung beschriebenen Kreis übereinstimmenden Sinnes mit α. Der Winkelbeschleunigung $\alpha + d\alpha$, welche der Zeit $t + dt$ entspricht, verdankt er ebenso die Beschleunigung $(\alpha + d\alpha)\, M'Q'$, tangent an einen Kreis um A'. Nun ist aber $\alpha + d\alpha$ die Resultante von α und der Elementarwinkelbeschleunigung zweiter Ordnung $\alpha^{(2)}dt = \overline{AA'}\cdot dt$ und folglich ist auch die Beschleunigung $(\alpha + d\alpha)\,\overline{M'Q'}$ die Resultante der Beschleunigungen $\alpha\cdot\overline{M'q}$ und der Elementarbeschleunigung $\alpha^{(2)} M'R\, dt = \alpha^{(2)} q\, dt$, welche von Seiten der Grösse $\alpha^{(2)}$ ihm erwächst, wo $MR = q$ das Perpendikel von M' oder M auf die Axe A_2 der Beschleunigung zweiter Ordnung bedeutet, d. h. es besteht für die Zeit $t + dt$ die Gleichung

$$(\alpha + d\alpha)\,\overline{M'Q'} = Res.\left\{\alpha\cdot\overline{M'q},\quad \alpha^{(2)}\cdot q\,dt\right\}.$$

Die Beschleunigung $\alpha\cdot M'q$, welche der Punkt in der Lage M' zur Zeit $t + dt$ um die Axe A' erhält, hat die Richtung der Tangente eines um A mit dem Abstande $M'q$ beschriebenen Kreises und es ist $M'q$ von MQ verschieden, weil der Systempunkt sich während des Zeitelementes nicht um die Beschleunigungsaxe A, sondern um die Momentanaxe C dreht. Errichten wir nun auf der Axe A' eine Ebene senkrecht in einem beliebigen Punkte, etwa in Q, und projiciren $M'q$ auf sie als $m'Q$, so erhalten wir aus dem geschlossenen Polygon $QMm'M'qQ$, in welchem die Seiten $m'M'$, qQ parallel, gleich und von entgegengesetztem Sinne sind, indem wir $\alpha\cdot\overline{M'q}$ nach seinen Seiten zerlegen:

$$\alpha\cdot\overline{M'q} = Res.\left\{\alpha\cdot\overline{MQ},\quad \alpha\cdot\overline{Mm'}\right\}$$

und es ist Mm' die Projection von $r\Omega dt$ auf eine zur Axe der Winkel-

beschleunigung senkrechte Ebene. Bezeichnen wir sie mit $U_A dt$, so folgt jetzt, indem wir die so gewonnene Gleichung mit der obigen verbinden,

$$(\alpha + d\alpha) \cdot \overline{M'Q'} = Res. \left\{\alpha \cdot p, \quad \alpha U_A dt, \quad \alpha^{(2)} q dt\right\}.$$

Demnach sind $\alpha U_A dt$, $\alpha^{(2)} q dt$ die Componenten der Elementarbeschleunigung, welche der Punkt M der Winkelbeschleunigung verdankt und

$$\alpha U_A, \quad \alpha^{(2)} q$$

die entsprechenden endlichen Beschleunigungscomponenten. Von diesen ist αU_A senkrecht zu U_A in einem Sinne, den man findet, wenn U_A um $\frac{1}{2}\pi$ im Sinne von α sich in der zu A senkrechten Ebene umdreht. Den Inhalt vorstehender Untersuchung können wir in folgenden Satz zusammenfassen:

Während der Rotation eines unveränderlichen Systems um einen Punkt besitzt jeder Systempunkt eine Beschleunigung zweiter Ordnung, welche in folgende sechs Componenten zerfällt: 1. eine Componente $2\Omega \frac{d\Omega}{dt} r$ centripetal gerichtet gegen die Momentanaxe und gleich dem doppelten Produkte aus der Geschwindigkeit Ωr des Punktes und der Tangentialwinkelbeschleunigung $\frac{d\Omega}{dt}$ des Systems; 2. eine weitere $\Omega^2 R \cos\psi \frac{d\sigma}{dt} = \Omega \cdot R \cos\psi \cdot \Omega \frac{d\sigma}{dt}$, parallel zur Axe der Normalwinkelbeschleunigung und im Sinne dieser gerichtet, gleich dem Produkte aus der Winkelgeschwindigkeit, dem Abstande des Radius r vom Rotationscentrum des Systems und der Normalwinkelbeschleunigung $\Omega \frac{d\sigma}{dt} = \Omega'$. 3. eine fernere $\Omega^2 r \cos\vartheta \frac{d\sigma}{dt} = \Omega r \cdot \cos\vartheta \cdot \Omega \frac{d\sigma}{dt}$, parallel der Momentanaxe im Sinne der Linie, welche auf ihr Ω darstellt, gleich der Geschwindigkeit multiplicirt mit der Normalwinkelbeschleunigung und dem Cosinus der Neigung der durch die Momentanaxe und den Systempunkt gehenden Ebene gegen die Tangentenebene des Kegels der Momentanaxen; 4. eine Componente $\Omega^3 r$, der Geschwindigkeit des Systempunktes entgegengesetzt; 5. die Componente αU_A gleich dem Produkte aus der Winkelbeschleunigung und der Projection U_A der Geschwindigkeit Ωr auf eine zur Axe A der Winkelbeschleunigung senkrechte Ebene, deren Richtung und Sinn erhalten wird, wenn man die genannte Projection in dieser Ebene um $\frac{1}{2}\pi$ im Sinne von α umdreht, sowie endlich 6. die Componente $\alpha^{(2)} q$ gleich dem Produkte der

Winkelbeschleunigung zweiter Ordnung und dem Abstande des Systempunktes von deren Axe, senkrecht gerichtet gegen die Ebene, welche durch den Systempunkt und diese Axe geht.

Diè letztere Componente kann man wieder in zwei andere zerfällen, indem man $\alpha^{(2)}$ in zwei Componenten auflöst, eine tangentiale $\frac{d\alpha}{dt}$ um die Axe A und eine normale $\alpha \cdot \frac{d\mu}{dt}$, wenn $d\mu$ den Winkel der Axen A, A' bedeutet. Man erhält $p\frac{d\alpha}{dt}$ und $p_1 \alpha \frac{d\mu}{dt}$, unter p_1 den Abstand des Punktes von der Axe jener Normalcomponente der Winkelbeschleunigung zweiter Ordnung verstanden.

§. 9. Wir suchen jetzt die Componenten von $\varphi^{(2)}$ parallel dreien rechtwinkligen Coordinatenaxen. Die z-Axe sei die Momentanaxe, die x-Axe die Axe der Normalwinkelbeschleunigung und die y-Axe folglich die Normale der Kegelfläche der Momentanaxen. Die Richtungscosinusse für die centripetale Componente $2\,\Omega\frac{d\Omega}{dt}r = \frac{d\cdot\Omega^2}{dt}\cdot r$ sind dann $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$, 0 und daher ihre Componenten parallel den Coordinatenaxen $-\frac{d\cdot\Omega^2}{dt}\cdot x$, $-\frac{d\cdot\Omega^2}{dt}\cdot y$, 0; die Richtungscosinusse der zweiten der obigen sechs Componenten $\Omega^2 R\cos\psi\frac{d\sigma}{dt} = \Omega^2 UR\cos\psi$ sind 1, 0, 0; die der dritten: 0, 0, 1; für die vierte sind sie $+\frac{y}{r}$, $-\frac{x}{r}$, 0. Um die Bestandtheile zu finden, welche die fünfte Componente parallel den Axen liefert, zerlegen wir die Geschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung parallel den Axen und bestimmen, ähnlich wie Cap. IX, §. 2. das, was die einzelnen Partialcomponenten zur Bildung jener Grössen beitragen. Denn es lassen sich die dort durchgeführten Betrachtungen auf den vorliegenden ganz analogen Fall unmittelbar übertragen. Die Componenten von Ωr sind Ωy, $-\Omega x$, 0, die von α aber $\alpha_x = \Omega U$, $\alpha_y = 0$, $\alpha_z = \frac{d\Omega}{dt}$ (S. 407). Für α_x hat Ωx die Projection Null, Ωy ist seine eigene Projection auf die zu α_x senkrechte Ebene, es liefert also α_x in der Richtung der z-Axe den Bestandtheil $\Omega x\alpha_x = \Omega^2 Ux$; ebenso liefert α_z in den Richtungen der x und y die Glieder $-\Omega x\alpha_z = -\Omega\frac{d\Omega}{dt}x$ und $-\Omega y\alpha_z = -\Omega\frac{d\Omega}{dt}y$. Die sechste Componente endlich liefert, wenn $\alpha_x^{(2)}$, $\alpha_y^{(2)}$, $\alpha_z^{(2)}$ die Componenten von $\alpha^{(2)}$ in Bezug auf die Axen bedeuten, wie Cap. VII, §. 4., die Bestandtheile

$$\alpha_y^{(2)}\cdot z - \alpha_z^{(2)}\cdot y,\quad \alpha_z^{(2)}\cdot x - \alpha_x^{(2)}\cdot z,\quad \alpha_x^{(2)}\cdot y - \alpha_y^{(2)}\cdot x.$$

Die Grössen $\alpha_x^{(2)}$, $\alpha_y^{(2)}$, $\alpha_z^{(2)}$ ergeben sich durch Projection des aus α, $\alpha + d\alpha$ und $\alpha^{(2)}dt$ gebildeten Dreiecks. Man erhält nämlich zunächst $\alpha_x^{(2)}dt = d \cdot \alpha_x$, $\alpha_y^{(2)}dt = d \cdot \alpha_y$, $\alpha_z^{(2)}dt = d \cdot \alpha_z$ und weiter mit Hülfe von $\alpha_x = \Omega U$, $\alpha_y = 0$, $\alpha_z = \frac{d\Omega}{dt}$ zunächst unmittelbar $\alpha_x^{(2)} = \frac{d(\Omega U)}{dt}$, $\alpha_z^{(2)} = \frac{d^2\Omega}{dt^2}$; $\alpha_y^{(2)}$ aber muss direct bestimmt werden. Nun ersieht man aus Fig. 157, dass, weil α in der xz-Ebene liegt, die Projection von $\alpha^{(2)}dt$ auf die y-Axe gleich der Projection von $\alpha + d\alpha$ auf diese Axe ist. Es ist diese Grösse daher mit dem Sinus des Winkels zu multipliciren, den ihre Richtung mit der xz-Ebene bildet. Ist nun di der Winkel zwischen den Richtungen von α und $\alpha + d\alpha$, $\varkappa$ aber der Winkel, den die Ebene dieser beiden Linien mit der xz-Ebene bildet, so wird $di \cdot \sin \varkappa$ der gesuchte Sinus, also $\alpha_y^{(2)}dt = (\alpha + d\alpha)\, di \cdot \sin \varkappa$, mithin $\alpha_y^{(2)} = \alpha \sin \varkappa \cdot \frac{di}{dt}$ sein.

Man erhält daher nach einer kleinen Reduction für die Componenten von $\varphi^{(2)}$:

$$X = -2\frac{d \cdot \Omega^2}{dt} \cdot x + \left(\Omega^3 - \frac{d^2\Omega}{dt^2}\right) y + \left(\Omega^2 U + \alpha \sin \varkappa \frac{di}{dt}\right);$$

$$Y = -2\frac{d \cdot \Omega^2}{dt} \cdot y - \left(\Omega^3 - \frac{d^2\Omega}{dt^2}\right) x - \frac{d(\Omega U)}{dt} z$$

$$Z = \left(2\,\Omega^2 U - \alpha \sin \varkappa \frac{di}{dt}\right) x + \frac{d(\Omega U)}{dt} y.$$

Aus diesen Ausdrücken ergibt sich, dass ein Beschleunigungscentrum zweiter Ordnung existirt, dass dasselbe aber mit dem Rotationscentrum des Systems zusammenfällt.

Mit Hülfe derselben Ausdrücke bildet man auch mit Leichtigkeit die Tangential-, Normal- und Binormalcomponente $\varphi_t^{(2)}$, $\varphi_n^{(2)}$, $\varphi_b^{(2)}$ von $\varphi^{(2)}$ für den Systempunkt M. Man hat X, Y, Z nur auf den Richtungen der Tangente, Hauptnormale und Binormale zu projiciren, deren Richtungen durch die Betrachtungen Cap. VII, §. 6. u. 7. bereits bestimmt sind.

§. 10. In gleicher Weise kann man auch die Beschleunigung zweiter Ordnung im System behandeln, welches die allgemeinste Art der Bewegung besitzt. Die Beschleunigung zur Zeit t hat die beiden Componenten $\Omega^2 r$, αp (s. S. 418), wie das System, welches um einen Punkt rotirt; aus ihnen entspringen daher dieselben Beschleunigungscomponenten zweiter Ordnung, wie bei jenem System. Ausserdem hat es aber noch die beiden Translationsbeschleunigungen ΩU und u. Man hat daher blos noch die aus diesen entspringenden Componenten von $\varphi^{(2)}$ hinzuzufügen. Dabei kann man u durch seine beiden Partialcomponenten $\frac{ds}{dt}$ parallel der Momentanaxe und $T\Psi$ senkrecht zu ihr und parallel der

Schicht der beiden aufeinanderfolgenden Momentanaxen vertreten lassen. Die erstere liefert eine Beschleunigung zweiter Ordnung, parallel zur Schicht, die zweite eine zur Schicht geneigte. Denkt man sich die Translationsbahn, welche der Geschwindigkeit parallel der Momentanaxe entspricht, so ist die aus u entspringende Beschleunigung der zweiten Ordnung in drei Componenten zerfällbar, längs der Tangente, Hauptnormalen und Binormalen dieser Curve. Die Tangenten derselben laufen den Momentanaxen parallel, die Schmiegungsebenen sind parallel den Tangentenebenen eines Kegels, dessen Erzeugungslinien den Momentanaxen parallel laufen und auf ihnen stehen mithin die Binormalen senkrecht, während die Hauptnormalen ihnen parallel gerichtet sind. Aehnliches gilt von der Beschleunigung zweiter Ordnung, welche aus ΩU entspringt. Diese Beschleunigung hat die Richtung der Normalen an die Fläche der Momentanaxen im Punkte, in welchem die Momentanaxe die Strictionslinien der Fläche schneidet.

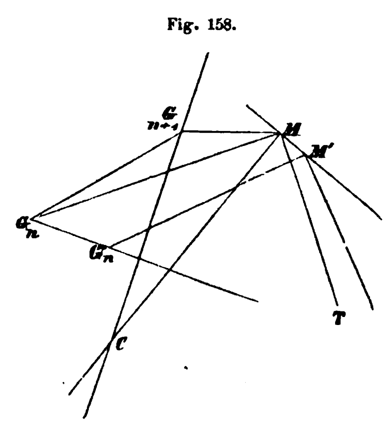
Das System besitzt ein Beschleunigungscentrum zweiter Ordnung, welches sehr leicht auch analytisch nachgewiesen werden kann, indem man die drei Gleichungen aufstellt, welche ausdrücken, dass $\frac{d^3x}{dt^3}, \frac{d^3y}{dt^3}, \frac{d^3z}{dt^3}$ verschwinden sollen.

§. 11. Die Theorie der Beschleunigungen höherer Ordnung ist bis jetzt weder im Allgemeinen, noch für irgend eine specielle Ordnung hinreichend ausgebildet. Die beiden Quellen für das Studium derselben sind die in §. 1. erwähnte Abhandlung von Somoff und das 6. Capitel der *Cinématique* von Résal. Indessen lässt sich wenigstens für die Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene der Hauptsatz über die Existenz des Beschleunigungscentrums und seine Haupteigenschaft für alle Beschleunigungsordnungen entwickeln. Dieser Satz kann so ausgesprochen werden:

Wenn für irgend eine Ordnung n der Beschleunigung eines in seiner Ebene sich bewegenden ebenen Systems in jedem Zeitmomente ein Punkt G_n existirt von der Eigenschaft, dass die Beschleunigung $\varphi^{(n)}$ aller Systempunkte M den Abständen MG_n von jenem Punkte proportional ist und mit MG_n einen constanten Winkel α bildet, so gibt es im System einen weiteren Punkt G_{n+1}, aber auch nur einen einzigen, dessen Beschleunigung $\varphi^{(n+1)}$ nächst höherer Ordnung verschwindet, während die Beschleunigung der Ordnung $(n+1)$ für alle Systempunkte dem Abstande derselben von G_{n+1} proportional ist und mit diesem Abstande constanten Winkel bildet.

Ist nämlich C das Momentancentrum für die Zeit t (Fig. 158.) und sind M, M' zwei aufeinanderfolgende Lagen des Systempunktes M, entsprechend den Zeiten t und $t + dt$, sowie G_n, G_n' die beiden Lagen von G_n für dieselben Zeiten, so kann zunächst $\varphi^{(n)}$ des Punktes M in zwei Componenten zerlegt werden, die eine längs MG_n, die andere längs der zu dieser Linie senkrechten Geraden MT. Diese beiden Componenten sind $\varphi^{(n)} \cos \alpha$ und $\varphi^{(n)} \sin \alpha$ und gleichfalls proportional MG_n; wir bezeichnen sie mit $\Theta_N^{(n)} \cdot \overline{MG_n}$ und $\Theta_T^{(n)} \cdot \overline{MG_n}$, wo also $\Theta_N^{(n)}$ und $\Theta_T^{(n)}$ die betreffenden Componenten für einen in der Einheit der Entfernung von G_n befindlichen Systempunkt bedeuten.

Fig. 158.



Für M', also entsprechend der Zeit $t + dt$, sind diese Componenten

$$(\Theta_N^{(n)} + d\Theta_N^{(n)}) \cdot \overline{M'G_n'},$$
$$(\Theta_T^{(n)} + d\Theta_T^{(n)}) \cdot \overline{M'G_n'}$$

resp. längs $M'G_n'$ und $M'T$. Wir wollen beiderlei Componenten einzeln behandeln.

Mit Hülfe einer Zerlegung von $(\Theta_N^{(n)} + d \cdot \Theta_N^{(n)}) \overline{M'G_n'}$ nach den Seiten des Vierecks $M'G_n'G_nM$ ergibt sich

$$(\Theta_N^{(n)} + d\Theta_N^{(n)}) \cdot \overline{M'G_n'}$$
$$= Res. \left\{ (\Theta_N^{(n)} + d\Theta_N^{(n)}) \overline{MG_n},\ (\Theta_N^{(n)} + d\Theta_N^{(n)}) \overline{M'M},\ (\Theta_N^{(n)} + d\Theta_N^{(n)}) \overline{G_nG_n'} \right\}$$

und hieraus folgt mit Rücksicht darauf, dass $\overline{MM'} = \Omega \cdot \overline{CM}\, dt$, wenn $\overline{G_nG_n'} = U_n dt$ gesetzt wird, wo U_n die Wechselgeschwindigkeit des Punktes G_n bedeutet, dass

$$\frac{d \cdot \Theta_N^{(n)}}{dt} \cdot \overline{MG_n}, \quad \Theta_N^{(n)} \Omega \cdot \overline{CM}, \quad \Theta_N^{(n)} U_n$$

die von $\Theta_N^{(n)}$ herrührenden Componenten der Beschleunigung $\varphi^{(n+1)}$ der $(n + 1)^{\text{ten}}$ Ordnung des Systempunktes M sind, welche resp. längs MG_n, $M'M$ und parallel der Tangente an die Curve (G_n) im Sinne von ' gerichtet sind. Für die Punkte M des Perpendikels, welches man durch C auf die Tangente von (G_n) fällen kann, können die beiden letzteren Componenten von entgegengesetztem Sinne werden, es gibt mithin auf diesem Perpendikel einen Punkt M, den wir G_{n+1} nennen wollen, für welchen $\Theta_N^{(n)} \Omega \cdot \overline{CG_{n+1}} = \Theta_N^{(n)} \cdot U_n$ wird. Seine Lage bestimmt sich leicht, denn aus dieser Gleichung folgt $\overline{CG_{n+1}} = \dfrac{U_n}{\Omega}$ und da der Punkt

C die Punktreihe des Perpendikels in zwei solche Theile theilt, deren Geschwindigkeiten $\Omega \cdot \overline{CM}$ entgegengesetzten Sinn haben, so ist die Lage von G_{n+1} eindeutig bestimmt.

Mit Hülfe einer Zerlegung von $\left(\Theta_T^{(n)} + d \cdot \Theta_T^{(n)}\right) \overline{M'G_n'}$ nach den Seiten eines Vierecks, congruent mit $M'G_n'G_nM$, dessen Seiten auf denen des eben benutzten senkrecht stehen, ergibt sich ebenso:

$$\left(\Theta_T^{(n)} + d \cdot \Theta_T^{(n)}\right) \overline{M'G_n'}$$
$$= Res. \left\{ \left(\Theta_T^{(n)} + d \cdot \Theta_T^{(n)}\right) \overline{MG_n},\ \left(\Theta_T^{(n)} + d \cdot \Theta_T^{(n)}\right) \overline{M'M},\ \left(\Theta_T^{(n)} + d \cdot \Theta_T^{(n)}\right) \overline{G_nG_n'} \right\}$$

und weiter folgt hieraus, dass

$$\frac{d \cdot \Theta_T^{(n)}}{dt} \cdot \overline{MG_n}, \quad \Theta_T^{(n)} \Omega \cdot \overline{MC}, \quad \Theta_T^{(n)} U_n$$

die von $\Theta_T^{(n)}$ herrührenden Componenten der Beschleunigung $\varphi^{(n+1)}$ des Systempunktes sind, welche aber resp. längs MT, MC und parallel der Normalen an (G_n) übereinstimmend mit dem Sinne von Ω gerichtet sind. Für die Punkte M des Perpendikels, welches von C auf die Tangente von (G_n) gefällt werden kann, können auch hier die beiden letzteren Componenten entgegengesetzt gleich werden. Man sieht leicht, dass der Punkt G_{n+1}, für welchen, wenn er an die Stelle von M tritt, $\overline{G_{n+1}C} = \frac{U_n}{\Omega}$ ist, dies herbeiführt. Wenn daher $\Theta_N^{(n)}$ und $\Theta_T^{(n)}$ constant sind, in welchem Falle die beiden noch übrigen Componenten $\frac{d\Theta_N^{(n)}}{dt} \cdot \overline{G_{n+1}G_n}$ und $\frac{d\Theta_T^{(n)}}{dt} \cdot \overline{G_{n+1}G_n}$ von $\varphi^{(n+1)}$ beide verschwinden, so ist G_{n+1} das Centrum des Systems und auch der einzige Punkt, dessen Beschleunigung der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung verschwindet, und da aus den Dreiecken $CG_{n+1}M$, $G_nG_{n+1}M$ folgt:

$$\Theta_N^{(n)} \Omega \cdot \overline{CM} = Res. \left\{ \Theta_N^{(n)} \Omega \cdot \overline{CG_{n+1}},\ \Theta_N^{(n)} \Omega \cdot \overline{G_{n+1}M} \right\}$$
$$\Theta_T^{(n)} \Omega \cdot \overline{MC} = Res. \left\{ \Theta_T^{(n)} \Omega \cdot \overline{G_{n+1}M},\ \Theta_T^{(n)} \Omega \cdot \overline{MG_{n+1}} \right\},$$

so ergibt sich, dass die Beschleunigung $\varphi^{(n+1)}$ blos die beiden Componenten $\Theta_N^{(n)} \Omega \cdot \overline{G_{n+1}M}$ und $\Theta_T^{(n)} \Omega \cdot \overline{MG_{n+1}}$ besitzt, beide dem Abstande MG_{n+1} proportional und die erstere senkrecht zu demselben Abstande, die zweite längs desselben gerichtet sind, in Folge dessen $\varphi^{(n+1)}$ für alle Systempunkte M mit $G_{n+1}M$ constanten Winkel bildet.

Es kann indessen auch für den allgemeinsten Fall, dass $\Theta_N^{(n)}$ und $\Theta_T^{(n)}$ nicht constant sind, der Beweis des Satzes leicht geführt werden. Zu dem Ende bilden wir die Componenten X_{n+1}, Y_{n+1} von $\varphi^{(n+1)}$ in Bezug auf die Tangente und Normale der Curve (G_n) als x- und y-Axe. Wir erhalten hierfür, wenn x, y die Coordinaten von M und x_0, y_0 die des Momentancentrums C sind:

$$X_{n+1} = -\frac{d\cdot\Theta_N^{(n)}}{dt}x + \frac{d\Theta_T^{(n)}}{dt}\cdot y - \Theta_N^{(n)}\Omega(y-y_0) - \Theta_T^{(n)}\Omega(x-x_0) + \Theta_N^{(n)}U_n$$

$$Y_{n+1} = -\frac{d\cdot\Theta_N^{(n)}}{dt}y - \frac{d\Theta_T^{(n)}}{dt}x + \Theta_N^{(n)}\Omega(x-x_0) - \Theta_T^{(n)}\Omega(y-y_0) + \Theta_T^{(n)}U_n.$$

Es gibt nun immer ein System von Werthen x_{n+1}, y_{n+1}, welches für x, y eingesetzt, X_{n+1} und Y_{n+1} auf Null bringt. Hiermit ist die Existenz des Beschleunigungscentrums G_{n+1} hypothetisch dargethan, nämlich, dass es für die Ordnung $n+1$ existirt, sobald es für die Ordnung n besteht. Zieht man aber die so zu bildenden Gleichungen

$$0 = -\frac{d\cdot\Theta_N^{(n)}}{dt}\cdot x_{n+1} + \frac{d\cdot\Theta_T^{(n)}}{dt}y_{n+1} - \Theta_N^{(n)}\Omega(y_{n+1}-y_0) - \Theta_T^{(n)}\Omega(x_{n+1}-x_0) + \Theta_N^{(n)}U_n$$

$$0 = -\frac{d\cdot\Theta_N^{(n)}}{dt}\cdot y_{n+1} - \frac{d\cdot\Theta_T^{(n)}}{dt}x_{n+1} + \Theta_N^{(n)}\Omega(x_{n+1}-x_0) - \Theta_T^{(n)}\Omega(y_{n+1}-y_0) + \Theta_T^{(n)}U_n$$

von den vorigen ab und setzt die Coordinaten $x - x_{n+1} = \xi$, $y - y_{n+1} = \eta$, so erhält man in Bezug auf G_{n+1} als Ursprung:

$$X_{n+1} = -\frac{d\cdot\Theta_N^{(n)}}{dt}\cdot\xi + \frac{d\Theta_T^{(n)}}{dt}\cdot\eta - \Theta_N^{(n)}\Omega\eta - \Theta_T^{(n)}\Omega\xi$$
$$= -\left(\frac{d\Theta_N^{(n)}}{dt} + \Theta_T^{(n)}\Omega\right)\xi + \left(\frac{d\Theta_T^{(n)}}{dt} - \Theta_N^{(n)}\Omega\right)\eta$$

$$Y_{n+1} = -\frac{d\cdot\Theta_N^{(n)}}{dt}\cdot\eta - \frac{d\Theta_T^{(n)}}{dt}\cdot\xi + \Theta_N^{(n)}\Omega\xi - \Theta_T^{(n)}\Omega\eta$$
$$= -\left(\frac{d\Theta_N^{(n)}}{dt} + \Theta_T^{(n)}\Omega\right)\eta - \left(\frac{d\Theta_T^{(n)}}{dt} - \Theta_N^{(n)}\Omega\right)\xi,$$

welche ausdrücken, dass $\varphi^{(n+1)}$ in zwei Componenten zerfällt werden kann, von denen die eine die Richtung von MG_{n+1} hat, die andere senkrecht dazu ist, während beide MG_{n+1} proportional sind und folglich $\varphi^{(n+1)}$ constanten Winkel mit MG_{n+1} bildet.

Zugleich folgt noch nebenbei: dass die Beschleunigung $\varphi^{(n+1)}$ in allen Punkten auf concentrischen Kreisen um G_{n+1} constant ist.

Nun ist die Existenz des Beschleunigungscentrums G der ersten Ordnung früher erwiesen worden, mithin gibt es nach dem eben bewie-

senen Satze ein Centrum für die zweite Ordnung und da dieses besteht, ein solches für die dritte u. s. w.

Zugleich können die hier gewählten Betrachtungen zur successiven Bildung der Componenten der Beschleunigung aller Ordnungen dienen.

Auch kann man leicht die Bedingungen aufstellen, unter welchen zwei Beschleunigungscentra irgend welcher Ordnung zusammenfallen. Nicht minder einfach ist es, für eine beliebige Ordnung die Tangential- und Normalcomponente der Beschleunigung zu bestimmen und die geometrischen Orte zu finden, für welche die eine oder die andere derselben verschwindet.

Wir führen diese Betrachtungen nicht weiter aus, ebenso wenig, als wir auf die Theorie der relativen Beschleunigungen höherer Ordnung eingehen, um die dem Buche gesteckten Grenzen nicht zu überschreiten.

Vierter Theil.

Theorie der Kräfte.

I. Capitel.

Allgemeine Erörterungen über die Kräfte und das Maass derselben.

§. 1. Die Punkte eines in Bewegung begriffenen Systems wurden bisher von gleicher Beschaffenheit angenommen, sie waren in Folge dessen von rein geometrischen Punkten nicht verschieden. Wir werden jetzt Mittel suchen, um sie quantitativ oder intensiv und in gewisser Hinsicht auch qualitativ von einander zu unterscheiden und den Einfluss dieser Unterschiede auf die Bewegung auszudrücken.

Ein System gleichartiger Punkte sei in irgend einer Bewegung begriffen; dieselbe sei vollständig bekannt, insbesondere seien zur beliebig annehmbaren Zeit t die Beschleunigungen aller Ordnungen, die Geschwindigkeit mit inbegriffen, gegeben. Ein zweites, diesem congruentes System besitze dieselbe Bewegung und sei so über jenes hingelagert, dass je zwei homologe Punkte A', A'' zusammenfallen. Dieselben werden dann während der Bewegung fortwährend vereinigt bleiben und beide Systeme werden ein System bilden, dessen Punkte A die Punkte A', A'' enthalten. Die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen aller Ordnungen der Punkte A', A'' sind nach Richtung, Sinn und Grösse dieselben und summiren sich daher an dem Gesammtpunkte A, ohne dass die Bewegung dieses eine andere wird, als die der Punkte A', A''. Dagegen wird der Punkt selbst ein doppelwerthiger. In gleicher Weise können wir 2, 3, 4, ... m congruente Systeme übereinanderlagern, welche ein Gesammtsystem von derselben Bewegung bilden, die sie selbst besitzen, in welchem aber jeder Punkt als ein 2, 3, 4, ... m werthiger Punkt aufzufassen ist. Umgekehrt können wir ein System in 2, 3, 4, ... andere spalten, welche dieselbe Bewegung wie das ursprüngliche besitzen; die Punkte dieser besitzen dann gegenüber den Punkten jenes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... $\frac{1}{m}$ der Werthigkeit jener. Auch können hierauf Systeme

der eben erhaltenen Art mit Systemen der vorigen Art zu Systemen derselben Bewegung verbunden werden, deren Punkte im Vergleich mit den Punkten des ursprünglichen Systems m-werthig sind, wo m eine ganze oder gebrochene oder auch eine Irrationalzahl sein kann.

Lagern wir jetzt über ein System ein anderes, ihm nicht congruentes, dessen Punkte untereinander gleichwerthig, aber mit den Punkten jenes gleichwerthig oder ungleichwerthig sein mögen. Beide sollen dieselbe Bewegung besitzen. Dann bildet sich aus ihnen ein neues System, welches nicht gleichartige Punkte enthält. Es wird Punkte von der Art der Punkte des ersten Systems, solche von der Art des zweiten und endlich solche enthalten, in welchen ein Punkt des ersten mit einem Punkte des zweiten verbunden ist. In derselben Weise werden die Beschleunigungen der verschiedenen Ordnungen zusammentreten, aber dennoch wird das Gesammtsystem dieselbe Bewegung haben, wie die beiden, aus welchen es gebildet ist. Lagern wir drei oder mehrere Systeme auf diese Weise übereinander, so gelangen wir, wie man leicht sieht, zu Systemen der allerheterogensten Beschaffenheit, welche alle dieselbe Bewegung haben, deren Punkte die mannigfaltigste Werthigkeit und eine dieser entsprechende Gesammtbeschleunigung besitzen, welche aber die Energie der Bewegung des einzelnen Punktes nicht ändert, weil sie sich auf die einzelnen Bestandtheile vertheilt, welche in dem Punkte zusammengetreten sind. Fügen wir hinzu, dass wir Systeme auch trennen können, so übersieht man leicht, wie durch diese Uebereinanderlagerung Aggregate von Systemen entstehen, deren Punkte selbst eine Nullwerthigkeit oder auch eine negative Werthigkeit besitzen.

Der Coefficient, welcher die Werthigkeit eines Punktes und dem entsprechend die Werthigkeit der Beschleunigungen aller Ordnungen ausdrückt, kann nach dem Vorstehenden jede reelle positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahl sein, die Null mit inbegriffen. Erlangt ein Punkt des Gesammtsystems den Coefficienten Null, so verschwinden seine Beschleunigungen aller Ordnungen, er nimmt nicht mehr an der Bewegung des Systems Theil und wird aus demselben ausgeschieden. Trifft dies bei allen Punkten einer ganzen Parthie des Systems ein, so scheidet auch sie aus. Durch das Verwinden jenes Coefficienten ist also das Mittel gegeben, ein System auf einen bestimmten Raum zu beschränken oder in bestimmter Weise abzugrenzen. Jener Coefficient spielt hier vollständig die Rolle des Discontinuitätsfactors der bestimmten Integrale. Ein negativer Coefficient eines Punktes deutet auf einen Mangel der Werthigkeit desselben und einen Wechsel des Sinnes in der Beschleunigung. Er kann auf zwei Arten entstehen: entweder durch Abtrennen einer vorgeschriebenen Punktparthie oder durch Combination von Systemen mit vollkommen entgegengesetzten Beschleunigungen aller Ordnungen.

Man kann diesen Coefficienten, welcher die qualitative Verschiedenheit der Systempunkte charakterisirt und ihre Beschleunigungscapacität misst, den Beschleunigungscoefficienten derselben nennen. In den Anwendungen der Mechanik auf Physik stellt er in vielen Untersuchungen die Menge der Materie dar, welche in den Systempunkten concentrirt gedacht wird, in anderen Gebieten dieser Wissenschaft drückt er das Quantum Agens der Punkte aus und die positive oder negative Beschaffenheit stellt den Gegensatz der Agentien (z. B. bei Electricität und Magnetismus) dar, das Verschwinden derselben die Neutralität. Die Lehrbücher der Mechanik nennen diesen Coefficienten durchweg die Masse. Allein wenn wir auch weit entfernt sind, irgend einen allgemeinen Namen einführen zu wollen, so dient das Gesagte doch wohl hinreichend dazu, auf das Bedürfniss eines solchen hinzudeuten. Andere möchten vielleicht lieber „Actionscoefficient“ oder „Beschleunigungsgewicht“ sagen.

Man erkennt aus der Entstehungsweise des Beschleunigungscoefficienten, dass seine Beschaffenheit sich auf alle Ordnungen der Beschleunigungen fortpflanzt, sodass, wenn er an irgend einer Stelle des Systems für die Beschleunigung erster Ordnung verschwindet, an dieser Stelle die Beschleunigungen aller Ordnungen Null sind, die Geschwindigkeit mit inbegriffen. Bei gewissen Vorgängen, bei welchen er die Materialität ausdrückt, bleibt er constant, bei anderen, wo eine Veränderung im Agens auftritt, wie z. B. bei der Vertheilung der Electricität, ist er mit der Zeit oder mit dem Orte veränderlich. Für die in diesem Buche durchzuführenden Betrachtungen wird er als constant angenommen und steht nichts im Wege, ihn die Masse zu nennen, obgleich dieser Name nicht die Allgemeinheit seines Wesens ausdrückt.

Um die Werthigkeit der Punkte eines Systems zu bestimmen, ist erforderlich, dass man eine bestimmte Werthigkeit annimmt, welche durch den Coefficienten 1 ausgedrückt werden soll. Die Beschleunigung irgend einer Ordnung eines solchen Punktes sei φ. Ist alsdann m der Beschleunigungscoefficient des Punktes, wenn seine Werthigkeit m wird, so treten in ihm Beschleunigungsbestandtheile zusammen, welche $m\varphi$ zur Resultante haben, in Folge deren er aber dennoch dieselbe Beschleunigung φ behält, weil die Resultante sich auf die Bestandtheile des Gesammtpunktes vertheilt.

§. 2. Zu jeder Veränderung kann eine Ursache gedacht werden, welche die Veränderung hervorbringt. Die Bewegung ist continuirliche Ortsänderung, ihre Ursache ist demnach im strengsten Sinne der Inbegriff alles dessen, was den Punkt oder das System fortführt und ihm die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen aller Ordnungen ertheilt. Indessen pflegt man den Begriff der Ursache etwas beschränkter zu fassen und sich vorzugsweise für die Beschleunigung erster Ordnung eine

Ursache zu denken. Die Ursache der Beschleunigung erster Ordnung heisst Kraft und ihre Wirkung besteht darin, dass sie die Beschleunigung erster Ordnung hervorbringt, d. h. die Geschwindigkeit nach Richtung und Grösse ändert, indem sie in jedem Momente die Elementarbeschleunigung zur Geschwindigkeit hinzutreten lässt. Diese Wirkung ist eine continuirliche, so lange die Geschwindigkeit sich continuirlich ändert. Wo keine Beschleunigung erster Ordnung ist, wirkt keine Kraft; mit dem Aufhören der einen verschwindet die andere. Die Kraft ist nicht die unmittelbare Ursache der Geschwindigkeit, sondern nur der Beschleunigung, d. h. der Aenderung der Geschwindigkeit. Sie kann niemals augenblicklich eine Geschwindigkeit hervorbringen oder tilgen, sondern nur allmählig sie wachsen oder abnehmen lassen.

Der Leichtigkeit der Behandlung gewisser Parthieen der Mechanik wegen denkt man sich übrigens die Geschwindigkeit oft durch das momentane Wirken einer anderen Ursache erzeugt und nennt eine solche, weil sie nur einen Moment wirkt, eine Momentankraft und im Gegensatze zu ihr die vorhin betrachteten Kräfte continuirliche oder continuirlich wirkende Kräfte. Wir werden bald die Abhängigkeit erläutern, in welcher diese Momentankräfte zu den continuirlichen Kräften stehen.

Ist die Beschleunigung erster Ordnung nach Grösse und Richtung unveränderlich, so reicht die Kraft aus, um alle Veränderung der Bewegung hervorzubringen. Ist sie aber veränderlich, sei es nach Grösse oder nach Richtung allein oder in beiderlei Hinsicht zugleich, so setzt die Beschleunigung zweiter Ordnung, welche diese Aenderung veranlasst, eine Ursache oder Kraft der zweiten Ordnung voraus, welche selbst als die Ursache der Veränderung der Kraft erster Ordnung angesehen werden kann. In gleicher Weise gibt es Kräfte aller Ordnungen, wo es Beschleunigungen aller Ordnungen gibt und fallen die Kräfte von einer gewissen Ordnung an hinweg, sobald die Beschleunigung der nächstvorhergehenden Ordnung nach Grösse und Richtung constant wird.

§. 3. Die Kräfte in der engeren Bedeutung des Wortes, nämlich die Ursachen der Beschleunigungen erster Ordnung, können auf verschiedene Weise gedacht werden, je nachdem man die Bewegungsänderungen eines Systems im Ganzen oder im Einzelnen ins Auge fasst. Bleiben wir einen Augenblick beim unveränderlichen System stehen. Die Beschleunigungen sämmtlicher Punkte desselben sind bestimmt, sobald die Schraubenbeschleunigung (Thl. III, Cap. VIII, §. 8.) nach Lage, Richtung und Sinn der Axe und ihren beiden Componenten nach, der Rotations- und Translationsbeschleunigung, sowie die Axialbeschleunigung bestimmt ist. Es genügt also auch als Ursache eine Kraft, welche die Schraubenbeschleunigung und Axialbeschleunigung zu geben im Stande ist und ihre Wirkung besteht darin, dass sie jeden Augenblick

eine unendlich kleine Schraubengeschwindigkeit um eine bestimmte Axe zu der bereits vorhandenen Schraubengeschwindigkeit hinzutreten lässt und zugleich das System nach der Axe der Schraubengeschwindigkeit hindrängt. Diese Kraft ist äquivalent zweien anderen Kräften, welche einzeln die beiden Beschleunigungscomponenten, nämlich die Translationsbeschleunigung parallel der Axe der Schraubenbeschleunigung und die Rotationsbeschleunigung um dieselbe zu geben vermag in Verbindung mit einer dritten, wesentlich anderer Art, welche die Axialbeschleunigung hervorruft.

Die Beschleunigungen im unveränderlichen System sind aber auch sämmtlich bestimmt, sobald es die Beschleunigungen dreier Systempunkte sind. Daher sind auch nur drei Kräfte erforderlich, welche diesen Punkten die Beschleunigungen ertheilen, um die Bewegung des ganzen Systems zu dirigiren. Diese drei Kräfte sind der vorhin genannten Schraubenkraft und Axialkraft äquivalent und diese können aus ihnen entwickelt werden.

Endlich kann man auch für die Beschleunigung jedes einzelnen Systempunktes eine Kraft annehmen, welche diese gibt und alle diese Kräfte zusammen müssen gleichfalls den vorgenannten äquivalent sein. Thut man dies, so fällt aber die Nothwendigkeit hinweg, dass das System als ein unveränderliches vorausgesetzt werde, vielmehr da die Kräfte den Punkten sämmtlich die Beschleunigungen geben, welche ihnen als Punkten des Systems zukommen, so erfolgt durch sie die Bewegung des Systems von selbst, ohne dass durch den Zusammenhang des Systems ein Zwang ausgeübt zu werden braucht. Manche Schriftsteller nennen die Kräfte, welche den Systempunkten ihre Beschleunigungen geben wie sie durch den Zusammenhang des Systems aus den Beschleunigungen der bestimmenden Punkte folgen, Effectivkräfte. Unterwirft man umgekehrt ein unveränderliches System gegebenen Kräften, welche mehr als drei Punkte beschleunigen, so folgt, dass noch ein Zwang hinzutreten muss, damit das System unveränderlich bleibe; denn die Beschleunigungen von drei Punkten reichen aus, um die aller anderen zu bestimmen. Dieser Zwang kann auf verschiedene Art ausgeübt, unter allen Umständen aber durch Kräfte ausgedrückt werden, welche die Punkte so gegeneinander beschleunigen, dass der Zusammenhang des Systems erhalten wird.

Wie sich das hier Gesagte auf veränderliche Systeme übertragen lässt und inwieweit Modificationen hierbei eintreten, wird später erörtert werden.

§. 4. Die Kraft ist als die Ursache der Beschleunigung vollkommen definirt, sobald es die Beschleunigung ist. Daher dürfen weiter keine Voraussetzungen über ihre Wirkungsweise in die theoretische Mechanik eingeführt werden. Was man als Axiome der Mechanik zu bezeichnen pflegt, sind Sätze, welche hier vollständig überflüssig werden. In der That sind sie auch nur für einen Lehrgang erforderlich, welcher un

mittelbar mit den Kräften und nicht mit dem beginnt, dessen Ursachen die Kräfte sein sollen. Sie enthalten implicite Erklärungen der Natur der Beschleunigung, ohne den Namen für diesen Begriff zu brauchen.

Es gibt aber noch eine andere Art von Hypothesen über die Wirkungsweise der Kräfte, welche Newton an die Spitze seiner *Principia philosophiae naturalis* stellt und welche von da in alle Lehrbücher der Mechanik gewandert sind. Diese Grundsätze sind aber gleichfalls nicht Grundsätze der theoretischen Mechanik, sondern der Physik. Sie betreffen Vorgänge der physischen Welt und vermitteln die Anwendung der Mechanik auf die Erklärung der Naturphänomene, indem sie aussagen, unter welchen Voraussetzungen die Lehren dieser Wissenschaft dort zur Geltung kommen. Der erste dieser Grundsätze ist das Princip der Trägheit der Materie, nämlich:

Jeder materielle Punkt verharrt in dem Zustande der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung, so lange er nicht durch äussere Kräfte zu einer Aenderung dieses Zustandes gezwungen wird.

Der zweite lautet:

Die Aenderung der Bewegung ist proportional der wirkenden Kraft und erfolgt in der Richtung dieser.

Der dritte ist das Princip der Action und der Reaction, nämlich:

Die Kraftwirkungen zwischen zwei materiellen Punkten sind stets gleich und einander entgegengesetzt.

Die Beschleunigung ist definirt worden als das, was die Aenderung der Geschwindigkeit eines Punktes nach Grösse und Richtung bewirkt und die Kraft ist die Ursache der Beschleunigung. Ohne Kraft ist daher eine Aenderung in der gleichförmig geradlinigen Bewegung nicht möglich. Für die theoretische Mechanik ist daher das Princip der Trägheit nicht erforderlich, es sagt nichts Neues. Für die Physik sagt es aber aus, dass die abstracten Vorstellungen von Beschleunigung und Kraft auf die Materie angewandt werden dürfen. Das zweite Princip drückt nichts weiter aus, als dass die Kraft die Beschleunigung hervorbringt und wie jede Ursache ihrer Wirkung proportional ist. Das Princip der Action und Reaction spricht im Grunde die Behauptung aus, dass in der Natur alle Ursachen der Beschleunigung paarweise vorhanden und entgegengesetzt gleich sind. Ueber die Existenz der Kräfte in der Natur lehrt nur die Physik, nicht die abstracte Mechanik; daher gehört dies Princip streng genommen jener Wissenschaft allein an. In der That kommt es auch nur in den Anwendungen der Mechanik vor, welche noch zum Theil experimentelle Resultate zu Grunde legen müssen.

Man hat die Newton'schen Sätze vielfach commentirt und erweitert, ihre Stellung zur Mechanik aber vielfach missverstanden, weil man eine

Forderung theoretischer Auffassung von dem durch die Sinne Wahrnehmbaren nicht trennte. Dass Kraft nur etwas Gedachtes ist und nicht etwas Handgreifliches, in der Natur Beobachtbares, hat Newton bereits auszusprechen für nöthig gefunden, und wenn eine gewisse Naturbetrachtung die Kräfte beobachten zu können glaubt, sogar von ihrem Sitz spricht und sozusagen eine Dogmatik über die reale Existenz von Kräften in der Natur aufstellt, so genügt es wohl, sie auf folgende Stelle in den *Principiis philosophiae naturalis* zu verweisen: „*Voces attractionis, impulsus vel propensionis cuiuscunque in centrum indifferenter et pro se mutuo promiscue usurpo, has vires non physice sed mathematice tantum considerando. Unde caveat lector, ne per huiusmodi voces cogitet, me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quae sunt puncta mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere aut vires centrorum esse dixero.*" (Newton, princ. phil. natur. Lib. I. ad definitionem VIII.)

§. 5. Bei jeder Kraft (im gewöhnlichen Sinne genommen) hat man zu unterscheiden: 1. die Richtung, d. i. die Gerade, längs welcher sie beschleunigt, 2. den Sinn, übereinstimmend mit dem Sinne der Beschleunigung, 3. die Intensität oder Stärke, mit welcher sie beschleunigt und 4. den Angriffspunkt. Der Angriffspunkt ist in vielen Fällen nichts Wesentliches; sie vermag allen Punkten ihrer Richtung dieselbe Beschleunigung zu ertheilen, wenn diese in einer solchen Weise durch diese Gerade verbunden sind, dass ihre gegenseitigen Abstände von einander unveränderlich bleiben. Man drückt dies gewöhnlich so aus, dass man sagt: **Jede Kraft kann an jeden Punkt ihrer Richtung verlegt werden, wenn derselbe mit dem ursprünglichen Angriffspunkte unveränderlich verbunden wird.** Die Richtung der Kraft ist constant oder veränderlich. Zur Erklärung der Phänomene des freien Falles z. B. nimmt man die Schwerkraft an. Ihre Richtung geht nach dem Mittelpunkte der Erde, da dieser aber sehr weit entfernt ist, so ist dieselbe über kleinere Theile der Erdoberfläche hin von constanter Richtung. Die Beschleunigung der Schwerpunkte der Planeten ist nach dem Mittelpunkte der Sonne gerichtet; sie setzt eine Kraft voraus von veränderlicher Richtung, welche der Bewegung des Planeten folgt.

Hinsichtlich der Intensität unterscheidet man gleichfalls constante und veränderliche Kräfte. Ist die Beschleunigung eines Punktes von constanter Grösse, so setzt sie auch eine constant wirkende Ursache voraus. Eine Kraft von constanter Intensität ist daher eine solche, welche constante Beschleunigung gibt, welche also die Geschwindigkeit in jeder Zeiteinheit um dieselbe Grösse ändert. Fällt daher die Richtung der Kraft mit der Richtung der Geschwindigkeit zusammen, so ertheilt die Kraft dem beweglichen Punkte eine geradlinig gleichförmig

veränderliche Bewegung und zwar gleichförmig beschleunigt oder verzögert, je nachdem ihr Sinn mit dem Sinne der Geschwindigkeit übereinstimmt oder nicht. Fallen die Richtungen beider nicht zusammen, so entsteht eine parabolische Bewegung, wenn zugleich die Richtung der Kraft constant bleibt.

Ist die Intensität einer Kraft veränderlich, so kann man jeden Augenblick eine constante Kraft angeben, in welche jene übergehen würde, wenn plötzlich alle Ursachen der Veränderlichkeit hinwegfielen. Unter der Intensität der veränderlichen Kraft versteht man die Intensität dieser constanten Kraft.

Ist eine Kraft nach Richtung oder Intensität oder nach beiden veränderlich, so ist die Ursache dieser Veränderlichkeit die Kraft nächsthöherer Ordnung und wenn diese gleichfalls veränderlich ist, so ist die Ursache ihrer Veränderlichkeit die Kraft der folgenden Ordnung u. s. f.

Jede Ursache ist ihrer Wirkung proportional und die doppelte, dreifache u. s. w. Ursache hat auch die doppelte, dreifache u. s. w. Wirkung. Die Wirkung der Kraft ist die Beschleunigung; die Kraftintensität muss daher der Beschleunigung proportional sein. Ist nun der Beschleunigungscoefficient m, die Beschleunigung der Bewegung φ, so muss die Kraft $\mathfrak{J}$ dem m werthigen Punkte die Beschleunigung φ auch $m$mal ertheilen; ihr Ausdruck ist daher $\mathfrak{J} = m\varphi \cdot K$, wo K zunächst ein Proportionalitätsfactor ist.

Für eine zweite Kraft $\mathfrak{J}'$, welche einem Punkte von der Werthigkeit m' die Beschleunigung φ' ertheilt, hat man ebenso

$$\mathfrak{J}' = m'\varphi' \cdot K.$$

Daher wird das Verhältniss beider

$$\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{\varphi}{\varphi'},$$

d. h. die Intensitäten zweier Kräfte stehen im zusammengesetzten Verhältnisse der Werthigkeitscoefficienten (Massen) der Punkte und der Beschleunigungen, die sie ihnen ertheilen.

Um Kräfte zu messen, kann man eine Krafteinheit willkürlich annehmen. In vielen Fällen wählt man ein bestimmtes Gewicht. Die Ursache des Fallens der Körper oder die Schwere ertheilt nämlich allen ihr unterworfenen Punkten die constante Beschleunigung $g = 9{,}81$ Meter. Die Schwerkraft, welche eine gegebene Masse fallen macht, heisst das Gewicht dieser Masse. Das Gewicht eines Cubikdecimeters chemischreinen Wassers im Zustande der grössten Dichtigkeit (bei $4^0{,}1$ C.) heisst das Kilogramm und wird als Krafteinheit benutzt. Für kleine Kräfte wählt man als Maasseinheit das Gramm, welches der tausendste Theil

des Kilogramms, nämlich das Gewicht eines Cubikcentimeters Wasser derselben Beschaffenheit ist.

Auch die Einheit für die Beschleunigungscoefficienten oder die Masse ist beliebig wählbar. Wir wollen sie so bestimmen, dass wir unter ihr diejenige Masse verstehen, welcher die Krafteinheit (das Kilogramm) die Beschleunigung gleich der Längeneinheit (1 Meter) ertheilt. Mit Zugrundelegung dieser Einheiten liefert jetzt die obige Gleichung, wenn nämlich $\mathfrak{F}'$ die Krafteinheit und m' die Masseneinheit bedeutet, wofür $\varphi' = 1$ wird, für die Maasszahl $F = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}'}$ der Kraft $\mathfrak{F}$:

$$F = m\varphi,$$

d. h. **die Maasszahl der Intensität der Kraft, welche der Masse m die Beschleunigung φ zu ertheilen vermag, ist gleich dem Produkte aus den Maasszahlen der Masse und der Beschleunigung.**

Hierbei wird aber vorausgesetzt, dass m und m' sich auf Werthigkeitsverhältnisse derselben Art beziehen, dass also z. B. beide Zahlen sich auf die Mengen ponderabeler Materie oder beide elektrische Massen etc., nicht aber die eine sich auf ponderabele Materie, die andere sich auf Electricität beziehe. Im letzteren Falle würde noch ein weiterer Coefficient erforderlich sein.

Aus $F = m\varphi$ folgt, dass die Beschleunigung erhalten wird, wenn man die Intensität der Kraft durch die Masse und die Masse, wenn man die Intensität der Kraft durch die Beschleunigung dividirt, d. h. es ist $\varphi = \frac{F}{m}$ und $m = \frac{F}{\varphi}$.

Wenden wir die Gleichung $F = m\varphi$ auf das Gewicht P der Masse m an, so wird g für φ zu setzen sein; wir erhalten dadurch

$$P = mg.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung können wir aus der vorigen Gleichung die Masse m eliminiren; sie nimmt dadurch die Form an

$$F = \frac{P}{g} \cdot \varphi.$$

Die Kraft $F = m\varphi$, welche der Masse m die Beschleunigung φ ertheilt, wird oft auch die **bewegende Kraft** genannt. Die Kraft, welche der Masseneinheit dieselbe Beschleunigung φ ertheilt, wäre $1 \cdot \varphi = \varphi$; sie heisst im Gegensatze hierzu die **beschleunigende Kraft**.

Die Gleichung $P = mg$ gibt für $m = 1$ den Werth $P = g$, d. h. die Masseneinheit hat ein Gewicht gleich $g = 9{,}81$ Kilogramm.

§. 6. So wie man die Beschleunigung eines Punktes durch ihre Componenten ersetzen kann, so kann man die Kraft, welche die Beschleunigung erzeugt, durch eine Verbindung von Kräften ersetzen, welche einzeln die Ursachen der Beschleunigungscomponenten sind. Man pflegt

die Kraft durch eine Strecke mit einer Pfeilspitze zu bezeichnen; die Länge der Strecke gibt die Intensität, die Richtung derselben die Richtung der Kraft und die Spitze den Sinn derselben an; der Anfangspunkt der Strecke bezeichnet den Angriffspunkt. Da nun die Kraft der Beschleunigung, welche sie dem beweglichen Punkte ertheilt, proportional ist, so werden die Figuren, welche aus den die Kräfte darstellenden Strecken gebildet werden können, den aus den entsprechenden Beschleunigungen gebildeten ähnlich und können alle Sätze über die Zusammensetzung und Zerlegung der Beschleunigungen sofort auf die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte übertragen werden.

Es sei $\varphi^{(n)}$ die Beschleunigung irgend einer Ordnung n zur Zeit t; damit sie in die Beschleunigung zur Zeit $t + dt$ übergehe, tritt zu ihr die Elementarbeschleunigung $\varphi^{(n+1)}dt$ der nächst höheren Ordnung. Ebenso tritt zur Kraft $m\varphi^{(n)}$ der n^{ten} Ordnung die unendlich kleine Kraftcomponente $m\varphi^{(n+1)}dt$ hinzu, um dieselbe nach Grösse und Richtung in die Kraft überzuführen, welche dem folgenden Zeitmomente entspricht.

Es folgt hieraus, dass die Elementarkraft $m\varphi^{(n+1)}dt$ das geometrische Differential und $m\varphi^{(n+1)}$ die geometrische Derivirte von $m\varphi^{(n)}$ ist, d. h.:

J e d e K r a f t i r g e n d e i n e r O r d n u n g i s t d i e g e o m e t r i s c h e D e r i v i r t e d e r K r a f t n ä c h s t h ö h e r e r O r d n u n g. Kräfte verschiedener Ordnungen können daher nicht miteinander verglichen werden, sondern sind Grössen verschiedener Dimension, verhalten sich wie Flächen zu Linien oder Körperräume zu Flächen.

Die Kraft nullter Ordnung ist $\mathfrak{F}^{(0)} = mvK$ und wird die Momentankraft genannt. Sie ist die Ursache der Geschwindigkeit und ertheilt diese dem Punkte plötzlich. Für $m = 1$ und $v = 1$ wird $\mathfrak{F}^{(0)} = K$ und wenn man also den Proportionalitätsfactor K, d. h. die Momentankraft, welche der Masseneinheit die Geschwindigkeit v plötzlich zu ertheilen vermag, als Einheit der Momentankräfte wählt und die Maasszahl $\frac{\mathfrak{F}^{(0)}}{K}$ der Momentankraft $\mathfrak{F}^{(0)}$ mit $f^{(0)}$ bezeichnet, so wird

$$f^{(0)} = mv,$$

d. h. d i e M a a s s z a h l d e r M o m e n t a n k r a f t i s t d a s P r o d u k t a u s d e n M a a s s z a h l e n d e r M a s s e u n d d e r G e s c h w i n d i g k e i t. Das Produkt mv heisst die B e w e g u n g s g r ö s s e des Punktes. Wir werden später von Kräften erster Ordnung reden, welche eine sehr kurze Zeit hindurch wirken und sehr grosse Intensitäten besitzen; sie heissen Stosskräfte. Dieselben sind von den Momentankräften sehr wohl zu trennen; in dem Momente jedoch, in welchem eine Stosskraft zu wirken aufhört, hat der bewegliche Punkt eine gewisse Bewegungsgrösse und da diese eine Momentankraft repräsentirt, welche dem Punkte die Geschwindigkeit zu ertheilen vermag, die er durch die Einwirkung der Stosskraft erlangt

hat, wenn er vorher eine solche nicht besass, so sieht man ein, wie der Effect einer Stosskraft oft sich durch eine Momentankraft ausspricht.

§. 7. Wir wollen jetzt noch einige Grundbegriffe erläutern, die mit den Kräften erster Ordnung in Verbindung stehen. Unter allen Zerlegungen der Beschleunigung φ war die Zerlegung in Tangential- und Normalbeschleunigung die wichtigste (Thl. II, Cap. , §. .). Die Ursachen dieser beiden Componenten heissen die Tangentialkraft und Normal- oder Centripetalkraft. Die Maasse für dieselben sind $F_t = m\varphi_t = m\frac{dv}{dt}$ und $F_n = m\varphi_n = m\frac{v^2}{\varrho}$. Die erstere Kraft wirkt in der Richtung der Tangente, die zweite normal zur Bahn, nach dem Krümmungsmittelpunkte hingewandt. Die totale Kraft F setzt sich aus ihnen zusammen nach der Formel

$$F = m\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\varrho^2}}.$$

Mit der Componenten F_t der Kraft F stehen in innigem Zusammenhang die Begriffe von Kraftantrieb, Bewegungsgrösse, Arbeit und lebendiger Kraft.

Multiplicirt man nämlich die Gleichung $F_t = m\frac{dv}{dt}$ mit dt und integrirt sie, indem man F_t als Function der Zeit dargestellt denkt nach t zwischen den Grenzen t_0 und t, welchen die Werthe v_0 und v der Geschwindigkeit entsprechen, so erhält man:

$$\int_{t_0}^{t} F_t \cdot dt = mv - mv_0.$$

Das Element des Integrales zur Linken, gebildet aus der Intensität der Tangentialkraft und dem Zeitelemente, heisst der Elementarantrieb der Kraft F und das Integral selbst der Antrieb der Kraft F während der Zeit $t - t_0$. Nun ist mv die Bewegungsgrösse oder die Momentankraft des Punktes und da $mv - mv_0$ die Aenderung derselben während des Zeitintervalles $t - t_0$ darstellt, so kann der Inhalt der vorstehenden Gleichung in dem Satze ausgesprochen werden: Bei jeder Bewegung eines Punktes ist der Antrieb der Kraft während irgend eines Zeitintervalles gleich der Aenderung, welche die Bewegungsgrösse während dieser Zeit erleidet.

Ist die Bewegung geradlinig, so ist $F_t = F$; ist sie gleichförmig, so ist der Antrieb Null. Die vorstehende Gleichung für den Antrieb geht aus Thl. III, Cap. I, §. 13. unmittelbar hervor, wenn man die dortige Gleichung $v - v_0 = \int_{t_0}^{t} \varphi_t dt$ mit der Masse m des beweglichen Punktes multiplicirt.

Drückt man in der Gleichung $F_t = m\frac{dv}{dt}$ die Tangentialbeschleunigung $\frac{dv}{dt}$ durch $\frac{d\cdot\frac{1}{2}v^2}{ds}$ aus, multiplicirt mit ds und integrirt, indem man F_t als Function des Curvenbogens s dargestellt denkt, zwischen zwei Grenzen s_0 und s, welche den Geschwindigkeiten v_0 und v entsprechen, so erhält man:

$$\int_{s_0}^{s} F_t ds = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2.$$

Das Element des Integrales zur Linken, nämlich das Produkt aus der Tangentialkraft und dem Wegelemente ds, durch welches der bewegliche Punkt fortgeführt wird, heisst die Elementararbeit der Kraft F und das Integral selbst die Arbeit der Kraft F längs des Weges $s - s_0$. Die Grösse mv^2, das Produkt aus der Masse des beweglichen Punktes und dem Quadrate seiner Geschwindigkeit heisst die lebendige Kraft des Punktes. Mit Hülfe dieser Begriffsbestimmungen lautet der Inhalt der vorigen Gleichung: Bei jeder Bewegung eines Punktes ist die Arbeit der denselben treibenden Kraft längs irgend eines Weges gleich der Aenderung, welche die halbe lebendige Kraft des Punktes längs dieses Weges erleidet. Diese Gleichung geht auch aus der Gleichung in Thl. III, Cap. I, §. 14. hervor, indem man dieselbe mit der Masse m multiplicirt und bedenkt, dass $\varphi\cos\alpha = \varphi_t$, also $m\varphi\cos\alpha = m\varphi_t = F_t$ ist. Alles, was dort selbst über die Arbeit der Beschleunigung und in den folgenden §§. über Momente der Beschleunigung gesagt ist, gilt auch unmittelbar von der Kraft. Die Elementararbeit einer Kraft kann hiernach sowohl als das Produkt der Projection der Kraft auf die Richtung des Wegelementes ds und dieses Wegelementes selbst, als auch als das Produkt der Kraft F und der Projection des Wegelementes auf ihre Richtung aufgefasst werden. Die Elementararbeit der Kraft ist positiv, Null oder negativ, je nachdem die Richtung von ds mit der Richtung von F einen spitzen, rechten oder stumpfen Winkel bildet.

Die eigenthümliche Benennung „lebendige Kraft" rührt von Leibnitz her; sie hat mit der Vorstellung des Belebten nichts gemein, auch ist es rathsam, den Gedanken fern zu halten, als sei der bewegliche Punkt der Sitz einer Kraft, die ihn treibt. Leibnitz unterschied zwischen todten und lebendigen Kräften; erstere waren für ihn diejenigen, welche keine Bewegung hervorbringen, sondern nur Druck oder Spannung ausüben; letztere waren die Kräfte, welche Bewegung hervorrufen. Die ersteren maass er durch die Intensität, die zweiten durch die Arbeit oder durch die Aenderung von $\frac{1}{2}mv^2$, also wenn ursprünglich keine Geschwindigkeit vorhanden war, durch $\frac{1}{2}mv^2$. Die Geschichte der Mechanik kennt

einen heftigen Streit über das richtige Maass der Kräfte, geführt zwischen Verfechtern der Leibnitz'schen und d'Alembert'schen Ansicht über diesen Punkt; derselbe endete von selbst, als man die Benennungen sorgfältiger wählte und nicht mehr Intensität und Arbeit verwechselte.

Bezeichnet man die Arbeit einer Kraft F mit T, nämlich setzt man:

$$\int_{s_0}^{s} F_t ds = T,$$

so folgt

$$F_t = \frac{dT}{ds},$$

d. h. die Tangentialkraft ist die Derivirte der Arbeit nach dem Wege.

Setzt man den Antrieb der Kraft F gleich J, nämlich

$$\int_{t_0}^{t} F_t dt = J,$$

so folgt

$$F_t = \frac{dJ}{dt},$$

d. d. die Tangentialkraft ist die Derivirte des Antriebs nach der Zeit.

Die Arbeit einer Kraft kann immer als das Produkt einer Intensität und einer Länge dargestellt werden. Die Einheit der Arbeit ist die Arbeit, welche die Krafteinheit leistet, wenn sie eine Masse in ihrer Richtung um die Längeneinheit fortbewegt. Da die Krafteinheit das Kilogramm und die Längeneinheit das Meter ist, so heisst die Arbeitseinheit das Kilogrammeter.

Die hier erläuterten Begriffe lassen sich auf Kräfte aller Ordnungen ausdehnen. Construirt man nämlich die Hodographen aller Ordnungen, indem man von einem beliebig annehmbaren Pole aus mit den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der 1., 2., 3., ... Ordnung Radienvectoren parallel zieht und die Endpunkte zu continuirlichen Curven verbindet, so ist das Bogenelement des Hodographen H_n der n^{ten} Ordnung die Elementarbeschleunigung n^{ter} Ordnung $\varphi^{(n)}dt$ und wenn gleichzeitig mit dem Hauptpunkte ein beweglicher Punkt den Hodographen beschreibt, $\varphi^{(n)}$ dessen Geschwindigkeit und parallel der Tangente des Hodographen gerichtet. Die Beschleunigung der $(n+1)^{\text{sten}}$ Ordnung $\varphi^{(n+1)}$ zerfällt dann in eine Componente $\varphi_t^{(n+1)} = \frac{d\varphi^{(n)}}{dt}$ längs der Tangente des Hodographen und eine andere $\varphi_\nu^{(n+1)}$ in der Richtung der Hauptnormalen nach dem Krümmungsmittelpunkte des Hodographen H_n hin gerichtet. Letztere ist, wenn $d\varepsilon_n$ den Contingenzwinkel von H_n bedeutet, $\varphi_\nu^{(n+1)} = \varphi^{(n)} \cdot \frac{d\varepsilon_n}{dt}$, oder wenn $ds_n = \varphi^{(n)}dt$ das Bogenelement

und $\varrho_n = \frac{ds_n}{d\varepsilon_n}$ der Krümmungshalbmesser von H_n ist, $\varphi_\nu^{(n+1)} = \frac{[\varphi^{(n)}]^2}{\varrho_n}$. Man kann daher auch die Kraft $F^{(n+1)}$ der $(n+1)^{\text{sten}}$ Ordnung zerlegen in die Tangentialkraft $F_\tau^{(n+1)} = m\,\frac{d\varphi^{(n)}}{dt}$ und die Normalkraft $F_\nu^{(n+1)} = m\,\frac{[\varphi^{(n)}]^2}{\varrho_n}$, welche die Richtungen der Tangente und Hauptnormalen der Curve H_n besitzen. Man erhält daher, wie früher

$$m\varphi^{(n)} - m\varphi_0^{(n)} = \int_{t_0}^{t} F_\tau^{(n+1)} dt$$

und da $ds_n = \varphi^{(n)} dt$, also $\frac{d\varphi^{(n)}}{dt} = \varphi^{(n)}\,\frac{d\cdot\varphi^{(n)}}{ds_n}$ ist,

$$\tfrac{1}{2} m\,[\varphi^{(n)}]^2 - \tfrac{1}{2} m\,[\varphi^{(n)}]_0^2 = \int_{s_0}^{s} F_\tau^{(n+1)} ds_n.$$

§. 6. Wenn man die Kraft $F^{(n)}$ der n^{ten} Ordnung nach drei Coordinatenaxen der x, y, z zerlegt, so ergibt sich, da $F_\tau^{(n)} = m\,\frac{d\varphi^{(n-1)}}{dt} = \frac{dF^{(n-1)}}{dt}$ ist, dass die Componenten sind: $F_x^{(n)} = m\,\frac{d^n x}{dt^n}$, $F_y^{(n)} = m\,\frac{d^n y}{dt^n}$, $F_z^{(n)} = m\,\frac{d^n z}{dt^n}$. Die Intensität und die Richtungscosinusse $\cos\alpha_n$, $\cos\beta_n$, $\cos\gamma_n$ ergeben sich hieraus als

$$F^{(n)} = m\sqrt{\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)^2},$$

$$\frac{\cos\alpha_n}{\frac{d^n x}{dt^n}} = \frac{\cos\beta_n}{\frac{d^n y}{dt^n}} = \frac{\cos\gamma_n}{\frac{d^n z}{dt^n}} = \frac{1}{F^{(n)}}.$$

Denkt man sich eine Curve, welche die Bahn des Punktes an der Stelle, wo er zur Zeit t sich befindet, n-punktig berührt, so stimmen die $n-1$ ersten Differentialquotienten der Coordinaten beider überein und beginnen die Coordinatendifferenzen in der Entwickelung der Coordinaten des Hauptpunktes und eines Punktes, welcher auf der berührenden Curve mit jenem zugleich vom Berührungspunkte ausgeht und eine Bewegung besitzt, für welche die Beschleunigungen bis zur $n - 1^{\text{sten}}$ Ordnung den Beschleunigungen jenes gleich sind mit

$$\frac{1}{n!}\,\vartheta^n\left[\frac{d^n x}{dt^n} + \cdots\right],\quad \frac{1}{n!}\,\vartheta^n\left[\frac{d^n y}{dt^n} + \cdots\right],\quad \frac{1}{n!}\,\vartheta^n\left[\frac{d^n z}{dt^n} + \cdots\right].$$

Hieraus schliesst man, wie S. 201, dass die Verbindungslinie beider Punkte in der Grenze die Richtung der Kraft $F^{(n)}$ angibt und dass, wenn man die verschwindend klein werdende Entfernung beider mit δ_n (Deviation n^{ter} Ordnung) bezeichnet,

$$\frac{\delta_n}{\frac{1}{n!}\,dt^n} = \varphi^{(n)}, \qquad \delta_n = \frac{1}{n!}\,\varphi^{(n)}\,dt\,.$$

Bevor wir die Theorie der Aequivalenz der Kräfte beginnen, welche den hauptsächlichsten Gegenstand dieses ganzen vierten Theiles bildet, wollen wir zunächst eine Frage aus der Geometrie der Massen erledigen, welche von grosser Bedeutung ist. Dadurch dass man nämlich den Punkten eines Systems eine gewisse Werthigkeit oder Masse beilegt, entstehen eigenthümliche geometrische Probleme, welche von den Verhältnissen der Massenvertheilung abhängen. Man kann alle diese zu einer eigenthümlichen Theorie zusammenfassen, welche den eben gebrauchten Namen verdient. Das nächste Capitel enthält die Lehre vom Mittelpunkte der Massen, ein späteres, welches zwar hier gleichfalls Platz finden könnte, welches wir aber verschieben, bis es von dem Bedürfniss herangezogen wird, wird die Theorie des Trägheitsmomentes enthalten.

II. Capitel.

Mittelpunkt der Massen.

§. 1. Die Punkte M, M', M'', ... eines Systems sollen die Werthigkeitscoefficienten (Massen) m, m', m'', ... besitzen. Wir ziehen durch sie Parallelstralen von derselben, übrigens beliebigen Richtung, schneiden diese mit einer Ebene E senkrecht in den Punkten μ, μ', μ'', ... und bezeichnen die Abstände $M\mu$, $M'\mu'$, $M''\mu''$, ... der Punkte von dieser Ebene mit p, p', p'', ... Das Produkt mp aus der Masse und dem Abstande eines Punktes M von der Ebene E heisst dessen Moment in Bezug auf diese Ebene. Bilden wir die Summe Σmp aller dieser Momente. Wenn nun unter Festhaltung der Stralenrichtung die Ebene E parallel mit sich fortrückt, so ändert sich Σmp continuirlich und kann jeden positiven und negativen Werth zwischen $-\infty$ und $+\infty$ erreichen, falls auf den Stralen ein Unterschied des positiven und negativen Sinnes zugelassen wird. Beim Uebergange von einer Lage der Ebene zu einer anderen, welche von ihr um die Strecke ξ absteht, ändert sich diese Summe um $\Sigma m\xi$ oder da ξ ein gemeinschaftlicher Factor aller Glieder der Summe ist, um $\xi\Sigma m = \xi M$, wenn wir die Summe aller Massen mit M bezeichnen. Es ist demnach die Summe der Momente für die zweite Lage der Ebene $\Sigma mp - M\xi$ und gibt es offenbar einen Werth ξ, aber auch nur einen einzigen, für welchen diese Summe verschwindet, nämlich

$$\xi = \frac{\Sigma mp}{M}.$$

Für jeden Punkt der Ebene in dieser Lage ist $M\xi = \Sigma mp$, d. h. wenn man ihm die Gesammtmasse des Systems zuertheilt, so ist sein Moment in Bezug auf irgend eine zu der Richtung der Stralen senkrechte Ebene gleich der Summe der Momente des Systems. Ziehen wir nach zwei anderen Richtungen Parallelstralen, so gibt es für sie gleichfalls zwei Ebenen, für deren Punkte die Summe der Momente verschwindet und für deren Parallelebenen die Summe der Momente gleich dem Momente der ganzen Masse wird, sodass noch zwei weitere Gleichungen derselben Art

$$\eta = \frac{\Sigma mp_1}{M}, \quad \zeta = \frac{\Sigma mp_2}{M}$$

bestehen, worin η und ζ Abstände parallel mit den beiden anderen Stralenrichtungen von zwei beliebigen zu diesen Richtungen senkrechten Ebenen bedeuten.

Die drei Ebenen, für welche die Summe der Momente des Systems verschwindet, schneiden sich in einem Punkte, welcher die Eigenschaft besitzt, dass für jede beliebige andere, durch ihn hindurchgelegte Ebene die Summe der Momente gleichfalls Null wird. Nehmen wir nämlich die drei Schnittlinien der drei Ebenen, welche im Allgemeinen schief gegeneinander geneigt sein werden, als Axen der x, y, z an und legen durch ihren Schnittpunkt eine beliebige Ebene, deren Normale mit den Axen die Winkel λ, μ, ν bilden mag, so ist der Abstand π eines Systempunktes M (x, y, z) von dieser Ebene die Summe der Projectionen des Linienzuges der x, y, z auf deren Normale, nämlich:

$$\pi = x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu.$$

Sind nun aber ε, ε', ε'' die Winkel, welche die Richtungen der x, y, z mit den Normalen der Ebenen der (yz), (zx), (xy) bilden, so wird $x \cos\varepsilon = p$, $y \cos\varepsilon' = p_1$, $z \cos\varepsilon'' = p_2$ und mithin

$$\Sigma m\pi = \frac{\cos\lambda}{\cos\varepsilon}\Sigma mp + \frac{\cos\mu}{\cos\varepsilon'}\Sigma mp_1 + \frac{\cos\nu}{\cos\varepsilon''}\Sigma mp_2$$

und da nach der Voraussetzung $\Sigma mp = \Sigma mp_1 = \Sigma mp_2 = 0$ sind, so wird auch $\Sigma m\pi = 0$.

Wenn aber die Summe der Momente des Systems für die Ebene $\lambda\mu\nu)$, welche durch den fraglichen Punkt geht, verschwindet, so ist dem Vorigen zufolge diese Summe für jede Parallelebene zu ihr gleich dem Momente dieses Punktes, wenn ihm die Gesammtmasse des Systems zuertheilt wird. Wir erhalten daher den Satz:

In jedem Systeme von Massenpunkten gibt es einen einzigen bestimmten Punkt, für welchen die Summe der Momente des Systems in Bezug auf jede durch ihn hindurchgehende Ebene verschwindet und für jede andere nicht durch ihn hindurchgehende Ebene gleich dem Momente des-

selben ist, wenn ihm die Gesammtmasse des Systems zuertheilt wird. Dieser Punkt heisst der Mittelpunkt der Massen des Systems.

Dieser Punkt ist bestimmt, sobald seine Abstände von drei beliebigen Ebenen bekannt sind; wählen wir diese zueinander rechtwinklig, so sind seine Coordinaten x_1, y_1, z_1 diese Abstände selbst und genügen den Gleichungen

$$M \cdot x_1 = \Sigma m x$$
$$M \cdot y_1 = \Sigma m y$$
$$M \cdot z_1 = \Sigma m z.$$

Sind insbesondere die Massen aller Punkte einander gleich, so wird $\Sigma m x = m \Sigma x, \ldots$ und $M = nm$, wo n die Anzahl der Punkte bedeutet, mithin

$$x_1 = \frac{1}{n} \Sigma x, \quad y_1 = \frac{1}{n} \Sigma y, \quad z_1 = \frac{1}{n} \Sigma z,$$

d. h. die Coordinaten des Massenmittelpunktes sind die arithmetischen Mittel aus den Coordinaten der Systempunkte.

Um den Mittelpunkt der Massen zu bestimmen, dienen neben vorstehenden Gleichungen in vielen Fällen die in ihnen ausgesprochenen Sätze:

Ist die Summe der Momente für eine Ebene Null, so enthält die Ebene den Massenmittelpunkt. Ist die Summe der Momente für zwei Ebenen zugleich Null, so liegt der Massenmittelpunkt in der Schnittlinie beider Ebenen.

Ist diese Summe für irgend drei Ebenen Null, so ist ihr Schnittpunkt der Massenmittelpunkt.

Der Mittelpunkt der Masse eines ebenen Systems liegt in seiner Ebene; der Mittelpunkt der Masse einer Geraden in ihr.

Zerlegt man das System in mehrere Partialsysteme, für welche die Summe der Momente $\Sigma_1 m x$, $\Sigma_2 m x$, $\Sigma_3 m x, \ldots$, $\Sigma_1 m y$, $\Sigma_2 m y$, $\Sigma_3 m y, \ldots$ $\Sigma_1 m z$, $\Sigma_2 m z$, $\Sigma_3 m z, \ldots$, sowie deren Massen mit $\Sigma_1 m$, $\Sigma_2 m$, $\Sigma_3 m, \ldots$ bezeichnet werden mögen, so kann man, wenn ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; $\xi_3, \eta_3, \zeta_3, \ldots$ die Coordinaten ihrer Massenmittelpunkte sind, schreiben:

$$\Sigma m x = \Sigma_1 m x + \Sigma_2 m x + \Sigma_3 m x + \cdots = \xi_1 \Sigma_1 m + \xi_2 \Sigma_2 m + \xi_3 \Sigma_3 m + \cdots$$
$$\Sigma m y = \Sigma_1 m y + \Sigma_2 m y + \Sigma_3 m y + \cdots = \eta_1 \Sigma_1 m + \eta_2 \Sigma_2 m + \eta_3 \Sigma_3 m + \cdots$$
$$\Sigma m z = \Sigma_1 m z + \Sigma_2 m z + \Sigma_3 m z + \cdots = \zeta_1 \Sigma_1 m + \zeta_2 \Sigma_2 m + \zeta_3 \Sigma_3 m + \cdots$$

und werden mithin die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Gesammtmassenmittelpunktes aus den Gleichungen gefunden:

$$M \cdot x_1 = \xi_1 \Sigma_1 m + \xi_2 \Sigma_2 m + \xi_3 \Sigma_3 m + \cdots,$$
$$M \cdot y_1 = \eta_1 \Sigma_1 m + \eta_2 \Sigma_2 m + \eta_3 \Sigma_3 m + \cdots,$$
$$M \cdot z_1 = \zeta_1 \Sigma_1 m + \zeta_2 \Sigma_2 m + \zeta_3 \Sigma_3 m + \cdots,$$

d. h. der Gesammtmassenmittelpunkt ist der Mittelpunkt

der **Massen der Partialsysteme, wenn dieselben in den Partialmassenmittelpunkten vereinigt werden.**

§. 2. Es sei S der Massenmittelpunkt eines Punktsystems, dessen Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ die Massen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ besitzen und $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ die Entfernungen $SA_1, SA_2, SA_3, \ldots$ desselben von den Systempunkten. Es sei ferner O ein beliebiger Punkt des Raumes, $OS = R$ sein Abstand vom Massenmittelpunkte und $OA_1 = r_1$, $OA_2 = r_2$, $OA_3 = r_3, \ldots$ seine Abstände von den Systempunkten. Aus dem Dreiecke OSA_1 folgt dann:

$$r_1^2 = R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1 \cos(\varrho_1 R);$$

stellt man die diesen Gleichungen analogen Gleichungen für $r_2^2, r_3^2, \ldots$ auf, multiplicirt sie respective mit $m_1, m_2, m_3, \ldots$ und summirt sie, so kommt

$$\Sigma m_i r_i^2 = MR^2 + \Sigma m\varrho_i^2 - 2R\Sigma m\varrho_i \cos(\varrho_i R).$$

Es ist aber $\varrho_i \cos(\varrho_i R)$ die Projection von $SA_i = \varrho_i$ auf SO, d. h. der Abstand der Masse m_i von einer durch S gehenden, zu SO senkrechten Ebene und daher $\Sigma m\varrho_i \cos(\varrho_i R)$ als die Summe der Momente in Bezug auf diese Ebene Null. Daher bleibt

$$\Sigma m_i r_i^2 = MR^2 + \Sigma m\varrho_i^2,$$

d. h. **die Summe der Produkte der Massen aller Punkte und der Quadrate ihrer Abstände von irgend einem Punkte O des Raumes ist gleich dem Produkte der Gesammtmasse des Systems und des Abstandes des Massenmittelpunktes von O, vermehrt um die Summe der Produkte der Massen und der Quadrate ihrer Abstände vom Massenmittelpunkte.**

Das zweite Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung ist unabhängig von der Lage des Punktes O; es variirt also $\Sigma m_i r_i^2$ blos mit R und da rechts die Summe zweier positiver Grössen steht, so folgt, dass $\Sigma m_i r_i^2$ ein Minimum wird, wenn O mit S zusammenfällt. Ferner ist $\Sigma m_i r_i^2$ constant, wenn R constant ist. Es kommen daher dem Massenmittelpunkte folgende beiden Eigenschaften zu:

Die Summe der Produkte der Massen und der Quadrate ihrer Abstände vom Massenmittelpunkte ist kleiner als dieselbe Summe für jeden anderen Punkt des Raumes.

Dieselbe Summe ist constant auf Kugelflächen, welche um den Massenmittelpunkt concentrisch liegen.

Man kann der obigen Gleichung eine etwas andere Form geben. Aus dem Dreieck SA_iA_k, welches S mit irgend zwei Systempunkten A_i, A_k bildet, folgt:

$$\varrho_i^2 + \varrho_k^2 - 2\varrho_i\varrho_k \cos(\varrho_i\varrho_k) = c_{ik}^2,$$

wenn $c_{ik} = A_iA_k$ ist. Multipliciren wir diese Gleichung mit $m_i m_k$ und summiren sie, so kommt

$$\Sigma\Sigma m_i m_k (\varrho_i^2 + \varrho_k^2) - 2\Sigma\Sigma m_i m_k \varrho_i\varrho_k \cos(\varrho_i\varrho_k) = \Sigma\Sigma m_i m_k c_{ik}^2.$$

Führen wir die Summation nach i zuerst aus, so wird erhalten:

$$m_k \Sigma m_i \varrho_i^2 + m_k \varrho_k^2 \cdot M - 2\, m_k \varrho_k \Sigma m_i \varrho_i \cos(\varrho_i \varrho_k) = m_k \Sigma c_{ik}^2$$

und hierin ist $\Sigma m_i \varrho_i \cos(\varrho_i \varrho_k) = 0$, weil diese Grösse die Summe der Momente aller Massen in Bezug auf eine durch S gehende, zu ϱ_k senkrechte Ebene darstellt.

Es bleibt also noch zu summiren die Gleichung

$$m_k \Sigma m_i \varrho_i^2 + m_k \varrho_k^2 \cdot M = m_k \Sigma m_i c_{ik}^2$$

und zwar nach k. Dies liefert:

$$M(\Sigma m_i \varrho_i^2 + \Sigma m_k \varrho_k^2) = \Sigma \Sigma m_i m_k c_{ik}^2,$$

und wenn wir beiderseits mit 2 dividiren,

$$M \Sigma m_i \varrho_i^2 = \Sigma m_i m_k c_{ik}^2,$$

wo auf der rechten Seite aber die Summe so zu verstehen ist, dass nur zwei verschiedene m_i und m_k mit c_{ik}^2 zusammentreten und auch jede solche Verbindung nur einmal genommen werden darf. Deshalb wurde nur ein Summenzeichen geschrieben. Entnimmt man aus dieser Gleichung $\Sigma m_i \varrho_i^2$ und setzt es in die oben erhaltene Gleichung ein, so wird diese sich so gestalten:

$$\Sigma m_i r_i^2 = MR^2 + \frac{1}{M} \Sigma m_i m_k c_{ik}^2.$$

§. 3. Die Systeme bestehen aus getrennten Massenpunkten oder ihre Punkte hängen continuirlich zusammen. Ein System heisst homogen, wenn alle seine Punkte gleiche Masse besitzen, heterogen im anderen Falle. Bei homogenen continuirlichen Systemen versteht man unter der specifischen Masse die Masse, welche jeder Volumeneinheit des Systems zukommt. Das Wort „specifisch" wird durchgängig so gebraucht, dass es das bezeichnet, was der Volumeneinheit je nach der Species des Systems zukommt. Man findet die specifische Masse ϱ aus der Masse M des Volumens V, indem man setzt

$$\varrho = \frac{M}{V},$$

sodass also auch $M = \varrho V$ und $V = \frac{M}{\varrho}$ wird.

Besteht das System oder ein Theil desselben aus einem Aggregate homogener Massen $M', M'', M''', \ldots$, welche die Volumnia $V', V'', V''', \ldots$ einnehmen und die specifischen Massen $\varrho', \varrho'', \varrho''', \ldots$ besitzen, so versteht man unter der mittleren specifischen Masse die specifische Masse, welche die Gesammtmasse nach Ausgleichung der Massenvertheilung erhält, ohne dass eine Aenderung des Gesammtvolumens eintritt. Ist ϱ die mittlere specifische Masse, so muss demzufolge

$$\varrho(V' + V'' + V''' + \cdots) = M' + M'' + M''' + \cdots$$

sein, woraus folgt:

$$\varrho = \frac{M' + M'' + M''' + \cdots}{V' + V'' + V''' + \cdots}, \text{ oder auch } \varrho = \frac{\varrho' V' + \varrho'' V'' + \varrho''' V''' + \cdots}{V' + V'' + V''' + \cdots}.$$

Bei einem heterogenen continuirlichen System kann nicht von specifischer Masse im Allgemeinen, wohl aber von specischer Masse in einem bestimmten Punkte die Rede sein. Man versteht darunter die Masse, welcher die Volumeneinheit zukommen würde, wenn sie Masse von der Beschaffenheit des fraglichen Punktes continuirlich hätte. Um dieselbe analytisch zu bestimmen, sei Δv ein kleines Volumen des Systems, welches an jenen Punkt angrenzt und in ihm nachher verschwindend gedacht werden soll, und seine Masse sei Δm; nach Ausgleichung der Massen würde die mittlere specifische Masse $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ sein und die Masse angeben, welche die Volumeneinheit besässe, wenn sie Masse von der ausgeglichenen Beschaffenheit enthielte. Lässt man nun Δv ohne Ende abnehmen, wodurch sich Δm immer mehr der Masse des Punktes nähert, so nähert sich der Quotient immer mehr der Masse der Volumeneinheit von der Beschaffenheit der Masse dieses oder seiner specifischen Masse. Ist diese also ϱ, so erhält man durch Vollziehung des Grenzenüberganges $\varrho = \frac{dm}{dv}$, d. h. die specifische Masse eines Systempunktes ist darstellbar durch den Quotienten des Massenelementes durch das Volumenelement. Diese erweiterte Definition der specifischen Masse enthält die oben für das homogene System gegebene in sich. Aehnlich dem Obigen hat man auch: $dm = \varrho\, dv$, $dv = \frac{dm}{\varrho}$. Die Vergleichung der hier aufgestellten Formeln mit den obigen zeigt, dass man berechtigt ist, jedes heterogene System in seinen Elementen als homogen anzusehen.

Das Verhältniss der specifischen Masse ϱ zur specifischen Masse ϱ_0 irgend eines beliebig wählbaren homogenen Systems nennt man die Dichtigkeit δ, sodass

$$\delta = \frac{\varrho}{\varrho_0}, \quad \varrho = \delta \varrho_0.$$

In den Anwendungen betrachtet man Wasser als ein homogenes continuirliches System und nimmt für ϱ_0 die specifische Masse des Wassers. Leider ist der Sprachgebrauch nicht durchweg bei allen Schriftstellern derselbe und brauchen manche das Wort Dichtigkeit im Sinne von specifischer Masse.

Diese Betrachtungen sind nicht auf räumliche Systeme dreier Dimensionen beschränkt, sondern gelten auch noch, wenn das System nur eine Flächen- oder Linienausdehnung besitzt. Es genügt, statt „Volumeneinheit" hier „Flächeneinheit" und „Linieneinheit" zu sagen, um alle Resultate auf diese Fälle zu übertragen.

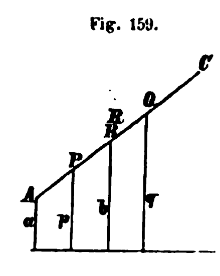
Für homogene Systeme erlangt der Mittelpunkt der Massen eine rein geometrische Bedeutung; in diesem Falle werden die Massen den Volumina, resp. Flächeninhalten und Linienlängen proportional und verschwinden die Massen als solche aus der Untersuchung. Für homogene Systeme hat bereits Archimedes den Massenmittelpunkt bestimmt (*Archimedes de aequiponderantibus*); er bediente sich dabei des an sich klaren Satzes, dass ähnliche homogene Figuren auch ähnlich liegende Massenmittelpunkte besitzen. Wird nämlich für irgend eine homogene Figur der Mittelpunkt der Masse durch eine Linienconstruktion gefunden, so erfordert die Auffindnng desselben für eine ähnliche Figur blos eine Vergrösserung oder Verkleinerung nach dem Aehnlichkeitsverhältnisse beider und führt offenbar zu derselben relativen Lage in der zweiten Figur wie in der ersten. Liegen daher die beiden ähnlichen Figuren parallel und sind AB, $A'B'$ zwei homologe Strecken derselben, sowie a, b; a', b' die Abstände ihrer Endpunkte von irgend einer beliebigen Ebene, so liefert die Aehnlichkeit der Figuren

$$\frac{a-b}{a'-b'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

§. 4. Mittelpunkt der Masse von Linien.

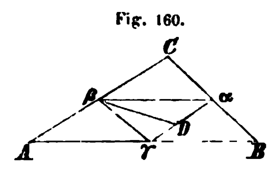
1. **Die homogene Strecke** AB (Fig. 159.). Man verlängere AB um $BC = AB$. Sind dann P, Q, R die Massenmittelpunkte von AB, BC, AC und p, q, r ihre Abstände von irgend einer Ebene, so erhält man $2r = p + q$ für die Summe der Momente, da die Massen der drei Strecken sich wie $1:1:2$ verhalten. Ferner weil P, Q, R ähnliche Lage haben $p - a = q - b = \frac{1}{2}(r - a)$, wenn a, b die Abstände von A und B von der Ebene sind. Die Elimination von q und r gibt $p = \frac{1}{2}(a + b)$. Der Massenmittelpunkt liegt also in der Mitte und ist derselbe, wie wenn blos die Punkte A, B und nicht die ganze Linie gleiche Massen besässen.

Fig. 159.



2. **Der homogene Dreiecksumfang** (Fig. 160.). Man zerlege denselben in drei Partialsysteme, nämlich die drei Seiten. Die Massenmittelpunkte derselben sind ihre Mitten, α, β, γ, und wenn man in ihnen die den Seiten AB, BC, CA proportionalen Massen derselben vereinigt, so ist der Massenmittelpunkt des Dreiecksumfanges zugleich der Massenmittelpunkt für diese drei Punkte. Der Massenmittelpunkt D für α und γ liegt aber auf $\alpha\gamma$ so, dass $D\alpha : D\gamma = AB : BC = \alpha\beta : \beta\gamma$. Daher halbirt die Gerade βD den Winkel β des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$. Auf ihr liegt aber der Massenmittelpunkt β mit der Masse proportional AC und D mit der Masse proportional $AB + BC$, also der Massenmittelpunkt des Ganzen. **Der Massenmittelpunkt des homogenen Dreiecksumfanges ist daher der Mittelpunkt des Kreises, welcher dem Dreieck der drei Seitenmitten eingeschrieben werden kann.**

Fig. 160.



3. **Der homogene Kreisbogen** (Fig. 161.). In Bezug auf den Radius, welcher nach der Mitte des Bogens geht, ist die Momentensumme Null, daher liegt

der Massenmittelpunkt auf ihm; es genügt daher, die Momentensumme in Bezug auf eine der Sehne des Bogens parallele, zur Ebene der Figur senkrechte Ebene zu finden. Suchen wir zunächst diese Momentansumme für ein dem Bogen eingeschriebenes Vieleck gleicher Seiten. Wird die Masse einer Seite MM' in deren Mitte μ vereinigt gedacht, so ist die fragliche Summe $\Sigma(\overline{MM'} \cdot \overline{\mu q})$. Die Aehnlichkeit der Dreiecke $MM'N$ und μCp liefert aber $MM' : MN = C\mu : Cp = C\mu : \mu q$ und daher ist $\Sigma(MM' \cdot \mu q) = \Sigma(MN \cdot C\mu) = C\mu \cdot \Sigma MN$, d. h. gleich $C\mu$, multiplicirt mit der Sehne des Bogens. Geht das Vieleck in den Kreisbogen über, so wird $C\mu$ zum Radius und daher, wenn x_1 die Abscisse des Massenmittelpunktes, s die Bogenlänge, c die Sehne, r den Radius bedeutet:

Fig. 161.

$$s \cdot x_1 = c \cdot r.$$

Für den Halbkreis ist $c = 2r$, $s = \pi r$, also $x_1 = \frac{2r}{\pi} r$, nahezu gleich $\frac{7}{11} r$.

4. **Massenmittelpunkt einer beliebigen Curve** (Fig. 162.). Es seien x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Massenmittelpunktes S für den Bogen AM; nimmt derselbe um $MM' = \Delta s$ zu, so werden $x_1 + \Delta x_1$, $y_1 + \Delta y_1$, $z_1 + \Delta z_1$ die Coordinaten des Massenmittelpunktes S' für AM' sein. Sind m und $m + \Delta m$ die Massen von AM und AM', so werden die Momente derselben:

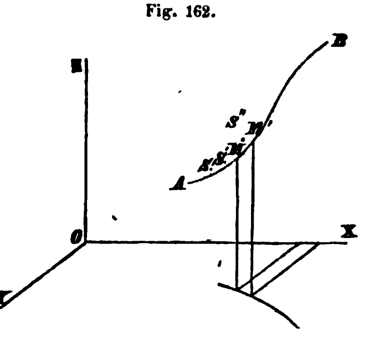


Fig. 162.

$$mx_1 \text{ und } (m + \Delta m)(x_1 + \Delta x_1);$$
$$my_1 \text{ und } (m + \Delta m)(y_1 + \Delta y_1);$$
$$mz_1 \text{ und } (m + \Delta m)(z_1 + \Delta z_1).$$

Der Bogen AM' zerfällt aber in die beiden Partialbogen AM und MM' und wenn die Coordinaten des Massenmittelpunktes S'' für MM', welche von den Coordinaten x, y, z des Punktes M um so weniger verschieden sind, je kleiner MM' ist, mit $x + \varepsilon \Delta x$, $y + \varepsilon' \Delta y$, $z + \varepsilon'' \Delta z$ bezeichnet werden, so besteht die Gleichung $(m + \Delta m)(x_1 + \Delta x_1) = mx_1 + \Delta m \cdot (x_1 + \varepsilon \Delta x_1)$ nebst zwei analog gebildeten in y_1, z_1. Aus ihr folgt aber $\Delta \cdot mx_1 = \Delta m \cdot (x_1 + \varepsilon \Delta x_1)$ und bei dem Uebergang zur Grenze, wenn t die Variabele ist, von welcher die Coordinaten der Curve und die Masse von AM Functionen sind

$$\frac{d \cdot mx_1}{dt} = x_1 \frac{dm}{dt}.$$

Hieraus erhält man durch Integration zwischen den Grenzen t_0, t, welche den Endpunkten A, B des Bogens AB entsprechen und mit Rücksicht darauf, dass die Masse des Bogens an der unteren Grenze mit dem Bogen verschwindet, wenn man zugleich für die Coordinaten y_1, z_1 dieselbe Betrachtung durchgeführt denkt:

$$mx_1 = \int_{t_0}^{t_1} x \frac{dm}{dt} dt, \quad my_1 = \int_{t_0}^{t_1} y \frac{dm}{dt} dt, \quad mz_1 = \int_{t_0}^{t_1} z \frac{dm}{dt} dt.$$

Die Formel $d(mx_1) = x\,dm$ sagt aus, dass der Elementarzuwachs des Momentes vom Bogen das Moment des Bogenelementes sei, wenn dessen Masse im Punkte x, y, z vereinigt gedacht wird und begründet die Berechtigung, die Methode des Unendlichkleinen im vorliegenden Falle anzuwenden.

Ist ϱ die specifische Masse im Punkte M, d. h. die Masse, welche die Längeneinheit enthalten würde, wenn sie in allen Punkten die Beschaffenheit des Punktes M besässe, so wird $dm = \varrho ds$; mithin

$$m = \int_{t_0}^{t_1} \varrho \frac{ds}{dt} dt, \quad mx_1 = \int_{t_0}^{t_1} \varrho x \frac{ds}{dt} dt, \quad my_1 = \int_{t_0}^{t_1} \varrho y \frac{ds}{dt} dt, \quad mz_1 = \int_{t_0}^{t_1} \varrho z \frac{ds}{dt} dt,$$

wo

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Ist die Curve homogen, so hat man

$$m = \varrho \int_{t_0}^{t_1} \frac{ds}{dt} dt = \varrho S, \quad x_1 = \int_{t_0}^{t_1} x \frac{ds}{dt} dt, \quad y_1 = \int_{t_0}^{t_1} y \frac{ds}{dt} dt, \quad z_1 = \int_{t_0}^{t_1} z \frac{ds}{dt} dt.$$

Für ebene Curven fällt die letzte Gleichung hinweg, wenn man ihre Ebene als Ebene der xy wählt.

5. **Der homogene Cycloïdenast.** Die Gleichungen der Curve für die Spitze als Ursprung und die Cycloïdenbasis als Axe der x sind $x = a(\omega - \sin \omega)$, $y = a(1 - \cos \omega)$. Die Grundvariabele t ist hier der Wälzungswinkel ω. Es ist $ds = 2a \sin \frac{1}{2}\omega d\omega$, also

$$S = 2a \int_0^{2\pi} \sin \tfrac{1}{2}\omega d\omega = 8a; \quad x_1 = \pi a; \quad Sy_1 = 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \tfrac{1}{2}\omega d\omega = \frac{32}{3} a^2,$$

mithin $y_1 = \frac{4}{3} a$.

6. Der Bogen AB einer ebenen Curve erzeugt durch Rotation um eine Axe eine Rotationsfläche, deren Inhalt $\Omega = 2\pi \int y ds$ ist, wenn y die Ordinate der Curve für die Rotationsaxe als Abscissenaxe und ds das Bogenelement ist, das Integral aber über die ganze Bogenlänge erstreckt wird. Nun ist aber für die Ordinate y_1 des Massenmittelpunktes: $S \cdot y_1 = \int y ds$ und folglich, wenn man aus beiden Gleichungen das Integral eliminirt: $\Omega = 2\pi y_1 s$, d. h. da $2\pi y_1$ der Umfang des Kreises ist, welchen der Massenmittelpunkt des Curvenbogens bei der Erzeugung der Fläche beschreibt:

Die Oberfläche eines Rotationskörpers wird erhalten, wenn man die Länge des Meridianbogens mit dem Wege multiplicirt, welchen der Massenmittelpunkt desselben bei Erzeugung des Körpers beschreibt.

Für einen Ausschnitt Ω' der Fläche Ω, entsprechend dem von den beiden Grenzmeridianebenen gebildeten Winkel ϑ besteht die Proportion: $\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{\vartheta}{2\pi}$, folglich, wenn man $\Omega = 2\pi y_1 s$ substituirt, $\Omega' = \vartheta y_1 \cdot s$. Es ist aber auch ϑy_1 der Weg des Mittelpunktes der Masse bei Erzeugung des Ausschnitts, es besteht also der ausgesprochene Satz auch in dieser etwas allgemeineren Fassung.

Dieser Satz, sowie ein analoger, den wir bei der Bestimmung des Massenmittelpunktes ebener Flächenräume kennen lernen werden, rührt von Guldin (geb. 1577, † 1643) her und wurde in seinem Werke *Centrobaryca* 1643 publicirt.

7. **Einige Aufgaben über die Bestimmung des Massenmittelpunktes von Curvenbogen.**

a) Den Massenmittelpunkt des homogen gedachten Bogens der Sinuslinie $y = a \sin \frac{x}{a}$ von $x = 0$ bis $x = \pi a$ zu finden.

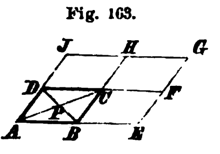
b) Den Massenmittelpunkt des vierten Theiles vom Umfange der Lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\vartheta$, vom Doppelpunkt bis zum Scheitel gerechnet, zu finden.

c) Den Massenmittelpunkt der Hälfte vom Umfange des Ovales $r = 2a \cos^3 \vartheta$ zu finden.

§. 5. Massenmittelpunkt von Flächenräumen.

1. Das homogene Parallelogramm (Fig. 163.). Man ergänze das Parallelogramm $ABCD$ durch Verlängerung der Seiten zu einem Parallelogramm AG des vierfachen Inhalts, bestehend aus vier gleichen und ähnlichen Parallelogrammen. Es seien P, Q, R, S, T die Massenmittelpunkte der Parallelogramme AC, BF, CG, DH und AG. Sind p, q, r, s, t ihre Abstände von irgend einer Ebene oder auch einer Axe in der Ebene der Figur, so hat man vermöge des Satzes von den Momenten $p + q + r + s = 4t$ und vermöge der Aehnlichkeit aller 5 Figuren, wenn a, b, c, d die Abstände der Ecken A, B, C, D von jener Ebene sind:

Fig. 163.

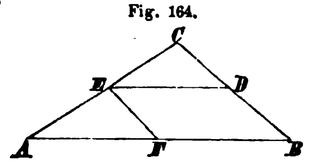


$$p - a = q - b = r - c = s - d = \tfrac{1}{2}(t - a),$$

und folglich, wenn man hiermit aus der Gleichung der Momente q, r, s, t eliminirt: $p = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$. Legt man die Axe durch die Diagonale AC, so sind $a = c = 0$, $b = -d$, also $p = 0$; geht sie durch D und B, so findet dasselbe statt. Der Massenmittelpunkt ist daher der Diagonaldurchschnitt. Es ist derselbe, wie für vier gleiche in den Ecken befindliche Massen.

2. Das homogene Dreieck (Fig. 164.). Halbirt man die Seite AC von ΔABC und zieht ED, EF parallel den beiden anderen, so erhält man zwei gleiche und dem Ganzen ähnliche Dreiecke AFE, EDC, welche mit dem Ganzen ähnlich liegen und von denen jedes ein Viertel von diesem beträgt. Sind daher Q, R, S, P die Massenmittelpunkte der Dreiecke AFE, EDC, ABC und des Parallelogramms EB und sind ferner q, r, s, p ihre Abstände von irgend einer Axe in der Ebene der Figur, sowie a, b, c, e die von A, B, C, E, so hat man, weil das Moment des Dreiecks ABC die Summe der Momente der Figuren ist, welche dasselbe bilden, $2p + q + r = 4s$. Ferner liefert die Aehnlichkeit der Figuren: $q - a = r - e = \frac{1}{2}(s - a)$, zugleich ist nach 1. $p = \frac{1}{2}(b + e)$. Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen p, q, r, so ergibt sich $s = \frac{1}{3}(a + b + c)$. Lässt man die Axe mit ausgezeichneten Linien des Dreiecks zusammenfallen, so gelangt man zu Specialsätzen über die Lage des Massenmittelpunktes. Fällt sie mit AB zusammen, so wird $s = \frac{1}{3}c$. Es steht der Massenmittelpunkt daher an jeder Seite um $\frac{1}{3}$ der zugehörigen Höhe ab. Fällt die Axe mit der durch C gehenden Mediane (Halbirungslinie von AB) zusammen, so wird $b = -a$, $c = 0$ also $s = 0$. Der Massenmittelpunkt ist also der Schnittpunkt der drei Medianen und theilt jede von ihnen im Verhältnisse $1:2$. Es ist daher zugleich der Punkt, von welchem aus das Dreieck durch Linien, welche nach den Ecken gehen, in drei flächengleiche Dreiecke zerfällt werden kann.

Fig. 164.



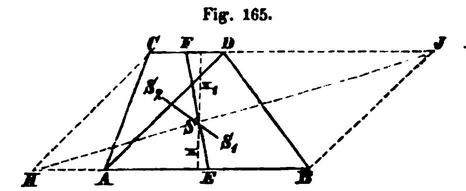
Drei gleiche Massen in den Ecken des Dreiecks haben denselben Massenmittelpunkt, wie die Fläche des homogenen Dreiecks.

3. Das homogene Trapez (Fig. 165.). Man zerlege dasselbe durch eine der Diagonalen, z. B. AD in zwei Dreiecke ABD und ACD und bestimme ihre Massenmittelpunkte S_1 und S_2; theilt man S_1S_2 in S so, dass $SS_1 : SS_2 = \Delta ACD : \Delta ABD$, so ist S der Massenmittelpunkt des Trapezes. Durch S geht auch die Verbindungslinie FE der Mitten von AB und CD. Das Verhältniss der Abstände x, x' des Massenmittelpunktes von den Seiten AB, CD findet man, indem man die Momente

der drei Massenmittelpunkte S_1, S_2, S für diese Seiten nimmt; für h als Höhe des Trapezes ist nämlich:

$$\tfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})\, h \cdot x = \tfrac{1}{2}\overline{AB} \cdot h \cdot \tfrac{1}{3} h + \tfrac{1}{2}\overline{CD} \cdot h \cdot \tfrac{2}{3} h$$
$$\tfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})\, h \cdot x' = \tfrac{1}{2}\overline{AB} . h \cdot \tfrac{2}{3} h + \tfrac{1}{2}\overline{CD} \cdot h \cdot \tfrac{1}{3} h$$

Fig. 165.



und hieraus

$$\frac{x}{x'} = \frac{\tfrac{1}{2}\overline{AB} + \overline{CD}}{\overline{AB} + \tfrac{1}{2}\overline{CD}} = \frac{HE}{FJ},$$

welche Gleichung leicht construirbar ist.

Ueber den Massenmittelpunkt des allgemeinen nicht überschlagenen Vierecks s. Möbius, Lehrbuch der Statik, S. 211.

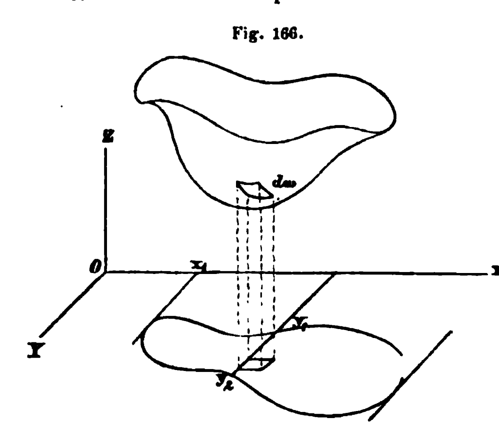
4. **Kreissector und Kreissegment.** Zerlegt man den Sector durch unendlich nahe Radien in Elementarsectoren und wendet auf sie die Massenmittelpunktsbestimmung des Dreiecks an, so bilden die Massenmittelpunkte aller dieser einen Kreisbogen vom Radius $\frac{2}{3}r$, der Sehne $\frac{2}{3}c$, der Länge $\frac{2}{3}S$, wenn r, c, S der Radius, die Sehne und die Bogenlänge am Sector sind. Denkt man sich in diesen Punkten die Massen der Elementarsectoren vereinigt und sucht den Massenmittelpunkt des homogenen Kreisbogens, den sie bilden, so ist dieser zugleich der Massenmittelpunkt des Sectors. Sein Abstand vom Mittelpunkt folgt daher gemäss § 1, Nr. 3 aus $\frac{2}{3}S \cdot x_1 = \frac{2}{3}c \cdot \frac{2}{3}r$, nämlich $x_1 = \frac{2}{3}\frac{cr}{S}$. Für den Halbkreis wird $x_1 = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$.

Für das Segment setze man sein Moment und das des Dreiecks zusammen gleich dem Momente des Sectors, in Bezug auf den zur Mittellinie der Figur senkrechten Radius. Ist a die Höhe des Dreiecks, so sind die Flächen der drei Figuren $\frac{1}{2}rS$, $\frac{1}{2}ac$, $\frac{1}{2}(rS - ac)$ und die Abstände ihrer Massenmittelpunkte vom Mittelpunkte der Figur $\frac{2}{3}\frac{cr}{S}$, $\frac{2}{3}a$, x_1 und folglich ist die Gleichung der Momente

$$\tfrac{1}{3}r^2c - \tfrac{1}{3}a^2c = \tfrac{1}{2}(rS - ac)\, x_1, \text{ woraus } x_1 = \tfrac{2}{3}c\,\frac{r^2 - a^2}{rS - ac} = \tfrac{1}{6}\,\frac{c^3}{rS - ac}.$$

5. **Massenmittelpunkt eines beliebig begrenzten ebenen oder krummen Flächenstücks** (Fig. 166.). Für rechtwinklige Coordinaten x, y, z ist das Flächenelement $d\omega$, welches dem Punkte x, y, z anliegt, ein krummes Viereck, welches aus der Fläche von zweien durch den Punkt x, y gehenden, der yz- und zx-Ebene parallelen Ebenen, sowie zweien durch den Punkt $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ gehenden Ebenen derselben Beschaffenheit ausgeschnitten wird. Ist ϱ die specifische Masse der Fläche im Punkte x, y, z, so ist $\varrho d\omega$ die Masse des Flächenelements und sind folglich $\varrho x d\omega$, $\varrho y d\omega$, $\varrho z d\omega$ seine Momente bezüglich der Coordinatenebenen. Diese unendlich kleinen Grössen sind die Elemente der Masse und der Momente einer unendl

Fig. 166.



schmalen Flächenzone, in der Projection von der Breite ∂x und liefern, wenn sie (bei constantem x) nach y integrirt werden, die Masse und die Momente dieser Zone. Die Grenzen der Integration nach y ergeben sich aus der Gleichung der Projection der Grenzcurve des Flächenstücks auf die xy-Ebene und sind bekannte Functionen y', y'' von x. Wir erhalten daher

$$\int_{y=y'}^{y=y''} \varrho\, d\omega, \quad \int_{y=y'}^{y=y''} \varrho x\, d\omega, \quad \int_{y=y'}^{y=y''} \varrho y\, d\omega, \quad \int_{y=y'}^{y=y''} \varrho z\, d\omega$$

als die Masse und die Momente jener Zone, welche zwischen zwei Ebenen enthalten ist, welche im Abstande x und $x + dx$ mit der yz-Ebene parallel laufen. Diese Zone und ihre Momente selbst sind aber als das Element des Flächenstücks und die Elemente der Momente desselben in Bezug auf die Coordinatenebenen anzusehen und wenn man diese Grössen nach x zwischen den Grenzen x', x'' integrirt, welche durch die äussersten Tangenten an die Projection der Grenzcurve des Flächenstücks auf die xy-Ebene, senkrecht zur x-Axe bestimmt werden, so liefern sie die Masse M und die Momente Mx_1, My_1, Mz_1 des Flächenstücks, sodass man hat

$$M = \int_{x=x'}^{x=x''}\int_{y=y'}^{y=y''} \varrho\, d\omega, \quad Mx_1 = \int_{x=x'}^{x=x''}\int_{y=y'}^{y=y''} \varrho x\, d\omega, \quad My_1 = \int_{x=x'}^{x=x''}\int_{y=y'}^{y=y''} \varrho y\, d\omega, \quad Mz_1 = \int_{x=x'}^{x=x''}\int_{y=y'}^{y=y''} \varrho z\, d\omega.$$

Das Flächenelement $d\omega$ hat zur Projection auf die xy-Ebene das unendlich kleine Rechteck $dx\,dy$ und wird folglich erhalten, wenn man dieses durch den Cosinus der Neigung der Ebene von $d\omega$, welche die Tangentenebene der Fläche der Punkte x, y, z ist, gegen die xy-Ebene dividirt. Da die Normale der Fläche auf der Tangentenebene und die z-Axe auf der xy-Ebene senkrecht steht, so ist jene Neigung gleich der Neigung γ der Normalen gegen die z-Axe, sodass man hat:

$$d\omega = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}.$$

Je nachdem die Gleichung der Fläche unter der einen oder anderen Form gegeben ist, stellt sich $\cos\gamma$ unter verschiedenen Formen dar. Ist $U = 0$ diese Gleichung, so wird

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}},$$

woraus noch z mit Hülfe von $U = 0$ zu eliminiren ist. Stellt man die Gleichung der Fläche so dar, dass man z von x und y trennt, nämlich: $z = f(x, y)$, so ist diese Form in der vorigen einbegriffen, wenn man schreibt $z - f(x, y) = U = 0$ und folglich wird

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 1$$

und also, wenn man $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ setzt:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Unter dieser Voraussetzung nehmen die obigen Gleichungen die Form an:

$$M = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} \varrho\, dx\, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad M \cdot x_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} \varrho x\, dx\, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

$$M \cdot y_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} \varrho y\, dx\, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad M \cdot z_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} \varrho z\, dx\, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Ist das Flächenstück eben, so nehme man seine Ebene zur xy-Ebene, dann sind alle z und z_1 Null und da die Normale fortwährend mit der z-Axe parallel läuft, so wird $\cos\gamma = 1$, $d\omega = dx\,dy$ und reduciren sich die Formeln auf folgende:

$$M = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} \varrho\, dx\, dy, \quad M \cdot x_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} \varrho x\, dx\, dy, \quad M \cdot y_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} \varrho y\, dx\, dy.$$

Ist die specifische Masse ϱ, welche im Allgemeinen mit x und y variirt wird, constant, d. h. das Flächenstück homogen, so wird $M = \varrho\Omega$, wo Ω die Grösse des Flächenstücks darstellt, und fällt folglich ϱ aus den Formeln heraus. Dieselben sind dann also

$$\Omega = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} dx\, dy, \quad \Omega \cdot x_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} x\, dx\, dy, \quad \Omega \cdot y_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} y\, dx\, dy, \quad \Omega \cdot z_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} z\, dx\, dy,$$

wobei man im ersten, zweiten und dritten Integrale die Integration nach y unmittelbar ausführen kann. Insbesondere für ebene homogene Flächenräume ist:

$$\Omega = \int_{x'}^{x''} (y'' - y')\, dx, \quad \Omega \cdot x_1 = \int_{x'}^{x''} x\,(y'' - y')\, dx, \quad \Omega \cdot y_1 = \tfrac{1}{2}\int_{x'}^{x''} (y''^2 - y'^2)\, dx.$$

Unter Zugrundelegung anderer Coordinatensysteme hat man für x, y, z, $d\omega$ die betreffenden Ausdrücke einzuführen und die Grenzen der Wahl des Coordinatensystems gemäss zu bestimmen.

6. Für die Fläche der Parabel $y^2 = 2px$ zwischen Axe, Bogen vom Scheitel an gerechnet, und irgend einer Ordinate wird

$$\Omega = \tfrac{2}{3}xy, \quad \Omega x_1 = \int_0^x xy\, dx = \frac{1}{2p^2}\int_0^y y^4\, dy = \tfrac{2}{5}x^2 y, \quad \Omega y_1 = \tfrac{1}{2}\int_0^x y^2 dx = \tfrac{1}{4} \ldots$$

also $x_1 = \frac{3}{5}x$, $y_1 = \frac{3}{8}y$.

7. Zu finden a) den Massenmittelpunkt eines elliptischen Segmentes m. Hülfe des zur Sehne conjugirten Diameters; b) den Massenmittelpunkt der halben Cycloïde; c) den Massenmittelpunkt der ganzen und halben Fläche des Ovals $r = 2a\cos^3\vartheta$.

8. Der Massenmittelpunkt der Kugelzone liegt in der Mitte ihrer Höhe.

9. Rotirt eine ebene Fläche Ω um eine in ihrer Ebene liegende Axe, die wir als x-Axe ansehen wollen, so erzeugt sie ein Volumen, dessen Element $\pi(y''^2 - y'^2)\,dx$ ist und welches also selbst den Werth hat: $V = \pi\int_{x'}^{x''}(y''^2 - y'^2)\,dx$, wobei die vorige Bezeichnungsweise beibehalten ist. Nun ist aber für die Ordinate des Massenmittelpunktes der Fläche $\Omega \cdot y_1 = \frac{1}{2}\int_{x'}^{x''}(y''^2 - y'^2)\,dx$; eliminirt man daher

aus beiden Gleichungen das Integral, so kommt $V = 2\pi y_1 \cdot \Omega$, d. h. das Volumen eines Rotationskörpers wird erhalten, wenn man die rotirende Fläche mit dem Wege des Schwerpunktes derselben multiplicirt. Der Satz gilt auch noch für den Fall, dass die rotirende Fläche keine volle Umdrehung macht, dass V also nur einen Keil einer Rotationsfläche darstellt. Im Falle, dass die Rotationsaxe die Fläche schneidet, ist eine kleine Vorsicht nöthig, um das gewünschte Volumen zu erhalten. Der Satz ist das zweite Guldin'sche Theorem. Da in der Gleichung, welche dasselbe ausspricht, drei Grössen V, Ω, y_1 vorkommen, so kann jede von ihnen gefunden werden, wenn die beiden anderen bekannt sind.

§. 6. Massenmittelpunkt der Körperräume.

1. Das homogene Parallelepiped. Indem man drei Eckkanten um sich selbst verlängert, erhält man ein Parallelepiped von der 8fachen Masse, welches dem ursprünglichen im Verhältniss 1 : 2 ähnlich ist. Dieselben Betrachtungen wie §. 5., Nr. 1 führen zu dem Satz, dass der Massenmittelpunkt mit dem geometrischen Mittelpunkt zusammenfällt und zugleich der Massenmittelpunkt der 8 Ecken ist, wenn diese von gleicher Masse angenommen werden.

2. Das homogene dreiseitige Prisma (Fig. 167.). Man führe den Mittelquerschnitt $A'B'C'$ und durch die Mitten der Seiten der beiden parallelen Grundflächen die Schnitte $EFF''E''$, $EDD''E''$. Das Prisma zerfällt dann in vier ihm ähnliche, untereinander congruente dreiseitige Prismen und ein Parallelepiped; letzteres ist gleich 4, das Gesammtprisma gleich 8 der kleineren Prismen. Bezeichnen nun p, q, r, q', r', s die Abstände der Massenmittelpunkte des Parallelepipedes, der 4 kleineren Prismen und des Gesammtprisma's, $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', \ldots$ die Abstände der übrigen Punkte der Figur von einer beliebigen Ebene, so hat man

Fig. 167.

$$4p + q + q' + r + r' = 8s,$$
$$q - a = r - e = q' - a' = r' - e' = \tfrac{1}{2}(s - a),$$
$$p = \tfrac{1}{2}(b' + e').$$

Eliminirt man a, b, c, e, p, q, q', r', so bleibt $s = \frac{1}{3}(a' + b' + c')$, d. h. der Massenmittelpunkt des Prisma's ist der Massenmittelpunkt seines Mittelquerschnittes.

Auch ist $s = \frac{1}{6}(a + b + c + a'' + b'' + c'')$.

3. Das homogene Tetraeder (Fig. 168.). Drei durch die Mitten der sechs Kanten geführte Ebenen EFG, $EGHK$, EKJ zerfällen dasselbe in zwei ihm ähnliche Tetraeder und zwei gleiche dreiseitige Prismen. Jedes der letzteren ist dreimal so gross als eines jener Tetraeder und jedes von diesen ist $\frac{1}{8}$ des Ganzen. Sind P, Q, R, S, T die Massenmittelpunkte der beiden kleineren Tetraeder, der beiden Prismen und des Gesammttetraeders, so hat man, wenn die kleinen Buchstaben wieder die Abstände der gleichnamigen Punkte von irgend einer Ebene bedeuten:

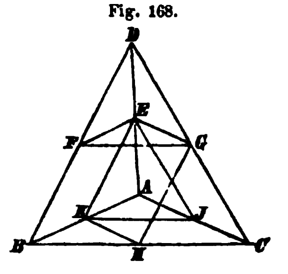


Fig. 168.

$$p + q + 3r + 3s = 8t,$$
$$p - a = q - e = \tfrac{1}{2}(t - a),$$
$$r = \tfrac{1}{6}(b + e + f + g + h + k),$$
$$s = \tfrac{1}{6}(c + e + g + h + i + k).$$

Hieraus erhält man $t = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$. Lässt man die Ebene mit einer Seitenfläche des Tetraeders zusammenfallen, so folgt, dass der Massenmittelpunkt

in $\frac{1}{4}$ der zugehörigen Höhe von dieser Seitenfläche absteht. Legt man sie durch eine Kante und die Mitte der Gegenkante, so wird $t = 0$, also der Massenmittelpunkt der Schnittpunkt aller solcher Ebenen. Hieraus folgt, dass er in der Verbindungslinie der Mitten je zweier Gegenkanten liegt. Daher ist er der Mittelpunkt des Parallelogramms $EGHK$. Die drei Ebenen, welche durch die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten und die Mitten ihrer Gegenkanten gehen, schneiden sich in einer Geraden, welche jene Ecke mit dem Massenmittelpunkte der ihr gegenüberliegenden Fläche verbindet. In dieser Geraden liegt der Massenmittelpunkt des Tetraeders und da er um $\frac{1}{4}$ der Höhe von der Fläche absteht, so theilt er jene Verbindungslinie im Verhältniss 1 : 3 und ist mithin der Punkt, von welchem aus das Tetraeder in vier gleich grosse Tetraeder durch Ebenen zerlegt werden kann, welche durch die Kanten gehen.

Die hier erläuterte Methode der Massenmittelpunktsbestimmung des Prisma's und des Tetraeders, sowie früher des Parallelogramms und Dreiecks ist von Poinsot in seinen *Elémens de statique*, sowie von Möbius in seinem Lehrbuch der Statik gelehrt worden. Sie hat den Vorzug grosser Allgemeinheit und führt zu einer Menge von Specialsätzen, sobald man die Ebene, in Bezug auf welche die Momente genommen werden, mit dieser oder jener ausgezeichneten Ebene der Figur zusammenfallen lässt. Für die hier behandelten Formen war der Abstand des Mittelpunktes des mit homogener Masse erfüllt gedachten Körpers das arithmetische Mittel aus den Abständen der Ecken, d. h. der Massenmittelpunkt des Körpers war zugleich der Massenmittelpunkt seiner schwerer gedachten Ecken. Diese Eigenschaft besitzen verhältnissmässig wenige ebenflächig begrenzte Formen.

Der Satz vom Massenmittelpunkte des dreiseitigen Prisma's, dass er der Massenmittelpunkt des Mittelquerschnittes ist, gilt offenbar auch für jedes vielseitige Prisma und für jeden Cylinder als die Grenze eines solchen. Ebenso gilt der Satz über den Massenmittelpunkt des Tetraeders, dass er die Verbindungslinie des Massenmittelpunktes der Grundfläche mit der Spitze im Verhältniss 1 : 3 theilt, für jede vielseitige Pyramide und den Kegel.

10. Die Auffindung des Massenmittelpunktes homogener Figuren wird oft sehr erleichtert durch die Anwendung folgender Sätze:

a) Besitzt die Oberfläche eines homogenen Körpers eine Symmetrieebene, so liegt der Massenmittelpunkt in ihr. Eine solche Ebene besitzt nämlich die Eigenschaft, dass eine Senkrechte in irgend einem Punkte auf ihr errichtet, diesseits und jenseits vom Fusspunkte bis zum Schnittpunkte mit der Fläche gleiche Länge hat. Legt man daher ein System von Parallelebenen, welche in unendlich kleinen Abständen aufeinanderfolgen, senkrecht zur Symmetrieebene und schneidet dies System durch ein anderes von derselben Beschaffenheit, so zerfällt der ganze Raum und folglich auch die Parthie desselben, welche den fraglichen Körper bildet, in unendlich schmale prismatische Säulchen, senkrecht zur Symmetrieebene und diesseits und jenseits derselben gleich lang. Zerschneidet man dieselben durch ein drittes System Ebenen parallel der Symmetrieebene, so führt in unendlich kleine rechtwinklige Parallelepipede, so haben diese paarweise gleiche und entgegengesetzte Abstände von der Symmetrieebene und da sie von gleicher Masse sind, auch gleiche und entgegengesetzte Momente in Bezug auf sie. Daher ist die Summe der Momente der Massen des ganzen Körpers bezüglich der Symmetrieebenen gleich Null und geht sie folglich durch den Massenmittelpunkt.

b) Besitzt die Oberfläche eines homogenen Körpers eine Diametralebene, so enthält diese den Massenmittelpunkt desselben. Eine Diametralebene halbirt ein Sehnensystem von bestimmter Richtung. Jede Symmetrieebene ist eine Diametralebene, welche das ihr zugeordnete Sehnen-

system rechtwinklig halbirt). Der Beweis des Satzes wird wie der des vorigen geführt, die beiden ersten Ebenensysteme laufen der Sehnenrichtung parallel und besteht der ganze Unterschied vom vorigen Falle darin, dass sie schräg auf der Diametralebene stehen.

c) **Besitzt die Oberfläche des Körpers eine Symmetrieaxe, so enthält diese den Massenmittelpunkt.** Eine Symmetrieaxe ist eine Gerade von der Eigenschaft, dass jede zu ihr senkrechte Gerade die Fläche in zwei Punkten trifft, welche diesseits und jenseits vom Fusspunkte gleichweit abstehen. Legt man durch eine solche Axe eine Schaar Ebenen, welche unendlich kleine Winkel aufeinanderfolgend miteinander bilden und schneidet dieselbe mit einer zweiten Schaar Ebenen, welche zur Axe senkrecht sind, so zerfällt der Körper in unendlich schmale, paarweise gleiche keilförmige Scheitelräume. Ein System von Kreiscylindern, deren gemeinsame Axe mit der Symmetrieaxe zusammenfällt, zerlegt diese Keile in unendlich kleine, paarweise von der Axe gleichentfernte Elemente. Die Massenmittelpunkte aller Paare solcher Elemente liegen in der Axe, mithin auch der Massenmittelpunkt des Ganzen.

d) **Besitzt die Oberfläche des Körpers einen Mittelpunkt, so ist er zugleich der Massenmittelpunkt.** Ein Mittelpunkt halbirt alle durch ihn hindurchgehende Sehnen der Fläche. Zieht man durch denselben eine beliebige Gerade und legt um sie eine Schaar gerader Kegelflächen concentrisch mit der Fläche, so zerlegen sie den Körper in unendlich dünne gleiche conische Scheitelräume; ein durch die Gerade geführtes Ebenensystem spaltet diese in gleiche pyramidale Scheitelräume und ein System Kugelflächen, concentrisch mit der Oberfläche des Körpers, zerlegt wiederum diese in paarweise gleiche und vom Mittelpunkte gleich weit abstehende Volumenelemente. Da dieselben gleiche paarweise Masse besitzen, so fallen die Massenmittelpunkte aller Paare in den Mittelpunkt und dieser ist mithin auch Massenmittelpunkt des Ganzen.

11. Für den **Kugelsector** ist die Linie vom Kugelmittelpunkte nach dem Mittelpunkte der Kugelmütze Symmetrieaxe und enthält folglich den Massenmittelpunkt. Zerlegt man den Sector in Elementarpyramiden mit gemeinschaftlicher Spitze im Mittelpunkte, so liegen die Massenmittelpunkte aller dieser auf einer Kugelmütze vom Radius $\frac{3}{4}r$, wenn r den Radius der Kugel bedeutet und ist der Massenmittelpunkt dieser Kugelmütze zugleich der des Kugelsectors. Daher ist $x_1 = \frac{3}{4}r - \frac{3}{8}h$, wenn h die Höhe der Kugelmütze ist, oder auch $x_1 = \frac{3}{8}(2r - h)$ und da $2r - h = r + r \cos\alpha = 2r\cos^2\frac{1}{2}\alpha$ ist, wenn α die halbe Oeffnung des Sectors bedeutet, so wird schliesslich $x_1 = \frac{3}{4}r\cos^2\frac{1}{2}\alpha$. Für die Halbkugel ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, mithin der Abstand ihres Massenmittelpunktes vom Kugelmittelpunkte $x_1 = \frac{3}{8}r$.

Für das **Kugelsegment** nehme man die Momente des Sectors, des Kegels und des Segmentes in Bezug auf die zur Symmetrieaxe senkrechte, durch den Mittelpunkt gehende Ebene und setze die Summen der beiden letzten Momente gleich den ersten. Nun sind die Volumina des Sectors, Kegels und Segmentes $\frac{2}{3}\pi r^2 h$ (Produkt aus dem Inhalte der Kugelmütze: $2\pi rh$ und $\frac{1}{3}r$), $\frac{1}{3}\pi h(r - h)(2r - h)$, die Grundfläche ist $\pi(2r - h)h)$, $\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ (Differenz zwischen Sector und Kegel) und die Abstände ihrer Massenmittelpunkte vom Kugelmittelpunkte sind $\frac{3}{4}r - \frac{3}{8}h$, $\frac{3}{4}(r - h)$, x_1 und hiermit wird die Gleichung der Momente:

$$\frac{2}{3}\pi r^2 h \cdot \frac{3}{8}(2r - h) = \frac{1}{3}\pi h(r - h)(2r - h) \cdot \frac{3}{4}(r - h) + \frac{1}{2}\pi h^2(2r - h) \cdot x_1,$$

woraus folgt:

$$x_1 = \frac{3}{4}\,\frac{(2r - h)^2}{3r - h}.$$

12. Um die Coordinaten x, y, z des Schwerpunktes eines beliebigen Körpers zu finden, sei $dx\,dy\,dz$ das am Punkte xyz im Innern des Körpers liegende Volumenelement, mithin $\varrho\,dx\,dy\,dz$ seine Masse und $\varrho x\,dx\,dy\,dz$, $\varrho y\,dx\,dy\,dz$, $\varrho z\,dx\,dy\,dz$ seine Momente in Bezug auf die Coordinatenebenen. Integrirt man diese vier Differentialien dritter Ordnung nach z zwischen zwei Grenzen z', z'', welche sich aus der Gleichung der Oberfläche des Körpers ergeben, so erhält man die Masse und die Momente einer unendlich schmalen Säule des Körpers vom Querschnitte $dx\,dy$ und der Höhe $z'' - z'$. Integrirt man hierauf die so gewonnenen Resultate, welche Differentialien zweiter Ordnung sind, nach y zwischen den Grenzen y', y'', welche die Gleichung der Projection der Oberfläche des Körpers auf die xy-Ebene gibt, so findet man die Masse und die Momente einer dünnen Lamelle von der Dicke dx, parallel der yz-Ebene. Durch eine abermalige Integration nach x zwischen den Grenzen x', x'', welche durch die äussersten Berührungsebenen der Oberfläche auf der x-Axe bestimmt werden, welche man parallel zur yz-Ebene legen kann, erhält man endlich die Masse M des ganzen Körpers und die Momente Mx_1, My_1, Mz_1 bezüglich der drei Coordinatenebenen. Daher bestehen für die Coordinaten des Massenmittelpunktes die Gleichungen:

$$M = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \varrho\,dx\,dy\,dz, \qquad M\cdot x_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \varrho x\,dx\,dy\,dz,$$

$$M\cdot y_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \varrho y\,dx\,dy\,dz, \qquad M\cdot z_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \varrho z\,dx\,dy\,dz.$$

Ist der Körper homogen, also ϱ constant, so wird $M = \varrho V$, wenn V das Volumen desselben bedeutet und mithin sind die Formeln:

$$V = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} dx\,dy\,dz, \qquad V\cdot x_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} x\,dx\,dy\,dz,$$

$$V\cdot y_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} y\,dx\,dy\,dz, \qquad V\cdot z_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} z\,dx\,dy\,dz,$$

wobei man die Integration nach z sofort ausführen kann.

Ist der homogene Körper ein Rotationskörper und die Rotationsaxe z. B. die x-Axe, so vereinfachen sich diese Gleichungen sehr bedeutend. In diesem Falle ist nämlich $z' = -z''$ und folglich $\int_{z'}^{z''} dz = 2z''$, $\int_{z'}^{z''} z\,dz = \frac{1}{2}(z''^2 - (-z'')^2) = 0$, $\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} y\,dy\,dz = \int_{y'}^{y''} y\cdot 2z''\,dy = 0$, da jedem Produkte $2z''y$ mit positivem y ein entgegengesetzt gleiches mit negativem y zugehört und sich folglich die Elemente des Integrales paarweise tilgen. Endlich ist $\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} dy\,dz = 2\int_{y'}^{y''} z''\,dy$ der Inhalt eines Kreisringes von den Radien y', y'' und daher gleich $\pi(y''^2 - y'^2)$. Durch diese speciellen Werthe ergibt sich aber jetzt:

$$V = \pi\int_{x'}^{x''}(y''^2 - y'^2)\,dx, \qquad V\cdot x_1 = \pi\int_{x'}^{x''} x\,(y''^2 - y'^2)\,dx, \qquad y_1 = 0, \qquad z_1 = 0$$

Der Inhalt dieser Formeln leuchtet auch unmittelbar ein; y_1 und z_1 sind Null, weil die x-Axe die Symmetrieaxe der Figur ist. Für $y' = 0$ wird der Rotationskörper ein Vollkörper.

Von den obigen allgemeinen Formeln für homogene Körper lässt sich die erste und zweite für manche Zwecke bequemer schreiben. Da nämlich der Querschnitt Q des Körpers senkrecht zur x-Axe den Inhalt hat: $Q = \int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} dy\,dz$, so wird hiermit

$$V = \int_{x'}^{x''} Q\,dx, \quad V \cdot x_1 = \int_{x'}^{x''} Qx\,dx.$$

13. Wir wollen diese letzte Bemerkung benutzen für die Bestimmung des Massenmittelpunktes eines parallel abgeschnittenen Kreiskegels. Da jede durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grundflächen gelegte Ebene eine Diametralebene ist, so liegt der Massenmittelpunkt auf dieser Verbindungslinie. Nehmen wir also die Kegelspitze als Coordinatenursprung und das Perpendikel auf die Grundflächen zur Richtung der x-Axe, so hat man, wenn h, h' die Abstände der Grundflächen von der Spitze, B der Querschnitt für h, Q der Querschnitt, entsprechend einer beliebigen Abscisse x, sind: $\frac{Q}{B} = \frac{x^2}{h^2}$ (wegen der Aehnlichkeit der Kreisschnitte), mithin $Q = \frac{B}{h^2}x^2$ und daher:

$$V = \int_{h'}^{h} Q\,dx = \tfrac{1}{3}\frac{B}{h^2}(h^3 - h'^3), \quad V \cdot x_1 = \int_{h'}^{h} Qx\,dx = \tfrac{1}{4}\frac{B}{h^2}(h^4 - h'^4),$$

folglich

$$x_1 = \tfrac{3}{4}\frac{h^4 - h'^4}{h^3 - h'^3}.$$

Hieraus ist leicht der Abstand des Massenmittelpunktes von den Grundflächen und das Verhältniss zu entwickeln, nach welchem er die Höhe theilt.

14. Massenmittelpunkt einer homogenen, von zwei parallelen Ebenen begrenzten elliptischen Platte. Wir beziehen das Ellipsoid, aus welchem die Platte geschnitten ist, auf die den Grenzebenen parallele Diametralebene als yz-Ebene, indem wir zu Axen der y und z die Richtungen irgend zweier conjugirter Semidiameter a, b, welche den Winkel ω bilden, zur x-Axe aber die Richtung des dritten, zu a, b conjugirten Semidiameters c nehmen, dessen Neigung gegen die yz-Ebene λ sei. Der Massenmittelpunkt der Platte liegt auf der x-Axe, da jede durch sie hindurchgehende Ebene eine Diametralebene ist; demnach bleibt blos x_1 zu suchen. Nun ist die Gleichung des Ellipsoids in Bezug auf unser Coordinatensystem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ und die Gleichung des elliptischen Querschnittes Q im Abstande x wird $\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$. Der Inhalt dieses Querschnittes wird erhalten, wenn man das Rechteck der Halbaxen desselben mit π multiplicirt; dies Rechteck wird aber durch $bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \sin\omega$ ausgedrückt, da das Parallelogramm über conjugirten Semidiametern constant ist. Demnach ist $Q = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \sin\omega$. Die Höhe der an Q anstossenden unendlich dünnen Lamelle ist $dx \sin\lambda$ und folglich ihr Inhalt $\pi bc \sin\omega \sin\lambda \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$

und da $x \sin\lambda$ ihr Abstand von der yz-Ebene ist, so wird ihr Moment in Bezug auf diese Ebene $\pi bc \sin\omega \sin^2\lambda \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) x\,dx$. Daher hat man mit Rücksicht darauf, dass $V \cdot x_1 \sin\vartheta$ das Moment der ganzen Platte wird:

$$V = \pi bc \sin\omega \sin\lambda \int_\alpha^\beta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx, \quad V \cdot x_1 = \pi bc \sin\omega \sin\lambda \int_\alpha^\beta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) x\,dx,$$

unter α und β die Stücke verstanden, welche die Grenzebenen der Platte von der x-Axe abschneiden. Hiermit erhält man:

$$V = \pi bc \sin\omega \sin\lambda \frac{(\beta - \alpha)(3a^2 - \alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2)}{3a^2},$$

$$V \cdot x_1 = \pi bc \sin\omega \sin\lambda \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(2a^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{4a^2}$$

und folglich

$$x_1 = \frac{3}{4} \frac{(\alpha + \beta)(2a^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{3a^2 - \alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2}.$$

Diese Formel ist unabhängig von λ und bleibt für dieselben α, β für alle Richtungen gültig, nach welchen der Semidiameter a denselben Werth hat, d. h. für die Erzeugungslinien eines Kegels, der mit dem Ellipsoid concentrisch ist und durch die Schnittcurve der Fläche des Ellipsoids mit einer Kugel vom Radius hindurchgeht.

Für $x = \alpha$ und $\beta = 0$ wird die Platte zum halben Ellipsoid, denn es wird $V = \frac{2}{3} \pi abc \sin\omega \sin\lambda$ und ist $abc \sin\omega \sin\lambda$ der constante Inhalt des über den drei conjugirten Semidiametern a, b, c beschriebenen Parallelepipeds und folglich gleich dem Produkte der drei halben Hauptaxen A, B, C; $\frac{2}{3}\pi ABC$ stellt aber das Volumen des halben Ellipsoids dar. Für x_1 hat man in diesem Falle $x_1 = \frac{3}{8}a$. Lässt man also eine Diametralebene des Ellipsoids sich um den Mittelpunkt desselben drehen, so schneidet sie vom Ellipsoid in allen Lagen die Hälfte ab und die Massenmittelpunkte aller dieser Hälften liegen auf den zur Schnittebene conjugirten Semidiametern um $\frac{3}{8}$ ihrer Länge vom Mittelpunkte ab. Sie bilden daher ein dem gegebenen Ellipsoide im Verhältniss $\frac{3}{8}$ ähnliches Ellipsoid. Bei einem schwimmenden Ellipsoid sind sie die Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeit.

15. Bei Anwendung von Polarcoordinaten, nämlich des Radiusvectors r, des Winkels ϑ zwischen ihm und der Polaraxe und des Winkels φ zwischen der Ebene von ϑ und der Fundamentalebene erhält man für das Volumenelement

$$dV = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

und da $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $z = r\sin\vartheta\sin\varphi$, so gehen die Formeln für die Bestimmung des Massenmittelpunktes über in:

$$M = \iiint \varrho r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi, \quad M \cdot x_1 = \iiint \varrho r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi,$$

$$M \cdot y_1 = \iiint \varrho r^3 \sin^2\vartheta \cos\varphi\, dr\, d\vartheta\, d\varphi, \quad M \cdot z_1 = \iiint \varrho r^3 \sin^2\vartheta \sin\varphi\, dr\, d\vartheta\, d\varphi;$$

und bei constanter specifischer Masse, welche im Allgemeinen eine Function von r, ϑ, φ sein wird, in:

$$V = \iiint r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi, \quad V \cdot x_1 = \iiint r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi,$$

$$V \cdot y_1 = \iiint r^3 \sin^2\vartheta \cos\varphi\, dr\, d\vartheta\, d\varphi, \quad V \cdot z_1 = \iiint r^3 \sin^2\vartheta \sin\varphi\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

In Bezug auf die Grenzen dieser Integrale sind aber zwei Fälle zu sondern: 1. die Masse des Körpers umgibt den Pol, dann ist nach ϑ von 0 bis π und nach φ von 0 bis 2π oder umgekehrt nach ϑ von 0 bis 2π und nach φ von 0 bis π zu integriren und 2. die Masse umgibt den Pol nicht; in diesem Falle sind die Grenzen für ϑ und φ nicht constant, sondern hängen von der Beschaffenheit des Tangentenkegels ab, den man vom Pole an die Oberfläche des Körpers legen kann. Die Grenzen für r ergeben sich aus der Polargleichung der Fläche. Hat die Masse leere Hohlräume, so ist eine besondere Untersuchung hinsichtlich der Grenzen für r nöthig.

16. Conischer Ausschnitt einer Kugelschicht (Durchdringungsraum eines Kreiskegels von der halben Oeffnung α und der zwischen zwei mit ihm concentrischen Kugeln von den Radien R_0, R enthaltenen Schicht).

Man hat hierfür, wenn die Symmetrieaxe Polaraxe ist:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_{R_0}^{R} r^2 dr = \tfrac{4}{3}\pi (R^3 - R_0^3) \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha ,$$

$$V \cdot x_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta \int_{R_0}^{R} r^3 dr = \tfrac{1}{4}\pi (R^4 - R_0^4) \sin^2 \alpha$$

und mithin

$$x_1 = \tfrac{3}{4} \frac{R^4 - R_0^4}{R^3 - R_0^3} \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha .$$

17. Einige Aufgaben über die Bestimmung des Schwerpunktes körperlicher Räume.

a) Ein Bogen der Parabel $y^2 = 2px$ vom Scheitel an gerechnet bis zur Abscisse a rotirt um die Tangente des Scheitels; das Volumen und die Lage des Massenmittelpunktes des Rotationskörpers zu finden.

b) Den Massenmittelpunkt einer parabolischen Platte zu finden, welche aus einem Rotationsparaboloid senkrecht zur Rotationsaxe geschnitten ist und Basiskreise von den Radien a und b besitzt.

c) Den Massenmittelpunkt des hyperbolischen Rotationskörpers zu bestimmen, welche durch einen Bogen der Hyperbel $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax)$, vom Scheitel bis zur Abscisse c gerechnet, um die reelle Axe erzeugt wird.

d) Den Massenmittelpunkt des Körpers zu finden, welcher durch Rotation der von den beiden Parabeln $y^2 = 2px$ und $y^2 = 2p'(a - x)$ eingeschlossenen Fläche um die gemeinschaftliche Hauptaxe entsteht.

e) Den Massenmittelpunkt des Octanten einer Kugel vom Radius a zu finden.

f) Von den Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z sind die Stücke a, b, c, vom Ursprung O an gerechnet, abgeschnitten und ihre Endpunkte seien resp. A, B, C. In der yz-Ebene zieht man die Gerade BC, in der xz-Ebene die Gerade AC und in der xy-Ebene durch B die Gerade BD parallel der x-Axe. Eine weitere Gerade QR bewegt sich nun so, dass sie stets der yz-Ebene parallel bleibt und die Geraden AC, BD schneidet; man soll den Massenmittelpunkt des Körpers bestimmen, welchen die erzeugte Fläche mit dem Octanten der Halbaxen bestimmt, auf welchen a, b, c abgeschnitten wurden.

III. Capitel.

Aequivalenz der Kräfte im Allgemeinen. Aequivalenz der Kräfte an einem unveränderlichen System, deren Richtungen sich in einem Punkte schneiden. Aequivalenz der Kräftepaare.

§. 1. Der Verein aller Kräfte, welche zugleich an einem Punktsystem angreifen, heisst ein Kräftesystem. Die Wirkung desselben zur Zeit t besteht darin, dass es die Elementarbeschleunigungen gibt, welche den Geschwindigkeitszustand des Punktsystems zu dieser Zeit in den der Zeit $t + dt$ entsprechenden Geschwindigkeitszustand überführen. Diese Wirkung ist verschieden nach der Beschaffenheit des Punktsystems; sie ist eine andere, wenn dasselbe unveränderlich und anders, wenn es veränderlich ist. Ist der Geschwindigkeitszustand zur Zeit $t + dt$ derselbe, wie zur Zeit t, so ist die Wirkung des Kräftesystems zur Zeit t Null, d. h. es tilgen sich die Wirkungen der einzelnen Kräfte gegenseitig so, dass sie auf diesen Zustand keinen Einfluss üben. Man nennt diesen Zustand des Kräftesystems und auch, wenngleich weniger passend, den gleichzeitigen Zustand des Punktsystems, das Gleichgewicht des Kräfte- oder Punktsystems. Zum Gleichgewicht ist der Zustand der Ruhe des Punktsystems nicht erforderlich, wenngleich er damit verbunden sein kann. Das Gleichgewicht der Kräfte kann momentan oder dauernd sein.

§. 2. Zwei Kräftesysteme heissen in Bezug auf ein Punktsystem äquivalent, wenn sie auf dasselbe die nämliche Wirkung auszuüben im Stande sind, d. h. den Geschwindigkeitszustand desselben auf gleiche Weise abzuändern vermögen. Kehrt man von zwei äquivalenten Kräftesystemen das eine so um, dass alle Kräfte unter Beibehaltung ihrer Intensitäten in entgegengesetztem Sinne an denselben Punkten angreifen, wie vorher, und lässt dies umgekehrte System mit dem anderen zugleich wirken, so bilden beide ein im Zustande des Gleichgewichtes befindliches Gesammtsystem. Denn alle Elementarbeschleunigungen, welche die Kräfte des einen veranlassen, werden durch die entgegengesetzten Elementarbeschleunigungen des anderen getilgt, so dass der Geschwindigkeitszustand des Punktsystems durch das Gesammtsystem nicht alterirt wird. Umgekehrt sind zwei Kräftesysteme äquivalent, wenn das eine von ihnen umgekehrt mit dem anderen im Gleichgewicht ist; Untersuchungen über die Aequivalenz der Kräfte sind daher zugleich auch Untersuchungen über das Gleichgewicht und umgekehrt. Statik heisst die Theorie des Gleichgewichtes oder der Aequivalenz der Kräfte.

§. 3. Beim unveränderlichen Systeme reichen drei Kräfte aus, um den Geschwindigkeitszustand zu ändern, indem die Beschleunigungen dreier Punkte die aller übrigen bestimmen. Wirken daher an mehr als

drei Punkten Kräfte, so kann das System nur dann unveränderlich bleiben, wenn noch ein Zwang die Punkte derselben in ihrer unveränderlichen Verbindung erhält. Dieser Zwang kann auf mancherlei Weise ausgeübt werden; in vielen Fällen reicht es hin, das System als aus einem festen Material gearbeitet anzusehen, in anderen Fällen denkt man sich die Systempunkte durch Fäden miteinander verknüpft. Wie dem auch immer sei, in allen Fällen kann man den Zwang durch Kräfte ersetzen, welche zwischen denjenigen Punkten wirken, deren unveränderlicher Abstand durch die Wirkung der gegebenen Kräfte bedroht ist. Diese Kräfte nennt man innere Spannungen oder Pressungen. Wenn zwei Kräftesysteme nach der obigen Definition in Bezug auf ein unveränderliches System äquivalent sind, so können die Spannungen, welche sie veranlassen, demnach sehr verschieden sein. Aehnliches gilt nicht blos für unveränderliche, sondern auch für veränderliche Systeme, wenn ihre Veränderlichkeit an gewisse Bedingungen geknüpft ist.

§. 4. Die Wirkung einer Kraft auf einen Punkt besteht in allen Fällen darin, dass sie demselben eine Beschleunigung ertheilt; oft ist aber ein Hinderniss vorhanden, welches die ertheilte Beschleunigung sogleich vernichtet, sodass die Geschwindigkeit, welche etwa vorhanden ist, nicht geändert wird, oder, wenn keine Geschwindigkeit vorhanden ist, eine solche nicht hervorgerufen werden kann. Die in einem solchen Falle ertheilte Beschleunigung heisst eine Druckbeschleunigung und die Kraft, welche sie erzeugt, ein Druck. Was das Hinderniss leistet, ist nichts anderes, als eine der Druckbeschleunigung entgegengesetzte und weil sie die ertheilte Beschleunigung gerade tilgt, gleiche Beschleunigung, die Widerstandsbeschleunigung und die Ursache dieser heisst der Widerstand; er ist eine dem Drucke gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kraft. Besteht das Hinderniss darin, dass der Punkt mit anderen materiellen Gebilden in irgend einer Weise verknüpft ist, so sagt man statt Druck und Widerstand lieber Zug und Spannung. Widerstand und Spannung sind nicht ursprünglich vorhandene Kräfte, sondern werden erst durch die Wirkung anderer Kräfte erregt, sie sind Reactionen gegenüber jenen, welche die Actionen sind.

§. 5. Kräfte, welche an einem Systeme im Gleichgewichte sind, können unbeschadet der Wirkung des ganzen Kräftesystems getilgt oder in beliebiger Menge zugefügt werden. Im ersten Falle fallen zugleich mit ihnen Spannungen hinweg, welche durch die Bedingungen, denen das Punktsystem seiner Constitution nach unterworfen ist, unter Einfluss jener Kräfte veranlasst wurden, im letzten Falle müssen solche hinzutreten.

§. 6. Oft ist eine einzelne Kraft einem ganzen Kräftesysteme äquivalent; man nennt sie die Resultante desselben und die Kräfte

des Systems ihre Componenten. Dieselbe, in entgegengesetztem Sinne genommen, bringt mit dem Kräftesysteme Gleichgewicht hervor. Ist ein Kräftesystem im Gleichgewichte, so ist jede einzelne Kraft desselben, in umgekehrtem Sinne genommen, die Resultante aller übrigen.

§. 7. Wir werden zunächst die Aequivalenz der Kräfte am unveränderlichen System studiren und erst später zeigen, wie sich die hierfür gültigen Methoden bei veränderlichen Systemen verwerthen lassen. Wir beginnen mit dem einfachsten Falle, nämlich der Aequivalenz von Kräften, deren Richtungen sich in einem Punkte schneiden, oder was vermöge der Verlegbarkeit der Kräfte in ihren Richtungen auf dasselbe hinauskommt, der Kräfte, welche einen gemeinsamen Angriffspunkt haben.

I. Kräfte, welche an demselben Punkte angreifen, sind immer äquivalent einer einzigen Kraft, d. h. besitzen immer eine Resultante; reducirt sich dieselbe auf Null, so sind sie im Gleichgewicht. Denn von Seiten jeder einzelnen Kraft erhält der Punkt eine Beschleunigung von bestimmter Grösse und Richtung. Alle diese Beschleunigungen haben nach Thl. III, Cap. I, §. 8. eine Resultante, welche ihnen allen zusammen äquivalent ist. Diese resultirende Beschleunigung hat zur Ursache eine in ihrer Richtung wirkende und ihr selbst proportionale Kraft, welche sie zu erzeugen vermag. Diese Kraft ist daher allen am Punkte angreifenden Kräften zusammen äquivalent und gibt es nur eine solche, weil für eine bestimmte Beschleunigung von bestimmter Richtung nur eine Kraft von bestimmter Intensität, derselben Richtung und demselben Sinne mit der Beschleunigung denkbar ist. Ist aber die Resultante der Beschleunigungen Null, so wird auch diese Kraft Null. In letzterem Falle verändern die Kräfte die Geschwindigkeit des Punktes nicht, sind also im Gleichgewicht.

Nach Cap. I lassen sich die Sätze über die Zusammensetzung und Zerlegung der Beschleunigungen unmittelbar auf die Kräfte übertragen, welche ihre Ursachen sind. Man pflegt daher auch die Kräfte wie die Beschleunigungen durch Strecken mit angefügter Pfeilspitze darzustellen, welche Richtung, Intensität und Sinn derselben zugleich bezeichnen. Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf Thl. III, Cap. I, §. 8. sofort der folgende Satz:

II. Die Resultante zweier Kräfte, deren Richtungen sich schneiden, geht durch ihren Schnittpunkt und ist die Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten in die Richtungen der Kräfte fallen, dem Sinne nach mit dem Sinne dieser übereinstimmen und den Intensitäten der Kräfte proportional sind. Als specielle Fälle sind dabei zu erwähnen: Fallen beide Kräfte in dieselbe Richtung, so ist ihre Resultante gleich ihrer Summe oder Differenz, je nachdem sie überein-

stimmenden oder entgegengesetzten Sinnes sind. Sind sie entgegengesetzt gleich, so tritt Gleichgewicht ein.

Umgekehrt kann mit Hülfe dieses Satzes jede Kraft in zwei andere (Componenten) zerlegt werden, welche ihr äquivalent sind und zwar auf unendlich viele Arten.

Der Satz heisst der Satz vom Parallelogramm der Kräfte und wurde vollständig zuerst von Newton in seinen *principiis philosophiae naturalis* ausgesprochen. Es gibt für denselben sehr viele Beweise. Bei dem hier befolgten Gange, nach welchem die Theorie der Kräfte der Theorie der Beschleunigung nachfolgt, ist ein ausführlicher Beweis nicht nöthig.

Man kann denselben leicht zu einem Satze vom Parallelepiped und Polygon der Kräfte erweitern, nämlich:

Die Resultante von drei Kräften, deren Richtungen sich in einem Punkte schneiden, geht durch diesen Punkt hindurch und wird nach Grösse, Richtung und Sinn durch die Diagonale des Parallelepipeds dargestellt, welches die drei Strecken, welche die Kräfte darstellen, zu Eckkanten hat.

Da die Diagonale eines Parallelepipeds, ohne dass die Kanten verschwinden, nur Null werden kann, wenn die Eckkanten in eine Ebene fallen, so folgt, dass drei an einem Punkte wirkende Kräfte nur dann im Gleichgewichte sich befinden können, wenn ihre Richtungen in einer Ebene liegen. Im Falle des Gleichgewichtes ist jede von ihnen der Resultanten der beiden übrigen entgegengesetzt gleich.

Die Resultante von n Kräften, deren Richtungen sich in einem Punkte schneiden, geht durch diesen Punkt und wird durch die Schlusslinie eines Polygons nach Grösse, Richtung und Sinn dargestellt, welches aus den n Strecken, welche die Kräfte nach Intensität, Richtung und Sinn darstellen, in irgend einer Ordnung genommen, gebildet werden kann. Schliesst sich dies Polygon, so wird die Resultante Null und befinden sich die Kräfte im Gleichgewicht.

Diese Sätze können zur Zerlegung einer Kraft in drei oder mehrere Componenten dienen.

III. Zum Gleichgewichte von Kräften, deren Richtungen sich in einem Punkte schneiden, ist erforderlich und hinreichend, dass die Summe ihrer Projectionen auf irgend drei Axen des Raumes verschwindet, von denen keine zwei parallel sind und welche auch nicht alle drei einer Ebene parallel laufen.

Befinden sich nämlich die Kräfte im Gleichgewicht, so ist das Kräftepolygon geschlossen. Nach einem bekannten Satze der Geometrie ist aber die Projectionssumme der Seiten eines geschlossenen Polygons für

jede beliebige Axe des Raumes gleich Null und die Projectionssumme der Seiten eines offenen Polygons gleich der Projection der Schlusslinie, wobei das Polygon von einem beweglichen Punkte in demselben Sinne durchlaufen gedacht und die Schlusslinie in dem Sinne vom Anfangspunkte dieser Bewegung nach dem Endpunkte genommen wird. Die Bedingung, dass die Projection des Kräftepolygons für jede Axe des Raumes verschwinde, ist aber erfüllt, sobald sie für drei Axen, wie sie im Satze angenommen sind, erfüllt ist. Denn wäre diese Summe für eine vierte Axe nicht Null, so könnte das Polygon nicht geschlossen sein und wäre folglich seine Projection gleich der Projection der Schlusslinie. Da seine Projection aber für jene drei Axen verschwindet, so müssen die Projectionen dieser Schlusslinie für diese Axen zugleich verschwinden. Die Projection einer Geraden kann aber nur für Axen verschwinden, zu welchen die Gerade rechtwinklig ist. Diese kann aber zu dreien Axen, welche nicht alle drei einer Ebene parallel laufen und von denen auch keine zwei unter sich parallel sind, nicht zugleich rechtwinklig sein. Daher ist die Projectionssumme des Kräftepolygons für jede vierte Axe Null, sobald sie es für jene drei Axen ist.

Ist andererseits die Summe der Kräfteprojectionen für drei Axen der genannten Beschaffenheit Null, so ist die Projection des Kräftepolygons für jede Axe Null und das Polygon geschlossen, mithin ist die Resultante Null und sind die Kräfte im Gleichgewicht.

Die Projectionen können rechtwinklige oder schiefe Parallelprojectionen, die Axen mögen rechtwinklig oder schief gegeneinander geneigt sein. Die rechtwinklige Projection einer Strecke ist das Produkt aus ihrer absoluten Länge und dem Cosinus ihrer Neigung gegen die Axe.

Fig. 169.

§. 8. Ist R die Resultante zweier Kräfte P, Q (Fig. 169.), so bestehen die Gleichungen:

$$\frac{P}{\sin(QR)} = \frac{Q}{\sin(RP)} = \frac{R}{\sin(PQ)}.$$

Dieselben Gleichungen bestehen auch zwischen drei Kräften P, Q, R', die sich an einem Punkte Gleichgewicht halten. Sie liegen stets in einer Ebene. Man hat weiter aus dem Parallelogramm der Kräfte:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,PQ\cos(PQ)$$

$$\frac{P-Q}{P+Q} = \frac{tg\,\frac{1}{2}[(QR)-(PR)]}{tg\,\frac{1}{2}[(QR)+(PR)]}.$$

Nimmt man irgendwo auf der Richtung der Resultante R einen Punkt an und fällt von ihm auf die Richtungen der Componenten P und Q die Perpendikel p, q, so ist $\frac{P}{q} = \frac{Q}{p}$ oder also $Pp - Qq = 0$;

denn es sind p, q den Sinussen der Winkel (PR), (QR) proportional. Dieser Satz entspricht dem im III. Thl., Cap. I, §. 18. über das Moment der Beschleunigungen entwickelten Satze.

Am Punkte A (Fig. 170.) wirke eine Kraft R und bilde ihre Richtung mit drei rechtwinkligen Coordinatenaxen die Winkel a, b, c; mit Hülfe eines rechtwinkligen Parallelepipeds erhält man die Componenten X, Y, Z derselben parallel jenen Axen und zwar

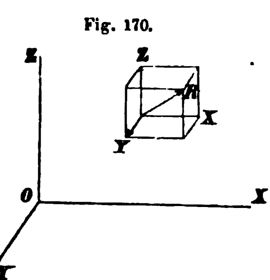


Fig. 170.

$X = R\cos a,\quad Y = R\cos b,\quad Z = R\cos c.$
Umgekehrt erhält man aus den rechtwinkligen Kräften X, Y, Z mit Hülfe desselben Parallelepipedes der Resultante R nebst ihren Richtungscosinussen, nämlich

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\frac{\cos a}{X} = \frac{\cos b}{Y} = \frac{\cos c}{Z} = \frac{1}{R}.$$

In diesen Formeln bedeutet R eine absolute Länge und ist in Folge dessen die Wurzel mit dem Zeichen $(+)$ zu nehmen; X, Y, Z dagegen sind positiv oder negativ, je nachdem ihr Sinn mit dem positiven Sinne der Coordinatenaxen übereinstimmt oder ihm entgegengesetzt ist.

Wirken am Punkte A beliebig viele Kräfte P, P', P'', ..., deren Richtungswinkel α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ''; ... sind, und soll die Resultante derselben bestimmt werden, so zerlege man jede der Kräfte, wie P in drei Componenten $X = P\cos\alpha$, $Y = P\cos\beta$, $Z = P\cos\gamma$ parallel den Coordinatenaxen. Die sämmtlichen Kräfte P sind alsdann äquivalent den drei Kräften ΣX, ΣY, ΣZ, deren Resultante, die Resultante jener, durch die Formeln bestimmt wird:

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}$$

$$\frac{\cos a}{\Sigma X} = \frac{\cos b}{\Sigma Y} = \frac{\cos c}{\Sigma Z} = \frac{1}{R}.$$

Die Bedingung des Gleichgewichtes der Kräfte P ist: $R = 0$, sie zerfällt, da R^2 die Quadratsumme dreier reeller Grössen ist, oder auch nach dem letzten Satze §. 7. in die drei Bedingungen:

$$\Sigma X = 0,\quad \Sigma Y = 0,\quad \Sigma Z = 0.$$

Liegen alle Kräfte in einer Ebene, so fallen, wenn man sie zur Ebene der xy wählt, alle Z hinweg und ist von drei Bedingungen immer eine identisch erfüllt.

§. 9. **Ist der Schnittpunkt der Kräfte P genöthigt, auf einer Curve zu bleiben**, so tritt zu den Kräften P noch der Widerstand der Curve hinzu. Derselbe zerfällt in zwei Componenten, den

Normalwiderstand N und den tangentialen, die Reibung, welche proportional N und mit Hülfe des Reibungscoefficienten f durch fN darstellbar ist. Sind daher N_x, N_y, N_z die Componenten von N, so sind

$$\Sigma X + N_x \mp fN\frac{dx}{ds}, \quad \Sigma Y + N_y \mp fN\frac{dy}{ds}, \quad \Sigma Z + N_z \mp fN\frac{dz}{ds}$$

die Projectionssummen aller Kräfte für die Coordinatenaxen, wobei über das Vorzeichen der Reibung noch zu entscheiden ist. Im Falle des Gleichgewichtes der Kräfte sind also die Bedingungen erfüllt

$$\Sigma X + N_x \mp fN\frac{dx}{ds} = 0,$$

$$\Sigma Y + N_y \mp fN\frac{dy}{ds} = 0,$$

$$\Sigma Z + N_z \mp fN\frac{dz}{ds} = 0,$$

und im Falle die Reibung Null ist,

$$\Sigma X + N_x = 0, \quad \Sigma Y + N_y = 0, \quad \Sigma Z + N_z = 0.$$

Man erhält diese Gleichungen auch aus den Gleichungen der Bewegung S. 311, indem man die Componenten der Beschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ gleich Null setzt, wie dies dem Falle des Gleichgewichtes entspricht, die Gleichungen aber vorher mit der Masse des Punktes multiplicirt; denn die hier gebrauchten Zeichen X, Y, Z, N_x, N_y, N_z, N bedeuten Kräfte, während die dort gebrauchten Beschleunigungen ausdrücken.

Wir behandeln diesen letzteren Fall, als den einfacheren, zuerst. Multiplicirt man die Gleichungen mit $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, addirt sie und bedenkt, dass diese Multiplicatoren die Richtungscosinusse der Tangente der Curve sind und dass also, da N normal zu dieser ist, die Projectionssumme $N_x\frac{dx}{ds} + N_y\frac{dy}{ds} + N_z\frac{dz}{ds}$, welche gleich der Projection von N auf die Tangente sein würde, verschwinden muss, so bleibt als Gleichgewichtsbedingung zwischen den gegebenen Kräften zu erfüllen:

$$\Sigma X \cdot \frac{dx}{ds} + \Sigma Y \cdot \frac{dy}{ds} + \Sigma Z \cdot \frac{dz}{ds} = 0,$$

welche aussagt, dass die Resultante R der gegebenen Kräfte normal zur Tangente oder dass ihre Projection auf die Tangente Null sein müsse. Sind nun $U = 0$, $V = 0$ die beiden Gleichungen der Curve, so genügen dx, dy, dz den Differentialgleichungen derselben und hat man also das System von homogenen linearen Gleichungen:

$$\Sigma X \cdot dx + \Sigma Y \cdot dy + \Sigma Z \cdot dz = 0$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot dz = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz = 0,$$

aus welchen durch Elimination der Differentialien dx, dy, dz die Gleichgewichtsbedingung folgt:

$$\begin{vmatrix} \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Sind die gegebenen Kräfte als Functionen des Ortes gegeben, so lehrt diese Gleichung in Verbindung mit $U = 0$, $V = 0$ die Coordinaten x, y, z der Punkte der Curven kennen, an welchen die Kräfte sich Gleichgewicht halten können. Für den Normalwiderstand N erhält man hierzu aus obigen Gleichungen:

$$N_x = -\Sigma X, \quad N_y = -\Sigma Y, \quad N_z = -\Sigma Z, \quad N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2,$$

wodurch derselbe nach Intensität, Richtung und Sinn unzweideutig bestimmt ist.

Beispiel. An welchen Stellen des Kreises $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, $ax + by + cz = 0$ findet für einen schweren Punkt Gleichgewicht statt? Man hat hier $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = -mg$, wenn m die Masse des Punktes ist, mithin:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -mg \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \quad ax + by + cz = 0,$$

also

$$x = \pm \frac{rc}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \mp \frac{ra}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Findet Reibung statt, so folgt aus den Gleichungen, welche zu Anfang des §. aufgestellt wurden, durch Elimination von N_x, N_y, N_z:

$$\Sigma X \cdot \frac{dx}{ds} + \Sigma Y \cdot \frac{dy}{ds} + \Sigma Z \cdot \frac{dz}{ds} \mp fN = 0,$$

welche Gleichgewichtsbedingung aussagt, dass die tangentielle Componente der gegebenen Kräfte die Reibung tilgen muss. Hierbei sind zwei äusserste Grenzen wohl zu beachten, innerhalb welcher das Gleichgewicht überhaupt möglich ist. Einmal kann die tangentiale Componente der Kräfte so gross sein, dass sie die Reibung bereits mit überwindet und eine kleine Aenderung derselben in ihrem Sinne sofort tangentiale Beschleunigung geben würde. Auf diesen Fall bezieht sich die Form der eben aufgestellten Bedingungsgleichung mit dem Zeichen (—). Andererseits kann aber der Fall eintreten, dass die tangentiale Com-

ponente nur so gross ist, dass eine kleine Aenderung derselben in dem ihr entgegengesetzten Sinne sofort tangentiale Beschleunigung in letzterem Sinne geben würde. In diesem Falle wird die Reibung noch nicht mit überwunden und ist die Bedingungsgleichung zu schreiben:

$$\Sigma X \cdot \frac{dx}{ds} + \Sigma Y \cdot \frac{dy}{ds} + \Sigma Z \cdot \frac{dz}{ds} + fN = 0.$$

Denn die Reibung ist ein Widerstand, der erregt wird durch die Bewegung, welche eben beginnen will und wirkt dem Sinne dieser entgegen. In den beiden hier unterschiedenen Fällen ist der Sinn der Bewegung, welche eben beginnen will, verschieden, daher ist auch das Zeichen von fN das eine Mal das positive, das andere Mal das negative. Ueber diese beiden durch die Formel

$$\Sigma X \cdot \frac{dx}{ds} + \Sigma Y \cdot \frac{dy}{ds} + \Sigma Z \cdot \frac{dz}{ds} \mp fN = 0$$

bezeichneten Grenzfälle hinaus ist Gleichgewicht mit Reibung nicht möglich, zwischen ihnen aber liegt ein Spielraum, innerhalb dessen dasselbe auf unzählige Arten eintreten kann. Um den Normaldruck N zu finden, quadriren und addiren wir die aus den obigen drei Gleichgewichtsbedingungen durch Elimination von fN hervorgehenden Combinationen

$$\Sigma Y \cdot \frac{dz}{ds} - \Sigma Z \cdot \frac{dy}{ds} = -\left(N_y \frac{dz}{ds} - N_z \frac{dy}{ds}\right),$$

$$\Sigma Z \cdot \frac{dx}{ds} - \Sigma X \cdot \frac{dz}{ds} = -\left(N_z \frac{dx}{ds} - N_x \frac{dz}{ds}\right),$$

$$\Sigma X \cdot \frac{dy}{ds} - \Sigma Y \cdot \frac{dx}{ds} = -\left(N_x \frac{dy}{ds} - N_y \frac{dx}{ds}\right),$$

und erhalten, da $N_x \frac{dx}{ds} + N_y \frac{dy}{ds} + N_z \frac{dz}{ds} = 0$ ist (weil N senkrecht zur Tangente) und $N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 = N^2$, $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$

$$N^2 = \left(\Sigma Y \cdot \frac{dz}{ds} - \Sigma Z \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\Sigma Z \cdot \frac{dx}{ds} - \Sigma X \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2 + \left(\Sigma X \cdot \frac{dy}{ds} - \Sigma Y \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2$$

$$= (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2 - \left(\Sigma X \cdot \frac{dx}{ds} + \Sigma Y \cdot \frac{dy}{ds} + \Sigma Z \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2.$$

Hiermit wird die Gleichgewichtsbedingung

$$\Sigma X \cdot dx + \Sigma Y \cdot dy + \Sigma Z \cdot dz = \pm \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} R\,ds, \quad R^2 = (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2$$

wozu noch die Differentialgleichungen der Bahn kommen:

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = 0.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, wenn

$$\begin{vmatrix} \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \Delta, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \delta_1, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial z} & \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial z} & \frac{\partial V}{\partial x} \end{vmatrix} = \delta_2, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} = \delta_3$$

gesetzt wird:

$$\Delta \cdot \frac{dx}{ds} = \pm \frac{fR}{\sqrt{1+f^2}} \cdot \delta_1, \quad \Delta \cdot \frac{dy}{ds} = \pm \frac{fR}{\sqrt{1+f^2}} \cdot \delta_2, \quad \Delta \cdot \frac{dz}{ds} = \pm \frac{fR}{\sqrt{1+f^2}} \cdot \delta_3,$$

oder mit Rücksicht auf $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$:

$$\Delta^2 = \frac{fR}{1+f^2} (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2),$$

d. h. also:

$$\begin{vmatrix} \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\pm fR}{\sqrt{1+f^2}} \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial z} & \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial z} & \frac{\partial V}{\partial x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Gleichung liefert in Verbindung mit $U = 0$, $V = 0$ die Punkte der Curve, an welchen in der äussersten Grenze das Gleichgewicht möglich ist. Diese Punkte gehören vermöge der Zeichen $\mp$ paarweise zusammen. Je ein Paar Punkte bestimmt auf der Curve einen Spielraum, dessen Grenzen sie sind und innerhalb dessen das Gleichgewicht bestehen kann.

§. 10. **Ist der Schnittpunkt der Kräfte P genöthigt, auf einer Fläche zu bleiben**, so tritt zu den Kräften P noch der Widerstand der Fläche hinzu. Derselbe kann zerlegt werden in eine Componente, welche in die Normale der Fläche fällt, den Normalwiderstand N und eine andere, die Reibung, welche in die Tangentenebene fällt, der Beschleunigung, welche die gegebenen Kräfte geben, entgegenwirkt und N proportional ist, sodass sie durch fN ausgedrückt werden kann. Die Componenten der Kräfte, welche auf den Punkt wirken, sind demnach:

$$\Sigma X + N_x \mp fN \frac{dx}{ds}, \quad \Sigma Y + N_y \mp fN \frac{dy}{ds}, \quad \Sigma Z + N_z \mp fN \frac{dz}{ds},$$

wo ds das Bogenelement bedeutet in der Richtung, in welcher die gegebenen Kräfte den Punkt auf der Fläche beschleunigen. Für das Gleichgewicht müssen daher wieder diese Ausdrücke verschwinden.

Ist die Reibung Null, so sind die Gleichgewichtsbedingungen

$$\Sigma X + N_x = 0, \quad \Sigma Y + N_y = 0, \quad \Sigma Z + N_z = 0;$$

sie drücken aus, dass der Normalwiderstand der Resultanten der gegebenen

Kräfte entgegengesetzt sein muss. Ist nun $U = 0$ die Gleichung der Fläche, so ergibt sich die Richtung $(\lambda\mu\nu)$ der Normalen durch die Proportion*):

$$\frac{\cos\lambda}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\cos\mu}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\cos\nu}{\frac{\partial U}{\partial z}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}.$$

Zugleich ist aber auch, da N in die Normale fällt:

$$\frac{\cos\lambda}{N_x} = \frac{\cos\mu}{N_y} = \frac{\cos\nu}{N_z} = \frac{1}{N}.$$

Man erhält daher durch Elimination von N_x, N_y, N_z aus den drei Gleichungen des Gleichgewichtes:

$$\frac{\Sigma X}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\Sigma Y}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\Sigma Z}{\frac{\partial U}{\partial z}},$$

welche zwei Gleichungen von den gegebenen Kräften ohne Hülfe des Widerstandes erfüllt werden müssen. Sie sind gleichbedeutend mit

$$\begin{vmatrix} \Sigma Y & \Sigma Z \\ \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \Sigma Z & \Sigma X \\ \frac{\partial U}{\partial z} & \frac{\partial U}{\partial x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \Sigma X & \Sigma Y \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Durch Elimination von λ, μ, ν ergibt sich ebenso:

*) Dieselbe erhält man am leichtesten so. Die Normale des Punktes xyz der Fläche steht senkrecht auf allen Bogenelementen ds, welche von ihrem Fusspunkte nach folgenden Punkten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ der Fläche führen. Projicirt man daher das geschlossene Dreieck der unendlich kleinen Linien dx, dy, dz und $-ds$ auf die Normale, so verschwindet die Projectionssumme der drei ersten für sich, da ds ohnehin die Projection Null hat. dx, dy, dz bilden aber mit der Normalen die Winkel λ, μ, ν und daher ist

$$\cos\lambda \cdot dx + \cos\mu \cdot dy + \cos\nu \cdot dz = 0,$$

eine Gleichung, welche ausdrückt, dass der Punkt $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ in der Tangentenebene des Punktes (xyz) und da er diesem unendlich nah ist, in der Fläche liege. Dieselbe Bedingung drückt aber auch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = 0$$

der Fläche aus, da sie die Relation dafür angibt, wie die Coordinaten eines Punktes der Fläche sich ändern dürfen, damit der Punkt auf der Fläche bleibe. Da beide Gleichungen mithin identisch sind, so muss die eine durch einen Factor L in die andere übergeführt werden können, d. h. es ist

$$L \cdot \cos\lambda = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad L \cdot \cos\mu = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad L \cdot \cos\nu = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\frac{\cos\lambda}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\cos\mu}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\cos\nu}{\frac{\partial U}{\partial z}} = \frac{1}{L}, \quad L = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

$$\frac{N_x}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{N_y}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{N_z}{\frac{\partial U}{\partial z}} = \frac{N}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}.$$

Sind die Kräfte als Functionen des Ortes gegeben, so bestimmen diese Gleichungen in Verbindung mit $U = 0$ die Punkte der Fläche, in welchen das Gleichgewicht möglich ist und den Widerstand daselbst.

Z. B. für einen schweren Punkt auf der Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ wäre $\frac{0}{x} = \frac{0}{y} = \frac{-mg}{z}$ und also $x = y = 0$, $z = \pm r$; das Gleichgewicht findet also im höchsten und im tiefsten Punkte der Kugel statt. Die Gleichungen $N_x = 0$, $N_y = 0$, $-mg + N_z = 0$ lehren, dass N vertikal aufwärts wirkt und $N = N_z = mg$ ist. Damit dies möglich sei, muss der Punkt für den Fall der höchsten Lage auf der Aussenfläche, für den Fall der tiefsten Lage auf der Innenfläche der Kugel sich befinden.

Findet Reibung statt, so sind die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\Sigma X + N_x \mp fN \frac{dx}{ds} = 0,$$

$$\Sigma Y + N_y \mp fN \frac{dy}{ds} = 0,$$

$$\Sigma Z + N_z \mp fN \frac{dz}{ds} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, indem man sie mit $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ der Reihe nach multiplicirt und addirt, dabei aber bedenkt, dass

$$fN\left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

vermöge der Differentialgleichung der Fläche, nämlich

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = 0$$

verschwindet und

$$\frac{N_x}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{N_y}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{N_z}{\frac{\partial U}{\partial z}} = \frac{N}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}$$

ist:

$$N = \left(\Sigma X \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \Sigma Y \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \Sigma Z \cdot \frac{\partial U}{\partial z}\right) : \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Combinirt man andererseits dieselben Gleichungen paarweise so, dass man z. B. die zweite mit $\frac{\partial U}{\partial z}$, die dritte mit $\frac{\partial U}{\partial y}$ multiplicirt und subtrahirt, dabei aber bedenkt, dass $N_y \frac{\partial U}{\partial z} - N_z \frac{\partial U}{\partial y} = 0$ ist u. s. f., so ergeben sich:

$$\Sigma Y \cdot \frac{\partial U}{\partial z} - \Sigma Z \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = \pm fN \left(\frac{dy}{ds} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{dz}{ds} \frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

$$\Sigma Z \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \Sigma X \cdot \frac{\partial U}{\partial z} = \pm fN \left(\frac{dz}{ds} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{dx}{ds} \frac{\partial U}{\partial z}\right),$$

$$\Sigma X \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - \Sigma Y \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = \pm fN \left(\frac{dx}{ds} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{dy}{ds} \frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

und aus diesen Gleichungen, indem man sie quadrirt und addirt,

$$\left(\Sigma Y \cdot \frac{\partial U}{\partial z} - \Sigma Z \cdot \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\Sigma Z \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \Sigma X \cdot \frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\Sigma X \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - \Sigma Y \cdot \frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$$
$$= f^2 N^2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right].$$

Führt man schliesslich in diese Gleichung den vorhin entwickelten Werth des Widerstandes N ein, so kommt

$$\left[\left(\Sigma Y \cdot \frac{\partial U}{\partial z} - \Sigma Z \cdot \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\Sigma Z \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \Sigma X \cdot \frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\Sigma X \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - \Sigma Y \cdot \frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\mp f \left(\Sigma X \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \Sigma Y \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \Sigma Z \cdot \frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt in Verbindung mit $U = 0$ auf der Fläche die Bereiche, innerhalb welcher das Gleichgewicht möglich ist. Sie ist die Gleichung zweier Flächenäste, welche auf der gegebenen Fläche die äussersten Grenzlinien des Gleichgewichtes bezeichnen; die Zeichen $\mp$ beziehen sich hierbei wieder, wie in §. 9., auf die Fälle, dass die Reibung durch die gegebenen Kräfte bereits mit überwunden wird oder nicht.

Für einen schweren Punkt z. B. wird diese Gleichung

$$\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} \mp f \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Der Reibungscoefficient f hat eine leicht zu erkennende Bedeutung. Bildet nämlich in einer äussersten Lage des Gleichgewichtes die Resultante R der gegebenen Kräfte mit der Normalen der Fläche den Winkel μ, so sind ihre Componenten in der Richtung der Normalen und in der Tangentenebene der Fläche $R \cos \mu$ und $R \sin \mu$ und da erstere mit dem Normalwiderstande N, letztere mit der Reibung fN Gleichgewicht halten muss, so bestehen die Gleichungen $R \cos \mu = N$, $R \sin \mu = fN$ aus welchen durch Division folgt $tg\, \mu = f$. Der Winkel μ heisst der **Ruhewinkel** und ist also der **Reibungscoefficient die Tangente des Ruhewinkels.**

§. 11. Neben den einzelnen Kräften, welche die Ursachen der Beschleunigung von Punkten sind, hat man eine Verbindung zweier solcher als einfaches Element in die Mechanik eingeführt. Die Verbindung zweier gleicher, längs zweier Parallellinien wirkender Kräfte entgegengesetzten Sinnes heisst ein **Kräftepaar**, der Abstand ihrer

parallelen Richtungen oder die Breite des von diesen bestimmten Flächenstreifens der Arm des Paares, die beiden Kräfte die Seitenkräfte und das Produkt aus der gemeinschaftlichen Intensität der Seitenkräfte und dem Arme das Moment des Paares. Zur geometrischen Bezeichnung eines Paares genügt die Figur, welche die Intensität der Seitenkräfte durch Strecken und ihren Sinn durch Pfeilspitzen andeutet; den Arm zu zeichnen ist überflüssig, auch sind die Angriffspunkte der Seitenkräfte nichts Wesentliches, da jede Kraft in ihrer Richtung verlegbar ist. Die Ebene eines Paares scheidet den Raum in zwei Theile; ein sehender Punkt, welcher sich in dem einen von beiden befindet, erblickt die Stellung der Pfeilspitzen übereinstimmend mit der Uhrzeigerbewegung, während sie ihm von dem anderen Theile aus umgekehrt erscheint. Zwei Paare in demselben oder in parallelen Ebenen haben gleichen oder entgegengesetzten Sinn, je nachdem die Stellung der Pfeilspitzen von einem Punkte ausserhalb ihrer Ebene oder der von ihnen gebildeten Schicht bei beiden mit der Uhrzeigerbewegung harmonirt oder nicht. Ein Perpendikel, irgendwo auf der Ebene des Paares, z. B. in der Mitte des Armes nach der Seite des Raumes errichtet, von welcher aus der Sinn mit dem Uhrzeigersinne übereinstimmt, heisst die Axe des Paares und eine Strecke auf ihr, welche den Zahlenwerth des Momentes und mit Hülfe einer Pfeilspitze den Raum, nach welchem die Axe gerichtet ist, also auch den Sinn des Paares bezeichnet, das Axenmoment. Das Moment des Paares ist nichts anderes, als der arithmetische Werth des Inhaltes von dem Parallelogramm, welches die beiden Seitenkräfte bilden und dessen Höhe der Arm ist oder also auch der doppelte Inhalt eines Dreiecks über einer Seitenkraft als Basis mit einem Punkte auf der Richtung des anderen als gegenüberliegender Spitze.

Es sind verschiedene Bezeichnungsweisen der Kräftepaare in der Schrift üblich. Sind AB, CD die gleichen Intensitäten P der Seitenkräfte, so wählt man nach Bedürfniss die Formen: (AB, CD), worin die Stellung der Buchstaben den Sinn der Kräfte andeutet, oder $(P, -P)$, wo das Vorzeichen dies ausdrückt, oder, wenn p den Arm bezeichnet, das Moment Pp (Fig. 171.).

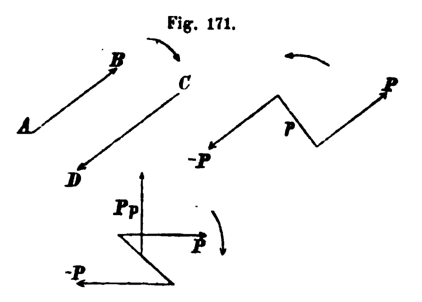


Fig. 171.

Die Einzelkraft und das Kräftepaar haben für den Beschleunigungszustand eines Systems ungefähr die Bedeutung, wie die Translationsgeschwindigkeit und die Rotationsgeschwindigkeit für den Geschwindigkeitszustand; während aber die Translationsgeschwindigkeit als ein specieller Fall von Rotationsgeschwindigkeit um eine unendlich ferne Axe aufgefasst werden kann, wird später gezeigt

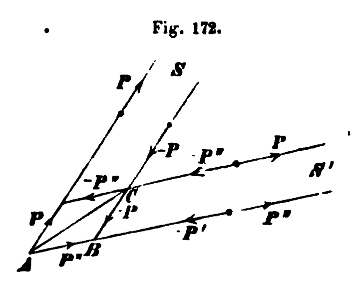
werden, dass ein Kräftepaar einer unendlich fernen unendlich kleinen Einzelkraft äquivalent gesetzt werden kann. Sowie ferner bei einem unveränderlichen System gezeigt wurde, dass der Geschwindigkeitszustand auf die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe und die Translationsgeschwindigkeit parallel derselben zurückgeführt werden kann, wird sich dann ergeben, dass die Gesammtheit aller Kräfte eines unveränderlichen Systems durch ein Kräftepaar und eine Einzelkraft ausgedrückt werden kann, von denen das erste dem System Winkelbeschleunigung, die letztere Translationsbeschleunigung ertheilt. Die Kräftepaare sind von Poinsot durch seine „*Elemens de Statique*“ in die Mechanik eingeführt worden und es hat dadurch die Wissenschaft an Einfachheit, Klarheit, Symmetrie, geometrischer Anschaulichkeit und Eleganz der Darstellung bedeutend gewonnen.

§. 12. Für die Aequivalenz der Kräftepaare bestehen folgende Sätze:

I. Ein Kräftepaar, welches an einem unveränderlichen Systeme wirkt, ist jedem anderen in seiner Ebene liegenden Kräftepaare äquivalent, welches gleiche Seitenkräfte, gleichen Arm und gleichen Sinn mit ihm besitzt. Es kann daher jedes Kräftepaar ohne Aenderung seiner Wirkung in seiner Ebene beliebige Translationen und Rotationen erleiden.

Sind nämlich P, $-P$ (Fig. 172.) die beiden gleichen und entgegengesetzt parallelen Kräfte, welche längs den Grenzlinien des Parallelstreifens S wirkend das Paar bilden, so bringen wir längs den Grenzlinien irgend eines anderen in derselben Ebene liegenden Parallelstreifens S' vier gleiche und paarweise entgegengesetzte Kräfte P', $-P'$; P'', $-P''$ von derselben Intensität P an, von denen zwei, P' und $-P'$, ein Paar bilden, welches mit (P, $-P$) nach Seitenkraft, Arm und Sinn übereinstimmt und sich von ihm blos in der Lage unterscheidet, während die beiden anderen ein Paar (P'', $-P''$) bilden, welches mit (P', $-P'$) entgegengesetzten Sinn hat. Die Wirkung derselben ist äquivalent Null und daher ist das Paar (P, $-P$) äquivalent sich selbst in Verbindung mit diesen beiden Paaren. Die beiden Streifen S, S' mögen nun zunächst sich schneiden, sodass sie also vermöge der Gleichheit ihrer Breite einen Rhombus gemein haben. Wir verlegen die Kräfte P, P'' an die Ecke A, sowie $-P$, $-P''$ an die Ecke C derselben. Die Resultante der gleichen Kräfte P, P'' fällt in die Diagonale AC des Rhombus, weil dieser dem Parallelogramm dieser Kräfte ähnlich ist; die Resultante von $-P$ und $-P''$ fällt gleichfalls in diese Diagonale, hat aber mit der vorigen Resultante entgegengesetzten Sinn. Beide halten

Fig. 172.



daher einander Gleichgewicht. Daher ist die Wirkung der vier Kräfte P, P'', $-P$, $-P''$ oder also der beiden Paare $(P, -P)$, $(P'', -P'')$ äquivalent Null, d. h. es ist das Paar $(P, -P)$ äquivalent $(P', -P')$.

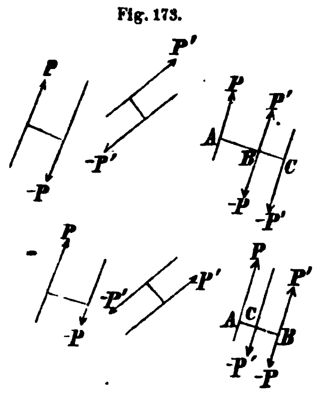
Schneiden sich aber die beiden Streifen S, S' nicht, sondern sind einander parallel, so schneide man beide mit irgend einem dritten Streifen S'' von derselben Breite und nehme in den Grenzlinien dieses zwei Kräfte P'', $-P''$ von der Intensität P an, welche ein Paar bilden, welches mit $(P, -P)$ gleichen Sinn hat. Dann sind sowohl $(P, -P)$ und $(P'', -P'')$ als auch $(P', -P')$ und $(P'', -P'')$ einander äquivalent. Daher ist auch $(P, -P)$ äquivalent $(P', -P')$.

Zugleich liefert diese Entwickelung den Satz:

Vier gleiche Kräfte, welche an einem unveränderlichen Systeme längs den Seiten eines Rhombus wirken und von denen die in die Gegenseiten fallenden je ein Kräftepaar bilden, sind im Gleichgewichte, wenn die Paare entgegengesetzten Sinn besitzen.

Mit Hülfe von Satz I. ist es möglich, zwei oder mehrere Kräftepaare von gleichen Seitenkräften und verschiedenen Armen oder von verschiedenen Seitenkräften und gleichen Armen zu einem Paare zu vereinigen. Haben nämlich (Fig. 173.) die beiden Paare $(P, -P)$, $(P', -P')$ gleiche Seitenkräfte in gleichem Sinne, so verlege man das eine von ihnen so, dass beide Streifen zusammen einen Streifen bilden; längs der gemeinsamen Grenzlinie beider tilgen sich dann zwei Seitenkräfte beider Paare und bleibt ein Paar von derselben Seitenkraft und einem Arme AC gleich der Summe $AB + BC$ der Arme jener. Haben aber die Paare bei gleichen Seitenkräften entgegengesetzten Sinn, so verlege man das eine so, dass ihre Streifen wieder eine gemeinsame Grenzlinie erhalten, aber der eine Streifen nicht neben den anderen, sondern in das Innere desselben zu liegen kommt. Dann tilgen sich längs der gemeinsamen Grenzlinie zwei Seitenkräfte und erübrigt ein Paar, dessen Arm die Differenz der Arme jener beiden Paare ist und dessen Sinn mit dem Sinne des Paares vom grösseren Arme übereinstimmt.

Fig. 173.

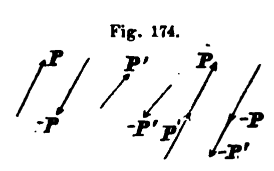


Wie man mehrere Paare auf diese Weise vereinigt, ist von selbst klar. Auch kann man ein Paar in zwei (oder auch mehrere) andere spalten, welche mit ihm gleiche Seitenkraft und gleichen oder zum Theil auch entgegengesetzten Sinn besitzen. Das Paar (P, AC) zerfällt dadurch, dass man seinen Streifen durch eine innere Gerade theilt und längs dieser zwei gleiche Kräfte von der Intensität P anbringt, in zwei

andere von gleichem Sinne (P, AB) und (P, BC). Zieht man eine äussere Gerade und bringt längs ihr die gleichen Kräfte an, so erhalten die Paare (P, AB), (P, BC), welche zusammen dem ursprünglichen äquivalent sind, entgegengesetzten Sinn. In allen Fällen können die so gewonnenen Paare weitere Lagenänderungen erfahren, ohne ihre Wirkung zu ändern.

Haben zwei Paare gleiche Arme, aber verschiedene Seitenkräfte, so genügt eine Verschiebung des einen Streifens auf den anderen und die Bildung der Resultanten der in die Grenzlinien fallenden Seitenkräfte, um ein beiden äquivalentes Paar zu bilden, dessen Seitenkräfte die Summe oder Differenz der Seitenkräfte jener beiden ist, je nachdem diese gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind (Fig. 174.).

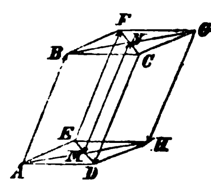
Fig. 174.



Der obige Satz I. erfährt eine wesentliche Erweiterung durch den folgenden:

II. **Jedes Kräftepaar kann ohne Störung seiner Wirkung in jede andere seiner Ebene parallele Ebene verlegt werden.**

Fig. 175.



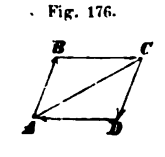
Construirt man nämlich an dem Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 175.), dessen Seiten AB, CD nach Intensität, Richtung und Sinn die Kräfte eines Paares (AB, CD) darstellen, irgend ein Parallelepiped $ABCDEFGH$, dessen Diagonalebenen $ABGH$ und $CDEF$ sich in MN schneiden und bringt längs MN zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte gleich AB an, so hat man, wenn das Zeichen ($_$) die Aequivalenz abkürzend ausspricht:

$$(AB, CD) \doteq (AB, CD, MN, NM) \doteq [(AB, NM), (MN, CD)]$$
$$\doteq [(MN, GH), (EF, NM)] \doteq (EF, GH),$$

weil nämlich die Paare (AB, NM) und (MN, GH) einerseits, sowie (MN, CD) und (EF, NM) andererseits gleiche Arme und gleichen Sinn besitzen. Es ist aber (EF, GH) nichts anderes, als das in eine Parallelebene verlegte Paar (AB, CD).

III. **Zwei Kräftepaare gleichen Sinnes, deren Seitenkräfte durch die Gegenseitenpaare eines Parallelogramms dargestellt werden, sind äquivalent.**

Fig. 176.



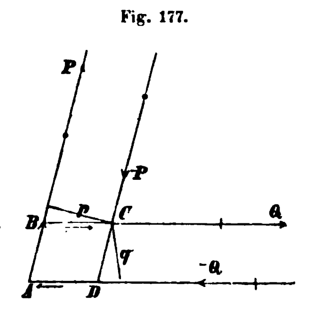
Sind nämlich (AB, CD) und (BC, DA) in Fig. 176. die beiden Paare, so kehre man das eine, z. B. das letztgenannte um; besteht alsdann Gleichgewicht zwischen den vier Kräften AB, CD, AD, CB, so ist damit der Beweis des Satzes geliefert. In der That sind aber AB und AD ihrer Resultanten AC und CD und CB ihrer Resultanten CA äquivalent und beide Resultanten fallen in dieselbe Richtung, sind gleich und entgegengesetzt und mithin im Gleichgewicht.

Aus diesem Satze folgert man leicht, dass ein Kräftepaar einer einzelnen Kraft nicht äquivalent sein kann. Denn da man das Paar verlegen und drehen und die Einzelkraft in ihrer Richtung verschieben kann, so kann man stets herbeiführen, dass Strecken, welche die Seitenkräfte des Paares und die Einzelkraft darstellen, drei aufeinanderfolgende Seiten eines Parallelogramms und zwar so, dass die der Einzelkraft gegenüberliegende Seite eine Kraft darstellt, welche im entgegengesetzten Sinne der Einzelkraft genommen, mit letzterer ein Paar bildet, welches dem gegebenen Paare äquivalent ist. Wenn also die Einzelkraft, durch diese Kraft ergänzt, erst dem Paare äquivalent wird, so kann sie ihm für sich nicht äquivalent sein. Es kann daher auch eine Einzelkraft einem Paare nicht Gleichgewicht halten. Die Richtigkeit dieser Sätze erhellt auch schon daraus, dass wenn eine Kraft Q dem Paare $(P, -P)$ äquivalent sein könnte, jede andere Kraft von derselben Intensität und demselben Sinne mit Q, welche gegen das Paar dieselbe relative Lage hat, ihm gleichfalls äquivalent sein müsste, weil dieselben Gründe, welche die eine Aequivalenz darthun würden, zugleich auch die andere erweisen würden. Es lassen sich aber stets mehr als eine solche Lage für Q nachweisen und müssten also alle solche Kräfte Q einander äquivalent sein, was unmöglich ist.

IV. Zwei Kräftepaare in derselben oder in parallelen Ebenen von gleichen Momenten und gleichem Sinne sind äquivalent.

Man lege die Paare $(P, -P)$, $(Q, -Q)$ in einer Ebene so (Fig. 177.), dass die Parallelstreifen, längs deren Grenzlinien die Seitenkräfte wirken, sich schneiden. Ihre Durchschnittsfigur ist ein Parallelogramm $ABCD$, in dessen Ecken wir die vier Kräfte angreifend denken dürfen. Da die Länge, welche die Krafteinheit graphisch darstellt, beliebig ist, so können wir sie immer so wählen, dass die Seitenkräfte des Paares $(P, -P)$ durch AB und CD ausgedrückt werden. Sind nun die Arme der Paare, welche die Breiten der Streifen und also auch die beiden Höhen des Parallelogramms darstellen, p und q, so ist der Voraussetzung gemäss $P \cdot p = Q \cdot q$; es ist aber auch $AB \cdot p = CD \cdot q$, weil beide Ausdrücke den Inhalt des Parallelogramms geben und da $AB = P$, so wird $BC = Q$. Demnach hat man vier Kräfte, welche durch die Seiten eines Parallelogramms ausgedrückt sind und zwei Paare gleichen Sinnes bilden. Dieselben sind aber nach III. äquivalent.

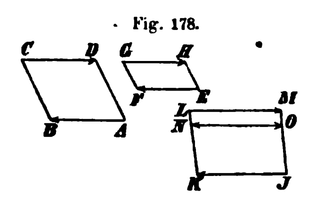
Fig. 177.



Mit Hülfe dieses Satzes können Kräftepaare, welche in derselben Ebene oder auch in parallelen Ebenen liegen, zu einem Kräftepaare

vereinigt und kann ein Kräftepaar in zwei oder mehrere andere von bestimmten Armen oder Seitenkräften aufgelöst werden. Es kommt nach demselben hinsichtlich der Wirkung des Paares nämlich weder auf die Grösse der Seitenkraft, noch auf die des Armes für sich, sondern nur auf die Grösse des Produktes beider, d. h. auf die Grösse des Parallelogramms an, welches die Seitenkraft zur Basis und den Arm zur Höhe hat. Ein Kräftepaar ist daher ohne Aenderung seiner Wirkung so vieler Formen fähig, als das Parallelogramm ohne Aenderung seines Flächeninhaltes annehmen kann. Construirt man nämlich (Fig. 178.) ein Parallelogramm $JKLM$, welches gleich der Summe der beiden Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$ ist, so ist auch das Paar (JK, LM) äquivalent den beiden Paaren (AB, CD) und (EF, GH) gleichen Sinnes untereinander und mit ihm. Denn bringt man längs der Linie NO, welche dies Parallelogramm in zwei Parallelogramme zerlegt, von denen das eine gleich $ABCD$, das andere gleich $EFGH$ ist, zwei Kräfte gleich AB und einander entgegengesetzt an, so zerfällt (JK, LM) in die Paare (JK, NO) $\equiv$ (AB, CD) und (ON, LM) $\equiv$ (EF, GH). Haben aber die beiden zu vereinigenden Paare entgegengesetzten Sinn, so liefert ein Parallelogramm, dessen Fläche der Differenz ihrer Momente gleich ist, ein ihnen äquivalentes Paar. In ähnlicher Weise können beliebig viele Paare gleichen oder zum Theil entgegengesetzten Sinnes zu einem ihnen zusammen äquivalenten Paare vereinigt werden.

Fig. 178.



Die bisher entwickelten Sätze über die Veränderungen der Lage und Form, welche ein Kräftepaar ohne Aenderung seiner Wirkung erleiden kann, lassen sich zu folgendem allgemeinem Satze zusammenfassen:

V. **Ein Kräftepaar ist jedem anderen Kräftepaare äquivalent, welches mit ihm in derselben oder einer seiner Ebene parallelen Ebene liegt und mit ihm gleiches Moment und gleichen Sinn besitzt.** Indem man die Axe des Paares construirt und auf ihr das Axenmoment als Strecke aufträgt und den Sinn des Paares durch eine ihr angefügte Pfeilspitze ausdrückt, kann man diesem Satze auch die Fassung geben:

Das Axenmoment kann ohne Umkehrung seines Sinnes, parallel mit sich, im Raume beliebig verlegt werden, ohne dass das Kräftepaar dadurch seine Wirkung ändert.

In dieser Form gewährt der Satz eine noch etwas leichtere Methode der Zusammensetzung der Kräftepaare, welche in derselben oder in parallelen Ebenen liegen. Alle solche haben nämlich parallele Axen, unterscheiden sich also nur durch die Grösse und den Sinn ihrer Axen

momente. Verlegt man daher diese letzteren sämmtlich in eine ihrer Richtung parallele Gerade, so addiren sich auf dieser alle Axenmomente des einen und alle des entgegengesetzten Sinnes und tilgt die Summe der einen von der Summe der anderen einen ihr gleichen Theil, sodass ein einziges Axenmoment erübrigt, welches das aus sämmtlichen Paaren resultirende Paar darstellt. Der Gegensatz des Sinnes der Paare spricht sich hierbei also im Vorzeichen der Axenmomente aus. Man kann daher den weiteren allgemeinen Satz aufstellen:

VI. Kräftepaare von parallelen Axen sind zusammen äquivalent einem einzigen Paare von derselben Axenrichtung; das Moment desselben ist die Differenz der Momentansummen der Paare des einen und der Paare des entgegengesetzten Sinnes oder also die algebraische Summe sämmtlicher Momente und sein Sinn stimmt überein mit dem Sinne derjenigen Paare, welche die grössere Momentensumme besitzen. Ist die algebraische Summe der Momente Null, so besteht zwischen den Paaren Gleichgewicht und umgekehrt.

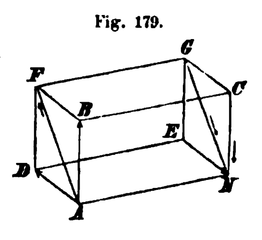
Für die Zusammensetzung der Paare mit parallelen Axen gilt demnach derselbe Satz, wie für die Zusammensetzung der Kräfte, welche in derselben Geraden wirken. Kräftepaare mit parallelen Axen haben für die Ebene eine analoge Bedeutung, wie Kräfte in derselben Richtung für die Gerade; ein Analogon für den Raum mit drei Dimensionen ist nicht bekannt.

Für die Aequivalenz der Kräftepaare mit verschiedenen Ebenen, oder also mit nicht parallelen Axen gelten folgende Sätze:

VII. Zwei Kräftepaare in verschiedenen Ebenen sind äquivalent einem einzigen Kräftepaare, dessen Ebene der Schnittlinie jener parallel ist und dessen Axenmoment nach Grösse, Richtung und Sinn durch die Diagonale eines Parallelogramms angegeben wird, welches über den Axenmomenten jener Paare als Seiten construirt werden kann (Parallelogramm der Axenmomente).

Nach Satz IV. kann man die Kräftepaare auf denselben Arm gleich der Längeneinheit reduciren, welcher für beide in die Schnittlinie ihrer Ebenen fällt. Die Seitenkräfte AB, CN (Fig. 179.) des einen und AD, EN des anderen Paares sind dann gleich den Momenten der Paare. Nun liefern aber AB und AD mit Hülfe des Parallelogramms der Kräfte die Resultante AF und CN und EN die ihr gleiche und parallele, aber entgegengesetzte Resultante GN; daher ist das Paar (AF, GN) den beiden Paaren (AB, CN) und (AD, EN) äquivalent. Errichtet man nun in irgend einem Punkte des gemein-

Fig. 179.



schaftlichen Armes AN, z. B. in dessen Mitte, senkrecht zu den Ebenen dieser drei Paare, ihre Axen und trägt auf ihnen nach Grösse und Sinn die Axenmomente, welche gleich AB, AD, AF sind, auf, so bilden diese drei Strecken untereinander dieselben Winkel, wie die Ebenen der drei Paare, oder also die drei Linien AB, AD, AF und sind ebenso wie letztere die Seiten und Diagonalen eines Parallelogramms, welches dem Parallelogramm AF congruent ist. Hieraus ergibt sich der zweite Theil des Satzes.

Als leichte Folgerungen reihen sich hieran:

Zwei Paare halten sich Gleichgewicht, wenn ihre Axenmomente entgegengesetzt parallel sind. Drei Paare halten sich Gleichgewicht, wenn ihre Axenmomente einer Ebene parallel sind und jedes von ihnen dem Sinus des von den beiden anderen gebildeten Winkels proportional ist.

Man erweitert diesen Satz leicht zu einem Satze über das Parallelepiped und das Polygon der Axenmomente und erkennt, dass dieselbe Methode, welche zur Zusammensetzung und Zerlegung der einfachen Kräfte, deren Richtungen sich in einem Punkte schneiden, dient, auch zur Lösung der analogen Aufgaben für die Kräftepaare führt, sobald diese durch ihre Axenmomente dargestellt werden. Man kann daher behaupten:

VI. Das Axenmoment des Kräftepaares, welches einem Aggregate anderer Kräftepaare von beliebigen Axenmomenten äquivalent ist, wird nach Grösse, Richtung und Sinn durch die Schlusslinie eines Polygons dargestellt, dessen Seiten, in beliebiger Ordnung genommen, die Axenmomente der einzelnen Paare darstellen. Ist das Polygon geschlossen, so besteht zwischen den Paaren Gleichgewicht.

§. 13. Ist M das Axenmoment eines Kräftepaares und sind λ, μ, ν die Richtungswinkel desselben gegen drei rechtwinklige Axenrichtungen der x, y, z, so sind

$$M_x = M \cos\lambda,\quad M_y = M\cos\mu,\quad M_z = M\cos\nu$$

die Axenmomente dreier Paare, deren Axen den Coordinatenaxen der x, y, z und deren Ebenen mithin den Coordinatenebenen der yz, zx, xy parallel sind.

Umgekehrt erhält man aus den zueinander rechtwinkligen Axenmomenten M_x, M_y, M_z das Axenmoment des resultirenden Paares M

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

und für die Richtungscosinusse desselben

$$\frac{\cos\lambda}{M_x} = \frac{\cos\mu}{M_y} = \frac{\cos\nu}{M_z} = \frac{1}{M}.$$

Wirken an einem unveränderlichen Systeme Kräftepaare, deren Axenmomente M, M', M'', ... mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'', ... bilden, so zerlege man behufs Bildung des Axenmomentes des resultirenden Paares G jedes Axenmoment, wie M, in die Componenten $M_x = M \cos \alpha$, $M_y = M \cos \beta$, $M_z = M \cos \gamma$; die Axenmomente, parallel den Coordinatenaxen, liefern alsdann die Summen ΣM_x, ΣM_y, ΣM_z, aus welchen

$$G = \sqrt{(\Sigma M_x)^2 + (\Sigma M_y)^2 + (\Sigma M_z)^2},$$

sowie dessen Richtungscosinusse

$$\frac{\cos \lambda}{\Sigma M_x} = \frac{\cos \mu}{\Sigma M_y} = \frac{\cos \nu}{\Sigma M_z} = \frac{1}{G}$$

hervorgehen. Die Bedingungen des Gleichgewichtes der Paare sind

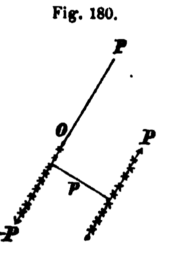
$$\Sigma M_x = 0, \quad \Sigma M_y = 0, \quad \Sigma M_z = 0.$$

IV. Capitel.

Aequivalenz ebener Kräftesysteme am unveränderlichen Punktsysteme.

§. 1. Sämmtliche Kräfte eines Kräftesystems mögen in einer Ebene liegen. Durch einen beliebigen Punkt O (Fig. 180.) in dieser Ebene ziehen wir mit jeder Kraft P eine Parallele und fügen längs dieser dem Systeme zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte von der Intensität P hinzu, welche, da sie sich Gleichgewicht halten, die Wirkung des Kräftesystems nicht ändern. Hierdurch erhalten wir an die Stelle der Kraft P drei Kräfte, von denen die eine nichts anderes ist, als die durch den Punkt O hindurchgelegte Kraft P, während die andere, sie heisse $-P$, mit dem ursprünglichen P ein Kräftepaar Pp bildet, dessen Arm der Abstand der Kraft P von O ist. Dies Paar stellen wir durch sein Axenmoment dar und zwar tragen wir dies auf einer zur Ebene des Paares senkrechten, durch O hindurchgelegten Axe als Länge nach Grösse und Sinn auf. Indem wir diese Operation für sämmtliche Kräfte P des Systems ausführen, erhalten wir als dem Kräftesystem äquivalent 1. ein Aggregat von Kräften P, deren Richtungen durch den Punkt O gehen und 2. ein Aggregat von Kräftepaaren, deren Axenmomente Pp zur Ebene senkrecht sind und auf der durch O gehenden Normalen der Ebene vereinigt werden können. Dem Aggregate der Kräfte P ist nach dem Satze vom Kräftepolygon eine Resultante R von bestimmter Richtung und Intensität äquivalent, welche in der Ebene der Kräfte durch O hindurchgeht; die Kräftepaare liefern ein resultirendes

Fig. 180.

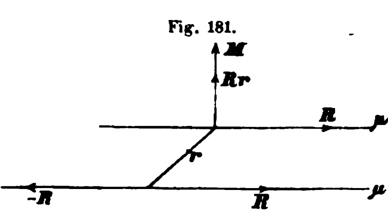


Paar in denselben Ebenen, dessen Axenmoment M die algebraische Summe der Axenmomente aller Paare ist und auf der Normalen in O gebildet werden kann. R kann nur in seiner durch O gehenden Richtung, M aber parallel mit sich an jede Stelle des Raumes verlegt werden. Die Auffindung der Resultanten R und des resultirenden Paares M, entsprechend dem Punkte O, wollen wir die **Reduction der Kräfte** des Systems für O als **Reductionspunkt** nennen. Da derselbe beliebig wählbar ist, so enthält die vorstehende Entwickelung den Satz:

Jedes ebene Kräftesystem, welches an einem unveränderlichen Punktsysteme angreift, ist äquivalent der Verbindung einer Einzelkraft (Resultanten) mit einem Kräftepaare (resultirenden Paare), beide in der Ebene des Kräftesystems gelegen, und zwar auf unendlich viele Arten.

§. 2. Alle Reductionen für die verschiedenen Punkte O liefern dieselbe Richtung, Intensität und denselben Sinn für die Resultante R, weil das Kräftepolygon, welches zu ihrer Auffindung dient, für alle sich congruent und parallel bleibt, während das Kräftepaar M im Allgemeinen sein Moment und auch seinen Sinn mit der Lage des Punktes O wechseln kann, indem mit einer Lagenänderung von O eine Aenderung der Arme der Paare verbunden ist, aus welchen M hervorgeht. Die Resultante R bestimmt durch ihre constante Richtung ein Parallelstralenbüschel; für alle Punkte O ein und desselben Strales bleiben R und M zugleich unveränderlich; es findet nur eine Aenderung des M von Stral zu Stral statt. Um diese zu bestimmen, seien R und M Resultante und Axenmoment des resultirenden Paares für den Stral μ (Fig. 181.) und μ' ein anderer Stral des Parallelbüschels, längs dessen wir zwei Kräfte R, $-R$ anbringen, welche sich Gleichgewicht halten. Die erste von ihnen liefert uns die Resultante für den Stral μ', die zweite bildet mit dem R des Strales μ ein Paar $(R, -R)$, dessen Moment Rr sich dem Abstande r der Strales μ' von μ proportional ändert

Fig. 181.



und dessen Sinn wechselt, wenn μ' von dem einen der beiden Felder in welche der Stral μ die Ebenen zerlegt, in das andere übergeht. Für einen auf der Seite der Ebene, nach welcher die Pfeilspitze von M zeigt, befindlichen, in dem Sinne von R sehenden Punkt liefern die Stralen μ' rechts von μ Paare Rr, deren Sinn mit dem Sinne von M harmonirt, die Stralen links von μ aber solche, deren Sinn dem Sinne von μ entgegengesetzt ist. Für Stralen μ' der ersten Art liefert also die Reduction der Kräfte die Resultante R und das resultirende Paar $M' = M + Rr$, für Stralen der anderen Art statt des letzteren aber $M' = M - Rr$.

Ist nun weder M noch R Null, so gibt es auf der letzteren Seite einen Stral μ_0, für welchen $M' = 0$ wird. Sein Abstand r von μ folgt aus $M - Rr = 0$, nämlich $r = \frac{M}{R}$. Ein ebenes Kräftesystem ist daher im Allgemeinen einer einzelnen Resultante R äquivalent. Gehen wir von der Reduction der Kräfte für den Stral μ_0 aus, so zeigt sich, dass die Axenmomente der Reductionen für Stralen μ, welche gleichweit nach rechts und links von μ_0 abstehen, gleich, aber entgegengesetzten Sinnes sind. Ist $M = 0$, so ist der ursprüngliche Stral μ selbst μ_0. Für $R = 0$ ergibt sich für jeden Stral $M' = M$; es ist das System einem beliebig verlegbaren Kräftepaare äquivalent. Für den Abstand r des Strales μ_0 aber ergibt sich $r = \infty$; es kann also das System und mithin auch das Paar M nicht einer Einzelkraft äquivalent sein. Aendert sich das Kräftesystem continuirlich so, dass R sich der Null nähert, so rückt μ_0 immer mehr ins Unendliche und kann der eben erwähnte Fall auch so angesehen werden, dass das Paar, welches dem Kräftesysteme äquivalent ist, soviel als eine im Unendlichen verschwindende Einzelkraft repräsentirt. — Sind M und R beide gleich Null, so ist das System im Gleichgewichte; auch ist zum Gleichgewichte beides erforderlich, da ein Paar und eine Einzelkraft sich nicht Gleichgewicht halten können.

§. 3. Das Vorstehende zeigt, wie man mit Hülfe der Kräftereduction für irgend einen Punkt O entscheiden kann, ob im System Gleichgewicht herrscht oder ob es einer Einzelkraft oder einem Kräftepaare äquivalent ist. Es wird dazu die Aufsuchung von R und M erfordert. Ohne aber R und damit von vornherein die Richtung des Parallelstralenbüschels (μ) zu bestimmen, genügt die Bestimmung von M für drei Punkte des Systems, um dieselbe Entscheidung zu geben.

Um kurz zu reden, nennt man die Summe der Momente der Kräftepaare, welche der Reduction der Kräfte für einen bestimmten Punkt entspricht, das Moment des Systems für diesen Punkt. Im Falle des Gleichgewichtes ist der Werth des Momentes für jeden Punkt der Ebene Null. Zwei einander äquivalente Systeme haben, wie hieraus folgt, für jeden Punkt der Ebene gleiches Moment. Denn kehrt man das eine von beiden um, so bilden sie zusammen ein im Gleichgewicht befindliches System, dessen Moment also für jeden Punkt verschwindet; mit dem Umkehren des Sinnes einer Kraft wechselt aber auch der Sinn des Momentes, welches diese Kraft liefert. Es gibt also das Moment des zweiten Systems, im entgegengesetzten Sinne genommen, mit dem Momente des ersten Systems zusammen Null und ist folglich ihm selbst gleich. Ist daher ein System einer Einzelkraft oder einem Kräftepaare äquivalent, so

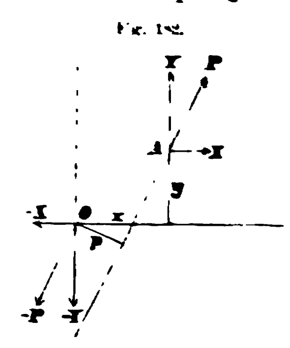
ist sein Moment für jeden Punkt gleich dem Momente dieser oder dem Momente jenes.

Das Moment einer einzelnen Kraft ist constant für alle Punkte auf einer ihr parallelen Geraden, hat für zwei in gleichen Abständen auf beiden Seiten von ihr liegenden Geraden entgegengesetzten Sinn und verschwindet für die Punkte ihrer Richtung. Hieraus ergibt sich, dass es für drei nicht in gerader Linie liegende Punkte nicht denselben Werth besitzen kann. Da ferner die beiden Kräfte eines Kräftepaares entgegengesetzten Sinn haben, so liefern sie für jeden Punkt der Ebene auch Momente entgegengesetzten Sinnes und zwar ist ihre Summe gleich dem Momente des Paares, also für alle Punkte der Ebene constant.

Man kann nun behaupten: Ist das Moment eines ebenen Kräftesystems für drei nicht in gerader Linie liegende Punkte Null, so ist das System im Gleichgewichte. Denn einer Einzelkraft kann es nicht äquivalent sein, weil diese für die drei Punkte nicht gleiches Moment haben kann, einem Kräftepaare nicht, weil dessen Moment nicht Null ist. Ist das Moment für die drei Punkte nicht Null, aber von gleichem Werthe, so ist das System äquivalent einem Kräftepaare. Denn für den Fall des Gleichgewichtes müsste es für alle Punkte, also auch für jene drei, verschwinden, und eine Einzelkraft hat für diese nicht gleiche Momente. Ist das Moment für die drei Punkte nicht constant (weder Null, noch von sonst einem Werthe gleich), so ist das System einer Einzelkraft äquivalent.

§. 4. Wir suchen jetzt den analytischen Ausdruck des Momentes des Systems in Bezug auf irgend einen Punkt bei Zugrundelegung eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y und zwar zunächst für den Coordinatenursprung O. Da die Kraft P ihren beiden Componenten X, Y parallel den Coordinatenaxen äquivalent ist, so ist ihr Moment Pp in Bezug auf O (Fig. 182) äquivalent der Summe der Momente jener. Diese sind aber nach absolutem Werthe und Zeichen, wenn x, y die Coordinaten des Angriffspunktes von P bedeuten, xY und $-yX$, wie man sofort erkennt, wenn man bedenkt, dass jedes dieser Paare den Sinn wechselt, sobald einer der Factoren seines Momentes das Zeichen wechselt, während es denselben Sinn behält, wenn beide Factoren das Zeichen wechseln. Daher ist $Pp = xY - yX$ und mithin das Moment des Systems für den Coordinatenursprung $\Sigma(xY - yX)$. Für einen Punkt x_1, y_1 aber in der Ebene des Systems sind in Bezug auf ein dem vorigen

Fig. 182.



paralleles Coordinatensystem $x - x_1$, $y - y_1$ die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft P und daher ist für ihn das Moment H des Systems:

$$H = \Sigma[(x - x_1) Y - (y - y_1) X] = -(x_1 \Sigma Y - y_1 \Sigma X) + \Sigma(xY - yX),$$

oder wenn wir abkürzend $\Sigma X = A$, $\Sigma Y = B$, $\Sigma(xY - yX) = N$ setzen,

$$H = -(x_1 B - y_1 A) + N.$$

1. Soll nun im System Gleichgewicht herrschen, so muss M für alle Punkte x_1, y_1 verschwinden, d. h. es muss

$$A = 0, \quad B = 0, \quad N = 0$$

sein und umgekehrt, sind diese Bedingungen erfüllt, so besteht Gleichgewicht. Diese Gleichungen sagen aus, dass die Summe der Projectionen aller Kräfte des Systems auf die Coordinatenaxen und die Summe der Momente für den Coordinatenursprung einzeln verschwinden müssen.

Diese Bedingungen erhält man auch, indem man ausdrückt, dass das Moment des Systems für drei nicht in gerader Linie liegende Punkte x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 verschwinden solle, für welche also

$$\begin{aligned} -Bx_1 + Ay_1 + N &= 0 \\ -Bx_2 + Ay_2 + N &= 0 \\ -Bx_3 + Ay_3 + N &= 0 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \gtrless 0$$

ist.

2. Soll das System sich auf ein Paar reduciren, so muss M in der ganzen Ebene constant, also von x_1 und y_1 unabhängig sein, d. h. es muss

$$A = 0, \quad B = 0$$

werden und finden umgekehrt diese Bedingungen statt, so ist das System äquivalent einem Paare, falls nicht Gleichgewicht besteht, in welchem Falle $H = N = 0$ würde.

3. Sind A und B nicht beide Null, so ist das System äquivalent einer Einzelkraft, seiner Resultanten R. Es seien X_1, Y_1 deren Componenten, so erfolgt Gleichgewicht, sobald R in entgegengesetztem Sinne den Kräften des Systems zugefügt wird. Dies liefert, wenn x_1, y_1 einen Punkt auf der Richtung der Resultanten bezeichnet,

$$A - X_1 = 0, \quad B - Y_1 = 0, \quad -(x_1 Y_1 - y_1 X_1) + N = 0,$$

woraus folgt:

$$X_1 = A = \Sigma X, \quad Y_1 = B = \Sigma Y, \quad x_1 \Sigma Y - y_1 \Sigma X = \Sigma(xY - yX).$$

Die dritte dieser Gleichungen ist die Gleichung der Resultanten in x_1, y_1 als laufenden Coordinaten, die erste und zweite liefern ihre Intensität und Richtung (a, b), nämlich:

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2}, \quad \frac{\cos a}{\Sigma X} = \frac{\cos b}{\Sigma Y} = \frac{1}{R}.$$

Ihr Abstand δ vom Coordinatenursprung ist

$$\delta = \frac{\Sigma\,(xY - yX)}{R}.$$

Wir haben im Vorstehenden ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde gelegt, indessen werden die Formeln nicht viel complicirter für ein Coordinatensystem mit beliebigem Coordinatenwinkel α. Die Arme der Paare werden $x \sin\alpha$, $y \sin\alpha$ u. s. w. und das Moment des Systems

$$H = (-(x_1 B - y_1 A) + N) \sin\alpha.$$

§. 5. Sind die Kräfte sämmtlich einander parallel und wählt man zur x-Axe eine Gerade ihrer Richtung, so sind alle $X = P$, alle $Y = 0$, also $A = \Sigma P$, $B = 0$, $N = -\Sigma yP$. Die Gleichgewichtsbedingungen sind daher $A = \Sigma P = 0$, $N = -\Sigma yP = 0$, d. h. es muss die Summe aller Kräfte und das Moment des Systems für jeden Punkt der Ebene verschwinden. Das System reducirt sich auf ein Paar $N = -\Sigma yP$, wenn $\Sigma P = 0$ ist. Sind A und N nicht Null, so ist es einer Einzelkraft R äquivalent; für sie hat man $X_1 = \Sigma P$, $Y_1 = 0$, $R = \Sigma P$, $y_1 \Sigma P = \Sigma yP$, d. h. $y_1 = \frac{\Sigma yP}{\Sigma P}$. Die Resultante ist daher den Kräften parallel. Wählt man ihre Richtung zur x-Axe, so wird $\Sigma yP = 0$.

Besteht insbesondere das System blos aus zwei Parallelkräften, die wir P, Q nennen wollen, so ist $R = P + Q$ und $yP + y'Q = 0$, wenn die x-Axe in die Resultante fällt. Haben P und Q gleichen Sinn, also auch gleiches Zeichen, so sind y und y' von entgegengesetztem Zeichen, es fällt mithin die Resultante R, welche mit ihnen gleichen Sinn besitzt, in den Parallelstreifen (PQ) und theilt ihn im umgekehrten Verhältniss der Kräfte. Sind P und Q entgegengesetzten Sinnes, so ist R die Differenz beider, haben y, y' gleichen Sinn und fällt die Resultante in denjenigen Aussenraum des Parallelstreifens, welcher der Richtung der grösseren Kraft anliegt. Ist $P + Q = 0$, d. h. sind die Kräfte entgegengesetzt gleich, so wird $R = 0$ und bilden P, Q ein Paar. Die Gleichung $yP + y'Q = 0$ geht dann über in $y + y' = 0$ d. h. $\frac{y}{y'} = -1$, woraus gefolgert werden kann, dass die verschwindend kleine Resultante, welche dem Paare äquivalent sein sollte, ins Unendliche fällt. Kehrt man die Resultante dem Sinne nach um, so tritt Gleichgewicht ein.

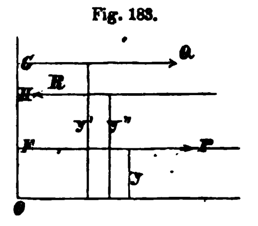
Die Gleichgewichtsbedingungen dreier Parallelkräfte P, Q, R lauten daher nach obiger Theorie $P + Q + R = 0$, $Py + Qy' + Ry'' = 0$, wobei der Anfangspunkt O der Abstände y beliebig ist. Aus beiden Gleichungen folgt nun 1. dass eine der drei Kräfte den beiden andern entgegengesetzt sein muss und 2. dass $P : Q : R = (y'' - y') : (y - y'') : (y' - y)$. Schneidet nun die Richtung der y die Richtungen von P, Q, R in

Punkten F, G, H (Fig. 183), so wird $y'' - y' = OH - OG = GH$, $y - y'' = OF - OH = HF$, $y' - y = OF - OG = FG$, sodass $P:Q:R = GH:HF:FG$, wobei

$$(y'' - y') + (y - y'') + (y' - y) = GH + HF + FG = 0$$

und also die Linien GH, HF, FG auch dem Sinne nach mit P, Q, R untereinander übereinstimmen. Wird daher zu P und Q die Kraft R gesucht, welche mit diesen Gleichgewicht hervorbringt, so folgt ihre Intensität und ihr Sinn aus $R = -(P + Q)$; ihre Lage aber aus der Doppelproportion $P:Q:R = GH:HF:FG$. Denn von den drei Punkten F, G, H liegt jedenfalls einer zwischen den beiden anderen; welcher dies ist, ergibt sich aus dem Vorzeichen von $P:Q = GH:HF$. Ist nämlich $P:Q$ positiv, so haben GH und HF gleiches Zeichen, also auch gleichen Sinn und fällt H zwischen G und F. Ist aber $P:Q$ negativ, so fällt H in einen der Aussenräume des durch P und Q bestimmten Parallelstreifens und zwar auf die Seite von P oder Q, je nachdem der absolute Werth von $P:Q$ grösser oder kleiner als Eins ist. Werden andererseits zu R zwei Parallelkräfte P und Q von gegebener Lage gesucht, welche mit R Gleichgewicht halten, so erhält man ihre Intensitäten aus der obigen Doppelproportion, deren rechte Seite vollständig bekannt ist, und zugleich deren Sinn. Es ist nämlich

Fig. 183.



$$P = \frac{GH}{FG} \cdot R, \quad Q = \frac{HF}{FG} \cdot R.$$

§. 6. Laufen die Richtungen der Kräfte durch ein und denselben Punkt, so kommt die Theorie dieses Capitels auf die des vorigen zurück. Für den Schnittpunkt der Kräfte als Reductionspunkt ist $N = 0$. Das System hat eine Resultante und ist, wenn diese verschwindet, im Gleichgewichte.

§. 7. Es ist von Wichtigkeit, zu sehen, wie die Untersuchungen dieses Capitels nur dem Wortausdrucke nach von einer rein geometrischen Betrachtung über das System von Strecken sind, welche in einer Ebene liegen und mit einem beliebigen Punkte derselben verbunden ein Dreiecksystem von bestimmten Eigenschaften bilden. Dies hat Möbius in seinem Lehrbuche der Statik (Leipzig 1837) gezeigt, einem Werke von gleich hoher Bedeutung für die Theorie der Kräfte, wie für die Geometrie.

Wenn die Stellung der Buchstaben zugleich den Sinn der Strecken bezeichnet, an deren Endpunkten sie stehen, so besteht für drei in gerader Linie liegende Punkte A, B, C, welche gegenseitige Lage sie auch haben mögen, die Relation $AB + BC + CA = 0$ oder $AB + BC = AC$. Diesem Satze entspricht in der Ebene der folgende: Für irgend vier in einer Ebene liegende Punkte A, B, C, M ist $MAB + MBC + MCA = ABC$, d. h. die Summe der Dreiecke, welche der Punkt M mit den Verbindungslinien der drei anderen Punkte, nämlich mit AB, BC, CA bildet, ist constant, wo

auch immer M in der Ebene liegen mag und zwar gleich dem Inhalte des Dreiecks ABC. Jedes Dreieck, wie MAB, ist dabei in einem bestimmten Sinne und mit bestimmtem Zeichen genommen, wie man findet, wenn man einen Stral um eine Ecke sich so drehen lässt, dass sein Schnittpunkt mit der Gegenseite diese in dem Sinne durchläuft, welcher durch die Stellung der Buchstaben für ihre Endpunkte in der Bezeichnung des Dreiecks angegeben ist. So ist der Sinn von MAB, ABM, BMA derselbe und dem Sinne von BAM, MBA, AMB entgegengesetzt. Der erwähnte Satz leuchtet nun sofort ein, wenn M im Innenraume, in einer Ecke oder auf einer Seite des Dreiecks ABC liegt. Liegt M in einem Scheitelraume, z. B. dem des Winkels A, so ist $MBC = MBA + MAC + ABC$, folglich $MAB + MBC + MCA = ABC$. Für einen der drei stumpfen Räume, z. B. den an BC anstossenden, ist $ABC + MCB = MCA + MAB$, also auch hier $MAB + MBC + MCA = ABC$.

Indem man ein beliebiges geschlossenes Polygon $ABCD\ldots$ von einer Ecke A aus durch Diagonalen AC, AD, AE, ... theilt und für einen beliebigen Punkt M die Dreiecksrelation für ABC, ACD, ... aufstellt und sämmtliche so gewonnene Relationen addirt, dabei aber bemerkt, dass jedes mit einer Diagonale gebildete Dreieck doppelt und zwar mit entgegengesetzten Zeichen vorkommt, z. B. MAC und MCA, also bei der Addition herausfällt, erhält man den allgemeineren Satz:

$$MAB + MBC + MCD + \cdots = ABC + ACD + ADE + \cdots,$$

d. h. für jedes ebene geschlossene Polygon $ABCD\ldots$, dessen Seiten AB, BC, CD, ... aufeinanderfolgend in demselben Sinne genommen sind, ist die Summe der Dreiecke, welche ein Punkt M der Ebene mit diesen bildet, eine Constante für alle Lagen des Punktes M. Diese Constante wird durch die Summe der Dreiecke dargestellt, welche eine Ecke A mit Hülfe der von ihr nach den übrigen Ecken gehenden Diagonalen mit den Seiten BC, CD, ... bildet. Diese Summe pflegt man in allen Fällen, mag das Polygon ein gewöhnliches oder ein überschlagenes sein, den Inhalt $ABCD\ldots$ desselben zu nennen. Von der Bildung dieses Inhaltes erhält man eine deutliche Vorstellung, indem man einen Radiusvector von A (oder auch von M) ausgehend über die Ebene hingleiten lässt, dass sein Endpunkt den Umfang immer in demselben Sinne durchläuft. Alle Flächenbestandtheile, welche derselbe in dem einen und im entgegengesetzten Sinne beschreibt, haben bei Bildung des Inhaltes entgegengesetzte Bedeutung.

Man kann die Flächeninhalte der Figuren, welche hier vorkommen, mannigfach verwandeln, ohne ihr Zeichen (oder ihren Sinn) zu ändern. Ein Dreieck ABC bleibt z. B. auch dem Sinne nach ungeändert, wenn man durch eine Ecke A zu der Gegenseite BC eine Parallele legt und statt A irgend einen Punkt A' dieser Geraden, also statt ABC das Dreieck $A'BC$ setzt. Von dieser Umwandlung Gebrauch machend, erhält man den folgenden Satz über das Parallelogramm, dessen wir nachher bedürfen werden. Für jeden Punkt M in der Ebene eines Parallelogramms $ABCD$ ist die Summe der Dreiecke $MAB + MCD$, welche M mit einem Paar Gegenseiten bildet, gleich der Summe $MBC + MDA$, entsprechend dem anderen Paare Gegenseiten, nämlich gleich dem halben Inhalte $\frac{1}{2}ABCD$ des Parallelogramms. Ist nämlich ME parallel BA und E sein Durchschnitt mit DA, so hat man $MAB = EAB$, $MCD = ECD$, also $MAB + MBC = EAB + ECD = EAB + EBD = \frac{1}{2}ABCD$ und dasselbe gilt für die Summe $MBC + MDA$.

Es sei nun A_1B_2, B_1C_2, C_1D_2, ... S_1T_2 (Fig. 184.) ein beliebiges ebenes Streckensystem, M irgend ein Punkt seiner Ebene und

$$\Sigma = MA_1B_2 + MB_1C_2 + MC_1D_2 + \cdots MS_1T_2$$

die Summe aller Dreiecke, welche M mit den Strecken des Systems bildet. Von irgend einem Punkte A der Ebene aus construiren wir das zusammenhängende Streckensystem $ABCD\ldots ST$, dessen Seiten gleich, parallel und von demselben Sinne mit den Strecken A_1B_2, B_1C_2, C_1D_2, ... S_1T_2 seien. Dann ist nach dem zuletzt aufgestellten Satze über das Parallelogramm:

$$MA_1B_2 + MBA = AA_1B_2$$
$$MB_1C_2 + MCB = BB_1C_2$$
$$MC_1D_2 + MDC = CC_1D_2$$
$$\vdots$$
$$MS_1T_2 + MTS = SS_1T_2,$$

folglich, wenn man alle diese Gleichungen addirt und berücksichtigt, dass

$$MBA + MCB + MDC + \cdots + MTS + MAT$$
$$= -(MAB + MBC + MCD + \cdots MST) + MTA = -ABCD\cdots TA$$

ist und $ABCD\cdots TA = \Pi$ und $AA_1B_2 + BB_1C_2 + CC_1D_2 + \cdots + SS_1T_2 = \varDelta$ setzt,

$$\Sigma = \Pi + \varDelta - MTA.$$

Nun sind folgende Fälle möglich. 1. Der Streckenzug $ABCD\ldots ST$ schliesst sich, sodass T mit A zusammenfällt, dann ist $MTA = 0$ und also $\Sigma = \Pi + \varDelta$, also constant für alle Lagen von M. 2. Der Streckenzug schliesst sich nicht, dann kann man zu TA immer eine gleiche und parallele Strecke T_1A_2 annehmen, sodass

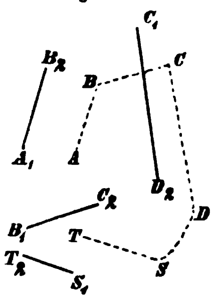
$$MT_1A_2 + MAT = TT_1A_2,$$

also

$$-MTA = TT_1A_2 - MT_1A_2$$

und folglich $\Sigma = \Pi + \varDelta + TT_1A_2 - MT_1A_2$ wird, zugleich aber den Abstand der Strecke T_1A_2 von TA so bestimmen, dass $TA_2T_1 = \Pi + \varDelta$ wird. Dann ist $\Sigma = MA_2T_1$. In diesem Falle gibt es also eine Strecke A_2T_1 von der Art, dass die Summe Σ der Dreiecke, welche M mit dem Streckensysteme bestimmt, gleich dem Dreieck ist, welches M mit dieser Strecke bildet. Die Summe Σ ist in diesem Falle mit der Lage von M veränderlich, sie verschwindet, wenn M in die Richtung der Strecke A_2T_1 eintritt und wechselt den Sinn beim Durchgange von M durch dieselbe. Man erhält daher den Satz:

Fig. 184.



Für ein ebenes Streckensystem ist die Summe der Dreiecke, welche ein Punkt der Ebene mit den einzelnen Strecken bildet, entweder constant für alle Lagen dieses Punktes oder es lässt sich eine bestimmte Strecke angeben, mit welcher jener Punkt ein Dreieck bildet, dessen Inhalt gleich jener Summe ist. Der veränderliche Werth dieser Summe verschwindet im letzteren Falle für alle Punkte auf der Richtung dieser Strecke und ist in gleichen Abständen diesseits und jenseits der Strecke gleich und entgegengesetzt.

Die doppelte Summe Σ ist das Moment eines ebenen Kräftesystems, dessen Kräfte durch die Strecken A_1B_2, B_1C_2, ... dargestellt werden. Die Strecke A_2T_1 deren Länge, Richtung und Sinn durch die Schlusslinie AT des Polygons $ABC\ldots T$ gefunden wird, ist die Resultante des Systems. Ist sie Null, aber der Inhalt Σ des Polygons nicht Null, so ist das System äquivalent einem Paare, dessen Moment 2Σ; ist Σ Null, so findet Gleichgewicht statt. **Kräfte, deren Intensitäten den Seiten eines geschlossenen Polygons proportional, deren Richtungen diesen parallel sind und deren Sinn mit dem Sinne der Seiten desselben übereinstimmt, wie er von einem Punkte angegeben wird, der den Umfang ohne umzukehren durchläuft, sind daher stets**

äquivalent einem Kräftepaare, dessen Moment der Inhalt dieses Polygons ist.

Man kann die Lage und Länge der Linie A_2T_1 leicht finden, sobald die Werthe von Σ für drei Punkte A, B, C bekannt ist. Dieselben seien Σ_A, Σ_B, Σ_C. Da $\Sigma = MA_2T_1$ dem Abstande des Punktes M von A_2T_1 proportional ist, so muss die Richtung dieser Linie BC im Verhältniss $\Sigma_B : \Sigma_C$ und AC im Verhältniss $\Sigma_A : \Sigma_C$ theilen und zwar in äusseren oder in inneren Theilpunkten, je nachdem diese Verhältnisse positiv oder negativ sind. Ihre Länge ergibt sich daraus, dass, wenn d der Abstand der auf diese Weise gefundenen Theilungslinie ist,

$$A_2T_1 \cdot d = \tfrac{1}{2}\Sigma_A = \tfrac{1}{2}\Sigma_B = \tfrac{1}{2}\Sigma_C$$

sein muss. Auch das Moment Σ_M für einen Punkt M kann aus den Momenten Σ_A, Σ_B, Σ_C dreier Punkte unmittelbar bestimmt werden. Es besteht nämlich die Relation

$$MBC \cdot \Sigma_A + MCA \cdot \Sigma_B + MAB \cdot \Sigma_C = ABC \cdot \Sigma_M.$$

Man erhält sie, wie folgt. Es seien D, E, F (Fig. 185.) die Durchschnitte der Linie A_2T_1 mit BC, CA, AB, N aber der Schnittpunkt von AM mit BC, dann ist, wenn Σ_N das Moment für N bedeutet,

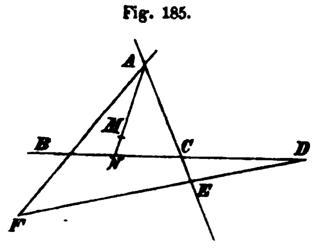


Fig. 185.

$$\frac{BD}{\Sigma_B} = \frac{CD}{\Sigma_C} = \frac{ND}{\Sigma_N}.$$

Zwischen den vier Punkten B, C, D, N besteht aber die identische Relation $BC\,(CD - ND) + CD\,(ND - BD) + ND\,(BD - CD) = 0$, welche in $BD \cdot CN + CD \cdot NB + ND \cdot BC = 0$ umgeschrieben werden kann. Aus ihr ergibt sich, indem man für BD, CD, ND die Grössen Σ_B, Σ_C, Σ_N einsetzt, welche in denselben Verhältnisse stehen, wie sie:

$$CN \cdot \Sigma_B + NB \cdot \Sigma_C + BC \cdot \Sigma_N = 0.$$

Ebenso hat man aber auch für die Gerade AMN:

$$MN \cdot \Sigma_A + NA \cdot \Sigma_M + AM \cdot \Sigma_N = 0.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen alles, was den Punkt N betrifft, so ergibt sich die fragliche Relation. Dies gelingt aber, indem $CN : NB = MCN : MNB = ACN : ANB = (CNM - CNA) = (BMN - BAN) = CAM : BMA = MCA : MAB$ und in gleicher Weise $MN : NA = MBC : ACB$ ist. Zunächst erhält man hiermit nämlich:

$$MCA \cdot \Sigma_B + MAB \cdot \Sigma_C = (MCA + MAB)\,\Sigma_N$$
$$MBC \cdot \Sigma_A + ACB \cdot \Sigma_M = (MBC + ACB)\,\Sigma_N,$$

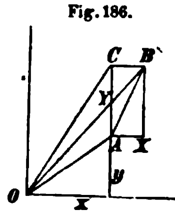


Fig. 186.

welche Gleichungen blos noch von einander zu subtrahiren sind, um zu dem Satze zu gelangen.

Die Betrachtungen dieses §. hätten wir den analytischen Entwickelungen des §. 4. zu Grunde legen können. So hätte insbesondere der Satz

$$MAB + MBC + MCA = ABC$$

unmittelbar zu der Formel für das Moment $H = \Sigma(xY - yX)$ geführt. Denn es ist für die Kraft AB (Fig. 186.)

$$OAC + OCB + OBA = ACB,$$

mithin $OAB = OAC + OCB - ACB$,

d. h. $$H = xY + (y + Y)\,X - XY = xY - yX.$$

V. Capitel.

Aequivalenz räumlicher Kräftesysteme am unveränderlichen Punktsystem.

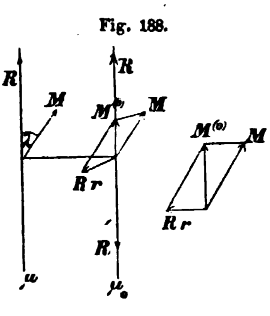
§. 1. Indem wir durch irgend einen Punkt O mit sämmtlichen Kräften P eines räumlichen Kräftesystems Parallele legen und längs ihnen Kräfte P in demselben und in entgegengesetztem Sinne anbringen, reduciren wir das ganze Kräftesystem, wie Cap. IV, §. 1. auf eine Resultante R und ein resultirendes Paar M. Indem wir R nach Intensität, Richtung und Sinn durch eine Strecke mit angefügter Pfeilspitze und M durch sein Axenmoment in ähnlicher Weise durch eine zweite Strecke darstellen, erhalten wir zwei unter einem gewissen Winkel λ gegeneinander geneigte Linien, welche den gesammten Kraftinhalt des Systems zu repräsentiren geeignet sind.

Diese Reduction der Kräfte ist, da der Reductionspunkt O beliebig wählbar ist, auf unendlich viele Arten ausführbar; für alle diese Reductionen bleibt aber die Resultante R nach Intensität, Richtung und Sinn dieselbe, während M im Allgemeinen nach Grösse, Richtung und Sinn seines Axenmomentes verschieden ausfällt. Die Resultante bestimmt daher ein Parallelstralenbündel (μ) im Raume, sodass die Reduction für alle Punkte desselben Strales μ dieselbe bleibt, beim Uebergange von einem Strale zu einem anderen aber eine leicht angebbare Aenderung erleidet. Um diese Aenderung beim Uebergange von einem Strale μ zu einem anderen Stale μ' deutlich zu übersehen, genügt es (Fig. 187.), längs μ' zwei entgegengesetzte Kräfte R, $-R$ anzubringen und die Resultante R, welche längs μ wirkt, mit der Kraft $-R$ zu dem Kräftepaare (R, $-R$) zu verbinden, dessen Axenmoment Rr, worin r den Abstand der Stralen μ, μ' bezeichnet, mit dem Axenmomente M zusammen nach dem Satze vom Parallelogramm der Axenmomente das der Reduction für den Stral μ' entsprechende Axenmoment M' liefert. Diese Uebertragung der Reduction von Stral zu Stral haben wir bereits im I. Thl., Cap. V, §. 4. (S. 161) für die Winkelgeschwindigkeiten ausgeführt. In derselben Weise wie dort ergibt sich, dass eine ausgezeichnete Reduction für einen gewissen Stral μ_0 existirt, für welche die Richtung des Axenmomentes zur Richtung der Resultanten R parallel wird. Man nennt diesen Stral nach Poinsot die Centralaxe des Kräftesystems. Die Ebene des Parallelogramms, welches M' zur Diagonale hat, enthält die Richtung von M und die zur Ebene des Paares (R, $-R$) oder der Ebene (μ, μ_0) senkrechte Richtung von Rr als Seiten. Soll nun die Diagonale die Richtung μ erlangen, so muss seine Ebene parallel

Fig. 187.

der Ebene des Winkels λ, welchen R und M bilden und senkrecht zur Ebene (μ, μ_0) werden. Da die Stellung der Ebene durch die erste dieser beiden Bedingungen bereits bestimmt ist, so folgt, dass der Stral μ_0 blos in einer durch μ gehenden, zur Ebene des Winkels λ senkrechten Ebene gesucht werden kann. Diese Ebene wird aber durch den Stral μ in zwei Felder zerlegt, sodass den Stralen μ' rechts und links von μ entgegengesetzte Axenmomente Rr und $-Rr$ entsprechen. Als Diagonale des Parallelogramms fällt aber M' in einen bestimmten der beiden Scheitelräume, welche die Richtungen von M und Rr bilden. Hierdurch entscheidet sich das Feld, in welchem μ_0 liegt; es kann nur dasjenige sein, für welches die Richtung der Stralen μ in den Winkel des aus M und Rr zu bildenden Parallelogramms zu liegen kommt. Der Abstand r der Stralen μ und μ_0 ergibt sich endlich daraus, dass, weil Rr senkrecht auf u steht, M' die rechtwinklige Projection von M auf die Richtung der Stralen μ werden muss.

Fig. 188.



Bezeichnen wir das der Centralaxe μ_0 entsprechende Axenmoment der Kräftereduction mit $M^{(0)}$, so erhalten wir mit Rücksicht auf Fig. 188, in welcher die Construction der Centralaxe angedeutet ist,

$$M^{(0)} = M \cos \lambda, \quad rR = M \sin \lambda$$

und mithin

$$r = \frac{M}{R} \sin \lambda.$$

Daher der Satz:

Jedes Kräftesystem, welches an einem unveränderlichen Punktsystem angreift, ist auf unzählige Arten einer Resultanten R und einem Kräftepaare M äquivalent; die Resultante bleibt in allen Fällen sowohl nach Intensität, als nach Richtung und Sinn dieselbe; sie bestimmt einen Parallelstralenbüschel von fester Richtung und kann die Lage jedes einzelnen Strales desselben annehmen. Das zugehörige Paar variirt im Allgemeinen sowohl nach Grösse, als auch nach Neigung und Sinn seines Axenmomentes. Unter den Stralen des Büschels gibt es einen ausgezeichneten Stral die Centralaxe des Kräftesystems, sodass, wenn die Resultante in ihm angenommen wird, das Axenmoment des zugehörigen Paares gleichfalls die Richtung des Büschels annimmt. Die Projectionen aller verschiedenen Axenmomente auf die Richtung des Büschels sind gleich und gleich dem Axenmomente, welches der Centralaxe entspricht.

Gehen wir von der Reduction $(R, M^{(0)})$ des Kräftesystems für die Centralaxe μ_0 aus, so ergibt sich die Reduction (R, M) für jeden anderen

Stral μ des Parallelbüschels im Abstande $(\mu_0, \mu) = r$ (Fig. 189.), wie S. 163, wenn ψ die Neigung des Axenmomentes M gegen μ_0 ist, durch die Gleichungen

$$M^2 = M^{(0)2} + r^2 R^2, \quad tg\,\psi = \frac{R}{M^{(0)}} : r,$$

d. h.:

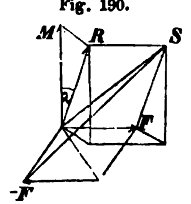
Unter allen Axenmomenten, welche den verschiedenen Reductionen des Kräftesystems auf Resultante und resultirendes Paar entsprechen, ist das der Centralaxe zugehörige das kleinste; allen Stralen μ, welche gleichen Abstand r von der Centralaxe μ_0 besitzen, entsprechen gleiche und gegen μ_0 gleichgeneigte Axenmomente. Das Quadrat des Axenmomentes nimmt mit dem Quadrate des Abstandes von der Centralaxe zu und die Neigung desselben gegen diese Axe wächst diesem Abstande proportional und nähert sich fortwährend der Rechtwinkligkeit gegen sie.

Fig. 189.

§. 2. Ausser den im vorigen §. behandelten Reductionsarten eines Kräftesystems auf Resultante und resultirendes Paar gibt es keine anderen dieser Art. Denn wenn es noch eine weitere Kraft K und ein Paar Q gäbe, welche zusammen dem Systeme äquivalent wären, so würden dieselben, in umgekehrtem Sinne genommen, mit diesem im Gleichgewichte sein müssen. Nun fällt die Richtung von K entweder mit einem Strale μ zusammen oder es gibt eine Ebene voll Stralen μ, welche K schneiden. Im ersten Falle reducire man das System auf R und M für den Stral μ und bilde die Resultante von R und $-K$, sowie das aus M und Q resultirende Axenmoment. Beide müssen wegen des Gleichgewichtes verschwinden. Mithin ist K identisch mit R und Q mit M, da eine einzelne Kraft einem Paare nicht Gleichgewicht halten kann. Im anderen Falle reducire man ebenso für irgend einen Stral μ, welcher K schneidet und ziehe denselben Schluss.

Verlegt man bei irgend einer Reduction (R, M) des Kräftesystems das resultirende Kräftepaar, es heisse $(F, -F)$, so, dass eine Seitenkraft F die Resultante R schneidet und setzt sie mit ihr zu einer neuen Kraft S zusammen, so wird das System den beiden im Allgemeinen sich kreuzenden Kräften $-F$, S äquivalent. Diese Reduction ist auf unzählige Arten möglich, welche aber alle aus den verschiedenen Reductionen (R, M) erhalten werden können. Es stelle Fig. 190. zwei solche Kräfte $-F$, S dar; wir suchen das Volumen der Pyramide, welche beide zu gegenüberliegenden Kanten hat. Nun ist die in der Ebene des Paares $(F, -F)$ enthaltene Grundfläche derselben ein Dreieck, dessen Inhalt

Fig. 190.



gleich demselben Momente $\frac{1}{2}M$ des resultirenden Paares ist. Die Höhe aber, nämlich der von dem Endpunkte von S auf diese Grundfläche gefällte Perpendikel ist gleich $R \cos \lambda$. Demnach ist das gesuchte Volumen $\frac{1}{6} RM \cos \lambda$. Allein $M \cos \lambda$ ist die Projection des Axenmomentes M auf die Richtung der Stralen μ oder die Richtung der Resultanten und folglich gleich $M^{(0)}$. Daher wird jenes Volumen $\frac{1}{6} RM^{(0)}$, welches eine constante Grösse ist, da R mit μ nicht variirt. Daher der Satz:

Ein Kräftesystem ist auf unendlich viele Arten zwei im Allgemeinen sich kreuzenden Kräften äquivalent und für alle solche Paare sich kreuzender Kräfte ist das Volumen der Pyramide, welche sie zu Gegenkanten hat, constant.

Dieser Satz rührt von Chasles her. S. S. 166.

§. 3. Aus der Gleichung $M^2 = M^{(0)2} + R^2 r^2$ folgt, dass das System nur dann einer blossen Resultanten ohne resultirendes Paar äquivalent sein kann, wenn $M^{(0)}$ verschwindet, indem für keinen Stral μ ausser μ das zugehörige Axenmoment Null werden kann. Da zugleich $M^{(0)} = M \cos \lambda$ ist, so folgt weiter, dass $M^{(0)}$ nur verschwinden kann, wenn $\lambda = \frac{1}{2}\pi$; daher:

Das Kräftesystem ist einer blossen Resultanten ohne zugehöriges Paar äquivalent, sobald für irgend eine Reduction das Axenmoment des resultirenden Paares zur Richtung der Resultanten senkrecht ist und die Resultante nicht verschwindet. Diese Einzelresultante fällt in die Centralaxe des Systems; für alle Reductionen findet die Rechtwinkligkeit des Axenmomentes und der Resultanten statt.

Wenn M senkrecht zu R, so ist die Ebene des resultirenden Paares der Resultanten parallel und da man das Paar in seiner Ebene verlegen und drehen kann, so kann man immer bewirken, dass eine Seitenkraft mit R in eine Richtung fällt. Dann erhält man zwei parallele ungleiche Kräfte, welche stets einer einzigen Kraft äquivalent sind.

Für das ebene Kräftesystem des vorigen Capitels ist die Bedingung der Rechtwinkligkeit von R und M erfüllt, daher ist dasselbe, wenn R nicht verschwindet, einer Einzelresultanten äquivalent. Die Resultante geht nämlich aus einem in die Ebene fallenden Kräftepolygon hervor und liegt also in der Ebene; das resultirende Axenmoment aber ergiebt sich als die Summe aller Axenmomente und diese sind sämmtlich senkrecht zur Ebene, da die Kräftepaare, denen sie angehören, in der Ebene liegen.

Für ein System von Parallelkräften ist diese Bedingung gleichfalls erfüllt. Denn für irgend eine Kräftereduction ergibt sich R als die Summe aller Kräfte in der Richtung der Parallelkräfte und die Axenmomente aller Kräftepaare sind senkrecht zu dieser Richtung und liefern also ein resultirendes Axenmoment senkrecht zu R. Die Auffindung

der Centralaxe ist in diesem Falle besonders einfach. Man legt durch R eine Ebene senkrecht zu M und zieht mit R in ihr und zwar in dem Felde, welches den M entgegengesetzt gerichteten Axenmomenten entspricht, im Abstande $r = \frac{M}{R}$ eine Parallele.

Das Kräftesystem ist äquivalent einem Paare, sobald R verschwindet. Jede Reduction liefert dasselbe Paar, nämlich $M = M^{(0)}$, wie sich von selbst versteht, da ein Paar beliebig verlegbar ist. Die Axe von $M^{(0)}$ gibt die Richtung des Büschels (μ) an, die Centralaxe ist aber unbestimmt.

Das Kräftesystem ist im Gleichgewichte, sobald für irgend eine Reduction $R = 0$ und $M = 0$ ist. Diese Bedingungen sind nothwendig und hinreichend, da ein Paar und eine Einzelkraft sich nicht tilgen können.

§. 4. Bisher haben wir das Punktsystem, an welchem das Kräftesystem wirkt, als vollkommen frei, d. h. als nicht gewissen Bedingungen unterworfen, angesehen. Die Bedingungen, an welche ein unveränderliches System gebunden ist, können sehr mannigfach sein; die am häufigsten vorkommenden sind folgende: 1. das System besitzt einen festen Punkt, 2. es besitzt eine feste Axe, 3. es hat eine feste Axenrichtung, 4. gewisse Punkte des Systems sind genöthigt, auf festen Curven oder Flächen zu bleiben, 5. gewisse Flächen des Systems sollen feste Flächen oder Curven bei fortwährend wechselnden Berührungspunkten berühren.

Besitzt das System einen festen Punkt, so reducire man die Kräfte für diesen auf eine Resultante und ein resultirendes Paar; erstere übt auf den festen Punkt einen Druck aus und wird durch den Widerstand dieses Punktes getilgt, das Paar ist beliebig verlegbar. Das Kräftesystem ist also im Falle eines festen Punktes immer äquivalent einem Kräftepaare.

Hat das System eine feste Axe, so setzt es allen Kräften, welche an irgend welchen Punkten dieser Axe angreifen, Widerstände entgegen, welche diese Kräfte vernichten. Man reducire nun die Kräfte des Systems für irgend einen Punkt der festen Axe auf Resultante und resultirendes Paar und zerlege das Paar in zwei Paare, von denen das eine eine zur festen Axe parallele, das andere eine zu dieser senkrechte Axe besitzt. Die Resultante und das letztere Paar setze man zu zwei Kräften zusammen, deren Richtungen im Allgemeinen nicht in eine Ebene fallen und welche beide an Punkten der Axe angreifen; sie bestimmen den Druck auf die Axe und werden durch die Widerstände derselben getilgt. Demnach bleibt blos die Wirkung eines Paares übrig, dessen Axe der festen Axe parallel ist. Diesem Paare ist mithin das ganze Kräftesystem äquivalent.

Besitzt das System eine feste Axenrichtung, d. h. kann es um eine feste Gerade des absoluten Raumes gedreht und längs derselben verschoben werden; so reducire man wie vorher, zerlege aber auch die Resultante parallel und senkrecht zu der festen Geraden. Die Gerade des Systems, welche mit dieser fortwährend zusammenfällt, tilgt alle zu ihr senkrechten Kraftcomponenten, daher reducirt sich das ganze Kräftesystem auf eine einzelne, längs jener Geraden wirkende Kraft und ein Paar, dessen Axe mit dieser parallel ist.

Die übrigen Fälle wird man leicht beurtheilen, indem man bedenkt, dass feste Curven und Flächen in normaler Richtung Widerstand leisten. Man wird jeden einzelnen derselben bestimmen, indem man die Kräfte des Systems für den Punkt, in welchem er stattfindet, reducirt und den normalen Bestandtheil der Resultanten in entgegengesetztem Sinne nimmt.

Man kann jedes System, welches Nebenbedingungen unterworfen ist, auf ein freies System zurückführen, indem man die Nebenbedingungen durch Kräfte, nämlich durch die Widerstände, welche durch sie veranlasst werden, ausdrückt und den übrigen Kräften des Systems hinzufügt. In dieser Weise ist die Festigkeit eines Punktes durch eine Kraft, die Festigkeit einer Axe durch zwei Kräfte, welche an zwei verschiedenen Punkten der Axe angreifen, die Festigkeit einer Curve oder Fläche durch den Normalwiderstand und die Bedingung, dass zwei Flächen sich berühren sollen, durch Normalkräfte auszudrücken, deren Sinn davon abhängt, ob das Kräftesystem die Flächen aneinander presst oder von einander zu entfernen strebt.

§. 5. Wir gehen jetzt über zu der analytischen Darstellung der Reduction der Kräfte; sie ist vollkommen analog der im II. Thl., S. 6.. gegebenen Reduction der Winkelgeschwindigkeiten. Wählen wir den Reductionspunkt zum Ursprunge eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z, zerlegen wir jede Kraft P des Systems, an irgend einem Punkte (x, y, z) ihrer Richtung angreifend gedacht, in drei Componenten X, Y, Z, parallel den Coordinatenaxen, und bringen jede dieser Componenten nochmals an dem Reductionspunkte in ihrem und in entgegengesetztem Sinne an, so erhalten wir 1. drei Aggregrate von Kraftcomponenten X, Y, Z, längs den Coordinatenaxen wirkend, welche nichts anderes sind, als die parallel mit sich an den Ursprung verlegten ursprünglichen Kraftcomponenten und 2. ein Aggregat von Kräftepaaren, deren Axen den Coordinatenebenen parallel laufen, also senkrecht zu den Coordinatenaxen sind.

Die drei ersten Aggregate, $A = \Sigma X$, $B = \Sigma Y$, $C = \Sigma Z$ bezeichnet, setzen sich zu der Resultanten R der Reduction zusammen; für sie und ihre Neigungen a, b, c gegen die Axen hat man daher

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

und
$$\frac{\cos a}{A} = \frac{\cos b}{B} = \frac{\cos c}{C} = \frac{1}{R}.$$

Hinsichtlich der Kräftepaare bemerke man, dass jedes von ihnen, z. B. das Paar $(X, -X)$, dessen Axe senkrecht zur Axe der x ist, zerlegt werden kann in zwei andere, deren Axen parallel den Axen der y und z laufen; die Axenmomente derselben, die wir auf den Coordinatenaxen aufgetragen denken, sind zX und $-yX$. Hierbei wird ein Axenmoment als positiv oder negativ angesehen, je nachdem sein Sinn mit dem positiven oder negativen Sinne der betreffenden Coordinatenaxe übereinstimmt oder nicht. Auch sieht man leicht, dass ein solches Moment, wie z. B. zX, das Zeichen wechselt, sowohl wenn die Coordinate z, als auch wenn die Kraft X den Sinn ändert, dass es aber das Zeichen behält, wenn beides zugleich eintritt. Das Paar $(Y, -Y)$ liefert zwei Paare zY, $-xY$ mit Axen, resp. parallel der z- und x-Axe; ebenso das Paar $(Z, -Z)$ die Paare yZ, $-xZ$, deren Axen parallel der x-, resp. y-Axe laufen. Das Bildungsgesetz dieser Paare liegt am Tage. Man denke sich die Coordinatenaxen immer in der Ordnung x, y, z aufeinanderfolgend, sodass, wenn man die x-Axe als die erste Axe ansieht, die y-Axe die zweite und die z-Axe die dritte Axe ist, wenn die y-Axe die erste, alsdann die z- und x-Axe die zweite und dritte und wenn die z-Axe die erste, die x- und y-Axe die zweite und dritte Axe ist. Jede Kraftcomponente, parallel einer ersten Axe, liefert alsdann zwei Axenmomente auf der zweiten resp. dritten Axe, deren Seitenkräfte gleich der Kraftcomponente ist, deren Arme resp. die dritten, resp. zweite Coordinaten sind und von denen das der zweiten Axe angehörende das Zeichen $(+)$, das andere das Zeichen $(-)$ hat.

Sammelt man die auf den Axen der x, y, z aufzutragenden Axenmomente, so erhält man $yZ - zY$, $zX - xZ$, $xY - yX$ und wenn man dieselbe Operation für alle Kräfte des Systems ausführt, längs den Coordinatenaxen die Axenmomente

$$L = \Sigma(yZ - zY), \quad M = \Sigma(zX - xZ), \quad N = \Sigma(xY - yX),$$

aus denen das Moment des resultirenden Paares der Reduction, das wir jetzt, um den Buchstaben M in der in analytischen Untersuchungen über Kräftesysteme üblichen Bedeutung verwenden zu können, H nennen wollen, hervorgeht, nämlich

$$H = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

dessen Axe mit den Coordinatenaxen die Winkel λ, μ, ν bildet, für welche

$$\frac{\cos\lambda}{L} = \frac{\cos\mu}{M} = \frac{\cos\nu}{N} = \frac{1}{H},$$

während die Neigung ψ von H und R durch die Gleichung

$$\cos\psi = \cos a \cos\lambda + \cos b \cos\mu + \cos c \cos\nu$$

und folglich durch

$$HR \cos\psi = AL + BM + CN$$

oder

$$(HR \sin\psi)^2 = \begin{vmatrix} B & C \\ M & N \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C & A \\ N & L \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A & B \\ L & M \end{vmatrix}^2$$

bestimmt wird.

Um die für den Coordinatenursprung ausgeführte Reduction der Kräfte auf einen anderen Reductionspunkt $O'(x_1, y_1, z_1)$ zu übertragen, genügt es, an ihm die Resultante R oder statt deren die drei Kräfte A, B, C, sowie die ihnen entgegengesetzten $-A$, $-B$, $-C$ anzubringen und mit den Kräften der Reduction für den Ursprung zu combiniren. Man erhält dadurch am Punkte O' zunächst dieselbe Resultante R in derselben Richtung, wie am Ursprunge, die Kräfte $-A$, $-B$, $-C$ aber bilden mit den am Ursprunge angreifenden A, B, C drei Paare $(-A, A)$, $(-B, B)$, $(-C, C)$, welche sich einzeln in je zwei andere spalten, deren Axen den Coordinatenaxen parallel laufen und welche mit L, M, N zu combiniren sind, um die Componenten L', M', N' des dem Reductionspunkte O' entsprechenden resultirenden Paares zu finden. Diese hinzutretenden Paare sind: $-y_1 C$ und $z_1 B$ mit Axen parallel der x-Axe, $-z_1 A$ und $x_1 C$ parallel der y-Axe, sowie $-x_1 B$ und $y_1 A$ parallel der z-Axe. Demnach erhält man mit Rücksicht auf die Bedeutung von A, B, C:

$$\begin{aligned} L' &= L - (y_1 C - z_1 B) \\ M' &= M - (z_1 A - x_1 C) \\ N' &= N - (x_1 B - y_1 A) \\ H' &= \sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2} \end{aligned}$$

und für die Richtung $(\lambda'\mu'\nu')$ von H':

$$\frac{\cos\lambda'}{L'} = \frac{\cos\mu'}{M'} = \frac{\cos\nu'}{N'} = \frac{1}{H'}.$$

§. 6. Soll der Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ der Centralaxe des Systems angehören, so muss die Richtung $(\lambda'\mu'\nu')$ mit (abc) zusammenfallen, d. h. $\cos\lambda' : \cos\mu' : \cos\nu' = \cos a : \cos b : \cos c$ werden. Diese Bedingung liefert die beiden Gleichungen:

$$\frac{A}{L'} = \frac{B}{M'} = \frac{C}{N'};$$

dieselben gelten für jeden beliebigen Punkt der Centralaxe und sind mithin die Gleichungen der Centralaxe in x_1, y_1, z_1 als laufenden Coordinaten. Um sie etwas bequemer zu gestalten, hat man zunächst durch Gleichsetzung des zweiten und dritten Ausdruckes $B \cdot N' = C \cdot M'$ oder vermöge der Bedeutung von N', M' auch

$$B[N - (x_1 B - y_1 A)] = C[M - (z_1 A - x_1 C)]$$

und hieraus weiter, indem man die Bestandtheile, welche x_1, y_1, z_1 enthalten, von den übrigen trennt:

$$[B^2 + C^2]\,x_1 - A\,(B \cdot y_1 + C \cdot z_1) = B \cdot N - C \cdot M,$$

oder, indem man $A^2 x_1$ addirt und subtrahirt und dieselbe Transformation in Bezug auf die drei Paare Ausdrücke ausführt, welche sich aus der obigen Proportion bilden lassen:

$$\begin{aligned} R^2 \cdot x_1 - A\,(A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1) &= B \cdot N - C \cdot M \\ R^2 \cdot y_1 - B\,(A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1) &= C \cdot L - A \cdot N \\ R^2 \cdot z_1 - C\,(A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1) &= A \cdot M - B \cdot L. \end{aligned}$$

Von diesen drei Gleichungen ist jede eine Folge der beiden anderen. Bestimmt man nun die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes so, dass sie den Gleichungen

$$\begin{aligned} R^2 \cdot \xi &= B \cdot N - C \cdot M \\ R^2 \cdot \eta &= C \cdot L - A \cdot N \\ R^2 \cdot \zeta &= A \cdot M - B \cdot L \end{aligned}$$

genügen, so erhält man durch Subtraction die Gleichungen der Centralaxe unter der Form

$$\frac{x_1 - \xi}{A} = \frac{y_1 - \eta}{B} = \frac{z_1 - \zeta}{C} = \frac{A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1}{R^2}.$$

Man sieht hieraus, dass die Centralaxe durch den Punkt (ξ, η, ζ) hindurchgeht. Um die Bedeutung dieses Punktes zu erkennen, bemerken wir, dass die beiden Geraden R, H, welche die Reduction der Kräfte für den Ursprung darstellen, die Seiten eines Parallelogramms sind, dessen Projectionen auf die Coordinatenebenen die drei Ausdrücke auf den rechten Seiten der Gleichungen für ξ, η, ζ sind. Quadrirt und addirt man also diese Gleichungen, so erhält man rechts das Quadrat des Inhaltes dieses Parallelogramms, d. h. das Quadrat von $HR \sin \psi$, wenn ψ den Winkel zwischen R und H darstellt; links ergibt sich, weil $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ das Quadrat des vom Ursprunge nach dem Punkte (ξ, η, ζ) gezogenen Radiusvectors r darstellt, das Quadrat von $R^2 r$ und ist mithin $R^2 r = HR \sin \psi$, d. h. $r = \frac{H \sin \psi}{R}$. Es drückt also r den Abstand der Centralaxe vom Ursprunge aus, wie wir früher sahen und ist also der Punkt (ξ, η, ζ) der Fusspunkt des vom Ursprunge auf die Centralaxe gefällten Perpendikels. Man kann dies auch leicht aus den Gleichungen der Centralaxe sehen. Da nämlich $\frac{A}{R}$, $\frac{B}{R}$, $\frac{C}{R}$ die Richtungscosinusse der Centralaxe sind, so bedeutet

$$\frac{A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1}{R} = \frac{A}{R} \cdot x_1 + \frac{B}{R} \cdot y_1 + \frac{C}{R} \cdot z_1$$

die Projection des vom Ursprunge nach dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ der Centralaxe gezogenen Radiusvectors auf die Centralaxe. Dieselbe aber erfordert das Fällen eines Perpendikels vom Ursprunge auf die Centralaxe.

Nennt man δ jene Projection, so lassen sich die Gleichungen der Centralaxe so schreiben: $(x_1 - \xi) : \frac{A}{R} = (y_1 - \eta) : \frac{B}{R} = (z_1 - \zeta) : \frac{C}{R} = \delta$ und sagen nichts weiter, als dass der Punkt (ξ, η, ζ) der Anfangspunkt der Strecke δ ist.

Um das der Centralaxe entsprechende Axenmoment, wofür wir hier der Gleichförmigkeit wegen den Buchstaben $H^{(0)}$ brauchen wollen, zu bestimmen, erhält man aus den obigen Gleichungen, wenn $L^{(0)}$, $M^{(0)}$, $N^{(0)}$ seine Componenten bedeuten:

$$L^{(0)} = L - (y_1 C - z_1 A)$$
$$M^{(0)} = M - (z_1 A - x_1 C)$$
$$N^{(0)} = N - (x_1 B - y_1 A)$$
$$H^{(0)2} = L^{(0)2} + M^{(0)2} + N^{(0)2}$$
$$\frac{A}{L^{(0)}} = \frac{B}{M^{(0)}} = \frac{C}{N^{(0)}} = \frac{R}{H^{(0)}}\,.$$

Die drei ersten dieser Gleichungen geben

$$AL^{(0)} + BM^{(0)} + CN^{(0)} = AL + BM + CN$$

und die übrigen gestatten die Combinationen

$$H^{(0)} = L^{(0)} \cdot \frac{L^{(0)}}{H^{(0)}} + M^{(0)} \cdot \frac{M^{(0)}}{H^{(0)}} + N^{(0)} \cdot \frac{N^{(0)}}{H^{(0)}} = L^{(0)} \cdot \frac{A}{R} + M^{(0)} \cdot \frac{B}{R} + N^{(0)} \cdot \frac{C}{R},$$

also mit Hülfe der eben gefundenen Relation

$$H^{(0)} = \frac{AL + BM + CN}{R}\,.$$

Soll sich das Kräftesystem auf eine blose Resultante ohne zugehöriges Kräftepaar reduciren lassen, so muss die Resultante längs der Centralaxe wirken und $H^{(0)} = 0$ sein, daher ist der analytische Ausdruck dieser Bedingung

$$AL + BM + CN = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung mit HR und bedenkt, dass $\frac{A}{R}, \frac{B}{R}, \frac{C}{R}$ die Richtungscosinusse der Resultanten, $\frac{L}{H}, \frac{M}{H}, \frac{N}{H}$ die Richtungscosinusse für die Axe des resultirenden Paares H der für den Coordinatenursprung ausgeführten Reduction sind, so sieht man, dass die Bedingung nichts anderes ausdrückt, als dass die Axe des resultirenden Paares senkrecht zur Resultanten sein oder dass die Resultante mit der Ebene desselben parallel laufen müsse. In diesem Falle vereinfachen sich die Gleichungen der Resultanten (Centralaxe); sie sind wegen $L^{(0)} = M^{(0)} = N^{(0)} = 0$:

$$y_1 C - z_1 B = L$$
$$z_1 A - x_1 C = M$$
$$x_1 B - y_1 A = N$$

und liefern, wenn man sie resp. mit A, B, C multiplicirt und addirt, wieder die Bedingung $AL + BM + CN = 0$.

§. 7. Wir wollen insbesondere noch die Reduction der Parallelkräfte ausführen. Ist (α, β, γ) die Richtung der Kräfte P und wird ihr Sinn durch den positiven oder negativen Werth von P ausgedrückt, so wird $X = P\cos\alpha$, $Y = P\cos\beta$, $Z = P\cos\gamma$, $yZ - zY = P(y\cos\gamma - z\cos\beta)$, $zX - xZ = P(z\cos\alpha - x\cos\gamma)$, $xY - yX = P(x\cos\beta - y\cos\alpha)$ und hiermit, da $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ für die Summationen constant sind:

$$A = \cos\alpha\cdot\Sigma P, \quad B = \cos\beta\cdot\Sigma P, \quad C = \cos\gamma\cdot\Sigma P$$
$$R = \Sigma P$$
$$\cos a = \cos\alpha, \quad \cos b = \cos\beta, \quad \cos c = \cos\gamma;$$
$$L = \cos\gamma\,\Sigma Py - \cos\beta\,\Sigma Pz$$
$$M = \cos\alpha\,\Sigma Pz - \cos\gamma\,\Sigma Px$$
$$N = \cos\beta\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Py.$$
$$H^2 = L^2 + M^2 + N^2 = (\Sigma Px)^2 + (\Sigma Py)^2 + (\Sigma Pz)^2$$
$$- [\cos\alpha\,\Sigma Px + \cos\beta\,\Sigma Py + \cos\gamma\,\Sigma Pz]^2.$$

Die Bedingung, dass sich die Kräfte auf eine Resultante reduciren, ist erfüllt und folglich $H^{(0)} = 0$. Die Gleichungen dieser Resultanten sind

$$(y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)\,\Sigma P = \cos\gamma\,\Sigma Py - \cos\beta\,\Sigma Pz$$
$$(z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)\,\Sigma P = \cos\alpha\,\Sigma Pz - \cos\gamma\,\Sigma Px$$
$$(x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)\,\Sigma P = \cos\beta\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Py.$$

Wir wollen diese Gleichungen folgendermassen schreiben, indem wir sie nach $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ordnen:

$$(y_1\cdot\Sigma P - \Sigma Py)\cos\gamma - (z_1\cdot\Sigma P - \Sigma Pz)\cos\beta = 0$$
$$(z_1\cdot\Sigma P - \Sigma Pz)\cos\alpha - (x_1\cdot\Sigma P - \Sigma Px)\cos\gamma = 0$$
$$(x_1\cdot\Sigma P - \Sigma Px)\cos\beta - (y_1\cdot\Sigma P - \Sigma Py)\cos\alpha = 0.$$

Dieselben werden unabhängig von der Richtung $(\alpha\beta\gamma)$ durch die speciellen Coordinatenwerthe

$$x_1 = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad y_1 = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \quad z_1 = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}$$

erfüllt; es geht mithin, wie man auch immer die Kräfte ohne Aenderung ihrer Intensitäten um ihre Angriffspunkte drehen mag, die Resultante stets durch einen festen Punkt, den sogenannten Mittelpunkt der Parallelkräfte, dessen Coordinaten die eben entwickelten Werthe haben.

Ist $R = 0$, so reducirt sich das System auf ein Paar.

Ein besonders wichtiger Fall der Reduction von Parallelkräften tritt bei dem der Schwere unterworfenen Systeme ein. In diesem Falle sind die Kräfte sämmtlich gleichen Sinnes und kann also R nicht Null sein. Sind m, m', m'', ... die Massen der Systempunkte, so sind die P deren Gewichte, nämlich $P = mg$, $P' = m'g$, p und sämmtlich vertikal abwärts gerichtet; die Resultante R ist das Gesammtgewicht des Systems,

nämlich $R = \Sigma mg = g\Sigma m = gM$, wenn mit M die Gesammtmasse des Systems bezeichnet wird. Ferner ist $\Sigma Px = \Sigma mgx = g\Sigma mx$, $\Sigma Py = g\Sigma my$, $\Sigma Pz = g\Sigma mz$ und daher werden die Coordinaten des Mittelpunktes der Parallelkräfte, welcher in dem vorliegenden Falle der Schwerpunkt heisst:

$$x_1 = \frac{\Sigma mx}{M}, \quad y_1 = \frac{\Sigma my}{M}, \quad z_1 = \frac{\Sigma mz}{M}.$$

Die Schwerkräfte eines Systems sind demnach immer einer einzigen Kraft, dem Gesammtgewichte des Systems äquivalent, welches vertikal abwärts wirkt und an irgend einem Punkte auf der Vertikalen des Schwerpunktes, insbesondere also auch an diesem selbst angreifend gedacht werden kann. Die Ausdrücke für die Coordinaten des Schwerpunktes zeigen, dass derselbe identisch mit dem Mittelpunkte der Masse ist S. Cap. II, §. 1., S. 502.

§. 8. Aus den Formeln des §. 5. entspringen unmittelbar die analytischen Ausdrücke für die Bedingungen des Gleichgewichtes eines unveränderlichen Systems. Da die Resultante R und das resultirende Paar H, welche irgend einer Reduction der Kräfte entsprechen, einander nicht Gleichgewicht halten können, so müssen sie einzeln verschwinden und da ihre Quadrate Quadratsummen reeller Grössen sind, so lösen sich die beiden Bedingungen $R = 0$, $H = 0$ in die 6 anderen auf:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0 \quad & \Sigma(yZ - zY) &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 \quad & \Sigma(zX - xZ) &= 0 \\ \Sigma Z &= 0 \quad & \Sigma(xY - yX) &= 0. \end{aligned}$$

Zum Gleichgewichte eines Kräftesystems am unveränderlichen Punktsystem ist erforderlich und hinreichend 1. dass die Summen der Projectionen sämmtlicher Kräfte in Bezug auf irgend drei Coordinatenaxen verschwinden und 2. dass die Summen der Axenmomente aller aus der Reduction für den Coordinatenursprung entspringender Kräftepaare für dieselben Axen Null sind. Die drei ersten Gleichungen drücken aus, dass die Kräfte in der Richtung der Coordinatenaxen keine Wirkung auf das System ausüben dürfen, die drei letzten, dass kein Bestreben vorhanden sein darf, das System um Axen parallel den Coordinatenaxen zu drehen; die ersteren heissen daher oft auch die Bedingungen des Gleichgewichtes der Translation, die letzteren die Bedingungen des Gleichgewichtes der Rotation.

Ist das System nicht frei, so nehmen die Gleichgewichtsbedingungen eine etwas andere Form an, indem das Gleichgewicht in einem solchen Falle nur mit Hülfe der im System auftretenden Widerstände zu Stande kommt. Hat das System nämlich:

1. **einen festen Punkt**, so leistet derselbe den Kräften gegenüber einen Widerstand R_1, dessen Intensität und Richtung von jenen abhängt. Wählt man den festen Punkt zum Ursprung des Coordinatensystems und bezeichnet die Componenten von R_1 mit X_1, Y_1, Z_1, so sind die Gleichgewichtsbedingungen: $\Sigma X + X_1 = 0$, $\Sigma Y + Y_1 = 0$, $\Sigma Z + Z_1 = 0$; $\Sigma(yZ - zY) = 0$, $\Sigma(zX - xZ) = 0$, $\Sigma(xY - yX) = 0$. Die drei ersteren liefern die Componenten und damit die Intensität und die Richtung des Widerstandes, die drei letzten, welche den Widerstand nicht enthalten, sind als die eigentlichen Gleichgewichtsbedingungen der auf das System wirkenden Kräfte zu bezeichnen. Es brauchen demnach diese Kräfte unter sich nur drei Gleichgewichtsbedingungen zu genügen.

2. Hat das System eine **feste Axe**, so kann die Festigkeit derselben durch die Festigkeit zweier Punkte derselben vertreten werden, da eine Linie fest ist, sobald es zwei ihrer Punkte sind. Wählen wir die feste Axe zur Axe der z, den einen dieser Punkte zum Coordinatenursprung und sei h die Entfernung des anderen von ihm. Die Widerstände der beiden Punkte bezeichnen wir mit R_1 und R_2 und ihre Componenten mit X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2; dann sind die Bedingungen des Gleichgewichtes:

$$\begin{aligned}
\Sigma X + X_1 + X_2 &= 0\\
\Sigma Y + Y_1 + Y_2 &= 0\\
\Sigma Z + Z_1 + Z_2 &= 0\\
\Sigma(yZ - zY) - Y_2 h &= 0\\
\Sigma(zX - xZ) + X_2 h &= 0\\
\Sigma(xY - yX) &= 0.
\end{aligned}$$

Die letzte von diesen sechs Gleichungen ist die einzige von den gegebenen Kräften unter sich zu erfüllende Bedingung, die fünf anderen liefern die Widerstände der festen Punkte und mithin auch die Pressungen, welche in ihnen auf die Axe ausgeübt werden. Zunächst erhält man nämlich aus der vierten und fünften Gleichung X_2 und Y_2 und hiermit aus der ersten und zweiten X_1, Y_1, während die dritte $Z_1 + Z_2$ gibt, wie natürlich ist, da die beiden Kräfte Z_1, Z_2 längs derselben Geraden wirken. Sind aber X_1, X_2, Y_1, Y_2, $Z_1 + Z_2$ bekannt, so kann man die Resultante von X_1, Y_1, sowie von X_2, Y_2 nach Grösse und Richtung bestimmen und indem man die Summe $Z_1 + Z_2$ in zwei beliebige Theile Z_1, Z_2 zerlegt, R_1 als Resultante von X_1, Y_1, Z_1 und R_2 als Resultante von X_2, Y_2, Z_2 finden.

3. Hat das System blos eine **feste Axenrichtung**, d. h. kann es um eine gewisse Axe des absoluten Raumes gedreht und längs dieser verschoben werden, so wähle man diese Axe zur z-Axe. Da die Axe in ihrer Richtung keinen Widerstand leistet, so ist $Z_1 + Z_2 = 0$ zu

setzen und sind folglich unter Beibehaltung der Bezeichnung von 2. die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\Sigma X + X_1 + X_2 = 0, \quad \Sigma Y + Y_1 + Y_2 = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$
$$\Sigma(yZ - zY) - Y_2 h = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) + X_2 h = 0,$$
$$\Sigma(xY - yX) = 0.$$

4. Ein System berühre mit einem Punkte eine feste Ebene; um die Bedingungen des Gleichgewichtes darzustellen, wählen wir den Berührungspunkt zum Ursprunge und die feste Ebene zur xy-Ebene des rechtwinkligen Coordinatensystems und bezeichnen den Normalwiderstand der Ebene, indem wir von Reibung absehen, mit N, dann hat man:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + N = 0,$$
$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Die dritte Gleichung bestimmt den Widerstand, den die Ebene leisten und damit auch den Druck, den sie aushalten muss.

Berührt das System mit zwei Punkten die feste Ebene und wählt man die Verbindungslinie dieser Punkte zur x-Axe, den einen von ihnen aber zum Coordinatenursprung, so erhält man, wenn h den Abstand beider Punkte bezeichnet, als Gleichgewichtsbedingungen:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + N_1 + N_2 = 0,$$
$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) - N_2 h = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Die dritte und fünfte Gleichung bestimmen die Widerstände.

Berührt das System mit mehreren Punkten, deren Anzahl n sein möge, eine feste Ebene in den Punkten $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ... $(x_n y_n)$ und nennt man $N_1, N_2, N_3, \ldots N_n$ die Normalwiderstände in diesen Punkten, so erhält man als Gleichgewichtsbedingungen, indem man die Widerstände unter die Kräfte Z aufnimmmt:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + N_1 + N_2 + \cdots + N_n = 0,$$
$$\Sigma(yZ - zY) + y_1 N_1 + y_2 N_2 + \cdots + y_n N_n = 0,$$
$$\Sigma(zX - xZ) - x_1 N_1 - x_2 N_2 - \cdots - x_n N_n = 0,$$
$$\Sigma(xY - yX) = 0.$$

Da die Widerstände nur in dreien dieser Gleichungen vorkommen, so kann man sie nur in dem Falle bestimmen, dass $n = 3$ ist, d. h. das System höchstens mit drei Punkten die Ebene berührt. Bei mehr als drei Berührungspunkten ist das Problem unbestimmt, aber auch bei drei Punkten tritt eine Unbestimmtheit ein, sobald dieselben in gerader Linie, z. B. in der x-Axe liegen. Vgl. hierüber Abel und Crelle in Crelle's Journal Bd. I, S. 117.

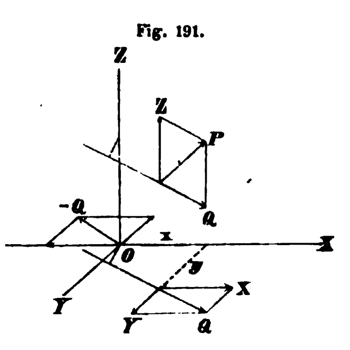
§. 9. Die drei letzten Gleichgewichtsbedingungen eines freien Systems, nämlich

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0$$

pflegt man gewöhnlich etwas anders auszusprechen, als oben geschehen ist: Die Grössen unter den Summenzeichen bedeuten Momente von Kräften

paaren, für welche die Coordinatenaxen die Axenrichtungen sind. So stellt z. B. $xY - yX$ ein Paar dar, dessen Axe der z-Axe parallel ist; dies Paar ist aus zweien, xY und $-yX$ gebildet. Die vier Kräfte X, Y, $-X$, $-Y$ dieser Paare liefern aber das Paar $(Q, -Q)$, (Fig. 191.), dessen Seitenkraft Q die Resultante von X und Y und dessen Arm der Abstand q von Q und der z-Axe ist. Wir haben früher die Kraft P am Punkte x, y, z in drei rechtwinklige Componenten X, Y, Z zerlegt, statt dessen wollen wir sie jetzt blos in zwei zerlegt denken, von denen die eine, Z, parallel der Z-Axe läuft, während die andere zu ihr senkrecht, also parallel der xy-Ebene ist. Die letztere ist nichts anderes, als die Projection von P auf die xy-Ebene oder die eben erwähnte Kraft Q. Die Ebene des Parallelogramms, mit Hülfe dessen diese Zerlegung bewirkt wird, ist parallel der z-Axe und q der Abstand von ihr; daher ist q auch der kürzeste Abstand von P von der z-Axe. Das Moment Qq des Kräftepaares $(Q, -Q)$ wird sehr oft das Moment der Kraft P in Bezug auf die Axe der z genannt und pflegt man das **Moment einer Kraft in Bezug auf eine Axe** zu definiren als das **Produkt aus der Projection der Kraft auf eine zur Axe senkrechte Ebene und dem kürzesten Abstande der Kraftrichtung von der Axe.** Demnach drücken die drei letzten Gleichgewichtsbedingungen aus, dass die Summen der Momente aller Kräfte des Systems in Bezug auf die drei Coordinatenaxen verschwinden müssen, wenn Gleichgewicht bestehen soll.

Fig. 191.



Es bedarf kaum der Erwähnung, dass im Falle eines ebenen Kräftesystems sämmtliche Formeln der vorigen Paragraphen eine wesentliche Vereinfachung erleiden. Wählt man die Ebene der Kräfte zur xy-Ebene so sind alle z-Coordinaten und alle Z-Componenten Null und daher werden die Formeln für die Reduction der Kräfte eines ebenen Systems:

$$A = \Sigma X, \quad B = \Sigma Y, \quad R = \sqrt{A^2 + B^2},$$
$$\frac{\cos a}{A} = \frac{\cos b}{B} = \frac{1}{R}, \quad tg\, a = \frac{B}{A}$$
$$H = \Sigma(xY - yX);$$

und die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Projicirt man das räumliche System und alle seine Kräfte auf eine Coordinatenebene, z. B. die xy-Ebene, so bestehen für das projicirte System, wenn es im Gleichgewichte sein soll, die Gleichungen

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

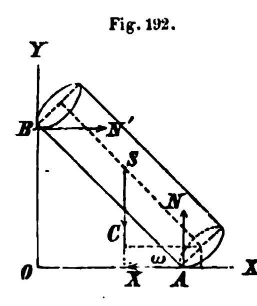
Dieselben finden sich unter den Gleichgewichtsbedingungen des räumlichen Systems und da die xy-Ebene eine beliebige ist, so folgt, dass die Projection eines räumlichen, im Gleichgewichte befindlichen Systems gleichfalls im Gleichgewichte ist; sowie dass, wenn die Projectionen eines solchen auf irgend drei verschiedene Ebenen im Gleichgewichte sind, das räumliche System selbst sich ebenfalls im Gleichgewichte befindet.

Wenn ein System im Gleichgewichte ist, so kann man eine beliebige Parthie desselben von den übrigen Theilen abtrennen und die Bedingungen des Zusammenhanges derselben mit jenen durch Kräfte ersetzen; die abgetrennte Parthie ist alsdann für sich im Gleichgewichte. Auf diese Weise kann man oft eine complicirte Aufgabe über das Gleichgewicht eines Systems in mehrere einfachere Aufgaben spalten; zugleich erfährt man dadurch das Nöthige über die eingeführten Zusammenhangs- oder Spannungskräfte. Dies Princip ist auch in allen Fällen von grossem Nutzen, in welchen ein im Ganzen veränderliches System aus anderen unveränderlichen Systemen zusammengesetzt ist und diese Partialsysteme blos durch biegsame Verbindungen, durch Gelenke u. s. w. untereinander zusammengefügt sind.

§. 10. Im Folgenden wollen wir zunächst eine Reihe leichter Aufgaben über die Reduction und das Gleichgewicht der Kräfte an einem unveränderlichen Systeme behandeln.

1. Ein homogener schwerer Cylinder (Fig. 192.) von der Länge l und dem Radius des Querschnitts gleich r stützt sich mit zwei Punkten A, B seiner Basiskreise gegen eine horizontale und eine vertikale Wand, so zwar, dass die Verbindungslinie AB der Berührungspunkte in eine Vertikalebene senkrecht zur Durchschnittslinie der Wände fällt und mit dem Horizonte den Winkel ω bildet; man sucht eine am unteren Stützpunkte A angreifende horizontale Kraft X, welche das Ausgleiten des Cylinders hindert, sowie die Pressungen, welche die Wände in den Punkten A und B erleiden oder die Widerstände, welche sie in diesen Punkten zu leisten haben.

Fig. 192.



Das System ist zwei Bedingungen unterworfen, nämlich mit zwei Punkten zwei feste Ebenen zu berühren; die Normalwiderstände dieser Ebenen seien N, N' resp. in A, B; da der Cylinder homogen ist, so liegt der Mittelpunkt sämmtlicher paralleler Schwerkräfte im Mittelpunkte S des Cylinders, in welchem wir die Resultante dieser, nämlich das Gewicht G statt ihrer angreifend denken. Es muss alsdann zwischen den vier Kräften G, N, N', X Gleichgewicht bestehen; reducirt wir also die Kräfte für irgend einen Punkt des Raumes, z. B. für A, so muss die Resultante und das resultirende Paar verschwinden. Verlegt man sämmtliche Kräfte in ihrer und in entgegengesetzter Richtung an den Punkt A, so erhält man in horizontaler Richtung $X - N'$ und in vertikaler $G - N$ und da die Resultante dieser nur verschwinden kann, wenn sie einzeln verschwinden, so folgt

$N = G$, $N' = X$, d. h. der Druck auf die horizontale Wand ist gleich dem Gewichte des Cylinders, der Druck auf die vertikale gleich der gesuchten Kraft, welche das Gleichgewicht herbeiführt. Ferner ergeben sich zwei Kräftepaare $(G, -G)$ und $(N', -N')$ von parallelen Axen, aber entgegengesetztem Sinne mit den Momenten $X \cdot 2l \sin \omega$ und $-G \cdot (l \cos \omega - r \sin \omega)$ und da das resultirende Paar verschwinden muss, so hat man

$$2lX \sin \omega = G(l \cos \omega - r \sin \omega),$$

woraus folgt: $X = N' = \frac{1}{2} G \operatorname{cotg} \omega - \frac{1}{2} \frac{r}{l} G$. — Die gesuchte Kraft X wird Null, wenn die Dimensionen des Cylinders oder der Winkel ω so beschaffen sind, dass $\frac{r}{l} = \frac{2r}{2l} = \operatorname{cotg} \omega$; in diesem Falle geht nämlich G durch den Punkt A und liegt der Cylinder ohne Druck an der vertikalen Wand.

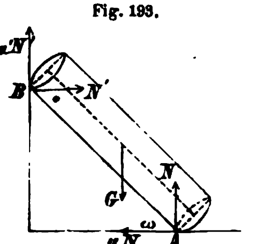
Um die vorliegende Aufgabe rein analytisch zu lösen, wählen wir die Ebene der Kräfte zur xy-Ebene, ihren Schnittpunkt mit der Durchschnittslinie der Wände zum Ursprung; da alle z-Coordinaten der Angriffspunkte der Kräfte und alle Z-Componenten derselben Null sind, so sind blos die Gleichungen $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma(xY - yX) = 0$ zu bilden, für die wir folgende kleine Tafel entwerfen:

Kräfte	x	y	x	y	$xY - yX$
G	0	$-G$	$l \cos \omega + r \sin \omega$	$l \sin \omega + r \cos \omega$	$-G(l \cos \omega + r \sin \omega)$
X	$-X$	0	$2l \cos \omega$	0	0
N	0	N	$2l \cos \omega$	0	$2l \cos \omega . N$
N'	N'	0	0	$2l \sin \omega$	$-2l \sin \omega . N'$

Demnach sind die Gleichgewichtsbedingungen: $-X + N' = 0$, $-G + N = 0$, $-G(l \cos \omega + r \sin \omega) + 2lN \cos \omega - 2lN' \sin \omega = 0$, woraus sich dieselben Folgerungen ergeben, wie vorher.

2. Der Cylinder soll unter denselben Bedingungen wie in der vorigen Aufgabe nicht durch eine neu einzuführende Kraft X, sondern durch die Reibung an den Punkten A und B im Gleichgewicht erhalten werden (Fig. 193.): man sucht den kleinsten Winkel ω, bei welchem das Gleichgewicht noch möglich ist. Zu den Kräften G, N, N' treten jetzt noch die Reibungskräfte bei A und B hinzu; dieselben wirken dem Ausgleiten der Berührungspunkte A und B entgegen und sind proportional den daselbst stattfindenden Pressungen N, N'. Bezeichnen μ, μ' die Reibungscoefficienten zwischen dem Material des Cylinders und der horizontalen und vertikalen Wand, so sind die Intensitäten der beiden Reibungskräfte μN und $\mu' N'$; die Reduction der Kräfte für den Punkt A ergibt daher ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe die Gleichgewichtsbedingungen:

Fig. 193.

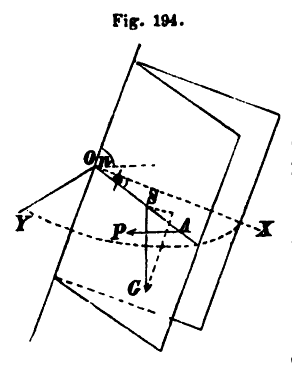


$$\mu N - N' = 0, \quad N + \mu' N' - G = 0,$$
$$2N'l(\sin \omega + \mu' \cos \omega) - G(l \cos \omega - r \sin \omega) = 0.$$

Aus den beiden ersten folgen die Drucke $N = \frac{G}{1 + \mu\mu'}$, $N' = \frac{\mu G}{1 + \mu\mu'}$, aus der letzten erhält man $tg\, \omega = \frac{1 - \mu\mu'}{2\mu + (1 + \mu\mu')\frac{r}{l}}$.

3. **Eine homogene, schwere, parallelepipedische Platte** (Fig. 194.) **von der Länge $2l$, der Breite $2b$ und der Dicke $2d$ ist um eine gegen den Horizont unter einem Winkel n geneigte, die Mitten der zwei Gegenseiten von der Länge $2d$ einer parallelogrammatischen Seitenfläche verbindende Axe drehbar; sie ist aus der Gleichgewichtslage um den Winkel φ herausgedreht und soll durch eine zur Seitenfläche $4bl$ senkrechte, in der Mitte der Längendimension im Abstande c angreifende Kraft P im Gleichgewichte erhalten werden. Wie gross ist P, wenn das Gewicht der Platte G beträgt?** (Schräge Fallthür.) Die Schwerkräfte der Platte ersetzen wir durch ihre Resultante, das am Schwerpunkte angreifende Gesammtgewicht G derselben; der Schwerpunkt S ist wegen der homogenen Beschaffenheit der Platte der geometrische Mittelpunkt derselben. Die Widerstände der Axe denken wir an den Enden der Axe wirkend und bezeichnen den am höher gelegenen Ende wirkenden mit N, den anderen mit N'. Wählen wir eine durch die Mitte der Länge $2l$ senkrecht zur Axe gelegte Ebene zur xy-Ebene und ihre Schnittlinie mit der Gleichgewichtslage der Platte zur x-Axe, senkrecht dazu die y-Axe und die feste Axe zur z-Axe, so erhalten wir behufs der Reduction der Kräfte für den Coordinatenursprung die Tabelle:

Fig. 194.



Kräfte	X	Y	Z	x	y	z	$yZ - zY$	$zX - xZ$	$xY - yX$
G	$G\cos n$	0	$-G\sin n$	$b\cos\varphi$	$b\sin\varphi$	0	$-bG\sin\varphi\sin n$	$bG\cos\varphi\sin n$	$-bG\sin\varphi\cos n$
P	$-P\sin\varphi$	$P\cos\varphi$	0	$c\cos\varphi$	$c\sin\varphi$	0	0	0	$Pc(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$
N	X	Y	Z	0	0	l	$-lY$	lX	0
N'	X'	Y'	Z'	0	0	$-l$	lY'	$-lX'$	0

und mit Hülfe derselben die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{array}{ll}
1. & G\cos n - P\sin\varphi + X + X' = 0 \\
2. & P\cos\varphi + Y + Y' = 0 \\
3. & -G\sin n + Z + Z' = 0 \\
4. & -bG\sin\varphi\sin n - l(Y - Y') = 0 \\
5. & bG\cos\varphi\sin n + l(X - X') = 0 \\
6. & -bG\sin\varphi\cos n + Pc = 0.
\end{array}$$

Die sechste Gleichung löst die Hauptfrage der Aufgabe, indem sie P liefert. Man findet diese Gleichung unmittelbar, indem man G parallel und senkrecht zur festen Axe zerlegt; da G mit der xy-Ebene den Winkel n bildet, so ist die letztere Componente, welche der x-Axe parallel läuft, $G\cos n$ und da der Arm des $G\cos n$ entsprechenden Paares $b\sin\varphi$ ist, so erhält man für das Moment dieses Paares, dessen Axe parallel der z-Axe ist, $-bG\sin\varphi\cos n$; Pc ist das Moment des anderen Paares, welches diesem Gleichgewicht halten muss. P wird ein Maximum für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, es wird Null für $\varphi = 0$ oder π. Für $n = \frac{\pi}{2}$ ist P stets gleich Null bei jedem φ (die offenstehende Thüre mit vertikaler Axe). Je grösser n, desto kleiner wird P, für $n = 0$ wird P ein Maximum. Für $n = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ tritt das absolute Maximum von P ein (horizontale Fallthür).

Die übrigen Gleichungen liefern X, X': Y, Y'; $Z + Z'$, nämlich:

$$X = \tfrac{1}{2} G \left\{ \left(\frac{b}{c} \sin^2 \varphi - 1 \right) \cos n - \frac{b}{l} \cos \varphi \sin n \right\},$$
$$X' = \tfrac{1}{2} G \left\{ \left(\frac{b}{c} \sin^2 \varphi - 1 \right) \cos n + \frac{b}{l} \cos \varphi \sin n \right\},$$
$$Y = -\tfrac{1}{2} G \left\{ \frac{b}{c} \cos \varphi \cos n - \frac{b}{l} \sin n \right\} \sin \varphi,$$
$$Y' = -\tfrac{1}{2} G \left\{ \frac{b}{c} \cos \varphi \cos n + \frac{b}{l} \sin n \right\} \sin \varphi,$$
$$Z + Z' = G \sin n.$$

Z und Z' können nicht getrennt werden, da sie längs derselben Geraden wirken.

Für $n = \frac{1}{2}\pi$, wofür $P = 0$ ist, erhält man bezüglich der Widerstände:

$$X + X' = 0,\ Y + Y' = 0,\ Z + Z' = G,\ X - X' = -\frac{bG}{l} \cos \varphi,\ Y - Y' = 0,$$

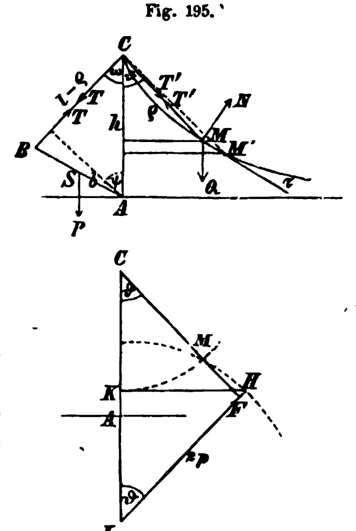
mithin

$$X = -X' = -\frac{b}{l} G, \quad Y = -Y' = 0, \quad Z + Z' = G,$$

da man $\varphi = 0$ setzen kann. Bei einer vertikalen Thüre wird also der obere Kloben herausgedrückt, der untere hineingedrückt. Ueber die z-Componenten der Widerstände ist hinsichtlich ihrer Vertheilung auf die Kloben, welche hier als absolut fest gelten, nichts zu ermitteln.

4. Es sei $AB = 2a$ (Fig. 195.) die Breite einer homogenen, schweren Platte vom Gewichte G, welche um eine horizontale Axe A drehbar ist; in B ist ein gewichtloser Faden befestigt und über den Punkt C, welcher in der Höhe $AC = h$ vertikal über A liegt, hinweggespannt; am anderen Ende M der Länge l des Fadens wirkt das Gewicht Q einer grossen Masse, deren Schwerpunkt M sich auf einer gewissen Curve CM bewegen kann. Welches ist die Beschaffenheit der Curve, wenn das System für jede Lage von M auf ihr im Gleichgewichte sein soll?

Fig. 195.



Die Aufgabe ist von einiger Bedeutung für die Construction der Zugbrücken, wenn AB die Brückenbahn, BCM die Zugkette, deren Gewicht hier gegenüber den grossen Gewichten der Bahn und der Masse Q nicht in Betracht kommt und die Kette über eine Rolle C läuft, deren Dimensionen ebenfalls unbedeutend sind. Sie wurde dem Marquis de l'Hospital von Sauveur 1695 vorgelegt, welcher erstere eine Lösung in den *Act. eruditorum* von 1695 (Februar) S. 56 gab. Joh. Bernoulli schrieb gleichfalls hierüber, ebendas. S. 59.

Denkt man sich den Faden zwischen B und C, sowie zwischen C und M durchgeschnitten, so sind an der ersteren Stelle zwei gleiche Kräfte T und an der letzteren ebenfalls zwei gleiche Kräfte T' in entgegengesetztem Sinne längs der Richtung des Fadens anzubringen, um den Zusammenhang des Systems an diesen Stellen durch Kräfte auszudrücken. Dadurch zerfällt aber das Gesammtsystem in drei Partialsysteme, von denen jedes für sich im Gleichgewichte ist, nämlich: 1. das System der Platte, welches um die feste Axe A drehbar ist und an welchem das Gewicht P der Platte am Schwerpunkte S derselben angreifend

und die Kraft T (Spannung des Fadens) wirkt, 2. das System des festen Punktes C mit den Kräften T, T' und 3. das System des auf der gesuchten Curve beweglichen Punktes M mit den Kräften T' und Q.

Das erste dieser Systeme ist im Gleichgewichte, sobald die beiden Paare, welche durch die Verlegung der Kräfte an den Punkt A entstehen, ein resultirendes Paar Null liefern. Bezeichnet ψ den Winkel BAC und ω den Winkel BCA, so ist, wenn $AS = b$ gesetzt wird, $-bP \sin\psi + hT \sin\omega = 0$, oder weil in dem Dreiecke ABC, wenn der Radiusvector CM der gesuchten Curve gleich ϱ gesetzt wird, $BC = l - \varrho$ ist und daher die Proportion besteht: $\frac{\sin\psi}{l-\varrho} = \frac{\sin\omega}{2a}$, so hat man:

$$1.\quad b(l-\varrho)P - 2ahT = 0.$$

Hinsichtlich des zweiten Systems ergibt sich $T' = T$. Denn der Punkt C kann angesehen werden als eine unendlich kleine Rolle mit dem festen Mittelpunkte C und wenn der Radius derselben α ist, so findet man durch Reduction der Kräfte auf C: $T\alpha - T'\alpha = 0$, d. h. $T = T'$.

Am dritten Systeme wirken die Kräfte $T' = T$, Q und der Normalwiderstand N der Curve. Da sie an demselben Punkte angreifen, so bestehen die Gleichungen: $\frac{T}{\sin \widehat{QN}} = \frac{Q}{\sin \widehat{NT}} = \frac{N}{\sin \widehat{TQ}}$. Wenn wir nun die gesuchte Curve auf ein Polarcoordinatensystem beziehen, dessen Pol der Punkt C, dessen Polaraxe CA, für welches also der Radiusvector $CM = \varrho$ und der Polarwinkel $ACM = \vartheta$ ist, so hat man, indem man in M noch die Tangente $M\tau$ der Curve zieht, $\widehat{QN} = \frac{\pi}{2} + \widehat{Q\tau}$, also $\sin\widehat{QN} = \cos\widehat{Q\tau} = \frac{d(\varrho\cos\vartheta)}{ds}$, wenn ds das Bogenelement MM' bezeichnet. Ferner ist der Winkel $\widehat{NT}$, welcher die Normale der Curve mit dem Radiusvector bildet, das Complement des Winkels zwischen Radiusvector und Tangente und da dessen Cosinus $\frac{d\varrho}{ds}$ ist, so hat man $\sin\widehat{NT} = \frac{d\varrho}{ds}$. Endlich ist $\sin\widehat{TQ} = \sin\vartheta$. Daher geht die vorstehende Proportion jetzt über in

$$2.\quad \frac{T}{d(\varrho\cos\vartheta)} = \frac{Q}{d\varrho} = \frac{N}{ds\sin\vartheta}.$$

Indem wir jetzt aus der Gleichung 2. den Werth von T durch Q ausgedrückt entnehmen und in die Gleichung 1. einsetzen, erhalten wir als Differentialgleichung der Curve CM:

$$b(l-\varrho)P d\varrho - 2ahQ d(\varrho\cos\vartheta) = 0,$$

deren Integral wegen $(l-\varrho)d\varrho = -d\cdot\frac{1}{2}(l-\varrho)^2$ sich sofort ergibt, nämlich

$$Pb(l-\varrho)^2 + 4ahQ\varrho\cos\vartheta = C.$$

Soll die Curve durch den Punkt C gehen, wie wir annehmen wollen, so muss ϱ für jedes ϑ verschwinden können, d. h. es muss $\varrho = 0$ unabhängig von ϑ eine Wurzel der Gleichung sein. Dies führt zur Bestimmung der Constanten, indem man $C = bPl^2$ setzt, wodurch nach Tilgung des Factors ϱ die Gleichung der Curve wird

$$\varrho = 2\left(l - \frac{4ah}{b}\frac{Q}{P}\cdot\cos\vartheta\right).$$

Diese Gleichung führt zu einer einfachen Construction der Curve durch Punkte. Trägt man nämlich auf CA von C aus die doppelte Länge des Fadens $CL = 2l$ auf, beschreibt um L mit dem Radius $2p = \frac{4ah}{b}\frac{Q}{P}$ einen Kreis und construirt über CL gleichschenklige Dreiecke CLF mit dem Basiswinkel gleich dem ver-

schiedenen Werthen des Polarwinkels ϑ, so liefert die Projection K des Schnittpunktes H des Kreises mit der Seite LF auf OL die Länge

$$CK = 2l - 2p \cos\vartheta = \varrho = CM.$$

Aus der obigen Gleichung 1. ergibt sich die Spannung T des Fadens, nämlich:

$$T = \frac{b}{2ah} P \cdot (l - \varrho),$$

sie ist am kleinsten, wenn ϱ am grössten; für $\varrho = l$, wenn dies möglich ist vermöge der Construction des Systems, wird sie Null.

Der Widerstand, den die Curve zu leisten hat, ergibt sich aus den Gleichungen 2., nämlich:

$$N = T \sin\vartheta \cdot \frac{ds}{d(\varrho \cos\vartheta)}.$$

Es ist aber $l(\varrho \cos\vartheta) = -2l \sin\vartheta d\vartheta$ und $ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2$, d. h.

$$ds = 2\, d\vartheta \sqrt{l^2 + p^2 - 2pl \cos\vartheta},$$

und daher also der absolute Werth von N:

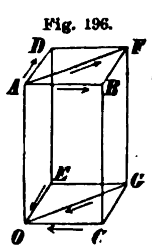
$$N = \frac{b(l - \varrho)}{2ahl} P \cdot \sqrt{l^2 + p^2 - 2pl \cos\vartheta}.$$

§. 11. Aehnlich wie sich Cap. IV, §. 3. die Aequivalenz ebener Kräftesysteme auf die Eigenschaften des Momentes dieses Systems zurückführen liess, kann auch die Aequivalenz räumlicher Kräftesysteme auf die Betrachtung einer einzigen Grösse gegründet werden, welche eine Verallgemeinerung des Momentes ebener Systeme ist. Sie ist die Summe aller Pyramiden, welche eine beliebige Strecke im Raume zur gemeinschaftlichen Kante und die einzelnen Kräfte des Systems zu Gegenkanten haben. Ist MO irgend eine Strecke, AB eine der Kräfte, so ist das Volumen der Pyramide $MOAB$ der sechste Theil des Parallelepipeds, welches beide Linien zu Gegenkanten hat und wenn λ den Neigungswinkel beider bedeutet, so ist $MO \cdot AB \sin\lambda$ der Inhalt einer Seitenfläche des Parallelepipeds, nämlich des Parallelogramms, welches MO und eine durch O gehende, zu AB parallele und ihr gleiche Länge zur Seite hat. Dieser Inhalt ist noch mit dem kürzesten Abstande p zwischen MO und AB zu multipliciren, um das Volumen des Parallelepipeds, nämlich $MO \cdot AB \sin\lambda \cdot p$ zu erhalten (vgl. S. 71). Es stellt aber $AB \sin\lambda$ die Projection der Kraft AB auf eine zu MO senkrechte Ebene und mithin $AB \sin\lambda \cdot p$ das Moment dieser Kraft bezüglich der Axe OM (s. §. 9.) dar. Daher ist die Summe der genannten Pyramiden der Summe der Momente aller Kräfte für die Axe OM proportional mit dem Proportionalitätsfactor $\frac{1}{6} MO$. Für das ebene System ist $\lambda = \frac{1}{2}\pi$, also stellt für $MO = 1$ die Summe aller Parallelepipede die Summe $\Sigma(AB \cdot p)$ aller Momente oder das Moment des ebenen Systems dar. Dieser Analogie wegen nennen wir mit Möbius die Summe aller Parallelepipede oder auch, da kein Irrthum in den Betrachtungen zu befürchten ist, die Summe der Pyramiden, welche MO als gemeinschaftliche Kante und die Kräfte zu Gegenkanten haben, das Moment des räumlichen Systems für die Axe OM. Uebrigens tritt jede Pyramide in $MOAB$ in der Summe mit bestimmten Vorzeichen auf, wie es das Moment der betreffenden Kraft für die Axe OM führt. Dies Zeichen bestimmt sich durch den Sinn des Dreiecks OAB, wie dieser einem in M befindlichen, auf dasselbe herabsehenden Punkte erscheint.

Wir beginnen mit der Betrachtung zweier Kräftepaare und ihres resultirenden Paares für den Fall, dass die Ebene der drei Paare durch denselben Punkt O gelegt sind und sie sich also in derselben Geraden OA schneiden (Fig. 196.). Für einen beliebigen Punkt M in der Ebene des Parallelogramms $OEGC$ ist die Summe der Momente der Kräfte CO und EO gleich dem Momente ihrer Resultanten GO, d. h. $\triangle MCO + \triangle MEO = \triangle MGO$ und wenn man A als gemein-

schaftliche Spitze dreier über diesen Dreiecken stehender Pyramiden ansieht: $MCOA + MEOA = MGOA$, oder da nach Grösse und Sinn $COA = OAB$, $EOA = OAD$, $GOA = OAF$ ist, $MOAB + MOAD = MOAF$, welche Pyramiden man aber auch so ansehen kann, dass M ihre gemeinsame Spitze ist, während ihre Grundflächen die halben Momente der Paare (AB, CO), (AD, EO), (AF, GO) sind. Da Paare sich in ihrer Ebene verlegen lassen, so ist die Annahme des Punktes M in der Ebene $OEGC$ keine beschränkende, dieser Punkt vielmehr ein beliebiger des Raumes. Man kann diese Betrachtung sofort auf beliebig viele Paare ausdehnen, deren Ebenen sich in einem Punkte O schneiden, mögen ihre Ebenen sich übrigens in derselben Geraden schneiden oder nicht. Drücken wir nämlich eine Pyramide, deren Spitze M ist und deren Basis das halbe Moment m eines Paares ist, kurz durch Mm aus, so bestehen für ein Aggregat von Paaren, denen m, m', m'', m''', .. angehören, wenn r das halbe Moment des aus m und m', r'' das halbe Moment des aus m' und r' oder aus m, m', m'' resultirenden Paares u. s. f., R das des resultirenden Paares aller ist, die Gleichungen:

Fig. 196.



$$Mm + Mm' = Mr$$
$$Mr + Mm'' = Mr'$$
$$Mr' + Mm''' = Mr'',$$
$$\vdots$$

durch deren Addition erhalten wird:

$$\Sigma Mm = MR,$$

d. h. für ein System von Kräftepaaren im Raume, deren Ebenen sich in einem Punkte schneiden, ist die Summe der Pyramiden, welche einen beliebigen Punkt des Raumes zur gemeinsamen Spitze, zu Grundflächen aber in den Ebenen der Paare Dreiecke haben, welche die halben Momente der Kräftepaare nach Grösse und Sinn darstellen, gleich der Pyramide mit derselben Spitze M und einer Grundfläche in der Ebene des resultirenden Paares gleich dem halben Momente desselben.

Nehmen wir jetzt für ein beliebiges räumliches Kräftesystem einen beliebigen Punkt O als Reductionspunkt an und construiren sämmtliche aus der Reduction entspringende Kräftepaare, so bilden diese ein System von Paaren, deren Ebenen sich in einem Punkte schneiden und wenn wir also noch einen beliebigen Punkt M annehmen, so ist nach dem vorigen Satze die Summe der Pyramiden, welche M zur gemeinschaftlichen Spitze und die Dreiecke mit O als gemeinschaftlicher Spitze und die Kräfte des Systems als Gegenseiten, zu Grundflächen besitzen, gleich der Pyramide mit derselben Spitze und einer Grundfläche in der Ebene des resultirenden Paares gleich dem halben Momente dieses Paares. Die Pyramiden, welche diese Summe bilden, haben MO zur gemeinschaftlichen Kante und die Kräfte des Systems sind die Gegenkanten dieser.

Für den Fall des Gleichgewichtes ist nun das Moment des resultirenden Paares Null, also auch die ihm entsprechende Pyramide; ist das System auf eine Einzelresultante reducirbar, so tritt Gleichgewicht ein, wenn dieselbe in umgekehrtem Sinne den Kräften des Systems zugefügt wird; in diesem Falle ist also mit Rücksicht auf den Sinn, in welchem die Pyramiden genommen werden, die Pyramidensumme gleich der Pyramide der Resultanten. Ist das System überhaupt einem anderen Systeme äquivalent, so ist die Pyramidensumme desselben für jede beliebige Axe MO gleich der Pyramidensumme dieses.

Für eine einzelne Kraft verschwindet die Pyramide, sobald MO mit der Kraft in eine Ebene fällt; für zwei sich kreuzende Kräfte kann daher die Pyra

midensumme für keine Axe MO des Raumes verschwinden. Für drei nicht in einer Ebene liegende Kräfte gibt es eine Schaar von Axen, welche alle drei schneiden (sie liegen in einem einfachen Hyperboloid); für sie allein ist die Pyramidensumme Null. Drei solche Kräfte können sich daher nie Gleichgewicht halten, weil für den Fall des Gleichgewichtes die Pyramidensumme verschwinden müsste und zwei sich kreuzende Kräfte können, wie hieraus folgt, nie einer einzelnen Kraft äquivalent sein.

Der Inhalt dieser Untersuchung kann in folgende Sätze zusammengefasst werden:

Die Summe der Pyramiden, welche eine beliebige Axe des Raumes als gemeinschaftliche Kante und die Kräfte eines Systems zu Gegenkanten haben, oder das Moment des Systems ist im Falle des Gleichgewichtes Null für jede Axe des Raumes; ist das System nicht im Gleichgewichte, sondern einem Paare oder einer Resultanten in Verbindung mit einem Paare, also überhaupt zwei Kräften, oder ist dasselbe einer einzelnen Kraft äquivalent, so ist diese Summe gleich der diesen Kräften entsprechenden Summe.

Ist die Pyramidensumme oder das Moment eines Kräftesystems für jede Axe Null, so ist das System im Gleichgewichte und sind die Momente zweier Systeme für jede Axe gleich, so sind die Systeme äquivalent.

Hiermit kann z. B. der §. 2. erwähnte Satz von Chasles sehr einfach erwiesen werden. Sind nämlich PQ, RS; $P'Q'$, $R'S'$ die beiden Kräfte, von denen jedes Paar dem System äquivalent ist, so ist

$$MOPQ + MORS = MOP'Q' + MOR'S'$$

und wenn man die Axe MO, welche willkürlich gewählt werden kann, der Reihe nach mit PQ, RS, $P'Q'$, $R'S'$ zusammenfallen lässt, wobei aus der Gleichung je eine Pyramide herausfällt, weil ihr Volumen sich auf Null reducirt, so kommt:

$$PQRS = PQP'Q' + PQR'S', \quad RSPQ = RSP'Q' + RSR'S',$$
$$P'Q'PQ + P'Q'RS = P'Q'R'S', \quad R'S'PQ + R'S'RS = R'S'P'Q'.$$

Man braucht diese vier Gleichungen blos zu summiren, um $PQRS = P'Q'R'S'$ zu finden.

Um den analytischen Ausdruck für das Moment eines Systems zu bilden, bedürfen wir des Inhaltes einer Pyramide, durch die Coordinaten ihrer Eckpunkte dargestellt. Derselbe ist, wenn die Coordinaten der Ecken x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 sind:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Man kann zu dieser Formel durch rein geometrische Betrachtungen folgendermassen gelangen. Das Volumen einer Pyramide ändert sich nicht, wenn bei Festhaltung einer Kante die Gegenkante in ihrer Richtung beliebig verschoben wird. Nun seien AB, AC, AD die Seiten und Diagonale eines Parallelogramms, MN aber irgend eine Strecke im Raume, so ist $MNAB + MNAC = MNAD$. Denn wenn man MN in seiner Richtung verschiebt, bis N in die Ebene des Parallelogramms nach N_1 gelangt, so ist dann $N_1AB + N_1AC = N_1AD$ und folglich, wenn M_1 die veränderte Lage von M bedeutet,

$$M_1N_1AB + M_1N_1AC = M_1N_1AD,$$

woraus nach der eben gemachten Bemerkung auch $MNAB + MNAC = MNAD$ folgt. Man dehnt diesen Satz sofort auf das Parallelepiped aus, dessen Kanten und Diagonale AB, AC, AE und AF sind. Denn für das Parallelogramm $ABFE$ hat man ebenso $MNAD + MNAE = MNAF$ und wenn man diese Gleichung mit der vorigen verbindet, so kommt $MNAB + MNAC + MNAE = MNAF$, d. h. **die Summe der Pyramiden, welche eine Strecke MN mit den Eckkanten eines Parallelepipeds als Gegenkanten bildet, ist gleich der Pyramide, welche sie mit dessen Diagonale bildet.** Von diesem Satze machen wir jetzt Gebrauch, um das Volumen einer Pyramide zu finden, deren Gegenkanten MN und AB heissen mögen. Durch M legen wir drei rechtwinklige Axen und construiren das Parallelepiped, dessen Diagonale MN ist und dessen Eckkanten die Projectionen MN_1, MN_2, MN_3 von MN auf diese Axen sind. Dann ist $MNAB = MN_1AB + MN_2AB + MN_3AB$. Nun construiren wir ein zweites Parallelepiped in A von denselben Axenrichtungen, dessen Diagonale AB und dessen Eckkanten AB_1, AB_2, AB_3 den Projectionen von AB auf die Axen gleich sind. Dann ist $MN_1AB = MN_1AB_1 + MN_1AB_2 + MN_1AB_3$, oder da $MN_1AB_1 = 0$ ist, weil die Gegenkanten MN_1, AB_1 dieser Pyramide in einer Ebene liegen, $MN_1AB = MN_1AB_2 + MN_1AB_3$. Ebenso ist

$$MN_2AB = MN_2AB_1 + MN_2AB_3$$

und

$$MN_3AB = MN_3AB_1 + MN_3AB_2.$$

Führt man die so gewonnenen Ausdrücke für MN_1AB, MN_2AB und MN_3AB in die Gleichung für $MNAB$ ein, so ergibt sich zunächst

$$MNAB = MN_1AB_2 + MN_1AB_3 + MN_2AB_1 + MN_2AB_3 + MN_3AB_1 + MN_3AB_2,$$

$$MNAB = (MN_2AB_1 + MN_3AB_1) + (MN_3AB_2 + MN_1AB_2) + (MN_1AB_3 + MN_2AB_3).$$

Die beiden Pyramiden in je einer Klammer bleiben ihrem Volumen nach ungeändert, wenn man AB_1, AB_2, AB_3 in ihren Richtungen bis zum Durchschnitt mit den Seitenebenen des Parallelepipeds MN verschiebt. Sie haben entgegengesetzten Sinn und wenn in Bezug auf M als Coordinatenursprung die Punkte N, A, B die Coordinaten ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ξ_3, η_3, ζ_3 besitzen, so erhält man:

$$MN_2AB_1 + MN_3AB_1 = \tfrac{1}{6}(\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1)(\xi_3 - \xi_2)$$

$$MN_3AB_2 + MN_1AB_2 = \tfrac{1}{6}(\zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1)(\eta_3 - \eta_2)$$

$$MN_1AB_3 + MN_2AB_3 = \tfrac{1}{6}(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)(\zeta_3 - \zeta_2),$$

mithin

$$MNAB = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

und wenn in Bezug auf ein anderes, dem bisherigen paralleles Coordinatensystem M, N, A, B die Coordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 hat, so wird

$$\xi_1 = x_2 - x_1, \quad \eta_1 = y_2 - y_1, \quad \zeta_1 = z_2 - z_1;$$

$$\xi_2 = x_3 - x_1, \quad \eta_2 = y_3 - y_1, \quad \zeta_2 = z_3 - z_1;$$

$$\xi_3 = x_4 - x_1, \quad \eta_3 = y_4 - y_1, \quad \zeta_3 = z_4 - z_1$$

und folglich

$$MNAB = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nun seien die Coordinaten von M gleich x_1, y_1, z_1; die von O aber $x_1 + \alpha$, $y_1 + \beta$, $z_1 + \gamma$, sodass α, β, γ die Projectionen der Strecke MO auf die Axen bedeuten; ferner seien x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft

und also, wenn X, Y, Z ihre Componenten sind: $x + X$, $y + Y$, $z + Z$ die Coordinaten des Endpunktes der Strecke, welche P darstellt. Mit Hülfe der eben entwickelten Formel ist dann das Moment der Kraft P in Bezug auf die Axe Om

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1 + \alpha & y_1 + \beta & z_1 + \gamma & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x + X & y + Y & z + Z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ x & y & z & 1 \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha\left(\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ Y & Z \end{vmatrix}\right) + \beta\left(\begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ Z & X \end{vmatrix}\right) + \gamma\left(\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix}\right).$$

Daher erhalten wir, wenn wir wie früher abkürzend setzen:

$$\Sigma X = A, \quad \Sigma Y = B, \quad \Sigma Z = C$$
$$\Sigma(yZ - zY) = L, \quad \Sigma(zX - xZ) = M, \quad \Sigma(xY - yX) = N$$

für die sechsfache Summe der Pyramiden oder das Moment H des Systems in Bezug auf MO als Axe:

$$H = \alpha[L - (y_1 C - z_1 B)] + \beta[M - (z_1 A - x_1 C)] + \gamma[N - (x_1 B - y_1 A)].$$

Aus dieser Gleichung erhält man alle Einzelheiten des §. 5. wieder. Im Falle des Gleichgewichtes muss H für alle Axen, d. h. für alle Werthe $\alpha, \beta, \gamma; x_1, y_1, z_1$ verschwinden. Dies liefert die sechs früheren Bedingungen:

$$A = B = C = 0, \qquad L = M = N = 0$$

und da, wenn sie erfüllt sind, auch jedenfalls H für jede Axe Null ist, so ergibt sich, dass sie nicht nur die nothwendigen, sondern auch die hinreichenden Bedingungen des Gleichgewichtes sind. Ist das System nicht im Gleichgewichte, so ist es äquivalent zweien Kräften und wenn $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2$ deren Componenten, $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ die Coordinaten ihrer Angriffspunkte sind, so ist diese Aequivalenz ausgedrückt durch die sechs Gleichungen zwischen den eben genannten zwölf Grössen:

$$\begin{aligned} A &= X_1 + X_2, & L &= (y_1 Z_1 - z_1 Y_1) + (y_2 Z_2 - z_2 Y_2) \\ B &= Y_1 + Y_2, & M &= (z_1 X_1 - x_1 Z_1) + (z_2 X_2 - x_2 Z_2) \\ C &= Z_1 + Z_2, & N &= (x_1 Y_1 - y_1 X_1) + (x_2 Y_2 - y_2 X_2). \end{aligned}$$

Es bleiben also sechs dieser Grössen unbestimmt und können dieselben im Allgemeinen willkürlich angenommen werden. Diese Willkürlichkeit ist aber insofern beschränkt, als die sechs Componenten durch die drei ersten Gleichungen auf eine bestimmte, auf die willkürliche Annehmbarkeit influirende Art untereinander verknüpft sind und ebenso zwischen den sechs Coordinaten die folgende Relation besteht. Man combinirt nämlich die drei letzten Gleichungen leicht so, dass man hat

$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} {}_2 + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} Y_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} Z_2$$

$$Lx_2 + My_2 + Nz_2 = -\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} X_1 + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} Y_1 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} Z_1,$$

woraus durch Subtraction folgt:

$$L(x_2 - x_1) + M(y_2 - y_1) + N(z_2 - z_1) + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} A + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} B + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} C = 0.$$

Nimmt man nun x_1, y_1, z_1 willkürlich an, so ist dies die Gleichung einer Ebene in x_2, y_2, z_2 und da man die Kraft (X_2, Y_2, Z_2) blos in ihrer Richtung verlegen kann, also blos Punkte ihrer Richtung Angriffspunkte derselben sein können, so fällt sie selbst in diese Ebene. Dieselbe geht durch den Punkt x_1, y_1, z_1. Um-

gekehrt, nimmt man die Kraft (X_2, Y_2, Z_2) in irgend einer Ebene $\frac{x_2}{a_2} + \frac{y_2}{b_2} + \frac{z_2}{c_2} = 1$ an, so liefert die Vergleichung der Gleichung dieser Ebene mit der vorstehenden

$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = a_2(L + Bz_1 - Cy_1)$$
$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = b_2(M + Cx_1 - Az_1)$$
$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = c_2(N + Ay_1 - Bx_1),$$

wodurch die Coordinaten x_1, y_1, z_1 der anderen Kraft bestimmt sind. Das System der Paare von je zwei Kräften, welche einem gegebenen Kräftesysteme äquivalent sind, ist also der Art, dass dem Angriffspunkt der einen eine Ebene entspricht, in welcher die andere liegt und allen Ebenen, welche durch die eine gehen, Punkte in der Richtung der anderen. Es werden dadurch also zwei reciproke räumliche Systeme begründet, deren conjugirte Geraden die zusammengehörigen Kraftrichtungen sind. Möbius hat diesen Gegenstand ausführlicher behandelt (vgl. dessen Lehrbuch der Statik I. Thl., Cap. VI, sowie Crelle's Journal Bd. X, p. 317 f.). Daselbst ist auch die Theorie der Momente weiter ausgeführt und sind eine Menge der interessantesten und für die Ausbildung der Statik höchst wichtigen Methoden behufs der Auffindung des Momentes eines Kräftesystems mit Hülfe gegebener Bedingungen entwickelt.

VI. Capitel.

Mittelpunkt der Kräfte, Gleichgewichtsaxen und Sicherheit des Gleichgewichtes am unveränderlichen System.

§. 1. Wenn das Punktsystem, auf welches ein gegebenes Kräftesystem einwirkt, eine Aenderung seiner Lage erleidet, dabei aber die Kräfte ihre Intensität und Richtung beibehalten und an denselben Punkten des Systems angreifen, so entsteht die Frage, welche Aenderung in der Wirkung der Kräfte dadurch eintritt. Eine Translation bewirkt offenbar keine Aenderung und bleibt also blos der Einfluss der Rotation zu prüfen; dies ist aber auch nur für Axen nöthig, die sich in einem Punkte schneiden, da jede Rotation um eine andere Axe in eine Translation und eine Rotation um eine durch jenen Punkt gehende Axe zerfällt. Dabei ist es aber offenbar auch einerlei, ob man das System um eine Axe dreht oder die Kräfte im umgekehrten Sinne um Axen, die dieser parallel sind und durch die Angriffspunkte derselben gehen und zwar um denselben Winkel rotiren lässt; in beiden Fällen ist nämlich die Aenderung der relativen Lage des Systems und der Kräfte, auf die es hier allein ankommt, dieselbe.

Wenn das Kräftesystem nun ursprünglich einer Einzelresultante äquivalent war, wenn dies nach einer beliebigen Drehung des Systems ebenfalls immer der Fall bleibt und dabei die Resultante stets durch einen bestimmten Punkt des Systems hindurchgeht, so heisst ein solcher Punkt **Mittelpunkt der Kräfte**. Wenn überhaupt ein solcher existirt, so kann es nur einen einzigen geben. Denn im Falle, dass noch ein

zweiter möglich wäre, müsste die Resultante für jede Drehung der Kräfte durch beide hindurchgehen, also dieselbe feste Lage behaupten, was nicht möglich ist. Bringt man im Mittelpunkte der Kräfte eine der Resultanten gleiche und entgegengesetzte Kraft an, so tritt für jede Lage des Systems Gleichgewicht ein.

§. 2. Wir wollen zunächst den Mittelpunkt der Parallelkräfte untersuchen. Das System zweier Parallelkräfte P, Q von demselben oder entgegengesetztem Sinne, hat einen Mittelpunkt, sobald nur ihre Resultante $P + Q$ nicht Null ist, sie also kein Paar bilden. Denn die Resultante theilt die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte A, B nach Cap. IV, §. 5. im umgekehrten Verhältnisse der Kräfte, also unabhängig von ihrer Richtung und geht also für jede Drehung derselben, wobei sie parallel bleiben, durch denselben Theilpunkt H von AB. Die Lage dieses Punktes ist durch die Gleichung $AH : HB = Q : P$ bestimmt, wobei die Stellung der Buchstaben den Sinn der Linien ausdrückt und P und Q ihrem Sinne nach als positiv oder negativ betrachtet werden. — Bei drei Parallelkräften P, Q, R, an den Punkten A, B, C angreifend, sei H der Kräftemittelpunkt für P und Q; dann ist der Punkt J auf HC, welcher HC in dem Verhältnisse $HJ : JC = R : (P + Q)$ theilt, der Mittelpunkt für P, Q, R. Um ihn zu finden, kann man auch AC zuerst im Verhältniss $R : P$ theilen u. s. w. Beide Constructionen und die analoge dritte führen zu demselben Punkte, da nur ein einziger existirt. Der Mittelpunkt J der drei Kräfte liegt in der Ebene ABC der drei Angriffspunkte so, dass die Dreiecke JAB, JBC, JCA, welche er mit denselben paarweise bildet, den Kräften proportional sind, welche durch den jedesmal übrig bleibenden dritten Punkt gehen. Es ist nämlich

$$P : Q = HB : AH = HBC : AHC = HBJ : AHJ$$
$$= (HBC - HBJ) : (AHC - AHJ) = JBC : JCA$$

und ebenso $Q : R = JCA : JAB$, d. h.:

$$P : Q : R : (P + Q + R) = JBC : JCA : JAB : ABC.$$

Indem man bei vier Kräften P, Q, R, S mit den Angriffspunkten A, B, C, D in ähnlicher Weise verführt, ergibt sich, dass der Mittelpunkt K der Kräfte so liegt, dass die Pyramiden, welche er mit den Dreiecken ABC, BCD, CDA, DAB bildet, den durch die jedesmal übrig bleibenden vierten Punkte gehenden Kräften proportional sind, nämlich dass

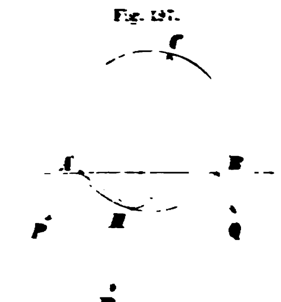
$$P:Q:R:S:(P + Q + R + S) = KBCD:KCDA:KDAB:KABC:ABCD$$

wird. — Durch Fortsetzung dieser Schlüsse gelangt man zu dem Satze, dass jedes System von Parallelkräften, deren Summe nicht verschwindet, einen Kräftemittelpunkt besitzt. Die Coordinaten x_1, y_1, z_1 desselben wurden bereits Cap. VI, §. 7. gefunden, nämlich $x_1 = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}$, $y_1 = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}$, $z_1 = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}$.

Ist die Resultante des Systems der Parallelkräfte, d. h. ihre Summe Null, so zerlege man das System in zwei Systeme, was auf unendlich viele Arten möglich ist. Ist R die Resultante des einen Partialsystems, so ist $-R$ die des anderen. Jedes von ihnen hat einen Kräftemittelpunkt: für R sei er M, für $-R$ sei er N. Das Paar $(R, -R)$, welchem das Gesammtsystem äquivalent ist, ändert mit der Lage des Systems sein Moment, indem sein Arm, die Projection der Strecke MN auf eine zur Richtung der Kräfte senkrechte Ebene, sich ändert. Für zwei Lagen verschwindet dies Paar, nämlich sobald MN parallel den Kräften wird: dann tritt Gleichgewicht ein. Fallen M und N zusammen, so besteht für alle Lagen Gleichgewicht.

§. 3. Ein ebenes Kräftesystem, welches einer Einzelresultante äquivalent ist, besitzt gleichfalls einen Kräftemittelpunkt. Sind zunächst P und Q zwei in einer Ebene an den Punkten A, B angreifende Kräfte und ist R ihre Resultante (Fig. 197.), so geht letztere durch den Durchschnitt C von P und Q. Dreht man nun P und Q um ihre Angriffspunkte so, dass sie ihre relative Lage nicht ändern, sodass also der Winkel ACB constant bleibt, so bewegt sich C auf einem durch A und B gehenden Kreise und da die Intensitäten der Kräfte unverändert bleiben, so folgt aus dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte, dass R mit P und Q constante Winkel bildet und wie auch immer die Kräfte gedreht werden mögen, den Bogen AB in demselben Verhältnisse theilt, d. h. stets durch ein und denselben Punkt H jenes Kreises hindurchgeht. H ist daher der Mittelpunkt der Kräfte P, Q, entsprechend einer Drehung derselben um ihre Angriffspunkte oder, was auf dasselbe hinauskommt, einer entgegengesetzten Drehung des Systems. Die Winkel des Dreiecks ABH, nämlich HAB, HBA und AHB sind gleich HCB, HCA und $\pi - ACB$, woraus mit Hülfe des Parallelogramms der Kräfte gemäss Cap. III, §. 8. folgt:

Fig. 197.



$$P : Q : R = \sin HAB : \sin HBA : \sin ACB = HB : HA : AB,$$

d. h. der Mittelpunkt zweier Kräfte in der Ebene bildet mit den Angriffspunkten dieser ein Dreieck, dessen Seiten den durch die Gegenecken gehenden Kräften proportional sind. Werden die Kräfte P und Q gleich, so fällt H in die Mitte des einen der beiden Bogen AB; werden sie parallel, so geht der Kreis in die Gerade AB über, in welche H hineinfällt; sind sie parallel und gleich, so fällt H in die Mitte der Strecke AB oder in den unendlich fernen Punkt dieser Geraden, je nachdem sie gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind.

Um für drei Kräfte P, Q, R in einer Ebene den Mittelpunkt zu

finden, bestimme man den Mittelpunkt H für P und Q und suche zu ihrer in H angreifenden Resultanten und R den Mittelpunkt J; er ist der Mittelpunkt der drei Kräfte. Da das System nur einen Mittelpunkt besitzen kann, so ist die Ordnung, in welcher man hierbei die Kräfte wählt, willkürlich. Aehnliches gilt für vier und mehr Kräfte und man gelangt auf diesem Wege zu dem Satze, dass jedes ebene Kräftesystem, welches einer Einzelresultanten äquivalent ist, einen Kräftemittelpunkt besitzt.

Um den Mittelpunkt der Kräfte des ebenen Systems analytisch zu bestimmen, wollen wir zunächst den Fall betrachten, dass das Kräftesystem sich vor der Drehung im Gleichgewichte befinde und die Bedingung aufstellen, dass das Gleichgewicht auch nach der Drehung fortdauere. Von Translationen des Systems kann nach §. 1. abgesehen werden, auch ist die Axe der Drehung gleichgültig, wenn sie nur zur Ebene des Systems senkrecht ist. In Bezug auf ein Coordinatensystem der x, y in der Ebene der Kräfte sind nun

$$A = \Sigma X = 0, \quad B = \Sigma Y = 0, \quad N = \Sigma (xY - yX) = 0$$

die Bedingungen des Gleichgewichtes. Wird das Punktsystem und mit ihm das Coordinatensystem um eine durch den Ursprung gehende Axe um den Winkel α gedreht, so hat man für die geänderten Coordinaten x', y' der Systempunkte bezüglich der ursprünglichen Lage des Coordinatensystems

$$x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha, \quad y' = x \sin\alpha + y \sin\alpha$$

und sind, da die Kräfte sich parallel bleiben,

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma (x'Y - y'X) = 0$$

die Bedingungen des Gleichgewichtes für die neue Lage; mithin ist $\Sigma (x'Y - y'X) = 0$ die Bedingung für die Fortdauer desselben. Die Entwickelung der Grösse $\Sigma (x'Y - y'X)$ gibt aber

$$\begin{aligned}\Sigma (x'Y - y'X) &= \cos\alpha \cdot \Sigma (xY - yX) - \sin\alpha \cdot \Sigma (xX + yY) \\ &= N \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \Sigma (xX + yY) = - h \sin\alpha,\end{aligned}$$

wenn $\Sigma (xX + yY) = h$ gesetzt wird. Die Bedingung für die Fortdauer des Gleichgewichtes ist also $h = 0$.

Die Grösse $\Sigma (x'Y - y'X)$ stellt ein Kräftepaar dar und sieht man, dass, wenn ursprünglich Gleichgewicht bestand, dasselbe im Allgemeinen durch die Drehung gestört wird und zwar so, dass die Kräfte des Systems einem von dem Drehungswinkel α abhängigen Paare $- h \sin\alpha$ äquivalent werden. Dies Paar erreicht daher für $\alpha = \mp \frac{1}{2}\pi$ sein Maximum $\pm h$ und verschwindet für $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$. Für $\alpha = - \frac{1}{2}\pi$ gehen x und y in $-y$ und x, also $\Sigma (xY - yX)$ in $- \Sigma (xX + yY)$ über.

Ist das Kräftesystem ursprünglich einem Paare N äquivalent, so ist $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma (xY - yX) = N$ und hat man nach der

Drehung um den Winkel α: $\Sigma(x'Y - y'X) = N \cos\alpha - h \sin\alpha$. Man sieht daraus, dass dies Paar durch die Drehung verschwindet, sobald $tg\,\alpha = \frac{N}{h}$ wird. Es gibt daher zwei Lagen, in welchen das System ins Gleichgewicht gelangt; dieselben sind einander direct entgegengesetzt.

Ist das System einer Einzelresultante (X_1, Y_1) äquivalent und bringt man dieselbe in entgegengesetztem Sinne am Kräftemittelpunkt (x_1, y_1) an, so besteht für jeden Winkel α Gleichgewicht. Daher hat man insbesondere

$$A - X_1 = 0, \quad B - Y_1 = 0, \quad N - (x_1 Y_1 - y_1 X_1) = 0,$$
$$- h + (x_1 X_1 + y_1 Y_1) = 0.$$

Eliminirt man nun X_1, Y_1, so folgen die Gleichungen: $Bx_1 - Ay_1 = N$, $Ax_1 + By_1 = h$, welche für die Coordinaten des Kräftemittelpunktes liefern:

$$R^2 \cdot x_1 = Ah + BN, \quad R^2 \cdot y_1 = Bh - AN, \quad R^2 = A^2 + B^2.$$

Für den Fall der Parallelkräfte in der Ebene hat man $A = \cos\lambda\,\Sigma P$, $B = \sin\lambda\,\Sigma P$, $N = \sin\lambda\,\Sigma xP - \cos\lambda\,\Sigma yP$, $h = \cos\lambda\,\Sigma xP + \sin\lambda\,\Sigma yP$, wenn λ den ursprünglichen Neigungswinkel der Kräfte gegen die x-Axe bedeutet; man findet daher, wie früher:

$$\Sigma P \cdot x_1 = \Sigma xP, \quad \Sigma P \cdot y_1 = \Sigma yP.$$

§. 4. Eine Gerade, um welche ein Punktsystem, an welchem ein im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem angreift, rotiren darf, ohne dass das Gleichgewicht gestört wird, heisst eine Gleichgewichtsaxe. Alle mit einer solchen parallele Geraden sind ebenfalls Gleichgewichtsaxen. Um die Bedingungen aufzufinden, unter welchen eine Axe μ Gleichgewichtsaxe ist, zerlegen wir alle Kräfte P, deren Angriffspunkte A seien, in Componenten Z, parallel μ, und Componenten Q, senkrecht zu μ, projiciren das ganze Punktsystem auf eine zu μ senkrechte Ebene E und bringen in den Projectionen a der Angriffspunkte A zwei der Kraft Q parallele und entgegengesetzt gleiche Kräfte Q, $-Q$ an. Das ganze Kräftesystem ist dann äquivalent dem ebenen in E an den Punkten a angreifenden System (Q), dem System (Z) der der Axe μ parallelen Kräfte und dem System (V) der Kräftepaare $(Q, -Q)$, deren Seitenkräfte in A und a angreifen. Nun seien ursprünglich das Kräftesystem und mithin auch die drei ihm äquivalenten Systeme (Q), (Z), (V) im Gleichgewicht. Das ebene System (Q) ist einer Einzelkraft oder einem Paare, (Z) und (V) zusammen sind einer Einzelkraft parallel μ oder einem Paare äquivalent, dessen Ebene mit μ parallel ist und da (Q) mit diesen Einzelkräften oder Paaren nicht im Gleichgewichte sein kann, so müssen (Q) für sich und (Z) und (V) zusammen im Gleichgewicht sein, d. h. es muss (Z) und (V) jedes besonders im Gleichgewichte sein, oder beide müssen zwei entgegengesetzt gleiche Paare bilden.

Dreht man nun das Punktsystem um die Axe μ, während die Kräfte des Systems ihre Richtungen beibehalten, so ist zum Fortbestehen des Gleichgewichtes erforderlich, dass (Q) für sich im Gleichgewichte bleibe; (Z) erleidet keine Aenderung, ausser dass, wenn es sich auf ein mit (V) Gleichgewicht haltendes Paar reducirte, die Ebene dieses Paares um den Rotationswinkel des Systems gedreht wird. (V) aber ändert sich wegen des fortdauernden Parallelismus seiner Kräfte gar nicht; war es also im Gleichgewichte oder reducirte es sich auf ein Paar, so besteht sein Gleichgewicht fort und bleibt das Paar sich selbst äquivalent. Das Paar (Z) kann bei der Drehung mit dem unveränderlichen Paare (V) nicht fortwährend Gleichgewicht halten; daher muss (Z) für sich im Gleichgewichte sein und da dies das Gleichgewicht von (V) nach sich zieht, so ergibt sich, dass eine Axe μ eine Gleichgewichtsaxe ist, wenn die Projection des Kräftesystems auf eine zu μ senkrechte Ebene und das System der zu μ parallelen Componenten der Kräfte des Systems jedes für sich ungeachtet der Drehung im Gleichgewichte bleiben.

Nehmen wir μ zur z-Axe und die Ebene E zur xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so sind die Bedingungen des Gleichgewichtes vor der Drehung:

$$\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0, \quad \Sigma(yZ - zY) = \Sigma(zX - xZ) = \Sigma(xY - yX) = 0$$

und es kommen als Bedingungen der Fortdauer desselben hinzu 1. die Bedingungen des Gleichgewichtes von (Z), nämlich $\Sigma Z = 0$, $\Sigma xZ = 0$, $\Sigma yZ = 0$, von denen die erste bereits vermöge des ursprünglichen Gleichgewichtes erfüllt ist und 2. die Bedingung des Fortbestehens des Gleichgewichtes von (Q), nämlich $\Sigma(xX + yY) = 0$.

Es sind demnach überhaupt die hinzutretenden Bedingungen, d. h. die Bedingungen dafür, dass μ eine Gleichgewichtsaxe ist:

$$\Sigma xZ = 0, \quad \Sigma yZ = 0, \quad \Sigma(xX + yY) = 0.$$

Allgemeiner erhält man die Bedingungen, dass eine Axe μ, welche mit drei festen Axen die Winkel φ, χ, ψ bildet, eine Gleichgewichtsaxe sei, folgendermassen. Die Bedingungen des Gleichgewichtes sind

$$\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0, \quad \Sigma(yZ - zY) = \Sigma(zX - xZ) = \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Wird nun das System um die durch den Coordinatenursprung gelegte Axe μ gedreht, so mögen die anfangs mit den Axen zusammenfallenden Geraden in Bezug auf diese nach der Drehung die Richtungscosinusse a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' besitzen, sodass ein Punkt, welcher vor der Drehung die Coordinaten x, y, z hatte, nach derselben durch die Coordinaten

$$\begin{aligned} x' &= ax + a'y + a''z \\ y' &= bx + b'y + b''z \\ z' &= cx + c'y + c''z \end{aligned}$$

bestimmt ist. Das Gleichgewicht nach der Drehung erfordert, da die Kräfte sich parallel bleiben, die Erfüllung der Bedingungen:

$$\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0, \quad \Sigma(y'Z - z'Y) = 0,$$
$$\Sigma(z'X - x'Z) = 0, \quad \Sigma(x'Y - y'X) = 0.$$

Die drei ersten sind bereits erfüllt, die Entwickelung der drei letzteren, welche die Bedingungen des Fortbestehens des Gleichgewichtes aussprechen, gibt, wenn

$$\begin{array}{ll} \Sigma yZ = \Sigma zY = F & \Sigma xX = l \\ \Sigma zX = \Sigma xZ = G & \Sigma yY = m \\ \Sigma xY = \Sigma yX = H & \Sigma zZ = n \end{array}$$

gesetzt wird:

$$\begin{array}{l} (b' - c'')F + bG - cH - c'm + b''n = 0 \\ (c'' - a)G + c'H - a'F - a''n + cl = 0 \\ (a - b')H + a''F - b''G - bl - a'm = 0. \end{array}$$

Diese Gleichungen liefern aber, indem man successive l, m, n eliminirt und die Formeln (4) S. 146 für $\Delta = +1$ zu Hülfe nimmt, nach leichter Reduction, wobei je eine der Grössen F, G, H ausfällt:

$$\begin{array}{l} (b - a')G + (a'' - c)H + (b'' - c')(m + n) = 0 \\ (c' - b'')H + (b - a')F + (c - a'')(n + l) = 0 \\ (a'' - c)F + (c - b'')G + (a' - b)(l + m) = 0. \end{array}$$

Hierin kann man die Cosinusdifferenzen $(b - a')$, $(a'' - c)$ u. s. w. leicht durch $\cos\varphi$, $\cos\chi$, $\cos\psi$ ausdrücken und gelangt hierdurch zu den drei folgenden Gleichungen, welche auf die einfachste Weise die Bedingungen dafür aussprechen, dass μ eine Gleichgewichtsaxe ist:

$$\begin{array}{ll} -f\cos\varphi + H\cos\chi + G\cos\psi = 0 & f = m + n = \Sigma(yY + zZ) \\ H\cos\varphi - g\cos\chi + F\cos\psi = 0, \text{ worin} & h = l + m = \Sigma(xX + yY) \\ G\cos\varphi + F\cos\chi - h\cos\psi = 0 & g = n + l = \Sigma(zZ + xX). \end{array}$$

Setzt man nämlich $c' - b'' = \lambda \cdot r$, $a'' - c = \mu \cdot r$, $b - a' = \nu \cdot r$, so folgt mit Hülfe der Formeln (4) S. 146:

$$a(c' - b'') + b(a'' - c) + c(b - a')$$
$$= ac' - a'c + ba'' - b''a = c' - b'' = (a\lambda + b\mu + c\nu)r,$$

und indem man auf gleiche Weise mit a', b', c'; a'', b'', c'' multiplicirt und addirt, findet sich zusammen:

$$\begin{array}{l} a\lambda + b\mu + c\nu = \lambda \\ a'\lambda + b'\mu + c'\nu = \mu \\ a''\lambda + b''\mu + c''\nu = \nu, \end{array}$$

sodass, wenn man die noch willkürliche Grösse r so bestimmt, dass $r^2 = (c' - b'')^2 + (a'' - c)^2 + (b - a')^2$ wird, die Grössen λ, μ, ν durch die Gleichung $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ verbunden sind und mithin Richtungscosinusse einer gewissen Linie bedeuten. Da aber

$$a\lambda + b\mu + c\nu, \quad a'\lambda + b'\mu + c'\nu, \quad a''\lambda + b''\mu + c''\nu$$

die Cosinusse der Winkel zwischen den Richtungen $(\lambda\mu\nu)$ und (abc); $(\lambda\mu\nu)$ und $(a'b'c')$; $(\lambda\mu\nu)$ und $(a''b''c'')$ bedeuten und diese Grössen selbst gleich λ, μ, ν sind, so folgt, dass durch Drehung um die Gerade $(\lambda\mu\nu)$ das Coordinatensystem in die veränderte Lage gelangen kann und dass mithin λ, μ, ν nichts anderes sind, als $\cos\varphi$, $\cos\chi$, $\cos\psi$ und folglich $c' - b'' = r\cos\varphi$, $a'' - c = r\cos\chi$, $b - a' = r\cos\psi$.

Damit die Axe μ eine Gleichgewichtsaxe sei, müssen φ, ψ, χ aus den obigen drei Gleichungen bestimmbar sein. Da sie lineär sind, so ist dazu die Bedingung nöthig:

$$\begin{vmatrix} -f & H & G \\ H & -g & F \\ G & F & -h \end{vmatrix} = 2FGH + F^2f + G^2g + H^2h - fgh = 0.$$

Ohne dass sie erfüllt ist, besitzt das System keine Gleichgewichtsaxe.

Besitzt das System zwei Gleichgewichtsaxen (φ, χ, ψ) und (φ', χ', ψ'), so ist jede ihrer Ebene parallele Axe ebenfalls eine Gleichgewichtsaxe. Denn nach Elimination der Winkel aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} -f\cos\varphi + H\cos\chi + G\cos\psi &= 0 & \quad -f\cos\varphi' + H\cos\chi' + G\cos\psi' &= 0 \\ H\cos\varphi - g\cos\chi + F\cos\psi &= 0 & H\cos\varphi' - g\cos\chi' + F\cos\psi' &= 0 \\ G\cos\varphi + F\cos\chi - h\cos\psi &= 0 & G\cos\varphi' + F\cos\chi' - h\cos\psi' &= 0 \end{aligned}$$

bleiben nur die drei Gleichungen $fF + GH = 0$, $gG + HF = 0$, $hH + FG = 0$ als die Bedingungen für die Coexistenz beider Axen. Eliminirt man mit ihrer Hülfe aus den beiden Gleichungssystemen f, g, h, so ergibt sich $\frac{\cos\varphi}{F} + \frac{\cos\chi}{G} + \frac{\cos\psi}{H} = 0$ oder $\frac{\cos\varphi'}{F} + \frac{\cos\chi'}{G} + \frac{\cos\psi'}{H} = 0$ als die Gleichung, welche von beiden Axen erfüllt wird. Diese einzige Gleichung lässt aber die Axen unbestimmt und genügt ihr jede Axe, welche der Ebene $\frac{x}{F} + \frac{y}{G} + \frac{z}{H}$ angehört. Ist nämlich x, y, z ein Punkt irgend einer ihr genügenden Axe, ϱ sein Abstand vom Ursprung, so multiplicire man mit ϱ und setze $\varrho\cos\varphi = x$, $\varrho\cos\chi = y$, $\varrho\cos\psi = z$, wodurch die Gleichung dieser Ebene erhalten wird, in welche also die Punkte aller solcher Axen fallen.

Hat das System drei nicht in einer Ebene liegende Gleichgewichtsaxen a, b, c, so ist jede Axe d eine Gleichgewichtsaxe. Denn schneiden sich unter der genügenden Voraussetzung, dass alle Axen durch denselben Punkt gezogen werden, die Ebenen von a, b und von c, d in der Geraden e, so ist e eine Gleichgewichtsaxe, weil sie in der Ebene ab liegt und da e eine solche Axe ist, ist es auch d, da d in die Ebene ec fällt. — Da man jede beliebige Bewegung des Systems in Rotation und Translation auflösen kann und letztere hier von keinem Einfluss ist, so kann der Satz auch so ausgesprochen werden: Wenn das Gleichgewicht eines Kräfte-

systems durch drei Verschiebungen des Punktsystems, an welchem es angreift, nicht gestört wird, so besteht es bei jeder Verschiebung fort. Ist also das System in vier Lagen im Gleichgewichte, so ist es auch in jeder früheren im Gleichgewichte.

§. 5. Nicht jedes im Gleichgewichte befindliche System besitzt eine Gleichgewichtsaxe; allein wenn die hierzu nöthige Bedingung $2FGH + F^2 f + G^2 g + H^2 h - fgh = 0$ nicht erfüllt ist, so kann man dem Systeme zwei sich Gleichgewicht haltende Kräfte P_1, P_2, welche also längs der Verbindungslinie A_1, A_2 ihrer Angriffspunkte $A_1 (x_1, y_1, z_1)$ und $A_2 (x_2, y_2, z_2)$ in entgegengesetztem Sinne wirken, zufügen, sodass eine bestimmte Axe $\mu (\varphi, \chi, \psi)$ Gleichgewichtsaxe wird. Bei der Drehung des Systems treten nämlich alsdann P_1 und P_2 aus der Linie A_1, A_2 heraus und bilden ein Paar, welches die Gleichgewichtsaxe bestimmt. Nennen wir F', G', H', f', g', h' das, was aus F, G, H, f, g, h des gegebenen Kräftesystems wird, wenn die Kräfte P_1, P_2 noch hinzutreten, so müssen für gegebene φ, χ, ψ die Gleichungen

$$\begin{aligned} -f' \cos\varphi + H' \cos\chi + G' \cos\psi &= 0 \\ H' \cos\varphi - g' \cos\chi + F' \cos\psi &= 0 \\ G' \cos\varphi + F' \cos\chi - h' \cos\psi &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt werden. Sind nun X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 die Componenten der zuzufügenden Kräfte, ist $A_1 A_2 = r$ und setzt man $x_2 - x_1 = r \cos\lambda$, $y_2 - y_1 = r \cos\mu$, $z_1 - z_2 = r \cos\nu$, sodass $(\lambda\mu\nu)$ die Richtung $(A_1 A_2)$ bedeutet, so erhält man

$$F' = F + y_1 Z_1 + y_2 Z_2 = F + (y_2 - y_1) Z_2 = F + r P_2 \cos\mu \cos\nu,$$

da $Z_1 + Z_2 = 0$, $Z_2 = P_2 \cos\nu$ ist; oder wenn $r P_2 = Q$ gesetzt und in gleicher Weise G', H' gebildet werden:

$$F' = F + Q \cos\mu \cos\nu, \quad G' = G + Q \cos\nu \cos\lambda, \quad H' = H + Q \cos\lambda \cos\mu.$$

Weiter ist $f' = f + (y_1 Y_1 + z_1 Z_1) + (y_2 Y_2 + z_2 Z_2) = f + (y_2 - y_1) Y_2 + (z_2 - z_1) Z_2 = f + Q (\cos^2\mu + \cos^2\nu)$ u. s. w., also

$$\begin{aligned} f' &= f + Q (\cos^2\mu + \cos^2\nu) \\ g' &= g + Q (\cos^2\nu + \cos^2\lambda) \\ h' &= h + Q (\cos^2\lambda + \cos^2\mu). \end{aligned}$$

Substituirt man nun diese Werthe für F', G', H', f', g', h' in die obigen Gleichungen, so gehen sie, indem man

$$\cos\lambda \cos\varphi + \cos\mu \cos\chi + \cos\nu \cos\psi = \cos\varkappa$$

setzt, wo $\varkappa$ der Winkel zwischen der Gleichgewichtsaxe (μ) und der Linie $A_1 A_2$ ist, über in:

$$\begin{aligned} -f \cos\varphi + H \cos\chi + G \cos\psi &= Q (\cos\varphi - \cos\varkappa \cos\lambda) \\ H \cos\varphi - g \cos\chi + F \cos\psi &= Q (\cos\chi - \cos\varkappa \cos\mu) \\ G \cos\varphi + F \cos\chi - h \cos\psi &= Q (\cos\psi - \cos\varkappa \cos\nu). \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen hat man über P_2, r, λ, μ, ν so zu verfügen, dass ihnen genügt wird. Es ist daher die Lösung der Aufgabe auf unendlich viele Arten möglich. Man setze nun abkürzend die bekannten Grössen

$$\begin{aligned} -f\cos\varphi + H\cos\chi + G\cos\psi &= D\cos\alpha \\ H\cos\varphi - g\cos\chi + F\cos\psi &= D\cos\beta \\ G\cos\varphi + F\cos\chi - h\cos\psi &= D\cos\gamma, \end{aligned}$$

wobei D und die Richtung $(\alpha\beta\gamma)$ durch die Diagonale eines Parallelepipeds gefunden werden, welches über den auf der Coordinatenaxe als Längen aufgetragenen Grössen $-f\cos\varphi + H\cos\chi + G\cos\psi$ u. s. w. construirt werden kann. Die Bedingungsgleichungen der Aufgabe lauten dann einfacher nebst den nöthigen Nebengleichungen:

$$\begin{aligned} &D\cos\alpha = Q(\cos\varphi - \cos\varkappa\cos\lambda), \quad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1 \\ &D\cos\beta = Q(\cos\chi - \cos\varkappa\cos\mu), \quad \cos\lambda\cos\varphi + \cos\mu\cos\chi + \cos\nu\cos\psi = \cos\varkappa \\ &D\cos\gamma = Q(\cos\psi - \cos\varkappa\cos\nu), \end{aligned}$$

woraus λ, μ, ν, $\varkappa$, Q zu bestimmen sind. Hieraus ergibt sich sofort nach Multiplication mit $\cos\varphi$, $\cos\chi$, $\cos\psi$ und Addition:

$$D(\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\chi + \cos\gamma\cos\psi) = Q\sin^2\varkappa.$$

Ebenso nach der Multiplication mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ und Addition, da D nicht verschwindet, weil sonst die Bedingungen, dass (μ) eine Gleichgewichtsaxe, bereits erfüllt wären,

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$

d. h. die gesuchte Richtung von A_1A_2 ist senkrecht zur Richtung der Diagonale D. Endlich liefert die Multiplication mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, und Addition

$$D = Q(\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\chi + \cos\gamma\cos\psi).$$

Diese eben entwickelten Gleichungen geben jetzt:

$$Q = \frac{D}{\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\chi + \cos\gamma\cos\psi} = \frac{D}{\cos(D,\mu)},$$

$$\sin^2\varkappa = (\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\chi + \cos\gamma\cos\psi)^2 = \cos^2(D,\mu),$$

$$\cos\lambda = \frac{\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varkappa}{\cos\varkappa},$$

$$\cos\mu = \frac{\cos\chi - \cos\beta\sin\varkappa}{\cos\varkappa},$$

$$\cos\nu = \frac{\cos\psi - \cos\gamma\sin\varkappa}{\cos\varkappa}.$$

Durch diese Gleichungen wird blos die Richtung der Geraden A_1A_2 bestimmt, die Lage derselben im Raume ist beliebig, die beiden Punkte A_1, A_2 auf ihr und die Intensität der gleichen Kräfte P_1, P_2 sind es gleichfalls. Ziehen wir die Richtungen (μ) und A_1A_2 durch den Ursprung, durch welchen D bereits geht, so zeigt sich, dass alle drei in eine Ebene fallen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \cos(A_1A_2, \mu) &= \cos\lambda\cos\varphi + \cos\mu\cos\chi + \cos\nu\cos\psi = \cos\varkappa, \\ \cos(D, \mu) &= \cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\chi + \cos\gamma\cos\psi = \sin\varkappa, \\ \cos(D, A_1A_2) &= \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0 \end{aligned}$$

und sind A_1A_2 und D einerseits unter einem rechten Winkel gegeneinander geneigt, während andererseits (μ) mit A_1A_2 und mit D Complementwinkel bilden. Um also A_1A_2 zu finden, braucht man nur in der durch D und μ bestimmten Ebene eine Senkrechte auf D zu errichten. Q findet man, indem man durch die Endpunkte von D eine Parallele zu A_1A_2 zieht, sie schneiden auf μ ein Stück gleich $Q = D \sec(D, \mu)$ ab.

Die Untersuchung zeigt zugleich, dass **wenn ein im Gleichgewichte befindliches System um eine Axe gedreht wird, das System einem Kräftepaare äquivalent wird, falls die Angriffspunkte, Intensitäten und Richtungen sämmtlicher Kräfte dieselben bleiben.**

§. 6. Wenn das System nicht im Gleichgewichte befindlich ist, so kann man immer auf verschiedene Arten zwei Kräfte P_1, P_2 finden, welche Gleichgewicht hervorbringen und dieselben ausserdem noch so bestimmen, dass das Gleichgewicht nicht gestört wird, wenn das System sich um eine bestimmte Axe $\mu\,(\varphi, \chi, \psi)$ umdreht. Setzt man wie oben

$$\begin{array}{llll} \Sigma X = A & \Sigma yZ = F & \Sigma(yY + zZ) = f & \qquad \Sigma zY = F' \\ \Sigma Y = B & \Sigma zX = G & \Sigma(zZ + xX) = g \quad \text{und} & \qquad \Sigma xZ = G' \\ \Sigma Z = C & \Sigma xY = H & \Sigma(xX + yY) = h & \qquad \Sigma yX = H', \end{array}$$

so sind die sechs Gleichungen des Gleichgewichtes, wenn X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 die Componenten der zugefügten Kräfte P_1, P_2, sowie x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 die Coordinaten ihrer Angriffspunkte A_1, A_2 bedeuten:

$$\begin{array}{ll} A + X_1 + X_2 = 0 & F + y_1Z_1 + y_2Z_2 = F' + z_1Y_1 + z_2Y_2 = F'' \\ B + Y_1 + Y_2 = 0 & G + z_1X_1 + z_2X_2 = G' + x_1Z_1 + x_2Z_2 = G'' \\ C + Z_1 + Z_2 = 0 & H + x_1Y_1 + x_2Y_2 = H' + y_1X_2 + y_2X_1 = H'' \end{array}$$

wo F'', G'', H'' zur Abkürzung eingeführt sind. Zu diesen treten als Ausdruck für das Fortbestehen des Gleichgewichtes hinzu

$$\begin{aligned} -f'\cos\varphi + H''\cos\chi + G''\cos\psi &= 0 \\ H''\cos\varphi - g'\cos\chi + F''\cos\psi &= 0 \\ G''\cos\varphi + F''\cos\chi - h'\cos\psi &= 0, \end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned} f' &= f + y_1Y_1 + z_1Z_1 + y_2Y_2 + z_2Z_2 \\ g' &= g + z_1Z_1 + x_1X_1 + z_2Z_2 + x_2X_2 \\ h' &= h + x_1X_1 + y_1Y_1 + x_2X_2 + y_2Y_2. \end{aligned}$$

Diese neun Gleichungen bestimmen die zwölf Grössen X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 nicht vollständig, vielmehr bleiben drei derselben willkürlich annehmbar. Führt man wieder die Richtung

$(\lambda\mu\nu)$ für die Verbindungslinie $A_1 A_2 = r$ der Angriffspunkte von P_1, P_2 ein und eliminirt X_1, Y_1, Z_1, so sind die Grössen

$$\begin{aligned}
F'' &= F - y_1 C + r Z_2 \cos\mu = F' - z_1 B + r Y_2 \cos\nu \\
G'' &= G - z_1 A + r X_2 \cos\nu = G' - x_1 C + r Z_2 \cos\lambda \\
H'' &= H - x_1 B + r Y_2 \cos\lambda = H' - y_1 A + r X_2 \cos\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f' &= f - y_1 B - z_1 C + r Y_2 \cos\mu + r Z_2 \cos\nu \\
g' &= g - z_1 C - x_1 A + r Z_2 \cos\nu + r X_2 \cos\lambda \\
h' &= h - x_1 A - y_1 B + r X_2 \cos\lambda + r Y_2 \cos\mu
\end{aligned}$$

in die Bedingungsgleichungen für die Fortdauer des Gleichgewichtes einzuführen. Wählt man nun zur weiteren Vereinfachung die Axe $\mu(\varphi, \chi, \psi)$ zur z-Axe, sodass $\varphi = \chi = \frac{1}{2}\pi$, $\psi = 0$ wird, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
G'' &= 0 \quad F - y_1 C + r Z_2 \cos\mu = 0 \\
F'' &= 0 \quad F' - z_1 B + r Y_2 \cos\nu = 0 \\
h' &= 0 \quad G - z_1 A + r X_2 \cos\nu = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&G' - x_1 C + r Z_2 \cos\lambda = 0 \\
&H - x_1 B + r Y_2 \cos\lambda = H' - y' A + r X_2 \cos\mu \\
&h - x_1 A - y_1 B + r X_2 \cos\lambda + r Y_2 \cos\mu = 0
\end{aligned}$$

und aus ihm erhält man nach Elimination von X_2, Y_2, Z_2:

$$\begin{aligned}
&(F - y_1 C)\cos\lambda - (G' - x_1 C)\cos\mu = 0 \\
&(F' - z_1 B)\cos\lambda - (G - z_1 A)\cos\mu + (H' - H + x_1 B - y_1 A)\cos\nu = 0 \\
&(G - z_1 A)\cos\lambda + (F' - z_1 B)\cos\mu - (h - x_1 A - y_1 B)\cos\nu = 0.
\end{aligned}$$

Die Elimination von λ, μ, ν liefert als geometrischen Ort für den Punkt A_1 die Fläche zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix}
F - y_1 C, & G' - x_1 C, & 0 \\
F' - z_1 B, & G - z_1 A, & H' - H + x_1 B - y_1 A \\
G - z_1 A, & z_1 B - F', & x_1 A + y_1 B - h
\end{vmatrix} = 0.$$

Derselben genügen auch die Coordinaten

$$x_2 = x_1 + r\cos\lambda, \quad y_2 = y_1 + r\cos\mu, \quad z_2 = z_1 + r\cos\nu$$

und zwar für jedes r, weil sie den Gleichungen, aus welchen die Gleichung der Fläche hervorging, für jedes r genügen. Daher liegt nicht blos A_1 sondern auch A_2 und zwar für jeden Abstand r von A_1 auf derselben Fläche. Diese ist daher ein einfaches Hyperboloid. Man kann also einem nicht im Gleichgewicht befindlichen System zwei solche Kräfte zufügen, dass in Bezug auf die Drehung des Systems um eine gegebene Axe dauernd Gleichgewicht eintritt oder man kann zwei dem System äquivalente Kräfte so finden, dass sie trotz der Drehung des Systems um eine gegebene Axe ihm äquivalent bleiben. Die Angriffspunkte der Kräfte können beliebig auf einer Erzeugenden der einen

Schaar von Geraden eines gewissen einfachen Hyperboloids angenommen werden.

Die weitere Ausführung der hier entwickelten Theorien müssen wir unterlassen und uns begnügen, auf die Quellen hierfür zu verweisen: Möbius, Lehrbuch der Statik I. Thl., Cap. 8. und Minding, Handbuch der theoretischen Mechanik §. 29 ff., sowie dessen Abhandlung in Crelle's Journal für reine und angew. Mathematik, Bd. 15, S. 30 u. s. w. In diesen Schriften, deren ersterer sich die hier gegebenen Darstellung anschliesst, wird die Theorie der Hauptaxen der Kräfteäquivalenz, der Centrallinie und Centralebene eines Systems ausführlich entwickelt und werden folgende Hauptsätze erwiesen:

Wenn ein Kräftesystem einer Einzelresultanten äquivalent ist, so gibt es in der Richtung derselben zwei Punkte und gehen durch diese Punkte zwei solche Axen, dass bei der Drehung des Punktsystems um eine derselben die Resultante ihrer Lage und Intensität nach fortwährend dieselbe und dem System als solche allein äquivalent bleibt und wenn das Punktsystem mit einem solchen Punkte befestigt wird, das Gleichgewicht durch die Drehung um die durch ihn hindurchgehende Axe nicht gestört wird.

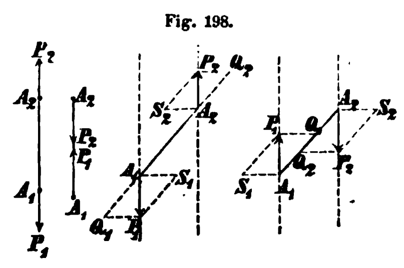
Das Punktsystem kann auf unzählige Arten in solche Stellungen gebracht werden, dass die sich parallel bleibenden Kräfte einer Einzelresultante äquivalent werden; die Richtung dieser Resultante schneidet in allen Fällen eine Ellipse und eine Hyperbel von gemeinschaftlichem Mittelpunkt, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen und so mit einander verbunden sind, dass die Scheitel der einen in die Brennpunkte der anderen fallen.

§. 7. Aus den Untersuchungen der letzten §§. erhellt, dass in Folge der Lagenänderung eines unveränderlichen Punktsystems, an welchem ein im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem angreift, wenn die Angriffspunkte, Intensitäten und Richtungen der Kräfte unverändert bleiben, das Gleichgewicht im Allgemeinen aufhört und die Kräfte einem Paare äquivalent werden. Bei diesen Lagenänderungen brauchen nur Rotationen berücksichtigt zu werden. Wenn nun nach der Drehung des Systems um eine Axe um einen auch noch so kleinen Winkel die Kräfte dasselbe in die Gleichgewichtslage zurückzuführen streben, so heisst das Gleichgewicht sicher oder stabil in Bezug auf diese Axe, tritt aber durch die Einwirkung der Kräfte eine weitere Entfernung von der Gleichgewichtslage ein, so heisst es unsicher oder labil in Bezug auf jene Axe. Von der Beschaffenheit der nach der Drehung eintretenden Bewegung des Systems, welche im ersten Falle in Oscillationen um die Gleichgewichtslage, ähnlich denen eines Pendels, besteht

sehen wir hier ab und wollen wir blos die Bedingungen der Sicherheit und Unsicherheit des Gleichgewichtes an sich untersuchen.

Es seien (Fig. 198.) P_1, P_2 zwei Kräfte, auf welche sich das Kräftesystem reduciren lässt und bestehe Gleichgewicht, sodass diese Kräfte entgegengesetzt gleich sind und längs der Verbindungslinie A_1, A_2 ihrer Angriffspunkte wirken. Dies ist auf zwei Arten möglich, nämlich so, dass die Kräfte die Entfernung ihrer Angriffspunkte zu vergrössern oder so, dass sie dieselbe zu verkleinern streben. Dreht man nun das System um irgend eine Axe, so bilden die Kräfte ein Paar (P_1, P_2) und wenn wir beide nach der Richtung $A_1 A_2$ und senkrecht auf die Richtung der Kräfte selbst zerlegen, so ergeben sich zwei Kräfte Q_1, Q_2, welche längs $A_1 A_2$ sich Gleichgewicht halten und zwei andere S_1, S_2, welche die Punkte A_1, A_2 senkrecht zu den Grenzlinien des Parallelstreifens ($P_1 P_2$) beschleunigen und demzufolge den Arm des Paares (P_1, P_2) oder die Breite des Parallelstreifens im ersteren Falle zu verkleinern, im zweiten Falle zu vergrössern streben. Im ersten Falle suchen also die Kräfte das System in eine Lage zu bringen, in welcher P_1 und P_2 wieder in eine Gerade fallen, d. h. sie streben das System in die ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückzuführen; im zweiten Falle entfernen sie dasselbe noch mehr von derselben. Das Gleichgewicht ist daher im ersten Falle sicher, im zweiten unsicher für die betreffende Drehungsaxe. Da ausser den genannten beiden Arten des Gleichgewichts keine dritte existirt, so kann man behaupten, dass das Gleichgewicht zweier Kräfte an einem unveränderlichen System sicher oder unsicher ist, je nachdem die Kräfte die Entfernung ihrer Angriffspunkte zu vergrössern oder zu verkleinern streben und zwar für jede Axe, durch Drehung um welche die Kräfte einem Paare äquivalent werden. Dreht man das System um die Verbindungslinie $A_1 A_2$ der Angriffspunkte selbst, oder ertheilt man demselben eine Translation, so dauert das Gleichgewicht fort. Fallen die Angriffspunkte in einen zusammen, so besteht das Gleichgewicht für alle Axen fort (dauerndes Gleichgewicht).

Fig. 198.



Im Falle des sicheren Gleichgewichtes stimmt der Sinn von $A_1 A_2$ mit dem Sinne von P_2 und der Sinn von $A_2 A_1$ folglich mit dem Sinne von P_1 überein; im Falle des unsicheren Gleichgewichtes haben $A_1 A_2$ und P_2, sowie $A_2 A_1$ und P_1 entgegengesetzten Sinn. Daher ist das Gleichgewicht sicher oder unsicher, je nachdem das Produkt $A_1 A_2 \cdot P_2$ oder das gleichbedeutende Produkt $A_2 A_1 \cdot P_1$

positiv oder negativ ist. Das Verschwinden desselben deutet auf die Dauer des Gleichgewichtes hin.

Für ein System von Parallelkräften, welches im Gleichgewichte befindlich ist, denke man sich zwei Gruppen von Kräften gebildet, die eine enthalte alle Kräfte P' der Richtung $(\alpha\beta\gamma)$, die andere alle Kräfte P'' der Richtung $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$. Dann sind die Coordinaten der Mittelpunkte A_1, A_2 beider Gruppen:

$$x_1 = \frac{\Sigma P'x'}{\Sigma P'}, \quad y_1 = \frac{\Sigma P'y'}{\Sigma P'}, \quad z_1 = \frac{\Sigma P'z'}{\Sigma P'};$$

$$x_2 = \frac{\Sigma P''x''}{\Sigma P''}, \quad y_2 = \frac{\Sigma P''y''}{\Sigma P''}, \quad z_2 = \frac{\Sigma P''z''}{\Sigma P''}$$

und wird

$$A_1A_2 = (x_2 - x_1)\cos\alpha + (y_2 - y_1)\cos\beta + (z_2 - z_1)\cos\gamma;$$

$$P_1 = \Sigma P', \quad P_2 = \Sigma P'',$$

wobei wegen des Gleichgewichtes $\Sigma P' = -\Sigma P''$ ist. Man hat daher:

$$A_1A_2 \cdot P_2 = A_1A_2 \cdot \Sigma P''$$

$$= (\Sigma P''x'' + \Sigma P'x')\cos\alpha + (\Sigma P''y'' + \Sigma P'y')\cos\beta + (\Sigma P''z'' + \Sigma P'z')\cos\gamma,$$

d. h.:

$$A_1A_2 \cdot P_2 = \Sigma(xX + yY + zZ).$$

Je nachdem daher $\Sigma(xX + yY + zZ)$ positiv, negativ oder Null ist, besteht im System sicheres, unsicheres oder dauerndes Gleichgewicht. Da $A_1A_2 \cdot P_2$ von der Lage des Coordinatensystems unabhängig ist, so gilt dies auch von der Grösse $\Sigma(xX + yY + zZ)$. Nimmt man die Richtung der Kräfte zur Richtung der z-Axe, so wird die Bedingung für die drei Arten des Gleichgewichtes $\Sigma zZ \gtreqless 0$.

Ein ebenes im Gleichgewichte befindliches Kräftesystem wird durch die Drehung um Axen, welche zur Ebene senkrecht sind, einem Paare äquivalent, dessen Moment $-h\sin\alpha$ ist, wenn $h = \Sigma(xX + yY)$ und α den Drehungswinkel bedeutet. Sind P_1, P_2 die Kräfte, welche an A_1, A_2 wirkend dies Paar darstellen, so wird $-A_1A_2 \cdot P_2 \sin\alpha$ sein Moment, also $A_1A_2 \cdot P_2 = h$ und mithin ist das Gleichgewicht sicher, unsicher oder dauernd, je nachdem $\Sigma(xX + yY)$ positiv, negativ oder Null ist.

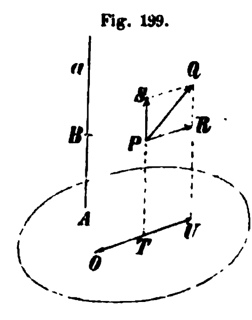
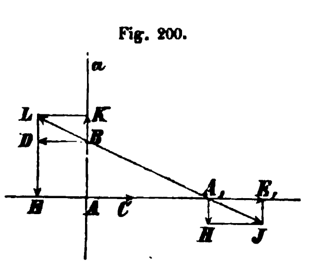


Fig. 199.

§. 8. In Bezug auf die Sicherheit eines räumlichen Kräftesystems an einem unveränderlichen Punktsystem besteht folgender Satz:

Das Gleichgewicht eines räumlichen Kräftesystems an einem unveränderlichen Punktsystem ist in Bezug auf eine Axe sicher oder unsicher, je nachdem die Projection des Kräftesystems auf eine zur Axe senkrechte Ebene in Bezug auf diese Axe ist, sich im sicheren oder unsicheren Gleichgewichte befindet. Ist nämlich (Fig. 199.) a die Drehungsaxe, E die Projectionsebene, so zerlegen wir jede Kraft PQ in zwei

Componenten, PS parallel zu a und PR parallel zu E und ersetzen zugleich PR durch ihre Projection TU auf E und das Paar (PR, TO), dessen Ebene parallel a ist. Alle Paare wie (PR, TO) bleiben bei der Drehung um a sich äquivalent, können parallel mit sich so verlegt werden, dass ihre Kräfte an zwei Punkten A, B (Fig. 200.) der Axe a angreifen und liefern daher zusammen ein ihnen äquivalentes Paar (AC, BD) mit dem Arme AB. Das Gesammtkräftesystem (PQ) zerfällt demnach in das ebene Kräftesystem (H) der Kräfte TU, das System (V) der Parallelkräfte PS und das Paar (AC, BD). Vermöge des Gleichgewichtes des Gesammtsystems muss nun (H) vor der Drehung um a für sich im Gleichgewichte sein; dasselbe wird durch die Drehung einem Paare $-h \sin \alpha$ äquivalent, welches in der Ebene E eine beliebige Lage und Grösse der Seitenkräfte haben kann. Man kann dies Paar so legen, dass A der Angriffspunkt der einen Seitenkraft $AE = AC$ und ihre Richtung der Richtung von AC entgegengesetzt ist. Der Angriffspunkt A_1 der anderen Seitenkraft A_1E_1 ergibt sich hierzu leicht durch die Bedingung, dass $-h \sin \alpha$ dem Momente der Kräfte TU fortwährend gleich sein muss. Zu Anfang der Drehung fallen vermöge des Gleichgewichts AE und A_1E_1 in eine Gerade und da AC und AE sich auch während der Drehung tilgen, so folgt, dass das Paar (A_1E_1, BD) fortwährend den früheren Paaren (PR, TO) äquivalent ist. Die Parallelkräfte des Systems (V) müssen daher sich auf ein Paar reduciren, welches mit dem Paare (A_1E_1, BD) anfangs im Gleichgewichte ist. Die Ebene dieses Paares muss daher der Ebene ABA_1 parallel sein und da dies Paar durch die Drehung nicht alterirt wird, so kann es durch ein Paar (A_1H, BK) ersetzt werden, dessen Seitenkräfte an A_1, B angreifen und der Axe a parallel sind. Nun liefern aber A_1E_1 und A_1H einerseits, BD und BK andererseits die parallelen und gleichen Resultanten A_1J, BL, welche wegen des Gleichgewichtes vor der Drehung entgegengesetzt sein müssen. Das Gleichgewicht des Gesammtsystems ist daher sicher oder unsicher, je nachdem $A_1B \cdot BL$ positiv oder negativ ist, mithin auch je nachdem


Fig. 200.

$$A_1B \cdot BL \cdot \cos^2 (BA_1A)$$

oder $A_1A \cdot AE$ positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem das Gleichgewicht des ebenen Systems (H) sicher oder unsicher ist.

Das Gleichgewicht des ebenen Systems (H) geht in ein dauerndes (für jede zu E senkrechte Axe sicheres) über, wenn A_1A verschwindet und mithin AE und A_1E_1 sich fortwährend tilgen. Tritt dieser Fall ein, so kann das Gesammtsystem nicht mehr als sicher oder unsicher bezeichnet werden. Denn wenn der Punkt A_1 sich dem Punkte A

nähert und über ihn hinweg auf die andere Seite in die Linie $A_1 A$ rückt, so wechselt $A_1 A \cdot AE$ das Zeichen und geht das sichere Gleichgewicht von H in das unsichere über. Der diesem Durchgange entsprechende Gleichgewichtszustand des Systems kann daher nur als eine Art neutralen Gleichgewichtes bezeichnet werden. Die Sicherheit des Gleichgewichtes könnte in diesem Falle nur durch zwei unendlich grosse mit der Axe a parallele, in verschwindendem Abstande AA_1 wirkende Kräfte BL, $A_1 J$ erhalten werden, wie sich aus der Figur ergibt.

§. 9. Man kann leicht eine Function S der Kräfte und der Richtungscosinusse der Axe aufstellen, um durch ihre Werthe die Sicherheit, Unsicherheit oder die Neutralität des Gleichgewichtes zu entscheiden. Aus §. 5. ist ersichtlich, dass der Werth des Produktes $-A_1 A_2 \cdot P_2$ gebildet aus dem Abstande der Angriffspunkte der beiden dem System äquivalenten Kräfte und der Intensität der zweiten derselben durch

$$-A_1 A_2 \cdot P_2 = -rP_2 = -Q = \frac{-D}{\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\chi + \cos\gamma\cos\psi}$$
$$= \frac{D^2}{-D(\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\chi + \cos\gamma\cos\psi)}$$

angegeben wird, worin

$$\begin{aligned} D^2 = &(\ \ f\cos\varphi - H\cos\chi - G\cos\psi)^2 \\ &+ (-H\cos\varphi + g\cos\chi - F\cos\psi)^2 \\ &+ (-G\cos\varphi - F\cos\chi + h\cos\psi)^2 \end{aligned}$$

nur im Falle, dass die Axe der Drehung eine Gleichgewichtsaxe ist, verschwinden kann. Der Nenner des Bruchs ist die Function S, welche das Criterium für die Beschaffenheit des Gleichgewichtes liefert. Entwickelt man ihn, so erhält man daher zunächst den Satz:

Das Gleichgewicht eines Kräftesystems, welches an einem unveränderlichen Punktsystem wirkt, ist in Bezug auf eine Axe a von der Richtung $(\varphi\chi\psi)$ gegen die Coordinatenaxen sicher oder unsicher, je nachdem der Werth der Function

$$\begin{aligned} S = &(\ \ f\cos\varphi - H\cos\chi - G\cos\psi)\cos\varphi \qquad\ \ f\cos^2\varphi - 2F\cos\chi\cos\psi \\ &+ (-H\cos\varphi + g\cos\chi - F\cos\psi)\cos\chi = + g\cos^2\chi - 2G\cos\psi\cos\varphi \\ &+ (-G\cos\varphi - F\cos\chi + h\cos\psi)\cos\psi \quad + h\cos^2\psi - 2H\cos\varphi\cos\chi, \end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned} f &= \Sigma(yY + zZ) \qquad F = \Sigma yZ = \Sigma zY \\ g &= \Sigma(zZ + xX) \qquad G = \Sigma zX = \Sigma xZ \\ h &= \Sigma(xX + yY) \qquad H = \Sigma xY = \Sigma yX, \end{aligned}$$

positiv oder negativ ist.

Für $\varphi = \chi = \frac{1}{2}\pi$, $\psi = 0$ wird $S = h = \Sigma(xX + yY)$ und erhält man den Satz des §. 8. wieder.

Denkt man sich alle in Frage kommenden Axen durch den Coordinatenursprung gezogen, so bilden sie ein Stralenbündel, welches im Allgemeinen in drei Gruppen von Stralen zerfällt. Alle Stralen, für

welche S verschwindet, liegen auf dem Kegel zweiten Grades $S = 0$, oder in rechtwinkligen Coordinaten

$$fx^2 + gy^2 + hz^2 - 2Fyz - 2Gzx - 2Hxy = 0.$$

Für Stralen dieser Art wird $-A_1A_2 \cdot P_2 = -Q = \infty$, also werden die beiden Kräfte, welche dem Systeme bei der Drehung äquivalent sind, unendlich gross und sind diese Stralen Axen des neutralen Gleichgewichts. Die Kegelfläche trennt den Raum in zwei Scheitelräume, für deren einen allen Stralen ein positives S entspricht, während der andere nur Stralen enthält, für welche S negativ ausfällt. Jene sind die Axen des sicheren, diese die Axen des unsicheren Gleichgewichtes. Welcher von beiden Räumen die Axen der einen oder der anderen Art enthält, bedarf einer specielleren Untersuchung. Kehrt man den Sinn sämmtlicher Kräfte um, wodurch das Gleichgewicht nicht alterirt wird, so bleibt die Gleichung $S = 0$, also auch die Kegelfläche der neutralen Axen, ungeändert, indem f, g, h, F, G, H sämmtlich das Zeichen wechseln; die beiden Scheitelräume aber vertauschen ihre Rollen, indem für die Axen des einen, für welchen S vorher positiv war, S jetzt negativ wird und umgekehrt. Indem man die Hauptaxen dieses Kegels zu Coordinatenaxen wählt, kann man S als ein Aggregat von drei quadratischen Gliedern darstellen, nämlich $S = R' \cos^2 \varphi' + R'' \cos^2 \chi' + R''' \cos^2 \chi''$, wo R', R'', R''' die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} R - f & 2H & 2G \\ 2H & R - g & 2F \\ 2G & 2F & R - h \end{vmatrix}$$

$$= R^3 - (f + g + h)R^2 + (fg + gh + hf - F^2 - G^2 - H^2)R - (fgh - 2FGH - fF^2 - gG^2 - hH^2)$$

und φ', χ', ψ' die Winkel sind, welche die Axe der Drehung mit den Hauptaxen bildet. Ist eine Wurzel dieser Gleichung gleich Null, so zerfällt der Kegel in zwei Ebenen. Die Bedingung hierfür ist

$$fF^2 + gG^2 + hH^2 + 2FGH - fgh = 0,$$

welche nach §. . ausdrückt, dass das Kräftesystem eine Gleichgewichtsaxe besitzt (die Schnittlinie beider Ebenen); sind zwei Wurzeln gleich Null, so fallen diese Ebenen in eine zusammen und diese Ebene enthält nur Gleichgewichtsaxen, S hat nur ein quadratisches Glied, kann das Zeichen nicht wechseln und ist daher das Gleichgewicht für alle anderen Axen, entweder sicher oder unsicher, je nach der positiven oder negativen Beschaffenheit von S.

Nähere Details über den vorliegenden Gegenstand s. bei Möbius, Lehrbuch der Statik I. Thl., Cap. IX.

VII. Capitel.

Bedingungen des Gleichgewichtes eines Kräftesystems, welches an einem beliebigen unveränderlichen oder veränderlichen Punktsystem angreift. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 1. Wenn Kräfte an irgend einem Systeme zur Zeit t im Gleichgewicht sind, so tilgen sich die Beschleunigungen gegenseitig, welche sie hervorrufen und üben sie mithin keinen Einfluss auf den Geschwindigkeitszustand des Systems aus. Welches auch immer dieser Geschwindigkeitszustand sein mag, ist für das Gleichgewicht der Kräfte völlig gleichgültig; es ist das Gleichgewicht eine Eigenschaft des Kräftesystems, welche unabhängig hiervon besteht. Man wird daher die Bedingungen des Gleichgewichtes auch so darstellen können, dass in denselben diese Unabhängigkeit von dem Geschwindigkeitszustand ausgesprochen wird und eine oder mehrere Relationen sich ergeben, welche fortbestehen, welche Elementarbewegung man auch immer dem System beilegen möge. Der betreffende Satz, welcher diesen Gedanken ausdrückt, führt den Namen „Princip der virtuellen Geschwindigkeiten" und wurde bereits vor Galilei von Guido Ubaldi am Hebel, von Galilei selbst an der schiefen Ebene und einigen anderen einfachen Maschinen bemerkt (*Della scienza meccanica; Opere di Galileo Galilei t. I, p.* [illegible], Bologna 1655), in seinem vollen Umfange aber erst von Joh. Bernoulli in einem Briefe an Varignon (Basel, 26. Jan. 1717) ausgesprochen und von Lagrange zum Fundamente seiner „*Mécanique analytique*" erhoben. Wir werden diesen Satz zuerst für das freie und das beschränkt bewegliche unveränderliche System beweisen und sodann den Beweis auf das beliebig veränderliche System mit beliebigen Bewegungsbeschränkungen ausdehnen.

§. 2. Nach Cap. V, §. 11. ist zum Gleichgewicht der Kräfte P, P', P'', ... am unveränderlichen System erforderlich und hinreichend, dass die Summe der Pyramiden, welche eine im Raume beliebig wählbare Strecke zur gemeinschaftlichen Kante und die Kräfte selbst zu Gegenkanten haben, verschwinde. Nach Thl. I, Cap. V, §. 4. ist ferner die Elementarbewegung eines unveränderlichen Systems äquivalent den Elementarrotationen um zwei conjugirte Axen und also der Geschwindigkeitszustand äquivalent den Winkelgeschwindigkeiten um diese. Es seien nun a, a' irgend zwei conjugirte Axen für einen beliebigen Geschwindigkeitszustand des Systems, Ω, Ω' die Winkelgeschwindigkeiten um sie und seien letztere als Längen auf den Axen aufgetragen. Wendet man den eben citirten Satz auf Ω und Ω', als die beliebig wählbaren Strecken, an und bezeichnet allgemein das Volumen einer Pyramide, welche α und β zu Gegenkanten hat, durch $[\alpha\beta]$, so bestehen für das

Gleichgewicht die Gleichungen $\Sigma[P\Omega] = 0$; $\Sigma[P\Omega'] = 0$ und wenn man beide addirt:

$$\Sigma[P\Omega] + \Sigma[P\Omega'] = 0 \text{ oder } \Sigma([P\Omega] + [P\Omega']) = 0.$$

Der Inhalt der Pyramiden $[P\Omega]$ und $[P\Omega']$ wird nun mit Hülfe der kürzesten Abstände d, d' der Richtung von P von den Axen a, a' und den Winkeln α, α', welche P mit diesen Axen bildet, durch die Formeln

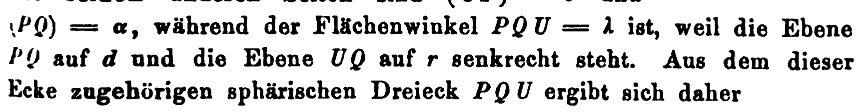
$$[P\Omega] = \tfrac{1}{6} P\Omega d \sin\alpha, \quad [P\Omega'] = \tfrac{1}{6} P\Omega' d' \sin\alpha'$$

gefunden (s. S. 71); wir führen aber in diese Formeln lieber die Abstände r, r' des Angriffspunktes M der Kraft P von den Axen a, a' ein. Indem wir mit diesen Grössen multipliciren und dividiren und bedenken, dass Ωr und $\Omega' r'$ die Geschwindigkeiten u, u' bedeuten, welche der Punkt M vermöge der Winkelgeschwindigkeiten Ω, Ω' besitzt, nehmen die beiden Gleichungen zunächst die Form an:

$$[P\Omega] = \tfrac{1}{6} Pu \cdot \frac{d}{r} \sin\alpha, \quad [P\Omega'] = \tfrac{1}{6} Pu' \cdot \frac{d'}{r'} \sin\alpha'.$$

Nun kann aber leicht gezeigt werden, dass $\frac{d}{r}\sin\alpha$ und $\frac{d'}{r'}\sin\alpha'$ nichts anderes sind, als die Cosinusse der Winkel ϑ, ϑ', welche die Geschwindigkeiten u, u' mit der Richtung der Kraft P bilden. Legt man nämlich durch den Fusspunkt D des kürzesten Abstandes d auf P (Fig. 201.) eine Parallele zur Axe a, so steht d auf der durch sie und P bestimmten Ebene senkrecht und stellt folglich $\frac{d}{r}$ den Cosinus des Winkels λ dar, welchen r und d mit einander bilden. Legt man sodann durch M gleichfalls eine Parallele zu a, so bildet diese mit den Richtungen von P und u im Punkte M eine dreiflächige Ecke PQU, in welcher die Seite $(UQ) = \frac{1}{2}\pi$ ist, weil die Geschwindigkeit u zur Axenrichtung a senkrecht ist. Die beiden anderen Seiten sind $(UP) = \vartheta$ und $(PQ) = \alpha$, während der Flächenwinkel $PQU = \lambda$ ist, weil die Ebene PQ auf d und die Ebene UQ auf r senkrecht steht. Aus dem dieser Ecke zugehörigen sphärischen Dreieck PQU ergibt sich daher

Fig. 201.



$$\cos\vartheta = \cos\lambda \sin\alpha = \frac{d}{r}\sin\alpha.$$

Hiermit erhalten wir jetzt, indem wir dieselbe Betrachtung nochmals in Bezug auf die Axe a' anstellen:

$$[P\Omega] + [P\Omega'] = \tfrac{1}{6} P (u\cos\vartheta + u'\cos\vartheta'),$$

oder weil die Summe $u\cos\vartheta + u'\cos\vartheta'$ als Summe der Projectionen der Geschwindigkeiten u, u' auf die Richtung der Kraft P gleich der Projection $v\cos(Pv)$ der aus ihnen resultirenden Geschwindigkeit v des

Punktes M auf die Richtung von P ist, $[P\Omega] + [P\Omega'] = \frac{1}{6} Pv \cos(Pv)$. Daher geht die obige Gleichgewichtsbedingung jetzt über in

$$\Sigma Pv \cos(Pv) = 0$$

und liefert den Satz:

Zum Gleichgewichte von Kräften an einem unveränderlichen, frei beweglichen System ist erforderlich und hinreichend, dass für jeden beliebigen Geschwindigkeitszustand des Systems die Summe aller Kräfte, jede multiplicirt mit der Projection der Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes auf die Richtung der Kraft, oder was hiermit gleichbedeutend ist, dass die Summe der Geschwindigkeiten aller Punkte, jede multiplicirt mit der Projection der an ihnen angreifenden Kräfte auf die Richtung der Geschwindigkeit, verschwinde.

Der Satz führt den Namen des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, weil die in ihm auftretenden Geschwindigkeiten nicht die dem wirklich vorhandenen Bewegungszustande des Systems, sondern nur einem beliebig angenommenen oder als möglich gedachten anzugehören brauchen. Bereits S. 206 wurde das Wort „virtuell" in diesem Sinne erläutert.

Man gibt dem Satze in der Regel eine etwas andere Fassung, als hier geschehen. Ist nämlich ds der Elementarweg, welchen der Angriffspunkt der Kraft P in Folge des willkürlich angenommenen Geschwindigkeitszustandes im folgenden Zeitelemente dt beschreiben würde, so ist $v = \frac{ds}{dt}$ und wenn weiter in dem Produkte $v \cos(Pv) = \frac{ds \cdot \cos(Pv)}{dt}$ die Projection $ds \cos(Pv)$ des Elementarwegs auf die Richtung der Kraft mit dp bezeichnet wird, so nimmt die Gleichung des Princips die Gestalt $\Sigma P \frac{dp}{dt} = 0$ oder nach Multiplication mit dt die Form $\Sigma P\, dp = 0$ an, in welcher man noch an die Stelle des Differentialzeichens d, um etwaigen Verwechselungen des beliebig gedachten dp mit dem dem wirklichen Bewegungszustande des Systems entsprechenden dp das Variationszeichen δ setzt und also die Gleichung so schreibt:

$$\Sigma P\, \delta p = 0.$$

Einem etwas abnormen Sprachgebrauche zufolge nennt man die Elementarwege der Punkte, welche ihren virtuellen Geschwindigkeiten proportional sind, die virtuellen Geschwindigkeiten selbst (besser „virtuelle Verschiebungen"). Die Grössen $P\delta p$ sind gemäss Thl. III, Cap. I. §. 16. die virtuellen Arbeiten der Kräfte, werden aber auch die virtuellen Momente derselben genannt. Alles, was dort über die positive und negative Beschaffenheit dieser Grössen gesagt ist, kommt hier in Betracht. Ein virtuelles Moment $P\delta p$ ist Null, wenn $P = 0$

oder $\delta p = 0$; im letzteren Falle ist entweder die virtuelle Verschiebung Null oder senkrecht zur Richtung von P. Unter Anwendung dieser Nomenclatur heisst der Satz:

Zum Gleichgewichte eines Kräftesystems an einem unveränderlichen frei beweglichen Punktsystem ist erforderlich und hinreichend, dass für jeden beliebigen virtuellen Bewegungszustand des Systems die Summe der virtuellen Arbeiten (Momente) aller Kräfte verschwinde.

§. 3. Ist das Kräftesystem nicht im Gleichgewicht, so ist es äquivalent einer Einzelresultanten, einem Paare oder zwei sich kreuzenden Kräften. Aus dem Satze Cap. V, §. 11. über die Pyramidensumme ergibt sich ganz ebenso, wie §. 2. für das Gleichgewicht, dass die Summe der virtuellen Arbeiten eines Kräftesystems, welches an einem unveränderlichen freien Punktsystem angreift, überhaupt gleich der virtuellen Arbeit seiner Resultanten, seines resultirenden Paares oder der beiden ihm äquivalenten Kräfte oder jedes anderen ihm äquivalenten Systems für jeden beliebigen Geschwindigkeitszustand ist.

§. 4. Ist das unveränderliche System nicht frei, sondern an gewisse Bedingungen gebunden, welche seine Beweglichkeit beschränken, so sind zwei Fälle zu unterscheiden; entweder sind diese Bedingungen der Art, dass sie durch gewisse Kräfte vertreten werden können, welche das System nöthigen, dieselben zu erfüllen, oder es ist dies nicht möglich. Im ersten Falle kommt das Gleichgewicht des Kräftesystems nur durch Mitwirkung der Kräfte, welche die Bedingungen ersetzen, zu Stande. Da diese Kräfte die Bedingungen vollkommen vertreten, so fallen letztere durch ihre Einführung als erfüllt hinweg und besteht das Gleichgewicht an dem Gesammtkräftesystem wie an einem freien System. Es gilt daher auch hier das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, d. h. es besteht der Satz:

Zum Gleichgewicht eines Kräftesystems $P, P', P'', \ldots$, welches an einem unveränderlichen Punktsystem wirkt, dessen Bedingungen der Beweglichkeit durch Kräfte darstellbar sind, ist erforderlich und hinreichend, dass für jeden beliebigen Geschwindigkeitszustand die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte des gegebenen Kräftesystems, sowie der Bedingungskräfte verschwinde. Sind also $N, N', N'', \ldots$ die Bedingungskräfte und $\delta n, \delta n', \delta n'', \ldots$ die Projectionen der virtuellen Verschiebungen ihrer Angriffspunkte auf die Richtungen der N, so besteht für jede virtuelle Lagenänderung des Systems die Gleichung:

$$\Sigma P \delta p + \Sigma N \delta n = 0.$$

Fälle der zweiten Art erfordern eine aparte Behandlung und lassen wir dieselben ausser unserer Betrachtung. Zu der ersten Art gehören die Bewegungsbeschränkungen, welche bereits Cap. , §. . aufgeführt wurden, nämlich: 1. das System besitzt einen festen Punkt, d. h. einen solchen, in welchem die durch die Kräfte hervorgerufene Beschleunigung vernichtet wird, 2. es besitzt eine feste Axe, 3. es hat eine feste Axenrichtung, 4. gewisse Punkte sind genöthigt, auf bestimmten Curven oder Flächen zu bleiben, 5. eine Fläche des Systems soll fortwährend eine oder mehrere gegebene Flächen berühren u. dgl. m. Die Festigkeit eines Punktes ist immer ersetzbar durch einen Widerstand, welcher die dem Punkte ertheilte Beschleunigung tilgt, die Festigkeit der Axe kann durch Widerstände in zweien beliebigen ihrer Punkte vertreten werden; ein Punkt kann durch einen Normalwiderstand auf eine Curve oder Fläche gezwungen werden, die Berührung von Flächen des Systems mit gegebenen Flächen wird gleichfalls durch Kräfte ausgedrückt, welche längs den gemeinschaftlichen Normalen der sich berührenden Flächen wirken.

Unter den unendlich vielen virtuellen Elementarbewegungen des Systems gibt es nun gewisse, für welche die Summe $\Sigma N \delta n$ der virtuellen Arbeiten der Bedingungskräfte für sich verschwindet. Man nennt dieselben die mit den Bedingungen des Systems verträglichen Elementarbewegungen. Bei den eben angeführten Fällen sind sie nämlich diejenigen, wodurch die Bedingungen nicht alterirt werden. Denn wird das System um den festen Punkt gedreht, so ist für diesen $\delta n = 0$, also auch die virtuelle Arbeit $N \delta n$ des Widerstandes Null, der seiner Festigkeit äquivalent ist. Rotirt das System um die feste Axe, so sind die virtuellen Verschiebungen der Angriffspunkte ihrer Widerstände gleichfalls Null, macht es eine Schraubenbewegung um die Axe von fester Richtung, so sind die virtuellen Verschiebungen der Geraden, welche in der Axe gleitet, normal zu den Axenwiderständen, also werden ihre Projectionen δn gleich Null und dasselbe ereignet sich, wenn das System so verschoben wird, dass bestimmte Punkte in vorgeschriebenen Bahnen oder auf vorgeschriebenen Flächen sich bewegen: denn die Elementarwege fallen in die Tangenten oder Tangentenebenen und die Bedingungskräfte sind Normalkräfte.

Handelt es sich nun blos um die Aufstellung der von dem gegebenen Kräftesystem zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingungen, ohne dass man über die Natur der Bedingungskräfte Auskunft erhalten will, so genügt es, die mit den Bedingungen des Systems verträglichen Elementarbewegungen mit Hintansetzung aller übrigen zu betrachten. Wir müssen hierfür aber unseren Satz in zwei Theile spalten. Zunächst kann man nämlich in Folge der eben gemachten Bemerkungen nur behaupten:

Wenn ein Kräftesystem an einem unveränderlichen, ge-

wissen Bedingungen, welche Kräften äquivalent sind, unterworfenen System im Gleichgewicht sich befindet, so ist für alle mit den Bedingungen verträgliche Elementarbewegungen des Systems die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte der Null gleich.

Der zweite Theil des Satzes, die Umkehrung des eben ausgesprochenen, muss besonders erwiesen werden. Nämlich:

Wenn die Summe der virtuellen Arbeiten eines Kräftesystems, welches an einem unveränderlichen, gewissen Bedingungen, welche Kräften äquivalent sind, unterworfenen System angreift, für alle mit den Bedingungen verträglichen Elementarbewegungen verschwindet, so ist das Kräftesystem im Gleichgewicht.

Denn fände nicht Gleichgewicht statt, so würden die Kräfte das System in einer mit den Bedingungen verträglichen Weise beschleunigen. Dies könnte man dadurch hindern, dass man an den einzelnen Punkten des Systems Kräfte wirken liesse, welche die Beschleunigungen derselben tilgten. Diese Kräfte würden in die Richtungen jener Beschleunigungen fallen und würden ihnen dem Sinne nach entgegengesetzt sein. Wählen wir nun die durch die gegebenen Kräfte erfolgende Elementarbewegung zu der virtuellen Bewegung und bezeichnen die unendlich kleinen Wege, welche die Punkte hierbei beschreiben würden, mit δq, $\delta q'$, $\delta q''$, ... und ihre Projectionen auf die Richtungen der Kräfte P wieder mit δp, $\delta p'$, $\delta p''$, ..., so wäre $\Sigma P \delta p$ die virtuelle Arbeit des gegebenen Kräftesystems, $-\Sigma Q \delta q$ aber die virtuelle Arbeit der hinzugefügten Kräfte. Diese letztere ist negativ, weil die Kräfte Q mit den Wegen δq Winkel π bilden. Wegen des sodann eintretenden Gleichgewichtes würde die Gleichung $\Sigma P \delta p - \Sigma Q \delta q = 0$ bestehen, welche sich auf $-\Sigma Q \delta q = 0$ reducirt, da nach der Voraussetzung $\Sigma P \delta p = 0$ ist. Diese Gleichung kann aber nicht bestehen, da ihre linke Seite nicht verschwindet.

§. 5. Hinsichtlich der die Beweglichkeit des Systems beschränkenden Bedingungen ist noch eine speciellere Untersuchung erforderlich. Wenn ein Punkt unbedingt gezwungen ist, sich auf einer gegebenen Fläche zu bewegen, so kann er in der Richtung der Normalen weder nach der einen, noch nach der anderen Seite ausweichen. Die Fläche leistet sowohl, wenn die Kräfte den Punkt an die Fläche pressen, als auch, wenn sie denselben von der Fläche wegziehen, einen Widerstand, der das eine wie das andere hindert. Man kann sich dies materiell dadurch dargestellt denken, dass man die Fläche als aus zwei unendlich nahen Schalen bestehend annimmt, zwischen denen sich der Punkt befindet. Im einen Falle wird er gegen die eine Schale gedrückt und leistet diese im entgegengesetzten Sinne Widerstand, im anderen Falle findet dies

bei der anderen Schale statt. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass die Kräfte den Punkt an die Fläche anpressen und der Widerstand derselben blos das Eindringen hindert, während der Beweglichkeit im entgegengesetzten Sinn kein Hinderniss im Wege steht; so z. B. wenn der Punkt sich auf der Oberfläche eines festen Körpers befindet, in welchen es nicht eindringen, von welchem es aber wohl hinweggeführt werden kann. Die Fläche ist dann nur als eine einzige Schale zu denken und leistet nur einseitigen Widerstand. Ebenso kann die Beweglichkeit des Punktes in der Tangentenebene der Fläche nach der einen oder der anderen Richtung beschränkt sein, während sie in entgegengesetztem Sinne kein Hinderniss findet. Aehnliches kann bei der Bewegung des Punktes auf einer gegebenen Curve eintreten, indem dieselbe in dem einen Sinne gehindert ist, im entgegengesetzten nicht; desgleichen bei der Rotation um eine gegebene Axe u. s. w.

Bei der Entwickelung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten unter der Form, in welcher die Bedingungskräfte nicht in den Ausdruck derselben eintreten, wurde nun angenommen, dass die Bedingungskräfte die Beschränkungen der Beweglichkeit absolut erfüllen, sodass also die Flächen doppelseitigen Widerstand leisten, dass aber in der Tangentenebene nach jeder Richtung in beiderlei Sinn und in der Tangente einer Curve gleichfalls in beiderlei Sinn Beweglichkeit stattfinde. Finden die Bewegungshindernisse aber nur einseitig statt, so braucht die Gleichung $\Sigma P\delta p = 0$ nicht mehr für alle verträglichen Verschiebungen erfüllt zu sein. Denn führt man die Bewegungshindernisse als Kräfte N, N', N'', ... ein, so ist überhaupt nach §. 3. wegen des Gleichgewichtes

$$\Sigma P\delta p + \Sigma N\delta n = 0.$$

Für alle Verschiebungsarten, bei welchen nun die betreffenden Punkte auf die Hindernisse stossen, sind die Grössen δn Null, also auch $\Sigma N\delta n = 0$ und folglich ist für diese $\Sigma P\delta p = 0$. Für die entgegengesetzten und alle übrigen verträglichen Verschiebungen sind aber alle $N\delta n$ oder wenigstens einige von ihnen positiv, weil N und δn entgegengesetzten Sinn besitzen, daher kann für sie $\Sigma P\delta p$ nicht mehr Null, sondern muss negativ sein. Wir erhalten daher das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten jetzt in folgender allgemeinerer Fassung:

Zum Gleichgewicht eines Kräftesystems, welches an einem unveränderlichen, gewissen, durch Kräfte darstellbaren Bedingungen unterworfenen Punktsystem angreift, ist, wenn die Beweglichkeit des Systems durch diese Bedingungen nicht absolut, sondern nur einseitig oder nach gewissen Richtungen beschränkt wird, erforderlich und hinreichend, dass für alle verträglichen Verschiebungsarten die Summe der virtuellen Arbeiten des Kräftesystems nicht positiv, dass vielmehr $\Sigma P\delta p \overline{<} 0$ sei.

§. 6. Von dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten macht man vorzugsweise Gebrauch zur Beantwortung folgender Fragen: 1. Findet an einem gegebenen, gewissen Bedingungen der Beweglichkeit unterworfenen Punktsystem Gleichgewicht zwischen den Kräften statt, welche an ihnen angreifen oder nicht und welche sind die Widerstände etc., welche die Bedingungen vertreten können? 2. Wenn nicht Gleichgewicht stattfindet, wie findet man Kräfte, welche dasselbe herbeizuführen geeignet sind und zugleich noch näher zu bezeichnenden Forderungen genügen? 3. Welches sind die Lagen des Systems, für welche die Kräfte ins Gleichgewicht gelangen, insbesondere welche Lagen nehmen hierbei die in ihrer Bewegung beschränkten Punkte auf den ihnen vorgeschriebenen Curven oder Flächen ein? 4. Welches sind die beschränkenden Bedingungen der Beweglichkeit des Punktsystems näher zu bezeichnender Gattung, unter welchen ein gegebenes Kräftesystem an demselben ins Gleichgewicht gelangt, z. B. auf welcher Fläche befindet sich ein gegebenen Kräften unterworfener Punkt in allen Lagen im Gleichgewicht? 5. Wenn Gleichgewicht stattfindet, in welchen Fällen ist es sicher, unsicher oder neutral? — Wir wollen zunächst an einigen einfachen Beispielen zeigen, wie man die verschiedenen virtuellen Bewegungen des Systems benutzt, um einige dieser Fragen zu beantworten.

1. Ein homogener schwerer Cylinder (Fig. 202.) von dem Gewichte G, der Länge $2l$ und dem Radius r seines Querschnitts ruht bei A auf einer horizontalen und lehnt sich bei B an eine vertikale Ebene, sodass die Erzeugungslinie AB senkrecht zur Schnittlinie O beider Ebenen ist; bei A und B findet Reibung (Reibungscoefficienten μ, μ') statt. Welches sind die äussersten Lagen, für welche zwischen dem Gewichte und den beiden Reibungen noch Gleichgewicht herrscht? Die beschränkenden Bedingungen des Systems, dass nämlich die Punkte A, B in den beiden Ebenen bleiben sollen, sind durch die Normalwiderstände N, N' dieser Ebenen ersetzbar. Diese und der Winkel ψ, welchen die Axe des Cylinders mit der Horizontalebene im Zustande des Gleichgewichtes bildet, sind die Unbekannten des Problems, zu deren Auffindung wir drei verschiedene, bequem zu wählende virtuelle Bewegungen anwenden werden. Das Kräftesystem besteht aus G am Schwerpunkte S des Cylinders vertikal abwärts, N in A vertikal aufwärts, N' in B horizontal wirkend, sowie den Reibungen μN, $\mu' N'$, welche den jedesmaligen verträglichen Verschiebungen der Punkte A, B entgegen gerichtet sind. Ertheilt man nun zunächst dem System eine unendlich kleine Rotation um die zur Ebene des Kräftesystems senkrechte, durch das Momentancentrum C des in dieser Ebene beweglichen Punktsystems, nämlich den Schnittpunkt der Normalen in A und B gehende Axe im Sinne der Uhrzeigerbewegung, so beschreibt S einen unendlich kleinen Kreisbogen senkrecht zu $CS = d$ und dieser bildet mit der Vertikalen denselben Winkel, welchen CS und die Horizontale OA bilden; der Cosinus dieses Winkels ist $(l \cos \psi - r \sin \psi) : d$ und da die Elementarampli-

Fig. 202.

tude der Rotation $d\psi$, mithin der Elementarweg von S gleich $d \cdot d\psi$ ist, so stellt $-G(l \cos\psi - r \sin\psi)\, d\psi$ die virtuelle Arbeit des Gewichtes G dar. Die Arbeiten von N, N' sind Null, die von μN, $\mu' N'$ aber $-2\mu N l \sin\psi\, d\psi$ und $-2\mu' N' l \cos\psi\, d\psi$. Daher ist

$$-[G(l\cos\psi - r\sin\psi) + 2\mu N l \sin\psi + 2\mu' N' l \cos\psi]\, d\psi$$

die gesammte virtuelle Arbeit aller Kräfte. Da die Widerstände nur einseitig wirken, so besteht also die Gleichgewichtsbedingung:

$$-[G(l\cos\psi - r\sin\psi) + 2\mu N l \sin\psi + 2\mu' N' l \cos\psi]\, d\psi \overline{\overline{<}}\, 0.$$

Der Ausdruck links, gleich Null gesetzt, liefert für die eine Grenzlage des Gleichgewichtes den Winkel $\psi = \psi_1$. Kehren wir den Sinn der Rotation um, so wechseln $d\psi$ und die virtuelle Arbeit des Gewichtes das Zeichen, nicht aber die Arbeiten der Reibungen. Die Gleichgewichtsbedingung ist dann

$$-[G(l\cos\psi - r\sin\psi) - 2\mu N l \sin\psi - 2\mu' N' l \cos\psi]\, \delta\psi \overline{\overline{<}}\, 0$$

und indem man hier den Ausdruck zur Linken gleich Null setzt, erhält man den der anderen Grenzlage des Gleichgewichtes entsprechenden Winkel $\psi = \psi_2$. Innerhalb des der Differenz beider Werthe von ψ entsprechenden Spielraumes ist Gleichgewicht für alle Lagen möglich. Um die Widerstände zu finden, ertheilen wir dem System zwei virtuelle Translationen senkrecht zu den beiden Ebenen. Die horizontale Translation dx liefert $(N' - N\mu)\, dx = 0$, die vertikale dy aber $N + N'\mu' - (G)\, dy = 0$ und aus beiden folgen:

$$N = \frac{G}{1 + \mu\mu'}, \quad N' = \frac{\mu G}{1 + \mu\mu'}.$$

Führen wir diese Werthe in die beiden Grenzbedingungen

$$G(l\cos\psi - r\sin\psi) + 2\mu N l \sin\psi + 2\mu' N' l \cos\psi = 0$$

und

$$G(l\cos\psi - r\sin\psi) + 2\mu N l \sin\psi - 2\mu' N' l \cos\psi = 0,$$

von denen die letzte durch einen Zeichenwechsel der Reibungscoefficienten μ, μ' aus der ersten entspringt, ein, so ergeben sich die fraglichen beiden Werthe von ψ, nämlich:

$$tg\,\psi_1 = \frac{(1 - \mu\mu')}{(1 + \mu\mu')\frac{r}{l} + 2\mu}, \quad tg\,\psi_2 = \frac{1 + 3\mu\mu'}{(1 + \mu\mu')\frac{r}{l} - 2\mu};$$

ψ_1 ist der kleinste, ψ_2 der grösste Grenzwerth von ψ.

2. Ein Winkelhebel AOB (Fig. 203.), dessen Schenkel den Winkel ϑ bilden, ist um seinen Scheitel O in einer Vertikalebene drehbar; der eine Schenkel $OB = b$ ist verhältnissmässig schwer und sein Gewicht gleich Q; das Ende A des anderen Schenkels $OA = a$ trägt eine Schale oder einen Haken vom Gewichte ϖ und eine Last vom Gewichte P. In welcher Lage dieses Systems findet Gleichgewicht der Kräfte statt? (Zeigerwaage.)

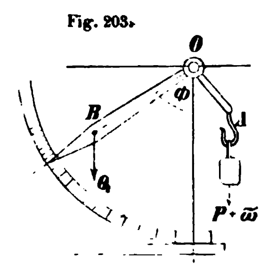


Fig. 203.

Es bilde in der Gleichgewichtslage OB mit der Vertikalen den Winkel φ, also OA mit derselben den Winkel $\vartheta - \varphi$. Ertheilt man dem System eine virtuelle Rotation um O, sodass φ um $d\varphi$ zunimmt, so nimmt $\vartheta - \varphi$ um $d\varphi$ ab und haben die Arbeiten der Kräfte $P + \varpi$ und Q die Werthe

$$(P + \varpi)\, a \sin(\vartheta - \varphi)\, d\varphi \text{ und } -Qb \sin\varphi\, d\varphi.$$

Daher ist die Bedingung des Gleichgewichtes

$$(P + \tilde{\omega})\, a \sin(\vartheta - \varphi) - Qb \sin\varphi = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$tg\,\varphi = \frac{(P + \tilde{\omega})\, a \sin\vartheta}{(P + \tilde{\omega})\, a \cos\varphi + Qb}.$$

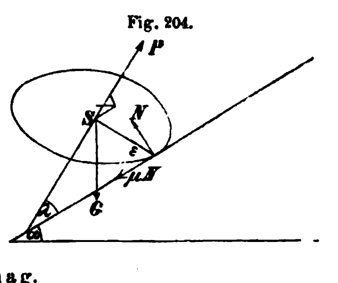
Für $P = 0$ findet man die Stellung, welche dem Nullpunkt einer Kreisscala entspricht, für welche der Schenkel OB den Zeiger trägt, nämlich

$$tg\,\varphi_0 = \frac{\tilde{\omega}\, a \sin\vartheta}{\tilde{\omega}\, a \cos\vartheta + Qb};$$

indem man $P = 1, 2, 3, \ldots$ Kilogramm annimmt, erhält man die den Scalatheilpunkten $1, 2, 3, \ldots$ entsprechenden Winkel φ. Soll OA horizontal sein für die Stellung des Zeigers auf Null, so muss $\vartheta - \varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$, also $\vartheta = \frac{1}{2}\pi + \varphi_0$, also $tg\,\varphi_0 = -\, cotg\,\vartheta$ werden, für welchen Werth aus der vorigen Gleichung $\cos\vartheta = -\frac{\tilde{\omega} a}{Qb}$ folgt, welche Gleichung eine der Grössen a, b, Q, $\tilde{\omega}$, ϑ liefert, wenn die übrigen willkürlich angenommen sind. Mit wachsendem P nähert sich der Schenkel OA der vertikalen Lage und wächst der Winkel φ, indem er sich ϑ als seiner Grenze nähert. — Für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ wird die Untersuchung sehr einfach; es ist dann $tg\,\varphi = \frac{a}{Qb}(P + \tilde{\omega})$, also wenn $\tilde{\omega}$ sehr klein ist, wachsen die Tangenten von φ nahezu den Gewichten P proportional. Für grössere Lasten P muss Q sehr gross gewählt werden, damit der Ausschlag des Zeigers nicht zu rasch wachse, da mit wachsendem φ die Theilstriche immer enger aneinander rücken. — Den Widerstand N des Punktes O und seine Richtung findet man, indem man dem System eine vertikale und eine horizontale virtuelle Translation ertheilt. Bildet N mit der Vertikalen aufwärts gerechnet den Winkel λ, so wird $N \cos\lambda - (P + \tilde{\omega}) - Q = 0$ und $N \sin\lambda = 0$, also $N = (P + \tilde{\omega}) + Q$ und $\lambda = 0$.

3. Ein homogener, schwerer Körper vom Gewichte G (Fig. 204.) berühre bei A eine gegen den Horizont unter dem Winkel α geneigte Ebene mit Reibung vom Coefficienten μ; die Verbindungslinie AS des Berührungspunktes mit dem Schwerpunkte S ist gegen die schiefe Ebene unter dem Winkel ε geneigt und fällt in die zur Schnittlinie der schiefen Ebene und des Horizontes senkrechte Ebene. Man sucht eine unter dem Winkel λ gegen die schiefe Ebene gerichtete, durch den Schwerpunkt gehende und in dieselbe Vertikalebene fallende Kraft P, welche mit G, dem Widerstande N der Ebene und der Reibung μN Gleichgewicht zu halten vermag.

Fig. 204.



Um die drei Gleichgewichtsbedingungen dieses ebenen Kräftesystems zu finden, wenden wir drei virtuelle Bewegungen des Körpers an. Verschieben wir denselben zunächst parallel der schiefen Ebene und zwar aufwärts um die unendlich kleine Strecke ds, so sind die virtuellen Arbeiten der Kräfte P, G, N, μN der Reihe nach $P ds \cos\lambda$, $-G ds \sin\alpha$, 0, $-\mu N ds$ und da der Widerstand der Ebene einseitig wirkt, so besteht die Bedingung:

$$(P \cos\lambda - G \sin\alpha - \mu N)\, ds \gtreqless 0.$$

Eine Verschiebung ds senkrecht zur schiefen Ebene veranlasst die virtuellen Arbeiten $P \sin\lambda\, ds$, $-G \cos\alpha\, ds$, $N ds$; eine virtuelle Rotation um A um den unendlich

kleinen Winkel $d\omega$ endlich gibt die Arbeiten $P \cdot AS \cdot sin(\varepsilon + \lambda)$, $- G \cdot AS \cdot cos(\varepsilon - \alpha)$, 0, 0. Hierdurch erhalten wir die zwei weiteren Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes:

$$P \sin \lambda - G \cos \alpha + N = 0$$
$$P \sin(\varepsilon + \lambda) - G \cos(\varepsilon - \alpha) = 0.$$

Aus der ersten von ihnen entnehmen wir N und erhalten, indem wir seinen Werth in die zuerst aufgestellte Gleichgewichtsbedingung einführen:

$$P \overline{\overline{<}} \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \lambda + \mu \sin \lambda} \cdot G,$$

welche wir auch dadurch, dass wir den Ruhewinkel ϱ durch die Formel $tg \varrho = \mu$ zu Hülfe rufen, auf die Form $P \overline{\overline{<}} \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos(\lambda - \varrho)} \cdot G$ bringen können. Für eine virtuelle Verschiebung die schiefe Ebene hinab würden wir statt der ersten Relation gefunden haben: $- P \cos \lambda + G \sin \alpha - \mu N \overline{\overline{<}} 0$. Aus ihr erhalten wir mit Hülfe von N analog

$$P \geqq \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \lambda - \mu \sin \lambda} \cdot G$$

oder in anderer Form geschrieben:

$$P \geqq \frac{\sin(\alpha - \varrho)}{\cos(\lambda + \varrho)} \cdot G.$$

Hiermit sind die Grenzwerthe für P bezüglich der Möglichkeit des Gleichgewichtes gefunden. Zu jedem Werthe von P innerhalb dieses Spielraumes erhält man den betreffenden Widerstand $N = G \cos \alpha - P \sin \lambda$ und aus der dritten Relation die Lage des Körpers, nämlich den Winkel ε, welcher die Neigung der Linie AS angibt. Hierfür wird nämlich

$$tg\, \varepsilon = \frac{P \sin \lambda + G \cos \alpha}{P \cos \lambda - G \sin \alpha}.$$

4. Eine vertikal stehende Schraubenspindel kann in der zugehörigen festen Schraubenmutter mit Reibung vom Coefficienten μ gleiten. Am Kopfe A der Spindel wirkt in einer Horizontalebene ein Kräftepaar vom Momente M, am unteren Ende B ein Gewicht, welches mit dem Gewichte der Spindel zusammen Q beträgt. Man soll für den Fall des Gleichgewichtes die Grenzwerthe von M und den Druck auf die Schraubenmutter bestimmen.

Der Cylinder, auf welchem das Schraubengewinde aufsitzt, habe den Radius R, das Gewinde sei von rechteckigem Querschnitt und von der Dicke ϑ, der Druck an einer beliebigen Stelle der Schraubenmutter auf die Flächeneinheit reducirt, d. h. die Resultante der Drucke auf alle Punkte eines Quadratmeters, wenn derselbe überall gleich dem Drucke an jener Stelle ist, sei ν.

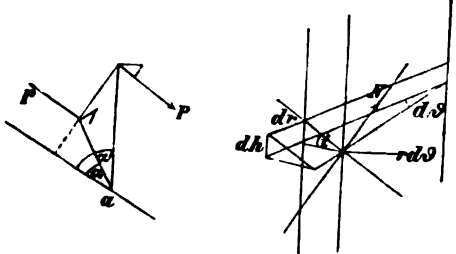


Fig. 205.

Zunächst ertheilen wir dem System eine virtuelle Schraubenbewegung um seine Axe, wie sie mit seiner Natur verträglich ist und zwar so, dass die Spindel um die unendlich kleine Höhe dh (Fig. 205.) steigt und um den Winkel $d\vartheta$ rotirt. Die Angriffspunkte der Seitenkräfte P des Paares, dessen Arm p sei, beschreiben Schraubenelemente um die Schraubenaxe a, deren Projectionen auf die Richtung der Kräfte $rd\vartheta$ sind;

$r'd\vartheta \sin\alpha'$ sind, wenn r, r' die Abstände jener Angriffspunkte von der Axe und α, α' die Winkel sind, welche dieselben mit der Richtung der Kräfte bilden. Die virtuelle Arbeit beider Seitenkräfte ist also

$$Pr' \sin\alpha' d\omega - Pr \sin\alpha d\omega = Pp d\omega = M d\omega,$$

da $r' \sin\alpha' - r \sin\alpha = p$ ist. Die virtuelle Arbeit von Q ist $-Qdh$, die Widerstände $Nd\Omega$, welche die Schraubenmutter in ihren einzelnen Flächenelementen $d\Omega$ leistet, liefern keine Arbeiten, da sie senkrecht zu den Schraubenelementen ds sind, welche ihre Angriffspunkte beschreiben, die Reibungen $\mu N d\Omega$ leisten Arbeiten $-\mu N \Omega ds$ und ihre Summe ist $-\mu \int N d\Omega ds$ über die ganze Fläche der Schraubenmutter ausgedehnt, auf welcher die Spindel ruht. Man erhält demnach die Bedingung des Gleichgewichtes

$$M d\vartheta - Q dh - \mu \int N d\Omega ds \overline{\overline{<}} 0$$

und indem man die virtuelle Schraubenbewegung in umgekehrtem Sinne erfolgen lässt,

$$- M d\vartheta + Q dh - \mu \int N d\Omega ds \overline{\overline{<}} 0,$$

sodass

$$M \overline{\overline{<}} Q \frac{dh}{d\vartheta} + \mu \int N d\Omega \frac{ds}{d\vartheta} \quad \text{und} \quad M \geq Q \frac{dh}{d\vartheta} - \mu \int N d\Omega \frac{ds}{d\vartheta}$$

gewählt werden darf. Die Grösse $\frac{dh}{d\vartheta}$ ist constant und gleich $\frac{h}{2\pi}$, wenn h die Höhe des Schraubenzeigers bedeutet. Ist r der Abstand des Schraubenelementes ds von der Axe, so stellt $\frac{ds}{r d\vartheta}$ die Sekante der Neigung i von ds gegen seine Horizontalprojection dar, mithin ist $\frac{ds}{d\vartheta} = \frac{r}{\cos i}$. Das Flächenelement $d\Omega$ ist $ds dr = \frac{r d\vartheta \cdot dr}{\cos i}$. Hiermit wird das den Einfluss der Reibung darstellende Integral

$$- \mu \int N d\Omega \frac{ds}{d\vartheta} = - \mu 2 \varkappa \pi \int_R^{R+\delta} \frac{N r^2 dr}{\cos^2 i},$$

wo $\varkappa$ die Anzahl der Schraubenwindungen angibt. N und i sind Functionen von r, aber N ist unbekannt, während i mit Hülfe von $tg\, i = \frac{h}{2\pi r}$ eliminirt werden kann. Hierdurch wird die Grenzbedingung für M

$$- 2 \mu \varkappa \pi \int_R^{R+\delta} N \left[r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \right] dr \leq M - Q \cdot \frac{h}{2\pi} \leq 2 \mu \varkappa \pi \int_R^{R+\delta} N \left[r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \right] dr.$$

Um N, wenn auch nur durch einen Mittelwerth darzustellen, ertheilen wir dem System eine blos virtuelle Rotation $d\vartheta$ um die Schraubenaxe und erhalten, da die Arbeiten von M, $Nd\Omega$ und $\mu N d\Omega$ die Werthe $M d\vartheta$, $- N d\Omega r d\vartheta \sin i$, $- \mu N d\Omega r d\vartheta \cos i$ haben und $d\Omega (\sin i + \mu \cos i) = r^2 d\omega (tg\, i + \mu)$ ist, die weitere Gleichgewichtsbedingung

$$M - \varkappa \int_R^{R+\delta} N r (2 \pi \mu r + h) dr = 0.$$

Nach einem bekannten Satze der Integralrechnung ist aber ein bestimmtes Integral, dessen Elementarfactor innerhalb des Integrationsintervalls das Zeichen nicht wechselt, gleich der Differenz der Grenzen, multiplicirt mit einem gewissen Mittelwerthe des Elementarfactors. Bedeutet daher r_0 den Mittelwerth von r, N_0 den von N, so hat man

$$M - \varkappa \delta N_0 r_0 (2 \pi \mu r_0 + h) = 0,$$

und wenn man den hieraus fliessenden Werth N_0 an die Stelle von N als Näherungswerth in die Grenzbedingung für M einführt, so kommt nach leichter Reduction

$$\frac{Q\cdot\frac{h}{2\pi}}{1+\frac{2\pi\mu\left(R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}+R\delta+\frac{1}{3}\delta^2\right)}{(2\pi\mu r_0+h)r_0}}\leq M\leq\frac{Q\cdot\frac{h}{2\pi}}{1-\frac{2\pi\mu\left(R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}+R\delta+\frac{1}{3}\delta^2\right)}{(2\pi\mu r_0+h)r_0}}$$

Auch kann man einen mittleren Näherungswerth N_1, für N durch Q ausgedrückt, erhalten. Eine virtuelle Translation des Systems, parallel der Schraubenaxe, würde die Bedingung liefern:

$$-Q+2\varkappa\pi\int_R^{R+\delta}N\left(1-\frac{\mu h}{2\pi r}\right)r\,dr=0,$$

woraus $N_1=\frac{Q}{\varkappa(2\pi r_1-\mu h)r_1}$, wenn r_1 der Mittelwerth des Argumentes r ist. Hiermit erhält man:

$$Q\left[\frac{h}{2\pi}-\frac{\left(R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}+R\delta+\frac{1}{3}\delta^2\right)\delta}{(2\pi r_1-\mu h)r_1}\right]\leq M\leq Q\left[\frac{h}{2\pi}+\frac{2\pi\mu\left(R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}+R\delta+\frac{1}{3}\delta^2\right)}{(2\pi r_1-\mu h)r_1}\right].$$

Man kann leicht eine mittlere Schraubenlinie angeben, auf welcher allein, statt auf der ganzen Fläche der Schraubenmutter, Reibung stattfinden würde. Der Radius derselben sei r und der Druck N werde jetzt auf die Längeneinheit bezogen. Dann stellt, wenn l die Länge der ganzen Schraubenlinie bedeutet, $\mu Nl\cdot ds$ die Gesammtarbeit der Reibung dar und wird die Grenzbedingung für M vermöge der Relationen $\frac{ds}{d\omega}=\frac{r}{\cos i}=\frac{l}{2\pi}$, $\frac{dh}{d\omega}=\frac{h}{2\pi}$:

$$Q\cdot\frac{h}{2\pi}-\frac{\mu}{2\pi}Nl^2\leq M\leq Q\cdot\frac{h}{2\pi}+\frac{\mu}{2\pi}Nl^2$$

und die virtuelle Rotation und Translation um die Schraubenaxe und parallel zu ihr liefern weiter:

$$M-Nlr(\sin i+\mu\cos i)=0 \qquad -Q+Nl(\cos i-\mu\sin i)=0,$$

woraus N und r gezogen werden können, da $l\sin i=h$, $l\cos i=2\pi r$ ist.

5. Eine schwere Gerade AB (Fig. 206.) ruht auf einer ebenen Curve in einer Vertikalebene und lehnt sich mit dem Ende A an eine vertikale Wand; welches ist die Curve, auf welcher die Gerade in jeder Lage im Gleichgewicht sich befindet?

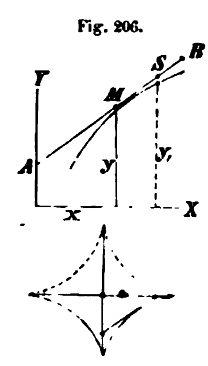


Fig. 206.

Ist a die Entfernung des Schwerpunktes S der Geraden von A, (x, y) ein beliebiger Punkt der Curve, in welchem sie aufliegt, so erhält man für die vertikale Ordinate von S $y_1=y+\overline{MS}\cdot\frac{dy}{ds}$, oder, da $\overline{MS}=a-x\frac{ds}{dx}$ ist:

$$y_1=y+a\frac{dy}{ds}-x\frac{dy}{dx}$$

und da das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für verträgliche Verschiebungen $Pdy_1=0$ fordert, wenn P das Gewicht der Geraden bedeutet, oder kürzer $\delta y_1=0$, so ist die Differentialgleichung der Curve

$$d\left\{y+a\frac{dy}{ds}-x\frac{dy}{dx}\right\}=0,$$

oder, da x als unabhängige Variabele gewählt werden kann:

$$\frac{dy}{dx} + a\frac{d\cdot\frac{dy}{ds}}{dx} - \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

d. h.:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - a\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Diese Gleichung spaltet sich in die zwei folgenden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{und} \quad x - \frac{a}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

von denen die erste die Gleichung einer Geraden $y = \alpha x + \beta$ zum Integrale hat. Von dieser selbstverständlichen Lösung absehend, wollen wir die zweite Gleichung weiter verfolgen. Schreibt man sie in der Form $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 1$, so sieht man die Berechtigung ein, eine neue Variate ϑ mit Hülfe der Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos\vartheta$ einzuführen. Dadurch wird $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\vartheta} : \frac{dx}{d\vartheta} = \frac{dy}{d\vartheta} : (-3a\cos^2\vartheta\sin\vartheta)$ und folglich die zu integrirende Differentialgleichung $\frac{dy}{d\vartheta} = 3a\sin^2\vartheta\cos\vartheta$, woraus folgt $\frac{y}{a} = \sin^3\vartheta + c$. Aus den beiden Gleichungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{y}{a} = \sin^3\vartheta + c$$

ist nun noch ϑ zu eliminiren. Nehmen wir zur Bestimmung der Constanten an, dass unter den möglichen Lagen der Geraden auch die horizontale Lage sei und wählen wir dieselbe zur x-Axe, so wird, da alsdann die Gerade mit ihrem Schwerpunkte auf der Curve aufliegen muss, $y = 0$ für $x = a$, d. h. für $\vartheta = 0$ und folglich $c = 0$. Daher ist die Gleichung der gesuchten Curve $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ und die Curve eine Astrois, von welcher aber nur ein Ast, bestehend aus zwei Quadranten, der Aufgabe im speciellen Sinne genügt. Die Curve ist die Enveloppe der Strecke a zwischen den Schenkeln des rechten Winkels.

6. Ein homogener Cylinder von der Länge l, dem Radius r und dem Gewichte G liegt mit einem Punkte seines Basiskreises auf einer horizontalen Ebene auf, zugleich aber ruht er auf einem anderen Cylinder vom Radius a, welcher auf derselben Horizontalebene liegt. An den Auflagerpunkten findet Reibung (μ, μ') statt; welches sind die äussersten Gleichgewichtslagen, wenn die Axen beider Cylinder sich rechtwinklig kreuzen?

7. Zwei glatte Ebenen, welche sich rechtwinklig in einer horizontalen Geraden schneiden und von denen die eine mit dem Horizonte einen Winkel α bildet, bilden eine Rinne, in welcher ein schwerer, homogener, gerader Cylinder mit elliptischem Querschnitt von den Halbaxen a, b so ruht, dass die Längenaxe desselben der horizontalen Schnittlinie parallel läuft. Es sind die Gleichgewichtslagen des Cylinders und die Widerstände der Ebenen zu finden.

8. Ein Punkt wird von zwei Centris nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung angezogen. Auf welcher Fläche muss derselbe

sich befinden, wenn er in allen Lagen auf ihr im Gleichgewichte sein soll?

§. 7. Um den analytischen Ausdruck des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten zunächst für das freie unveränderliche System zu gewinnen, seien X, Y, Z die Componenten der Kraft P, parallel dreien rechtwinkligen Coordinatenaxen, δs der virtuelle Elementarweg ihres Angriffspunktes (x, y, z), δp aber die Projection von δs auf die Richtung von P und folglich $P\delta p$ die virtuelle Arbeit der Kraft P. Nun seien δx, δy, δz die Projectionen von δs auf die Axenrichtungen; dann stellen $X\delta x$, $Y\delta y$, $Z\delta z$ die virtuellen Arbeiten der Componenten X, Y, Z dar und da nach Thl. III, Cap. I, §. 18. die Summe der virtuellen Arbeiten der Componenten gleich der virtuellen Arbeit ihrer Resultanten ist, so hat man $P\delta p = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$, wodurch die Gleichung $\Sigma P\delta p = 0$ übergeht in

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

Das Variationszeichen δ ist hierbei nichts Wesentliches, es deutet nur an, dass die Verschiebungen virtuell sind und nicht mit den Elementarwegen der wirklich stattfindenden Bewegung zusammenzufallen brauchen, wenngleich dies nicht ausgeschlossen ist.

Aus der eben entwickelten Gleichung erhalten wir mit Leichtigkeit die sechs Gleichgewichtsbedingungen des freien unveränderlichen Systems wieder. Legen wir nämlich dem System zunächst blos eine virtuelle Translation δx parallel der x-Axe bei, so sind alle $\delta y = \delta z = 0$, δx fällt als ein gemeinschaftlicher Factor aller Glieder aus der Gleichung heraus und wir erhalten die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma X = 0$. Indem wir dem System zwei andere Translationen δy, δz in den Richtungen der y- und z-Axen ertheilen, ergeben sich die beiden analogen Bedingungen $\Sigma Y = 0$ und $\Sigma Z = 0$. Ertheilen wir ferner dem System eine unendlich kleine Rotation $\delta\vartheta$ um die x-Axe, so beschreibt der Angriffspunkt (x, y, z) der Kraft P eine kleine Linie δs, deren Projectionen auf die Axen $\delta x = 0$, $\delta y = \delta s \cdot \cos(\delta s, Y)$, $\delta z = \delta s \cdot \cos(\delta s, Z)$ sind. Da die Richtung von δs aber auf dem Abstande r des Punktes von der x-Axe senkrecht steht, so bildet sie mit den Axen der y und z Winkel deren Cosinusse $-\frac{z}{x}$ und $\frac{x}{r}$ sind, sodass $\delta y = -\frac{z}{x}\delta s$, $\delta z = \frac{x}{r}\delta s$ werden, welche Ausdrücke aber vermöge $\delta s = r d\vartheta$ in $\delta y = -z\delta\vartheta$ und $\delta z = x\delta\vartheta$ übergehen. Hiermit reducirt sich $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ auf $\Sigma(-Yz + yZ)\delta\vartheta$ und da $\delta\vartheta$ als gemeinsamer Factor heraustritt, so ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma(yZ - zY) = 0$. Indem man dem System in ähnlicher Weise unendlich kleine Rotationen $d\vartheta'$, $d\vartheta''$ um die y- und z-Axe ertheilt, erhält man die weiteren analog gebildeten Gleichungen $\Sigma(zX - xZ) = 0$ und $\Sigma(xY - yX) = 0$. — Man erhält die sechs Gleichgewichtsbedingungen des unveränderlichen

Systems auf einmal aus der Gleichung $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$, indem man dem System irgend eine unendlich kleine Schraubenbewegung ertheilt. Hierbei beschreibt der Systempunkt (x, y, z) das Element δs einer Schraubenlinie, um dessen Projectionen δx, δy, δz auf die Richtungen der Axen es sich handelt. Zerlegt man nun die Schraubenbewegung in eine Rotation um die Schraubenaxe und eine Translation parallel derselben und weiter die Rotation in drei Rotationen $\delta\vartheta$, $\delta\vartheta'$, $\delta\vartheta''$ um drei Axen, parallel denen der x, y, z, und die Translation in drei Translationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ gleichfalls parallel denselben, so erscheint δs als die Schlusslinie des aus $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, $r\delta\vartheta$, $r'\delta\vartheta'$, $r''\delta\vartheta''$ gebildeten Polygons, wobei r, r', r'' die Abstände des Systempunktes von den Rotationsaxen bedeuten und ist mithin die Projection von δs auf jede dieser Axen gleich der betreffenden Projection dieses Polygons auf dieselben. Auf dem hier angedeuteten Wege findet man daher:

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta\xi + z\delta\vartheta' - y\delta\vartheta'' \\ \delta y &= \delta\eta + x\delta\vartheta'' - z\delta\vartheta \\ \delta z &= \delta\zeta + y\delta\vartheta - x\delta\vartheta' \end{aligned}$$

und hiermit die Gleichung

$$\begin{aligned} \Sigma\{X(\delta\xi + z\delta\vartheta' - y\delta\vartheta'') + Y(\delta\eta + x\delta\vartheta'' - z\delta\vartheta) \\ + Z(\delta\zeta + y\delta\vartheta - x\delta\vartheta')\} = 0, \end{aligned}$$

oder besser geordnet und mit Rücksicht darauf, dass $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, $\delta\vartheta$, $\delta\vartheta'$, $\delta\vartheta''$ sich als gemeinsame Factoren absondern lassen:

$$\begin{aligned} \Sigma X\cdot\delta\xi + \Sigma Y\cdot\delta\eta + \Sigma Z\cdot\delta\zeta \\ + \Sigma(yZ - zY)\cdot\delta\vartheta + \Sigma(zX - xZ)\cdot\delta\vartheta' + \Sigma(xY - yX)\cdot\delta\vartheta'' = 0, \end{aligned}$$

welche Gleichung wegen der Unabhängigkeit der Wahl der sechs Verschiebungscomponenten in die früheren sechs Gleichungen zerfällt.

Aus diesen Entwickelungen geht zugleich hervor, dass es ausser den angeführten sechs Gleichgewichtsbedingungen für das unveränderliche System keine weiteren gibt, denn ein solches System kann nur Elementarschraubenbewegungen und deren Abarten besitzen und jede solche Schraubenbewegung führt auf keine andere Gleichung, als die genannten. Für das unveränderliche System sind sie folglich zum Gleichgewichte nothwendig, aber auch hinreichend, für ein beliebiges System sind sie zwar nothwendig, aber nicht hinreichend, vielmehr müssen zur vollständigen Bestimmung des Gleichgewichts noch weitere Bedingungen hinzutreten, die man finden kann, indem man dem System andere Verschiebungen, als die bisherigen ertheilt. Wie viele und welche derartige Bedingungen noch aufzustellen sind, hängt von der speciellen Natur des betreffenden Systems ab.

§. 8. Ist das unveränderliche System Bedingungen unterworfen, welche seine Beweglichkeit beschränken, so können dieselben in vielen

Fällen durch Gleichungen zwischen den Coordinaten derjenigen Punkte dargestellt werden, deren Beweglichkeit beschränkt wird. Soll z. B. der Punkt (x_i, y_i, z_i) auf einer Fläche unbedingt zu bleiben genöthigt sein, so müssen seine Coordinaten der Gleichung dieser Fläche genügen, soll er auf einer Curve bleiben, so haben sie die beiden Gleichungen dieser Curve zu erfüllen. Auch können in solchen Bedingungsgleichungen die Coordinaten mehrerer Punkte vorkommen, wie z. B. wenn die Verbindungslinie zweier oder die Ebene dreier Systempunkte bestimmte Eigenschaften ihrer Lage gegen feste Punkte behalten soll. Sind die in ihrer Bewegung beschränkten Punkte nicht unbedingt beschränkt, sondern wirken die beschränkenden Hindernisse nur einseitig, so können an die Stelle von Bedingungsgleichungen Ungleichungen treten. Soll z. B. ein Punkt (x_i, y_i, z_i) nicht ins Innere der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ eindringen, wohl aber von der Fläche hinweggenommen werden können, so muss $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - a^2 \geqq 0$ sein. Nach dem früher Entwickelten ist in solchen Fällen $\Sigma P \delta p \, \overline{\overline{<}} \, 0$.

Wenn das System aus n Punkten $(xyz), (x_1 y_1 z_1) \cdots (x_i y_i z_i) \cdots (x_n y_n z_n)$ besteht, so muss die Anzahl $\varkappa$ der beschränkenden Bedingungen kleiner als $3n$ sein, wenn überhaupt noch Beweglichkeit des Systems möglich sein soll. Denn im Falle $\varkappa = 3n$ würden aus den $\varkappa$ Bedingungsgleichungen für die $3n$ Coordinaten der Punkte feste Werthe folgen, was die Beweglichkeit des Systems aufheben würde. Für $\varkappa = 3n - 1$ ist jeder Punkt auf einer bestimmten Curve zu bleiben genöthigt, denn indem man aus den $3n - 1$ Gleichungen die $3n - 3$ Coordinaten von $n - 1$ beliebigen Systempunkten eliminirt, verbleiben noch zwei Gleichungen, denen die Coordinaten des noch übrigen Punktes genügen müssen; diese zwei Gleichungen sind aber die Gleichungen einer bestimmten Curve, auf welcher er allein beweglich ist. Dasselbe gilt für alle Punkte. Uebrigens kann in diesem Falle jeder Punkt eine virtuelle Verschiebung im einen und im anderen Sinne der Tangente erleiden. In den Fällen $\varkappa = 3n - 2$, $3n - 3, \ldots$ ist weit grösserer Spielraum für die virtuellen Verschiebungen vorhanden.

Es seien nun $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ die $\varkappa$ Bedingungsgleichungen, welche die Beweglichkeit des Systems beschränken. Ertheilen wir demselben eine mit diesen verträgliche virtuelle Bewegung, so besteht zunächst die Hauptgleichung:

$$\Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0,$$

worin der besseren Ordnung der weiter hinzutretenden Gleichungen wegen der allgemeine Index i angefügt ist. Vermöge der Verträglichkeit dieser Bewegung mit den beschränkenden Bedingungen müssen aber sowohl die Punkte in der Lage (x_i, y_i, z_i), als auch in der Lage $(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$ den Bedingungsgleichungen genügen; daher bestehen zugleich auch noch die $\varkappa$ linearen Differentialgleichungen:

$$\Sigma\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial L}{\partial y_i}\,\delta y_i + \frac{\partial L}{\partial z_i}\,\delta z_i\right) = 0$$
$$\Sigma\left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial M}{\partial y_i}\,\delta y_i + \frac{\partial M}{\partial z_i}\,\delta z_i\right) = 0$$
$$\Sigma\left(\frac{\partial N}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial N}{\partial y_i}\,\delta y_i + \frac{\partial N}{\partial z_i}\,\delta z_i\right) = 0.$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Alle $\varkappa + 1$ Gleichungen zusammen enthalten $3n$ Aenderungen δx_i, δy_i, δz_i der Coordinaten und wenn man mit Hülfe der $\varkappa$ Differentialgleichungen aus der Hauptgleichung $\varkappa$ dieser Grössen eliminirt, so verbleiben noch $3n - \varkappa$ Aenderungen in ihr, welche vollkommen unabhängig von einander sind. Soll diese Gleichung mithin für jedes System dieser Variationen bestehen können, so müssen die Coefficienten derselben einzeln verschwinden und es zerfällt hierdurch die Gleichung in $3n - \varkappa$ Gleichungen, welche die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte des Systems sind. Diese Elimination wird sehr leicht mit Hülfe der Lagrange'schen Methode der Multiplicatoren ausgeführt. Multiplicirt man nämlich die Differentialgleichungen der Reihe nach mit den unbestimmten Factoren λ, μ, ν, ... addirt sie alle zu der Hauptgleichung, wodurch man erhält:

$$\Sigma\left\{\left(X_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial x_i} + \cdots\right)\delta x_i + \left(Y_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial y_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial y_i} + \cdots\right)\delta y_i + \left(Z_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial z_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial z_i} + \cdots\right)\partial z_i\right\} = 0,$$

so werden hieraus $\varkappa$ Variationen eliminirt, indem man die $\varkappa$ Grössen λ, μ, ν, ... so bestimmt, dass die Coefficienten dieser Variationen Null werden. Da hierauf die Coefficienten der noch übrigen von einander unabhängigen $3n - \varkappa$ Variationen gleichfalls verschwinden müssen, so erhält man im Ganzen das System der $3n$ Gleichungen

$$\begin{aligned} X_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial x_i} + \cdots &= 0 \\ Y_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial y_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial y_i} + \cdots &= 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n), \\ Z_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial z_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial z_i} + \cdots &= 0 \end{aligned}$$

von denen $\varkappa$ zur Bestimmung der Multiplicatoren dienen, während die $3n - \varkappa$ übrigen die Gleichgewichtsbedingungen aussprechen.

Umgekehrt folgt aus diesen Gleichungen das Gleichgewicht des Systems; denn sind δx_i, δy_i, δz_i Variationen, welche den Differentialgleichungen der Bedingungen genügen und multiplicirt man mit ihnen

die vorstehenden Gleichungen der Ordnung nach, addirt und summirt sie für alle Indices i, so ergibt sich mit Rücksicht auf jene Differentialgleichungen $\Sigma(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = 0$, welche Gleichung das Gleichgewicht ausdrückt.

Es ist leicht, die dynamische Bedeutung der Multiplicatoren λ, μ, ν, ... zu erkennen. Die Gleichungen $X_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_i} + \cdots = 0$ u. s. w. würden nämlich ebenso erhalten, wenn die Bedingungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, ... gar nicht vorhanden wären, statt ihrer aber zu der Kraft $(X_i Y_i Z_i)$ im Punkte $(x_i y_i z_i)$ noch hinzutreten würden: 1. eine Kraft, deren Componenten $\lambda\frac{\partial L}{\partial x_i}$, $\lambda\frac{\partial L}{\partial y_i}$, $\lambda\frac{\partial L}{\partial z_i}$ wären, deren Intensität also den Werth $\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z_i}\right)^2}$ besässe und deren Richtungscosinusse folglich den Grössen $\frac{\partial L}{\partial x_i}$, $\frac{\partial L}{\partial y_i}$, $\frac{\partial L}{\partial z_i}$ proportional wären. Denkt man in der Bedingung $L = 0$ blos die Coordinaten $x_i y_i z_i$ veränderlich, so stellt diese Gleichung eine Fläche dar, auf welcher der Punkt $x_i y_i z_i$ bleiben muss, weil seine Coordinaten ihrer Gleichung genügen sollen; zu dieser Fläche normal ist die fragliche Kraft. Ebenso 2. eine Kraft, deren Componenten $\mu\frac{\partial M}{\partial x_i}$, $\mu\frac{\partial M}{\partial y_i}$, $\mu\frac{\partial M}{\partial z_i}$, welche also selbst $\mu\sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial z_i}\right)^2}$ und normal zu der Fläche wäre, deren Gleichung $M = 0$ ist für $x_i y_i z_i$ als laufende allein veränderliche Coordinaten; 3. eine Kraft $\nu\sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial z_i}\right)^2}$ u. s. w. In ähnlicher Weise in allen Punkten, welche den Bedingungen unterworfen sind. Die Grössen, welche also in den obigen Gleichungen zu X_i, Y_i, Z_i addirt sind, stellen die Componenten einer Gesammtkraft dar, welche den Einfluss der sämmtlichen Bedingungen auf den Punkt x_i, y_i, z_i zu vertreten im Stande ist. Zugleich erkennt man hieraus die Uebereinstimmung der §. 4. eingeführten Forderung, dass die Bedingungen durch Kräfte darstellbar seien, mit dem Ausdruck derselben durch Gleichungen zwischen Coordinaten.

Unter die Bedingungen $L = 0$, $M = 0$, ... sind auch diejenigen aufzunehmen, welche ausdrücken, dass die Abstände der Systempunkte von einander unveränderlich bleiben. Ueber die Anzahl dieser letzteren werden wir bald das Nöthige zufügen, da es an einer anderen Stelle ohnehin ausführlicher zu besprechen ist.

Als ein einfaches Beispiel für die analytische Behandlung einer Aufgabe über das Gleichgewicht mit Hülfe des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten diene folgendes.

Auf einer Kugelfläche (Fig. 207.) vom Radius a befindet sich ein Punkt M, welcher von den drei Ecken A, B, C eines Kugeloctanten proportional der ersten Potenz der Entfernung angezogen wird und zwar sind ε, ε', ε'' die Intensitäten der Anziehungskräfte in der Einheit der Entfernung; welches sind die Gleichgewichtslagen derselben?

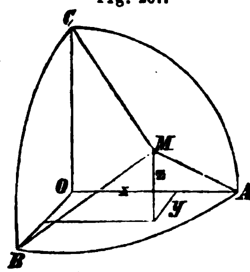


Fig. 207.

Für den Mittelpunkt O der Kugel als Ursprung und OA, OB, OC als Axen des Coordinatensystems sind die Richtungscosinusse der drei Kräfte $\varepsilon \cdot MA$, $\varepsilon' \cdot MB$, $\varepsilon'' \cdot MC$:

$$\frac{x-a}{MA},\ \frac{y}{MA},\ \frac{z}{MA};$$
$$\frac{x}{MB},\ \frac{y-a}{MB},\ \frac{z}{MB};$$
$$\frac{x}{MC},\ \frac{y}{MC},\ \frac{z-a}{MC}.$$

Hiermit werden die Componenten X, Y, Z der auf den Punkt M wirkenden Gesammtkraft

$$X = \varepsilon(x-a) + \varepsilon' x + \varepsilon'' x = -\varepsilon a + x\Sigma\varepsilon$$
$$Y = \varepsilon y + \varepsilon'(y-a) + \varepsilon'' y = -\varepsilon' a + y\Sigma\varepsilon$$
$$Z = \varepsilon z + \varepsilon' z + \varepsilon''(z-a) = -\varepsilon'' a + z\Sigma\varepsilon$$

und folglich die Hauptgleichung $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$ hier:

$$(-\varepsilon a + x\Sigma\varepsilon)\delta x + (-\varepsilon' a + y\Sigma\varepsilon)\delta y + (-\varepsilon'' a + z\Sigma\varepsilon)\delta z = 0.$$

Hierzu tritt vermöge der einzigen Nebenbedingung $L = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0.$$

Diese Gleichung, mit λ multiplicirt und zur Hauptgleichung addirt, liefert:

$$(-\varepsilon a + (\lambda + \Sigma\varepsilon)x)\delta x + (-\varepsilon' a + (\lambda + \Sigma\varepsilon)y)\delta y + (-\varepsilon'' a + (\lambda + \Sigma\varepsilon)z)\delta z = 0,$$

welche Gleichung in

$$-\varepsilon a + (\lambda + \Sigma\varepsilon)x = 0,\ -\varepsilon' a + (\lambda + \Sigma\varepsilon)y = 0,\ -\varepsilon'' a + (\lambda + \Sigma\varepsilon)z = 0$$

zerfällt. Hieraus folgen:

$$x = \frac{\varepsilon a}{\lambda + \Sigma\varepsilon},\quad y = \frac{\varepsilon' a}{\lambda + \Sigma\varepsilon},\quad z = \frac{\varepsilon'' a}{\lambda + \Sigma\varepsilon},$$

wodurch man in Verbindung mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ der Kugelfläche findet

$$\lambda = -\Sigma\varepsilon \pm \sqrt{\Sigma(\varepsilon^2)},\quad x = \pm\frac{\varepsilon a}{\sqrt{\Sigma(\varepsilon^2)}},\quad y = \pm\frac{\varepsilon' a}{\sqrt{\Sigma(\varepsilon^2)}},\quad z = \pm\frac{\varepsilon'' a}{\sqrt{\Sigma(\varepsilon^2)}}.$$

Der Punkt M hat demnach zwei Gleichgewichtslagen, welche die Schnittpunkte der Kugel mit der Geraden $\frac{x}{\varepsilon} = \frac{y}{\varepsilon'} = \frac{z}{\varepsilon''}$ sind. Die Grössen λx, λy, λz sind die Componenten des Widerstandes der Kugelfläche. Er selbst ist folglich

$$\lambda a = \left[-\Sigma\varepsilon \pm \sqrt{\Sigma(\varepsilon^2)}\right] a$$

und nach dem Aussenraume gerichtet.

§. 9. Wir gehen jetzt zum Beweise des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten für ein beliebiges Punktsystem über, dessen Punkte frei und unabhängig von einander beweglich sind. Soll ein Kräftesystem, welches an einem solchen Punktsystem angreift, sich im Gleichgewicht befinden, so darf dasselbe auf den Geschwindigkeitszustand keines Systempunktes einen Einfluss üben. Diesen Geschwindigkeitszustand können aber nur Kräfte beeinflussen, deren Richtungen durch

diesen Punkt hindurchgehen und entweder an ihm selbst oder wenigstens an einem mit ihm unveränderlich verbundenen Punkte ihrer Richtung angreifen. Demnach muss an jedem Systempunkte einzeln Gleichgewicht herrschen. Daher ist die Summe der virtuellen Arbeiten aller auf denselben Systempunkt wirkenden Kräfte für jede beliebige virtuelle Verschiebung dieses Punktes Null. Da dies für alle Punkte gilt, so folgt durch Summation aller virtuellen Arbeiten, dass, wenn Kräfte an einem beliebig veränderlichen freien Punktsystem im Gleichgewicht sind, die Gesammtsumme aller ihrer virtuellen Arbeiten für jede beliebige virtuelle Bewegung des Systems verschwindet. Umgekehrt wollen wir annehmen, es sei für ein solches System die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte Null für jede beliebige virtuelle Bewegung. Ertheilen wir nun dem System eine virtuelle Bewegung, bei welcher nur ein einziger Punkt eine Verschiebung erleidet, alle anderen nicht, so erhalten wir auch nur von den auf diesen Punkt wirkenden Kräften virtuelle Arbeiten, während die virtuellen Arbeiten aller anderen Kräfte Null sind. Da nun die Gesammtsumme aller virtuellen Arbeiten Null ist, so folgt, dass die Summe der virtuellen Arbeiten aller an jenem Punkte angreifenden Kräfte für sich Null betragen muss. Diese Bedingung ist aber die Bedingung des Gleichgewichtes für diesen Punkt. Das nämliche lässt sich für alle Systempunkte behaupten; daher der Satz: Ist die Summe der virtuellen Arbeiten aller an einem freien veränderlichen Punktsystem wirkenden Kräfte Null, so sind die Kräfte im Gleichgewicht. Beide Sätze, dieser und der vorige, zusammengefasst liefern den einen:

Zum Gleichgewichte eines Kräftesystems, welches an einem freien, beliebig veränderlichen Punktsystem angreift, ist erforderlich und hinreichend, dass die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte für jede beliebige virtuelle Bewegung des Systems verschwinde.

Der Satz ist anwendbar auf das ganze Punktsystem, wie auf einen beliebigen abgetrennten Theil desselben, nur müssen im letzteren Falle alle Kräfte in Rechnung gezogen werden, welche an einem solchen Theile angreifen.

Unter den virtuellen Bewegungen eines freien veränderlichen Systems sind aber auch alle diejenigen, bei welchen die Systempunkte ihre gegenseitige Lage nicht ändern, für welche das System also ein unveränderliches bleibt. Hieraus folgt, dass für jedes freie veränderliche Punktsystem oder einen Theil desselben die sechs Gleichgewichtsbedingungen eines freien unveränderlichen Systems nothwendig erfüllt sind, oder anders ausgedrückt, dass das Gleichgewicht eines solchen Systems nicht aufhört, wenn man das-

selbe **ganz oder zum Theil unveränderlich werden** (z. B. erstarren) lässt.

§. 10. Hinsichtlich der Kräfte am veränderlichen Punktsystem unterscheidet man **innere** und **äussere** Kräfte. Innere Kräfte sind solche, deren Richtungen von den Systempunkten, an welchen sie angreifen, nach anderen Systempunkten gerichtet sind und ihrer Grösse nach von der Entfernung der Angriffspunkte von letzteren abhängen, äussere Kräfte solche, deren Grösse und Richtung nicht von der Lage der Systempunkte untereinander, wohl aber von ihrer Lage gegen äussere, dem System nicht angehörige Punkte abhängen. Zur ersten Art gehören Anziehungs- und Abstossungskräfte zwischen den Massenpunkten des Systems, zu den letzteren Anziehungen von festen Centren. Dieser Unterschied betrifft übrigens nicht die innere Natur der Kräfte, sondern nur die Beschaffenheit des Systems. Es kann dieselbe Kraft unter Umständen die Rolle einer äusseren, unter anderen die einer inneren spielen. Für die Erde als bewegliches System z. B. sind die Anziehungen der Sonne und der Planeten äussere Kräfte, so gut wie die Anziehungen der Fixsterne; für das Sonnensystem als Ganzes sind sie innere und jene nach wie vor äussere Kräfte. Innere Kräfte sind meist paarweise gleich und entgegengesetzt, in der Verbindungslinie der Punkte wirkend, welche sie afficiren. Wenn nämlich von zwei Punkten jeder den anderen in der Richtung nach sich hin oder auch im entgegengesetzten Sinne beschleunigt und beide die Masseneinheit enthalten, so sind beide Kräfte gleich. Wird aber die Masse des einen das $m$fache der Masseneinheit, so wird sie auch die $m$fache Beschleunigung von dem anderen erfahren und wenn dessen Masse auf das m'fache steigt, so wird diese $m$fache Beschleunigung nochmals m'fach werden. Daher wird an jedem Punkte eine Kraft angreifen, welche das mm'fache der Kraft ist, mit welcher zwei Masseneinheiten einander beschleunigen. Ist diese Beschleunigung von der Entfernung r derselben abhängig und durch $f(r)$ ausgedrückt, so stellt $mm'f(r)$ die gemeinsame Intensität der beiden Kräfte dar, mit welchen die Punkte von den Massen m, m' in entgegengesetztem Sinne längs ihrer Verbindungslinie afficirt werden. Für Attractionen von festen Centren und für innere Kräfte der eben angeführten Art ist es leicht, die virtuelle Arbeit zu bilden. Für beide besteht nämlich eine Kräftefunction, deren partielle Differentialquotienten nach den Coordinaten des afficirten Punktes genommen, die Componenten der Kraft angeben. Ist nämlich R die Kraft, mit welcher das Centrum (a, b, c) den Punkt (x, y, z) beschleunigt, r die Entfernung beider und sind α, β, γ die Richtungswinkel der Kraft, so wird

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r} = \cos\alpha, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r} = \cos\beta, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-c}{r} = \cos\gamma,$$

folglich

$$X = - R\frac{\partial r}{\partial x}, \quad Y = - R\frac{\partial r}{\partial y}, \quad Z = - R\frac{\partial r}{\partial z},$$

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = - R\left(\frac{\partial r}{\partial x}\delta x + \frac{\partial r}{\partial y}\delta y + \frac{\partial r}{\partial z}\delta z\right) = - R\delta r$$

und wenn $\int R\,dr = P$ gesetzt wird, wodurch $R = \frac{dP}{dr}$ und $R\delta r = \frac{dP}{dr}\delta r = \delta P$ wird, so folgt $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = - \delta P$. Ebenso sind, wenn R die Anziehung zweier Punkte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) bedeutet, $-R\frac{\partial r}{\partial x}$, $-R\frac{\partial r}{\partial y}$, $-R\frac{\partial r}{\partial z}$ die Componenten derselben am einen, $R\frac{\partial r}{\partial x_1}$, $R\frac{\partial r}{\partial y_1}$, $R\frac{\partial r}{\partial z_1}$ am anderen Punkte. Der Bestandtheil der virtuellen Arbeit, welcher von beiden zusammen herrührt, ist daher

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = - R\frac{\partial r}{\partial x}\delta x - R\frac{\partial r}{\partial y}\delta y - R\frac{\partial r}{\partial z}\delta z + R\frac{\partial r}{\partial x_1}\delta x_1 + R\frac{\partial r}{\partial y_1}\delta y_1 + R\frac{\partial r}{\partial z_1}\delta z_1,$$

oder da aus $r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$ folgt:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x - x_1}{r}$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = - \frac{\partial r}{\partial y_1} = \frac{y - y_1}{r}$$
$$\frac{\partial r}{\partial z} = - \frac{\partial r}{\partial z_1} = \frac{z - z_1}{r},$$

wodurch

$$- R\frac{\partial r}{\partial x}\delta x + R\frac{\partial r}{\partial x_1}\delta x_1 = - R\frac{x - x_1}{r}\delta(x - x_1)$$
$$- R\frac{\partial r}{\partial y}\delta y + R\frac{\partial r}{\partial y_1}\delta y_1 = - R\frac{y - y_1}{r}\delta(y - y_1)$$
$$- R\frac{\partial r}{\partial z}\delta z + R\frac{\partial r}{\partial z_1}\delta z_1 = - R\frac{z - z_1}{r}\delta(z - z_1)$$

wird, mit Zuhülfenahme von $(x - x_1)\delta(x - x_1) + (y - y_1)\delta(y - y_1) + (z - z_1)\delta(z - z_1) = r\delta r$:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = - R\delta r.$$

Wird also wieder $\int R\,dr = P$ gesetzt, so ist dieser Ausdruck gleich $-\delta P$.

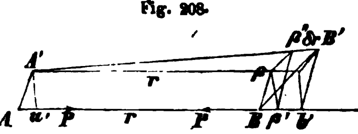
Bestehen nun zwischen je zwei Punkten des Systems ähnliche Anziehungen, so tritt an die Stelle von P nur ΣP und wird $-\delta(\Sigma P)$ die virtuelle Arbeit dieser inneren Kräfte. Im Falle der Abstossung ändert R und damit P Sinn und Zeichen. Auch kann man auf geome-

trischem Wege leicht zu dem Ausdruck der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte gelangen. Sind nämlich (Fig. 208.) AA', BB' die virtuellen Verschiebungen der Angriffspunkte A, B der inneren gleichen Kräfte P, welche längs AB in entgegengesetztem Sinne wirken und sind Aa', Bb' die Projectionen von AA', BB' auf AB, so stellt

$$P \cdot Aa' - P \cdot Bb' = P(Aa' - Bb')$$

die Summe der virtuellen Arbeiten dieser beiden Kräfte dar. Zieht man nun durch A' die Linie $A'\beta$ parallel und gleich mit AB und nennt β' die Projection von β auf AB, so wird $Bb' = B\beta' + \beta'b'$. Vermöge des Parallelogramms $AA'\beta B$ ist aber $B\beta' = Aa'$ und da $A'\beta$ und $A'B'$ einen unendlich kleinen Winkel mit einander bilden und

Fig. 208.



die zu $A'\beta$ in β senkrechte projicirende Ebene auf $A'B'$ einen Punkt β'' bestimmt, sodass $\beta''B' = \beta'b' = A'B' - AB = r' - r = \delta r$ wird, wenn $AB = r$ gesetzt wird, so ergibt sich $-P\delta r$ für die Summe der virtuellen Arbeiten der Kräfte P. Die Aenderung δr der Entfernung r ist dabei positiv oder negativ, je nachdem AB bei der virtuellen Verschiebung des Systems wächst oder abnimmt und die virtuelle Arbeit ändert das Zeichen, wenn die Kräfte ihren Sinn wechseln.

§. 11. Die Ausdehnung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten für den Fall, dass das Punktsystem beliebig veränderlich und zugleich irgend welchen Bedingungen, welche seine Beweglichkeit beschränken, unterworfen sei, macht einige Erörterungen nöthig, welche theils mit dem Begriffe des Gleichgewichtes, theils mit der Natur des Systems und der Verbindung seiner Theile untereinander im Zusammenhange stehen.

Wenn ein Kräftesystem an einem irgendwie veränderlichen Punktsystem im Gleichgewichte ist, so wird das Gleichgewicht nicht gestört, wenn das Punktsystem ganz oder zum Theil unveränderlich wird. Denn das Gleichgewicht der Kräfte muss unabhängig von dem Bewegungszustande des Systems bestehen. Durch die zugefügte Bedingung der Unveränderlichkeit wird aber nur die Beweglichkeit beschränkt und werden Bewegungszustände, welche vorher möglich waren, ausgeschlossen. Galt das Gleichgewicht aber für alle möglichen Bewegungszustände, so gilt es auch für die noch jetzt übrigen.

Das Gleichgewicht besteht ebenso fort, wenn Theile des Punktsystems unbeweglich werden.

Enthält das Punktsystem, an welchem ein Kräftesystem sich im Gleichgewichte befindet, unbewegliche Theile, so kann man immer an den unbeweglichen Theilen solche Kräfte zufügen, dass, wenn diese Theile als beweglich angenommen

werden, das Gleichgewicht des Kräftesystems in Verbindung mit diesen, die Unbeweglichkeit vertretenden Kräften fortbesteht. Denn die Beschleunigung, welche ein Punkt, der unbeweglich war, durch das Kräftesystem erlangt, sobald er beweglich wird, kann immer durch eine entgegengesetzte Kraft getilgt werden.

Um die Gleichgewichtsbedingungen eines veränderlichen Systems mit Bedingungen, welche die Beweglichkeit beschränken, aufzustellen, ist es nothwendig zu zeigen, dass diese Beschränkungen durch Kräfte ersetzbar sind. In Fällen, für welche dies nicht erwiesen werden kann, erleiden die Bedingungen des Gleichgewichts nicht ohne Weiteres Anwendung, vielmehr sind hierfür Specialuntersuchungen erforderlich.

Die innere Constitution der veränderlichen Systeme kann sehr mannigfach sein. Ein sehr allgemeiner Fall ist der, dass das System aus unveränderlichen Systemen zusammengesetzt ist, deren Beweglichkeit dadurch beschränkt wird, dass Flächen, welche ihnen angehören, in Berührung bleiben müssen. Es wird gezeigt werden, dass diese Bedingung an jeder Stelle durch zwei entgegengesetzt gleiche Normalkräfte ausgedrückt werden kann. Um jedoch diesen Satz sorgfältig zu erweisen, dienen folgende Betrachtungen.

Das veränderliche System bestehe aus zwei unveränderlichen Systemen, welche mit zwei Flächen sich in einem Punkte berühren. Man reducire nun die Kräfte, welche an dem einen, als auch die, welche an dem anderen angreifen, auf Resultante und resultirendes Paar für die Centralaxen. Da das Gleichgewicht fortbestehen muss, wenn beide Systeme zu einem einzigen unveränderlichen System verbunden gedacht werden, so müssen die beiden Resultanten und die beiden resultirenden Paare sich unabhängig von einander tilgen. Ersteres ist nur möglich, wenn die Richtungen der Resultanten zusammenfallen und sie selbst entgegengesetzt gleich sind. Die Kräfte beider Systeme müssen mithin eine gemeinschaftliche Centralaxe besitzen. Damit aber beide Resultanten die Systeme, wenn sie unverbunden gedacht werden, nicht trennen oder gegeneinander verschieben, muss ihre gemeinsame Richtung dieselben im Berührungspunkte aneinander drücken, also jedenfalls durch diesen Berührungspunkt hindurchgehen. Sie muss aber zugleich in die Richtung der gemeinschaftlichen Normale der beiden sich dort berührenden Flächen fallen, denn stände diese Richtung schief auf der gemeinschaftlichen Tangentenebene, so würden die Componenten beider Resultanten, welche in diese Tangentenebene fallen, die im Berührungspunkte vereinigten Punkte beider Systeme trennen können. Die beiden Paare aber müssen einzeln verschwinden. Dies folgt sofort, wenn man das eine oder das andere System unbeweglich macht, für welchen Fall das Gleichgewicht dennoch fortbestehen muss. Dass diese Bedingungen aber nicht nur

nothwendig, sondern auch hinreichend sind, d. h. dass wenn sie erfüllt sind, Gleichgewicht besteht, leuchtet sofort ein. Daher:

Zum Gleichgewichte der Kräfte eines veränderlichen Systems, welches aus zwei unveränderlichen, sich mit zwei Flächen in einem Punkte berührenden Systemen besteht, ist erforderlich und hinreichend, dass die Kräfte beider Systeme sich auf zwei entgegengesetzt gleiche Resultanten ohne Kräftepaare reduciren, deren Richtung in die gemeinsame Normale des Berührungspunktes beider Flächen fällt und dass sie diese Flächen in jenem Punkte aneinander drücken.

Die beiden Resultanten seien P, P'. Entfernt man das zweite System und bringt in dem Berührungspunkte eine Normalkraft $N' = P'$ am ersten System an, so besteht das Gleichgewicht des ersten Systems für sich fort; entfernt man das erste und bringt in ähnlicher Weise eine Kraft $N = P$ am zweiten an, so gilt dasselbe von diesem System. Bringt man daher beide entgegengesetzt gleiche Kräfte N, N' längs der gemeinschaftlichen Normale an, so kann man das Gleichgewicht beider Systeme gesondert untersuchen und besteht zugleich das Gleichgewicht des Gesammtsystems ungestört fort. Die Kräfte N, N' sind die Normalwiderstände der sich berührenden Flächen und geben in umgekehrtem Sinne genommenen den Druck an, welchen diese erleiden.

Es bestehe jetzt das veränderliche System aus einer Reihe unveränderlicher Systeme Σ', Σ'', Σ''', ..., welche sich mit irgend welchen Flächen in Punkten berühren. Das Gleichgewicht des Gesammtsystems wird nicht gestört, wenn man alle Partialsysteme, ausser Σ' zu einem einzigen unveränderlichen Systeme verbunden denkt. Dann hat man aber den vorigen Fall und erkennt, dass die Bedingung der Berührung von Σ' und Σ'' durch zwei Normalwiderstände ausgedrückt werden kann. Dasselbe gilt für alle übrigen Berührungsstellen. Nach Einführung aller solcher Bedingungskräfte können die einzelnen Systeme als von einander unabhängig betrachtet und kann das Gleichgewicht jedes einzelnen für sich erörtert werden. In ähnlicher Weise erkennt man auch in dem Falle, dass, wenn mehrere Systeme eines von ihnen zugleich oder zwei Systeme einander in mehreren Punkten berühren, gleichfalls an jedem Berührungspunkte Normalkräfte einzuführen sind.

Werden einzelne von den Systemen als fest angenommen, so fallen die Kräfte, welche an ihnen wirken, hinweg, weil sie durch die Befestigung der Systeme getilgt werden; die Bedingungskräfte N, N', ... drücken Widerstand und Druck aus, welchen die festen Flächen leisten und erleiden.

Lässt man von den sich berührenden Flächen einzelne in verschwindend kleine Kugelflächen oder Punkte zusammenschrumpfen, so erhält

man die Fälle, dass Punkte des veränderlichen Systems auf festen oder beweglichen Flächen bleiben, oder dass Flächen durch feste oder bewegliche Punkte hindurchgehen müssen. Die Berührung von Flächen längs Curven oder in flächenartiger Ausdehnung kommt gleichfalls auf die eben behandelten Fälle zurück.

§. 12. Da die Bedingungskräfte N die Richtung der gemeinschaftlichen Normalen der sich berührenden Flächen haben, so kann bei besonderen Arten der Berührung ihre Richtung unbestimmt werden. Wenn z. B. die eine Fläche eine scharfe Kante besitzt, längs welcher die Tangentenebene unbestimmt ist und mit ihr die andere Fläche berührt, welche eine derartige Eigenthümlichkeit nicht besitzt, so bestimmt die Normale der letzteren die Richtung der Kräfte N zwar vollständig; ebenso wenn die eine Fläche mit einer Spitze die andere berührt, nicht minder, wenn die Flächen mit zwei Kanten oder zwei Spitzen zusammentreffen, indem die im Kreuzungspunkte durch ihre Tangenten bestimmte Ebene die gemeinschaftliche Normale bezeichnet; wenn aber eine Spitze und eine Kante oder zwei Spitzen zusammentreffen, so bleibt die Richtung der Kräfte N unbestimmt.

Auch die Intensität dieser Kräfte kann in gewissen Fällen unbestimmt bleiben. Nehmen wir z. B. an, zwei unveränderliche Systeme berühren sich in n Punkten und das eine von ihnen sei fest, oder ein unveränderliches System soll durch n feste Punkte gehen, so müssen die n an diesen Punkten einzuführenden Kräfte $N_1, N_2, \ldots N_n$ mit sämmtlichen am beweglichen System angreifenden Kräften im Gleichgewicht sein. Dies Gleichgewicht erfordert die Erfüllung von sechs Bedingungen; ist also $n \gtreqless 6$, so können die Intensitäten dieser Kräfte bestimmt werden, da ihre Richtung ohnehin bekannt ist. Ist aber $n > 6$, so können die Intensitäten von $n - 6$ Kräften willkürlich angenommen und dann mit ihrer Hülfe die der sechs übrigen bestimmt werden.

In den Fällen $n \geq 6$ herrscht stets Gleichgewicht, welches auch immer die am System angreifenden Kräfte sein mögen; welche Kräfte man immer an demselben anbringen möge, sie können keinen Einfluss auf den Bewegungszustand des Systems ausüben, das System ist unbeweglich. Daher: W e n n e i n u n v e r ä n d e r l i c h e s S y s t e m m i t e i n e r i h m a n g e h ö r e n d e n F l ä c h e d u r c h s e c h s f e s t e P u n k t e z u g e h e n o d e r m i t i h r s e c h s f e s t e F l ä c h e n z u b e r ü h r e n g e z w u n g e n i s t, s o i s t d a s s e l b e u n b e w e g l i c h. In den Fällen $n < 6$ sind zwischen den gegebenen Kräften $6 - n$ Bedingungen zu erfüllen, daher herrscht bei beliebig gegebenen Kräften hier nicht immer Gleichgewicht und ist d i e B e w e g l i c h k e i t d e s S y s t e m s a l s o n i c h t v ö l l i g u n m ö g l i c h, w e n n d i e F l ä c h e d u r c h w e n i g e r a l s s e c h s f e s t e P u n k t e g e h e n o d e r w e n i g e r a l s s e c h s f e s t e F l ä c h e n b e r ü h r e n s o l l. In spe-

ciellen Fällen können hiervon Ausnahmen eintreten, indem die Bedingungsgleichungen in Folge der Natur der Fläche unabhängig von den Kräften *N* erfüllt werden können. So kann bei noch mehr als sechs festen Punkten Beweglichkeit der Fläche und mit ihr des Systems stattfinden, wenn diese Punkte auf einer Ebene, einer Kugel oder Rotationsfläche überhaupt oder einer Schraubenfläche liegen und die Fläche, welche durch sie hindurchgehen soll, selbst eine Ebene oder Kugel, Rotationsfläche oder Schraubenfläche ist, welche in jeder Lage mit der Fläche, auf welcher die Punkte liegen, in Congruenz sich befindet.

§. 13. Die Bedingung, dass unveränderliche Theile des veränderlichen Systems miteinander in Berührung bleiben sollen, ist nach dem Vorigen durch Kräfte ersetzbar und umfasst zugleich eine grosse Zahl anderer Bedingungen, welche sich auf die Berührung von Flächen zurückführen lassen. Dass Systempunkte von einander constanten Abstand behalten sollen oder also Systemtheile den Charakter des unveränderlichen Systems besitzen sollen, kann gleichfalls auf folgende Art durch Kräfte dargestellt werden. Sind *A*, *B* zwei Punkte, deren Abstand constant bleiben soll, so drücke man die Bedingungen, welchen sie, ausser der des constanten Abstandes *AB*, unterworfen sind, durch Kräfte aus und füge sie den an ihnen angreifenden Kräften zu. Das unveränderliche System der beiden Punkte muss dann, für sich betrachtet, im Gleichgewichte sein. Daher müssen die Resultanten aller Kräfte an *A* und aller Kräfte an *B* gleich und entgegengesetzt sein, mithin in die Richtung *AB* fallen. Lässt man also die unveränderliche Verbindungslinie hinweg oder denkt sie sich durchschnitten, so genügen zwei diesen Resultanten entgegengesetzte und ihnen, also auch unter sich gleiche Kräfte *N*, *N'*, um das Gleichgewicht in derselben Weise zu erhalten, wie es vermöge der Unveränderlichkeit der Linie *AB* vorher erhalten wurde. Diese Kräfte drücken die Spannung aus, welche die Linie *AB* erleidet.

§. 14. Nach Einführung der Bedingungskräfte besteht an jedem unveränderlichen Partialsystem für sich Gleichgewicht und gilt daher für dasselbe das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, wie in §. 5. Stellt man für sämmtliche Bestandtheile des Gesammtsystems die Gleichungen auf, welche dies Princip für dieselben aussprechen and addirt sie sämmtlich, so erhält man dasselbe für das veränderliche System gleichfalls. In dem Ausdrucke dafür kommen zunächst die virtuellen Arbeiten aller Bedingungskräfte vor. Man kann aber leicht zeigen, dass die Summe der virtuellen Arbeiten je zweier der Normalkräfte, welche an den Berührungsstellen eingeführt werden, Null beträgt. In dem Berührungspunkte *C* zweier Flächen α, β treten nämlich zwei Punkte *A*, *B* derselben zusammen. Bei einer virtuellen Verschiebung entfernen sich dieselben im Allgemeinen unendlich wenig von einander und befinden sich

etwa in A', B', während in dem neuen Berührungspunkte C' zwei andere Punkte beider Flächen zusammenfallen. Der Punkt A' liegt aber in der Tangentenebene von α und der Punkt B' in der Tangentenebene von β im Punkte C' und daher steht die Verbindungslinie $A'B'$ senkrecht auf der gemeinsamen Normale beider Flächen in C'. Diese Normale bildet aber mit der Normalen des anfänglichen Berührungspunktes C einen unendlich kleinen Winkel und daher weicht auch der Winkel, den $A'B'$ mit dieser Normalen bildet, nur um ein Unendlichkleines von $\frac{1}{2}\pi$ ab. Projiciren wir daher das Dreieck $AA'B'$ auf die Normale in C, so verschwindet die Projection von $A'B'$ und folgt, dass die Projectionen δn, $\delta n'$ der virtuellen Verschiebungen AA', BB' der Punkte A, B, in welchen die entgegengesetzt gleichen Normalbedingungskräfte N, N' angreifen, einander gleich sind. Daher ist $N\delta n - N'\delta n' = 0$.

In gleicher Weise ergibt sich, dass die virtuelle Arbeitssumme je zweier entgegengesetzt gleicher Spannungskräfte, welche den Abstand zweier Punkte A, B des Systems unveränderlich erhalten, Null ist. Nach §. 10. ist dieselbe nämlich $\mp N\delta r$, wenn N die gemeinschaftliche Intensität beider Kräfte, δr aber die virtuelle Aenderung der Länge AB bezeichnet. Da letztere Linie unveränderlich sein soll, so ist δr also auch $\mp N\delta r = 0$.

Für die Widerstände von festen Flächen und Curven ist die virtuelle Arbeit für die mit den Bedingungen des Systems verträglichen Verschiebungen, nämlich für Verschiebungen in der Tangente oder Tangentenebene Null. Man kann daher jetzt allgemein das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten so aufstellen:

Zum Gleichgewicht der Kräfte an einem beliebigen veränderlichen System, welches Bedingungen unterworfen ist, dass gewisse Punkte feste oder bewegliche Flächen oder Curven nicht verlassen, dass gewisse Systemparthieen unveränderlich bleiben, dass unveränderliche Systemtheile einander berühren sollen und dergl., ist erforderlich und hinreichend, dass die Summe der virtuellen Arbeiten des gegebenen Kräftesystems für alle mit den Bedingungen verträglichen Verschiebungsarten Null oder negativ sei.

Die Bedingungen, welchen das System unterworfen ist, können durch Gleichungen zwischen den Coordinaten der Systempunkte ausgedrückt werden; daher gilt auch hier jetzt die Form der Gleichungen des Gleichgewichts, wie sie §. 8. aufgestellt wurden.

Das Princip ist nicht blos auf das Gesammtsystem, sondern auch auf jeden abgetrennten Theil desselben anwendbar, wenn nur die Verbindung, durch welche derselbe mit den übrigen Systemtheilen zusammenhängt, durch Kräfte, resp. durch Gleichungen ausgesprochen wird.

§. 15. Als Anwendung wollen wir die Gleichgewichtsbedingungen eines unveränderlichen Systems von n Punkten mit Hülfe des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten darstellen. Damit drei Punkte unveränderliche Abstände von einander haben, sind drei Bedingungen von der Form $L = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 - Const. = 0$ erforderlich; jeder folgende der $n - 3$ übrigen erfordert für seine unveränderliche Verbindung drei weitere derartige Gleichungen, welche aussagen, dass er constanten Abstand von jenen drei Systempunkten besitze. Dies gibt im Ganzen $3(3n - 3) + 3 = 3n - 6$ Bedingungen. Daher sind die Gleichungen des Gleichgewichtes vermöge $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 2(x_i - x_k)$ etc.:

$$\begin{aligned} 0 &= X_i + \lambda(x_i - x_k) + \mu(x_i - x_l) + \cdots \\ 0 &= Y_i + \lambda(y_i - y_k) + \mu(y_i - y_l) + \cdots \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n). \\ 0 &= Z_i + \lambda(z_i - z_k) + \mu(z_i - z_l) + \cdots \end{aligned}$$

Aus diesen $3n$ Gleichungen sind die $3n - 6$ Grössen λ, μ, ν zu eliminiren, um die sechs Gleichgewichtsbedingungen zu finden. Addirt man nun alle den verschiedenen Werthen von i entsprechenden Gleichungen, welche sich auf die z-Axe beziehen, so liefern je zwei Glieder $\lambda(x_i - x_k)$ und $\lambda(x_k - x_i)$; $\mu(x_i - x_l)$ und $\mu(x_l - x_i)$, ..., welche am i^{ten} und k^{ten}, am i^{ten} und l^{ten} u. s. w. Punkte vorkommen, zur Summe Null. Es bleibt daher als Resultat blos die Gleichung $\Sigma X_i = 0$. Hierzu kommen noch die beiden analogen Gleichungen $\Sigma Y_i = 0$, $\Sigma Z_i = 0$. Multiplicirt man ferner die zweite Gleichung mit x_i, die erste mit y_i, subtrahirt sie und summirt hierauf nach dem Index i, so erhält man als Anfangsglied des Resultates $\Sigma(x_i Y_i - y_i X_i)$, sodann finden sich aber zu den Verbindungen wie $\lambda[x_i(y_i - y_k) - y_i(x_i - x_k)] = \lambda(y_i x_k - y_k - x_i)$ auch die entgegengesetzten $\lambda[(x_k(y_k - y_i) - y_k(x_k - x_i)] = -\lambda(y_i x_k - y_k x_i)$ vor und tilgen sich dieselben also paarweise, sodass bloss die Gleichung $\Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) = 0$ resultirt, wozu in ähnlicher Weise sich die beiden anderen $\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) = 0$ und $\Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) = 0$ ergeben. Hierdurch sind aber die fraglichen sechs Gleichgewichtsbedingungen des unveränderlichen Systems gefunden.

§. 16. Beispiele:

1. Behufs der Lösung der Aufgabe in Cap. V, §. 10., Nr. 4, S. 569 würde man dem System eine virtuelle Verschiebung ertheilen, wobei ψ um $\delta\psi$ abnimmt; dadurch beschreibt der Punkt S den kleinen Kreisbogen $bd\psi$, welcher senkrecht zu AS ist und folglich mit der Richtung von P den Winkel $\frac{1}{2}\pi + \psi$ bildet. Die Arbeit von P ist also $-Pb \sin\psi\delta\psi$. Die Arbeit von Q erhält man, wenn man bedenkt, dass bei der virtuellen Verschiebung der Angriffspunkt M von Q um die Vertikalprojection des Bogenelementes δs sinkt; diese Projection ist $\delta(\varrho \cos\vartheta)$, daher $Q\delta(\varrho\cos\vartheta)$ die Arbeit von Q. Das Princip gibt folglich die Gleichung:

$$-Pb \sin\psi\delta\psi + Q\delta(\varrho\cos\vartheta) = 0.$$

Um ψ zu eliminiren, hat man aus dem Dreieck ABC:

$$(l-\varrho)^2 = h^2 + 4a^2 - 4ah\cos\psi$$

und hieraus weiter:

$$-(l-\varrho)\,\delta\varrho = 2ah\sin\psi\,\delta\psi$$

und indem man den hieraus folgenden Werth von $\sin\psi\,\delta\psi$ in die Gleichgewichtsbedingung einsetzt, nimmt sie dieselbe Form an wie a. a. O.

Für eine rein analytische Behandlung der Aufgabe würde man mit der Hauptgleichung

$$Q\cos\vartheta\,\delta\varrho - Q\varrho\sin\vartheta\,\delta\vartheta - Pb\sin\psi\,\delta\psi = 0$$

die Differentialgleichungen der Bedingungen

$$\varrho - f(\vartheta) = 0 \quad \text{und} \quad (l-\varrho)^2 - (a^2 + h^2 - 2ah\cos\psi) = 0$$

verbinden, von denen die erste ausdrückt, dass der Punkt $M(\varrho, \vartheta)$ auf der noch unbekannten Cure $\varrho = f(\vartheta)$ liegen soll, letztere, dass $BC + CM$ constant, gleich l ist. Diese Gleichungen sind

$$\delta\varrho - f'(\vartheta)\,\delta\vartheta = 0 \quad \text{und} \quad (l-\varrho)\,\delta\varrho + ah\sin\psi\,\delta\psi = 0.$$

Indem man die erstere von denselben mit λ, die zweite mit μ multiplicirt, sie beide zur Hauptgleichung addirt und die Coefficienten von λ und μ gleich Null setzt, ergeben sich:

$$Q\cos\vartheta + \lambda + \mu(l-\varrho) = 0, \quad Q\varrho\sin\vartheta + \lambda\frac{d\varrho}{d\vartheta} = 0, \quad Pb - \mu ah = 0,$$

wobei nur $\frac{d\varrho}{d\vartheta}$ statt $f'(\vartheta)$ geschrieben ist. Die Elimination von λ und μ führt zu der Differentialgleichung $Qd(\varrho\cos\vartheta) - \frac{Pb}{2ah}(l-\varrho)\,d\varrho = 0$, wie S. 570.

2. Die vorige Aufgabe werde dahin abgeändert, dass vom Punkte B aus eine starre, um B drehbare Linie von der Länge l zum Punkte M führe, in welchem das Gewicht Q wirkt. Welches ist die Curve des Gleichgewichtes, auf welcher M laufen muss?

Für x, y als rechtwinklige, horizontale und vertikale Coordinaten von M für A als Ursprung ist alsdann $-Pb\cos\psi\,d\psi + Q\,dy = 0$ und besteht die Bedingung: $l^2 = a^2 + x^2 + y^2 + 2a(x\cos\psi + y\sin\psi)$. Die Integration der ersten Gleichung gibt $Qy = Pb\sin\psi + C$, wobei C so bestimmt werden kann dass die Curve durch den Punkt $C(o, h)$ geht. Entnimmt man hieraus $\sin\psi$ und hierzu aus der zweiten Gleichung $\cos\psi$, so führt die Quadratsumme beider zur Gleichung der gesuchten Curve.

3. Ein homogener schwerer Stab vom Gewichte G und der Länge $2l$ ist an beiden Enden A und B mittelst zweier gleichlanger Fäden an zwei Punkten a, b im Abstande $2l$ aufgehangen. An A und B wirken senkrecht zum Stab und horizontal die beiden Kräfte P eines Paares $2Pl$. In welcher Lage findet Gleichgewicht statt? (Bifilare Aufhängung.)

Weitere Aufgaben s. Jullien, *Problèmes de mécanique rationelle*, T. I, Chap. VI S. 176.

Wirken an dem System keine anderen Kräfte, als die Schwere, so nimmt die Hauptgleichung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, wenn die Richtung der Schwere als z-Axe angenommen wird, die Gestalt $\Sigma P\delta z = 0$, oder $\delta\Sigma Pz = 0$ an und da $\Sigma Pz = z_1\Sigma P$ ist, auch die Form $\delta z_1 = 0$, wo z_1 die Ordinate des Schwerpunktes bedeutet. Für alle virtuellen verträglichen Verschiebungen darf also der Schwerpunkt des ganzen Systems dieselbe Horizontalebene nicht verlassen. Bei Aufgaben, wie Nr. 1 und 2, bei welchen unendlich viele

Gleichgewichtslagen möglich sind, führt diese Bemerkung zu einer graphischen Construction der gesuchten Curven.

§. 17. Eine besondere Untersuchung verdient die Frage, unter welchen Umständen bei einem veränderlichen System virtuelle, mit der Natur des Systems verträgliche Bewegungen überhaupt noch möglich sind und wann die Beweglichkeit desselben aufhört. Wir wollen hierfür annehmen, das System bestehe aus n unveränderlichen Systemen, welche sich mit gegebenen, ihnen angehörigen Flächen berühren, von denen aber jedes für sich frei beweglich sei. Man gelangt bei einem solchen System zu den Gleichgewichtsbedingungen des Kräftesytems, wenn man für jedes Partialsystem appart die sechs Gleichgewichtsbedingungen aufstellt und die Widerstände aus dem System aller $6n$ solcher Gleichungen eliminirt. Je nach der Anzahl der Berührungsstellen bleiben mehr oder weniger Gleichgewichtsbedingungen übrig; die geringste Zahl aber ist 6; denn es muss auch das Gesammtsystem den Bedingungen eines unveränderlichen Systems genügen. Bei nur *sechs* Gleichgewichtsbedingungen eines veränderlichen Systems tritt aber Unbeweglichkeit, resp. Unveränderlichkeit ein. Dieselbe findet nämlich offenbar statt, wenn man nachweisen kann, dass beliebige, dem Kräftesystem weiter hinzugefügte Kräfte keine Wirkung äussern. Fügen wir nun solche hinzu, so lassen sich bei sechs Gleichungen immer zwei Kräfte so bestimmen, dass das durch die Hinzufügung jener Kräfte etwa gestörte Gleichgewicht wieder hergestellt wird. Dies wieder hergestellte Gleichgewicht muss aber fortbestehen, wenn man den Systemtheil, an welchem die beiden corrigirenden Kräfte angebracht wurden, befestigt. Dadurch wird aber die Wirkung der an ihm thätigen Kräfte vernichtet. Da die *zugefügten* Kräfte beliebige waren, so folgt, dass das Gesammtsystem der Art ist, dass das an ihm wirkende Kräftesystem beliebig verändert werden kann, ohne dass das Gleichgewicht aufhört; es sind mithin die Systemtheile untereinander unbeweglich.

Wenn p die Anzahl der durch die Widerstände an den Berührungsstellen veranlassten Unbekannten ist, so ist $6n - p$ die geringste Anzahl Gleichgewichtsbedingungen, welche existiren, indem aus den $6n$ Gleichungen p Grössen eliminirt werden. Da aber auch von den Grössen p einige von selbst herausfallen können, so wird im Allgemeinen die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen $6n - p + q$ sein, wo q positiv ganz oder Null ist. Ist nun $6n - p + q = 6$, d. h. $6(n-1) + q = p$, so findet Unbeweglichkeit der Systemtheile unter sich statt, ist $6(n-1) + q > p$, gegenseitige Beweglichkeit. Soll also gegenseitige Unbeweglichkeit stattfinden, so muss $p \geqq 6(n-1)$ sein, ohne dass man jedoch behaupten kann, dass diese Bedingung zur Unbeweglichkeit hinreiche. Bei der Berührung von Flächen oder Kanten mit Flächen oder Kreuzung von Curven ist die Richtung des Widerstandes bereits durch die Richtung der Normalen bestimmt, daher ist p die Anzahl der Berührungs- oder Kreuzungsstellen. Berühren sich also die Systemtheile an weniger als $6(n-1)$ Stellen, so findet immer Beweglichkeit statt, bei $6(n-1)$ oder mehr Berührungsstellen im Allgemeinen aber nicht mehr. So z. B. wenn eine Fläche durch sechs Punkte geht, oder eine Curve eine Fläche mit sechs Punkten berührt, oder zwei Curven sich in sechs Punkten schneiden, welche zum Theil auch zusammenfallen können, sodass die Curven gemeinschaftliche Tangenten, Schmiegungsebenen u. s. w. erhalten. In diesen Fällen ist eine virtuelle Bewegung ohne Trennung der Systemtheile oder Aufhebung der Innigkeit der Berührung nicht mehr möglich. Aehnliches findet statt, wenn zwei Systeme durch sechs Gerade von constanter Länge verbunden sind; es sind dann die sechs Spannungen blos ihrer Intensität nach aus den zwölf Gleichgewichtsbedingungen zu eliminiren, da die Richtungen derselben in die Geraden fallen; hierdurch bleiben

aber sechs Gleichungen übrig, wie für das unveränderliche System und findet also nur die Beweglichkeit wie bei diesem, nicht aber Beweglichkeit der Systemtheile unter sich statt.

Die gegenseitige Unbeweglichkeit zweier unveränderlicher Systeme, von welchen das eine mit sechs Punkten A, B, C, D, E, F an einer Fläche f des anderen gleiten soll, erhellt auch aus folgenden rein geometrischen Gründen. Wird A in f beliebig angenommen, so ist B auf den Durchschnitt s einer um A mit AB als Radius beschriebenen Kugel und der Fläche f beschränkt, C kann dann nur einer der Schnittpunkte von s mit einer weiteren um B mit BC beschriebenen Kugel sein. Durch die Bewegung dreier Punkte ist aber die Bewegung eines unveränderlichen Systems bestimmt. Hält man also A fest und lässt B und C auf f gleiten, so beschreibt der Punkt D eine gewisse Curve und gelangt auf f, sobald er in einen der Schnittpunkte dieser Curve mit f eintritt. Für jede Lage von A auf f gibt es also eine oder mehrere Lagen von B, C, D auf f. Beschreibt nun A auf f irgend eine Curve, so gelangt E auf diese Fläche, sobald es in einen Schnittpunkt seiner Bahn mit f gelangt. Für jede Curve, welche A auf f beschreibt, ergeben sich also eine oder mehrere Lagen des beweglichen Systems, für welche die fünf Punkte A, B, C, D, E auf f liegen. Denkt man sich nun f als den Ort einer Curvenschaar, welche diese Fläche erfüllt, so bestimmen die verschiedenen continuirlich aufeinander folgenden Lagen von A auf derselben eine Curve t und wenn A diese Curve beschreibt, so tritt F in die Fläche ein, sobald F in einen Schnittpunkt seiner Bahn mit f gelangt. Dies findet aber nur für eine oder einige Lagen von A auf t statt. Es ist mithin die Lage der sechs Punkte auf f in Nichts mehr willkürlich, mithin auch die Lage des Systems eine feste und hört somit die Beweglichkeit desselben auf, sobald A, B, C, D, E, F auf f liegen.

Aus dieser Betrachtung folgert man leicht, dass ein unveränderliches System unbeweglich ist, a) wenn von dreien seiner Punkte einer fest, ein zweiter auf eine Curve, der dritte auf eine Fläche beschränkt ist oder wenn die drei Punkte auf drei Curven gezwungen sind; b) wenn von vier Punkten des Systems einer fest, die drei übrigen auf gegebenen Flächen, oder wenn zwei Punkte auf gegebenen Curven, die beiden anderen auf gegebenen Flächen bleiben sollen und c) wenn von vier Systempunkten einer fest ist, die vier anderen aber auf gegebene Flächen beschränkt sind.

Soll im Gesammtsystem von n unveränderlichen sich berührenden Systemen Unbeweglichkeit stattfinden, so müssen dieselben sich mindestens an $6(n-1)$ Stellen berühren. Ob diese Bedingung aber zur Unbeweglichkeit hinreicht, ergibt sich im Allgemeinen erst aus der Anzahl der nach Elimination der Widerstände übrig bleibenden Gleichgewichtsbedingungen. Sind deren sechs, so findet Unbeweglichkeit statt, sind ihrer mehr, nicht. Bei drei Systemen z. B. sind zwölf Berührungsstellen erforderlich und wenn das erste und zweite sich an sechs, das zweite und dritte sich gleichfalls an sechs Stellen berühren, ist das Gesammtsystem unveränderlich, nicht mehr aber, wenn die beiden ersten sich an sieben, die beiden letzten an fünf Stellen berühren. Berühren sich je zwei der Systeme in m Punkten, so ist die Anzahl aller Berührungsstellen $\frac{1}{2}mn(n-1)$ und wenn diese Zahl $\geqq 6(n-1)$, also $mn > 12$ ist, darf man auf Unveränderlichkeit der Verbindung der Systeme untereinander rechnen. So z. B. wenn von zwölf Systemen je zwei sich in einem, von sechs je zwei sich in zwei, von vier je zwei sich in drei, von drei je zwei sich in vier und zwei sich in sechs Punkten berühren.

Für n ebene unveränderliche, durch p Berührungen von Curven zu einem in derselben Ebene liegenden veränderlichen Gesammtsystem verbundenen Partia...

systeme bestehen $3n$ Gleichgewichtsbedingungen mit p Widerständen. Ist $3n - p > 3$, also $p < 3(n-1)$, so findet Beweglichkeit statt, bei $p \geqq 3(n-1)$ im Allgemeinen Unbeweglichkeit. Berühren sich je zwei Curven in m Punkten, so ist Unbeweglichkeit, wenn $\frac{1}{2} mn(n-1) \geqq 3(n-1)$, d. h. für $mn \geqq 6$. Wenn also in einer Ebene von sechs Curven je zwei sich in einem, oder von drei Curven je zwei sich in zwei, oder wenn zwei Curven sich in drei Punkten berühren, so ist Beweglichkeit ohne Aufgeben des Innigkeitsgrades der Berührung nicht möglich. Specielle Curvengattungen, z. B. der Kreis, gestatten Ausnahmen hiervon.

§. 18. Es wurde Cap. VI, §. 5. gezeigt, dass man für ein im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem, welches an einem unveränderlichen Punktsystem wirkt, wenn es um eine Axe gedreht wird, immer zwei Kräfte angeben könne, welche das durch die Drehung gestörte Gleichgewicht jeden Augenblick erhalten. Diese Kräfte, $-P_1$, $-P_2$, an den Punkten $A_1(x_1y_1z_1)$ und $A_2(x_2y_2z_2)$ wirkend, sind in der ursprünglichen Gleichgewichtslage entgegengesetzt gleich und treten bei der Drehung zu einem Paare auseinander. Die Bedingungen, welchen diese Kräfte genügen müssen, waren, wenn wir ihre Componenten $-X_1$, $-Y_1$, $-Z_1$; $-X_2$, $-Y_2$, $-Z_2$ unter die Summen mit aufgenommen denken:

$$-f\cos\varphi + G\cos\psi + H\cos\chi = 0,\quad f = \Sigma(yY + zZ),\quad F = \Sigma yZ = \Sigma zY$$
$$G\cos\varphi - h\cos\psi + F\cos\chi = 0,\quad g = \Sigma(zZ + xX),\quad G = \Sigma zX = \Sigma xZ$$
$$H\cos\varphi + F\cos\psi - g\cos\chi = 0,\quad h = \Sigma(xX + yY),\quad H = \Sigma xY = \Sigma yX,$$

worin $(\varphi\chi\psi)$ die Richtung der Axe ist, um welche das System gedreht wird. Bei dieser Drehung bleiben die Intensitäten und Richtungen der Kräfte constant. Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ und addirt sie, so folgt

$$\Sigma(xX + yY + zZ) = \cos^2\varphi \cdot \Sigma xX + \cos^2\chi \cdot \Sigma yY + \cos^2\psi \cdot \Sigma zZ$$
$$+ \cos\varphi\cos\psi\,\Sigma(zX + xZ) + \cos\psi\cos\chi\,\Sigma(zY + yZ) + \cos\chi\cos\varphi\,\Sigma(xY + yX)$$
$$= \Sigma[(x\cos\varphi + y\cos\chi + z\cos\psi)(X\cos\varphi + Y\cos\chi + Z\cos\psi)].$$

Der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen bleibt nun während der Drehung constant, weil φ, χ, ψ, die Componenten der Kräfte und die Projectionen $x\cos\varphi + y\cos\chi + z\cos\psi$ der Linien, welche den Coordinatenursprung mit den Punkten x, y, z verbinden, auf die Richtung der Drehungsaxe, constant bleiben.

Daher bleibt $\Sigma(xX + yY + zZ)$, oder wenn wir die Bestandtheile, welche die Componenten der zugefügten beiden Kräfte enthalten, aus der Summe ausscheiden,

$$\Sigma(xX + yY + zZ) - [(x_1X_1 + y_1Y_1 + z_1Z_1) + (x_2X_2 + y_2Y_2 + z_2Z_2)]$$

constant. Es müssen folglich beide Glieder dieser Differenz zugleich ihre Maxima und Minima erreichen. Der Subtrahend lässt sich aber, da die Kräfte $-P_1$, $-P_2$ ein Paar bilden, also $X_1 = -X_2$, $Y_1 = -Y_2$, $Z_1 = -Z_2$ ist, auch schreiben: $(x_2 - x_1)X_2 + (y_2 - y_1)Y_2 + (z_2 - z_1)Z_2$ und bedeutet, da $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, durch den Abstand der Angriffspunkte A_1, A_2 der zugefügten Kräfte dividirt, die Cosinusse der Neigung der Linie A_1A_2 gegen die Coordinatenaxen und ebenso X_2, Y_2, Z_2 durch P_2 dividirt die Cosinusse der Neigung von P_2 gegen die Axen sind: $-A_1A_2 \cdot P_2 \cos(A_1A_2, P_2)$. Diese Grösse erreicht ihr Maximum oder Minimum, wenn $\cos(A_1A_2, P_2) = \mp 1$, d. h. beim sicheren und beim unsicheren Gleichgewichte. Daher also der Satz:

Unter allen Lagen, welche das unveränderliche System durch Drehung um irgend eine Axe annimmt, wird die Function

$$\Sigma(xX + yY + zZ)$$

für die Lage des sicheren Gleichgewichtes ein Maximum, für das unsichere Gleichgewicht ein Minimum und umgekehrt. Nennen wir O den beliebig wählbaren Coordinatenursprung, $A(x, y, z)$ den Angriffspunkt der Kraft $P(X, Y, Z)$, so ist die Bedeutung dieser Function: $\Sigma[OA \cdot P\cos(OA, P)]$,

d. h. sie bedeutet die Summe der Produkte aus den von einem beliebigem Punkte der Drehungsaxe nach den Angriffspunkten der Kräfte gezogenen Radienvectoren und den Projectionen der Kräfte auf sie oder auch die Summe der Produkte der Kräfte und der Projectionen dieser Radiusvectoren auf die Richtung der Kräfte.

Erleidet nun das System eine beliebige virtuelle Verschiebung aus der Lage des Gleichgewichts, so ist diese immer den Rotationen um zwei conjugirte Axen äquivalent. Durch diese erleidet aber $\Sigma(xX + yY + zZ)$ keine Aenderung, folglich muss $\delta\Sigma\,(xX + yY + zZ) = \Sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$ sein, da die Kräfte selbst keine Aenderung erleiden. Da diese Eigenschaft im Allgemeinen das Maximum oder Minimum jener Function andeutet, so wird das Criterium des Maximums und Minimums, welches durch die unendlich kleine Aenderung zweiter Ordnung gegeben wird, auf die früher gefundene Bedingung der Sicherheit oder Unsicherheit des Gleichgewichtes hinführen. Nun ergab sich für die virtuelle Schraubenbewegung um irgend eine Axe Cap. VI, §. 7.:

$$\Sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma X \cdot \delta\xi + \Sigma Y \cdot \delta\eta + \Sigma Z \cdot \delta\zeta$$
$$+ \Sigma\,(yZ - zY) \cdot \delta\vartheta + \Sigma\,(zX - xZ) \cdot \delta\vartheta' + \Sigma\,(xY - yX) \cdot \delta\vartheta''$$

und daher wird mit Rücksicht auf die sechs Gleichgewichtsbedingungen

$$\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0, \quad \Sigma\,(yZ - zY) = \Sigma\,(zX - xZ) = \Sigma\,(xY - yX) = 0$$

und die Bedeutung der Grössen f, g, h, F, G, H die fragliche Aenderung zweiter Ordnung:

$$\Sigma\,(X\delta^2 x + Y\delta^2 y + Z\delta^2 z) = -f\delta\vartheta^2 - g\delta\vartheta'^2 - h\delta\vartheta''^2$$
$$+ 2F\delta\vartheta'\delta\vartheta'' + 2G\delta\vartheta''\delta\vartheta + 2H\delta\vartheta\delta\vartheta'.$$

Da aber, wenn $\delta\Theta$ die unendlich kleine virtuelle Drehung um die Axe und $\varphi\chi\psi$ die Richtung der Axe ist, $\delta\vartheta = \delta\Theta \cdot \cos\varphi$, $\delta\vartheta' = \delta\Theta \cdot \cos\chi$, $\delta\vartheta'' = \delta\Theta \cdot \cos\psi$ ist, so wird dieser Ausdruck

$$-[f\cos^2\varphi + g\cos^2\chi + h\cos^2\psi - 2F\cos\chi\cos\psi - 2G\cos\psi\cos\varphi - 2H\cos\varphi\cos\chi]\,\delta\Theta^2$$

und folglich der Inhalt der Klammer positiv für ein Maximum, negativ für ein Minimum, Bedingungen, welche mit den früher gefundenen Bedingungen der Sicherheit und Unsicherheit des Gleichgewichtes identisch sind.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich leicht für das veränderliche System erweitern. Man zerlege dasselbe in unveränderliche Partialsysteme, welche sich nöthigenfalls selbst auf einzelne Punkte reduciren können. Die virtuelle Bewegung, welche ein Partialsystem in Folge einer virtuellen Bewegung des Gesammtsystems erleidet, kann stets als eine Schraubenbewegung für sich oder als eine Folge von Rotationen um conjugirte Axen angesehen werden. Mithin ist der sich auf das Partialsystem beziehende Bestandtheil der Function $\Sigma(xX + yY + zZ)$ ein Maximum oder Minimum und der entsprechende Bestandtheil in $\Sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ für sich Null. Indessen kann hieraus nicht auf ein Maximum oder Minimum der sich auf das ganze System beziehenden Function, ebenso wenig also auch auf die Sicherheit oder Unsicherheit des Gleichgewichtes dieses geschlossen werden. Denn es können sich Minima gewisser Partialsysteme mit Maximis anderer combiniren und können einzelne Partialsysteme in sicherem, andere in unsicherem Gleichgewichte sich befinden, bei welchen Combinationen ein Schluss auf die Beschaffenheit des Gesammtgleichgewichtes nicht statt finden kann.

Die Eigenschaft des Maximums und Minimums der Function $\Sigma(xX + yY + zZ)$, von welcher hier die Rede ist, bezieht sich auf Lagenänderungen des Systems, bei welchen die Intensität und Richtung der Kräfte sich nicht ändert. Diese Function ist mit Rücksicht hierauf das Integral von $\Sigma\,(Xdx + Ydy + Zdz)$

Wenn ein System in Bewegung begriffen ist und die Kräfte nach Intensität und Richtung Functionen blos von den Coordinaten der Angriffspunkte sind, so kann das Integral dieses Differentialausdrucks aber auch in Bezug auf die während der Bewegung eintretenden Lagenänderungen und Aenderungen der Kräfte ein Maximum oder Minimum werden, sobald das System eine Lage erreicht, in welcher die Kräfte im Gleichgewichte sind. Hierzu wird erfordert, dass der Differentialausdruck die Bedingungen der Integrabilität erfüllt, d. h. dass eine Kräftefunction existire.

§. 19. *Gauss* hat ein neues Princip aufgestellt, welches gleich wichtig ist für die Behandlung der Probleme der Bewegung der Systeme und für Probleme des Gleichgewichtes von Kräften an ihnen. Er nennt es das Princip des *kleinsten Zwanges* (*Crelle's* Journal Bd. IV, S. 232, 1829); dem statischen Theile dieses Princips, den wir hier allein entwickeln, hat *Möbius* den Namen des *Princips der kleinsten Quadrate* gegeben. Stellt man nämlich die Kräfte des Systems durch Längen dar und bezeichnet die Coordinaten des Endpunktes einer solchen Länge P, welche die am Punkte (x, y, z) angreifende Kraft darstellt, mit ξ, η, ζ, so ist $X = \xi - x$, $Y = \eta - y$, $Z = \zeta - z$ und lautet das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in seiner Hauptgleichung:

$$\Sigma[(\xi - x)\,\delta x + (\eta - y)\,\delta y + (\zeta - z)\,\delta z] = 0.$$

Denken wir uns nun die Punkte (ξ, η, ζ) fest, das System aber beweglich, wobei die Längen P sich ändern, so stellt der Ausdruck links

$$\delta \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]$$

dar und die Gleichung drückt den Satz aus:

Werden die Endpunkte F der Strecken, welche die Kräfte darstellen, festgehalten, während das System der Angriffspunkte A beliebige Verschiebungen erleidet, so wird für die Lage des Gleichgewichts die Quadratsumme der Abstände AF, nämlich $\Sigma(\overline{AF}^2)$ *ein Maximum oder Minimum,* und umgekehrt: *Verbindet man das System der Punkte A mit einem zweiten System von festen Punkten F durch Strecken AF und bringt das System in eine Lage, für welche rücksichtlich der Nachbarlagen $\Sigma(\overline{AF}^2)$ ein Maximum oder Minimum wird, so halten sich die Kräfte am System (A), welche nach den Linien AF wirken und diesen Strecken proportional sind, Gleichgewicht.*

Ob ein Maximum oder ein Minimum von $\Sigma(\overline{AF}^2)$ stattfindet, ergibt sich aus

$$\delta^2 \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma(\overline{AF}^2) = \Sigma(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2) - \Sigma(X\delta^2 x + Y\delta^2 y + Z\delta^2 z),$$

o X, Y, Z wieder für $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ geschrieben sind. Für das sichere leichgewicht ist $\Sigma(X\delta^2 x + Y\delta^2 y + Z\delta^2 z)$ negativ (§. 15.), also $\delta^2 \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma(\overline{AF}^2)$ ositiv und $\Sigma(\overline{AF}^2)$ ein Minimum; für das unsichere Gleichgewicht aber ist $\Sigma(X\delta^2 x^2 + \cdots)$ positiv und kann mithin $\delta^2 \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma(\overline{AF}^2)$ positiv oder negativ je ach der Verschiebungsart des Systems ausfallen. Indessen kann man die Linien unendlich klein nehmen und dann fällt $\Sigma(X\delta^2 x + \cdots)$ als von der dritten rdnung gegen $\Sigma(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2)$ fort und zeigt sich $\delta^2 \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma(\overline{AF}^2)$ positiv. *erbindet man daher die Punkte A eines beweglichen Systems mit en Punkten F eines unendlich nahen festen Systems und lässt auf as erstere Kräfte wirken, welche den Strecken AF proportional ind und die Richtungen dieser Strecken haben, so nimmt die Summe er Quadrate $\Sigma(\overline{AF}^2)$ für jede Verrückung des beweglichen Systems us der Gleichgewichtslage zu.* Da $\delta \cdot \Sigma(AF)^2 = \Sigma(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2)$

bis auf Unendlichkleines höherer Ordnung wird, so folgt, dass wenn die Punkte A durch die Verschiebung in die Lagen B gelangen:

$$\Sigma(\overline{AF^2}) - \Sigma(\overline{BF^2}) = \Sigma(\overline{AB^2}),$$

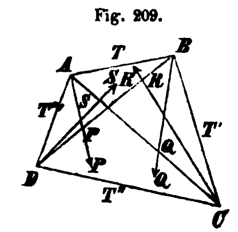
d. h. die Quadratsumme der Entfernungen nimmt um die Quadratsumme der virtuellen Wege zu, welche die Punkte des Systems bei der Verschiebung beschreiben.

VIII. Capitel.

Gleichgewicht von Kräften an einigen veränderlichen Systemen.

§. 1. An den Ecken eines Vierecks $ABCD$ (Fig. 209.) im Raume, dessen Seiten constante Länge haben, dessen Winkel aber veränderlich sind, greifen vier Kräfte P, Q, R, S an; es sind die Bedingungen des Gleichgewichts derselben aufzustellen.

Fig. 209.



Schneidet man die Seiten AB, BC, CD, DA durch und führt längs ihnen die Spannungen (Pressungen) T, T', T'', T''' ein, so erfordert das Gleichgewicht der Kräfte T''', T, P am Punkte A; T, T', Q an B; T', T'', R an C; T'', T''', S an D, dass P in die Ebene DAB, Q in ABC, R in BCD, S in CDA falle und ergeben sich nach Cap. III, §. 8. die Gleichungen:

$$\frac{T'''}{\sin PAB} = \frac{T}{\sin PAD} = \frac{P}{\sin DAB} \qquad T = P\frac{\sin PAD}{\sin DAB} = Q\frac{\sin QBC}{\sin ABC}$$

$$\frac{T}{\sin QBC} = \frac{T'}{\sin QBA} = \frac{Q}{\sin ABC} \quad \text{oder} \quad T' = Q\frac{\sin QBA}{\sin ABC} = R\frac{\sin RCD}{\sin BCD}$$

$$\frac{T'}{\sin RCD} = \frac{T''}{\sin RCB} = \frac{R}{\sin BCD} \qquad T'' = R\frac{\sin RCB}{\sin BCD} = S\frac{\sin SDA}{\sin CDA}$$

$$\frac{T''}{\sin SDA} = \frac{T'''}{\sin SDC} = \frac{S}{\sin CDA} \qquad T''' = S\frac{\sin SDC}{\sin CDA} = P\frac{\sin PAB}{\sin DAB}$$

Durch Multiplication des Gleichungssystems rechts ergibt sich für die Richtungen der Kräfte P, Q, R, S die Bedingung:

$$\frac{\sin PAB}{\sin PAD}\cdot\frac{\sin QBC}{\sin QBA}\cdot\frac{\sin RCD}{\sin RCB}\cdot\frac{\sin SDA}{\sin SDC} = 1;$$

geeignete Combinationen der Gleichungen dieses Systems liefern die Verhältnisse der Kräfte; die letzte liefert $S:P$; die Multiplication der beiden letzten R : der drei letzten $Q:P$ u. s. w.

Ist die Gestalt des Vierecks und sind die Richtungen dreier Kräfte P, Q, R in den Ebenen DAB, ABC, BCD gegeben, so kann mit Hülfe der Bedingungsgleichung die Richtung der vierten Kraft S bestimmt und können die Verhältnisse der Intensitäten der vier Kräfte gefunden werden. Dasselbe leistet auch folgende Construction. Man nehme die Intensität von P in der Richtung AP willkürlich an; da $-P$ die Resultante von T''' und T sein muss, so liefert die Zerlegung dieser Kraft mit Hülfe eines Parallelogramms nach den Seiten AD, AB die Spannungen T''', T'. Da $-Q$ die Resultante von T und T' ist, so liefert ein weiteres Parallelogramm die Intensitäten von Q und T'; hieran reiht sich ein drittes, ...

welchem R und T'' sich ergeben. Aus T'' und T''' am Punkte D folgt dann S nach Richtung und Intensität.

Man kann übrigens die Richtung der vierten Kraft auch unabhängig von der Intensität einer der übrigen bestimmen. Weil das Gleichgewicht der Kräfte fortbestehen muss, wenn auch das System unveränderlich wird, so ist nach Cap. V, §. 11. die Summe der Pyramiden, welche sie mit irgend einer Linie des Raumes bilden, Null. Zieht man nun eine Gerade L so, dass sie die Richtungen von P, Q, R schneidet, so verschwinden die Volumina der Pyramiden $[PL]$, $[QL]$, $[RL]$ und ist folglich auch das Volumen von $[SL]$ Null. Daher liegt L mit S in einer Ebene und schneidet also S. Sucht man daher den Durchschnittspunkt S von L mit der Ebene CDA, in welcher S liegen muss, so ist DS die Richtung der Kraft S. — Da eine beliebige Gerade L, welche drei der Richtungen von P, Q, R, S schneidet, auch die vierte schneiden muss, so sind die Richtungen von vier Kräften, welche in den Ecken eines veränderlichen Vierecks sich Gleichgewicht halten, stets vier Erzeugungslinien derselben Schaar eines einfachen Hyperboloids. Die sämmtlichen Geraden, welche drei derselben P, Q, R schneiden, bilden die andere Schaar Erzeugungslinien und da sie auch die vierte S schneiden müssen, so treffen sie die Ebene CDA in Punkten von S. Die beiden Diagonalen AC, BD gehören der zweiten Schaar an; sie werden daher von den vier Kräfterichtungen nach denselben Doppelverhältnissen*) geschnitten, sodass, wenn AC in QS von Q, S und BD in PQ von P, Q getroffen werden,

$$\frac{AQ}{QC} : \frac{AS}{SC} = \frac{BP}{PD} : \frac{BR}{RD}.$$

Will man die projectivische Theilung der Erzeugungslinien des Hyperboloids nicht als bekannt zu Hülfe rufen, so ergibt sich diese Gleichung auch aus den Dreiecken PAB und PAD; QBC und QBA; RCD und RCB; SDC und SDA. Man hat nämlich;

$$\sin PAB : \sin PAD = \frac{BP}{AB} : \frac{PD}{AD}, \qquad \sin QBC : \sin QBA = \frac{CQ}{BC} : \frac{QA}{AB}$$

$$\sin RCD : \sin RCB = \frac{RD}{CD} : \frac{RB}{BC}, \qquad \sin SDC : \sin SDA = \frac{CS}{CD} : \frac{SA}{AD}$$

und wenn man diese Gleichungen miteinander multiplicirt und die oben entwickelte Bedingungsgleichung für die Richtungen der vier Kräfte berücksichtigt, so ergibt sich dasselbe Resultat.

Man kann die Verhältnisse der Kräfte leicht durch die Abschnitte ausdrücken, welche dieselben auf den beiden Diagonalen bestimmen. Zunächst hat man aus den ganz zu Anfang aufgestellten Gleichungen:

---

*) Bildet man aus vier in gerader Linie irgendwie gegeneinander liegenden Punkten A, B, C, D zwei Paare, z. B. AB und CD, bildet ferner das Verhältniss der Abstände des ersten Punktes C des zweiten Paares von den beiden Punkten des ersten Paares, nämlich $\frac{AC}{CB}$, wobei die Stellung der Buchstaben zugleich den Sinn der Strecken andeutet, sodann ebenso in Bezug auf den zweiten Punkt D des zweiten Paares das analoge Verhältniss $\frac{AD}{DB}$, so heisst $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ das der Ordnung AB, CD entsprechende Doppelverhältniss der vier Punkte. Da zwischen vier Punkten drei Paare möglich sind, da diese ihre Aufeinanderfolge als erstes und zweites wechseln und in jedem Paare die Punkte ihre Plätze vertauschen können, so gibt es bei vier Punkten 24 Doppelverhältnisse.

$$P:Q = \frac{\sin DAB}{\sin PAD} : \frac{\sin ABC}{\sin QBC}.$$

Nun ist aber

$$\sin DAB : \sin PAD = \frac{BD}{AB} : \frac{PD}{AP}, \quad \sin ABC : \sin QBC = \frac{AC}{AB} : \frac{QC}{QB},$$

mithin:

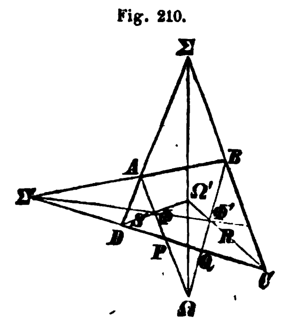
$$P:Q = \frac{BD \cdot AP}{PD} : \frac{AC \cdot QB}{QC}.$$

Auf ähnliche Weise ergeben sich die übrigen Verhältnisse.

Schneiden sich die beiden in zwei Gegenecken B, D angreifenden Kräfte Q und S auf der Diagonale AC, so fällt der Punkt S mit Q zusammen und löst sich die Gleichung $\frac{AQ}{QC} : \frac{AS}{SC} = \frac{BP}{PD} : \frac{BR}{RD}$ auf in $AQ:QC = AS:SC$ und $BP:PD = BR:RD$; aus letzterer Gleichung folgt, dass auch R und D zusammenfallen und die Kräfte R und D sich auf der Diagonale BD schneiden.

Ist das Viereck eben, so gestaltet sich der Satz über die hyperboloidische Lage der Kräfte und die daran geknüpfte Construction folgendermassen um. Sondern wir die beiden Ecken A, B (Fig. 210.) mit der sie verbindenden Seite AB ab, so halten sich an ihr die Kräfte T''', P, Q, T' Gleichgewicht, da die beiden Kräfte T längs AB sich tilgen. Es sind daher die Resultanten von P, Q einerseits und von T''', T' andererseits entgegengesetzt gleich und fallen mithin in die Verbindungslinie der Schnittpunkte Ω, Σ der Richtungen von P, Q und T''', T'. Nun halten sich aber auch P, Q, R, S Gleichgewicht, also muss die Resultante von R, S der Resultanten von P, Q entgegengesetzt gleich sein und der Schnittpunkt Ω' der Richtungen von R, S in die Gerade $\Omega\Sigma$ fallen. Wenn also die Richtungen von P, Q, R gegeben sind, die von S aber gesucht wird, so hat man nur von D nach dem Schnittpunkte von R mit der Linie $\Omega\Sigma$ eine Gerade zu ziehen. Sucht man noch den Schnittpunkt Σ' von CD und BA, so ergibt sich ebenso, dass die Schnittpunkte Φ, Φ' von P, S und R, Q mit Σ' in gerader Linie liegen. Aus dieser Betrachtung erhält man den Satz:

Fig. 210.



Wenn vier Kräfte P, Q, R, S an den Ecken A, B, C, D eines einfachen ebenen Vierecks $ABCD$ im Gleichgewicht sind, so bilden ihre Richtungen ein jenem umschriebenes einfaches Vierseit $PQRS$ und gehen die beiden Diagonalen des letzteren, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, durch die beiden Punkte, in welchen sich die gegenüberliegenden Seiten des ersteren schneiden hindurch.*)

---

*) n Punkte in der Ebene heissen ein vollständiges n Eck, die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Geraden, welche durch sie bestimmt werden, seine Seiten; n Gerade in der Ebene heissen ein vollständiges n Seit, die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkte, in welchen sie sich schneiden, seine Ecken. n Punkte in einer bestimmten Aufeinanderfolge genommen heissen ein einfaches n Eck und die n Geraden, welche in dieser Ordnung die Punkte aufeinanderfolgend verbinden, seine Seiten; n Gerade in bestimmter Aufeinanderfolge heissen ein einfaches n Seit und die n Punkte, in welchen sie sich in dieser Ordnung aufeinanderfolgend schneiden, seine Ecken. Das vollständige Viereck hat sechs Seiten, das vollständige Vierseit sechs Ecken. In

§. 2. **Vier Kräfte** P, Q, R, S **greifen an den Punkten** F, G, H, J **der Seiten eines Vierecks** $ABCD$ (Fig. 211.) **an, dessen Seiten unveränderlich, dessen Winkel aber veränderlich sind; man soll die Bedingungen des Gleichgewichts aufstellen.**

Löst man die Verbindung der Seiten in A, so sind statt dessen zwei entgegengesetzt gleiche Pressungen T längs einer gewissen Richtung NK einzuführen; ähnlich an B, C, D solche Kräfte T', T'', T''' längs KL, LM, MN. An der Seite AB müssen dann T, T', P im Gleichgewichte sein und daher KN und KL sich auf der Richtung von P schneiden. Ebenso folgt, dass die Schnittpunkte L M, N in die Richtungen der Kraft Q, R, S fallen müssen.

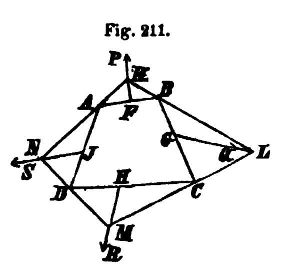


Fig. 211.

Zum Gleichgewichte der vier Kräfte wird also erfordert, dass es möglich sei, ein Vierseit $KLMN$ **zu construiren, welches dem Viereck** $ABCD$ **umschrieben und dem Vierseit der Kräfte zugleich eingeschrieben sei, dessen Seiten also durch die Ecken des ersteren gehen und dessen Ecken in den Seiten des letzteren liegen.**

Diese Aufgabe, sowie die allgemeinere für das Vieleck wurde zuerst von Servais, Gergonne und Lhuilier (in Gergonne's *Annales de mathématiques*, T. II.), später von Steiner (Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, S. 94) mit Hülfe von projectivischen Punktreihen gelöst. Die Lösung hängt von den Doppelpunkten zweier vereinigter projectivischer Punktreihen ab und ist eine doppelte oder einfache oder unmöglich, je nachdem diese Reihen zwei, einen oder keinen Doppelpunkt besitzen.

Die Pressungen T ergeben sich, indem man P, Q, R, S an den Ecken K, L, M, N nach den Seiten des umschriebenen Vierecks zerlegt. Da dieselben sich paarweise tilgen, so folgt, **dass die Kräfte** P, Q, R, S **an dem Vierecke** $KLMN$ **im Gleichgewichte sein müssen, wenn dessen Seiten unveränderlich, die Winkel aber veränderlich gedacht werden.**

§. 3. **Wirken an dem Viereck** $ABCD$ (Fig. 212.) **nur die beiden Kräfte** P, R **in den Punkten** F, H **zweier Gegenseiten**, d. h. sind Q und S Null, so halten die Pressungen T, T''' an D sich allein Gleichgewicht, sind also entgegengesetzt gleich und fallen in die Richtung der Seite DA. Ebenso T', T'' längs BC. Daher muss sowohl P, welches mit T, T' an AB, als auch R, welches mit T'', T''' an CD Gleichgewicht hält, durch den Schnittpunkt Σ von AD und CB gehen. P und R müssen aber auch am Viereck, wie an einer unveränderlichen Figur Gleichgewicht halten, also entgegengesetzt gleich sein. Daher geht die Verbindungslinie der Angriffspunkte F, H durch Σ. Das Viereck muss mithin eben sein.

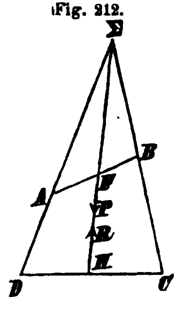


Fig. 212.

Ist CD fest und wirkt blos P, so folgt, dass nur dann Gleichgewicht besteht, wenn das Viereck eben ist und die Richtung von P durch den Schnittpunkt Σ der beweglichen Seiten BC, DA hindurchgeht. Die Punkte A, B sind in der Ebene auf Kreisen um D und C beweglich und beschreibt F eine Schleifenlinie (Thl. I,

---

einfache Viereck hat vier Seiten, das einfache Vierseit sechs Ecken. Beim vollständigen n Eck heissen Nebenscheitel die Schnittpunkte der Seiten, welche nicht Ecken sind, beim vollständigen n Seit sind Diagonalen die Verbindungslinien der Ecken, welche nicht Seiten sind. Das vollständige Viereck hat drei Nebenscheitel, das vollständige Vierseit drei Diagonalen.

Cap. III, §. 8.), Σ ist das Momentancentrum für die Beweglichkeit des Systems, ΣF ist die Normale der Schleifenlinie. Die Bedingung des Gleichgewichts des Vierecks kommt also überein mit der Bedingung, dass der Punkt F auf der Schleifencurve im Gleichgewichte sein soll.

Sind BC, DA parallel (Fig. 213.), so müssen auch FH, die Verbindungslinie der Angriffspunkte der Kräfte P, R und diese selbst mit ihnen parallel sein. Zwei andere Kräfte P', R', welche längs einer weiteren Parallelen $F'H'$ zu BC wirken und P, R entgegengesetzt gleich sind, halten ebenfalls Gleichgewicht. Daher sind auch die Paare (P, P'), (R, R') im Gleichgewicht. Das Paar (P, P') ist mit den beiden Pressungen in A und B im Gleichgewicht und bleibt es auch einer beliebigen Lagenänderung in seiner Ebene; ebenso (R, R'). Hieraus folgt, dass an einem Trapeze mit constanten Seiten, aber veränderlichen Winkeln zwei Kräftepaare sich unter denselben Bedingungen wie an einem unveränderlichen System Gleichgewicht halten.

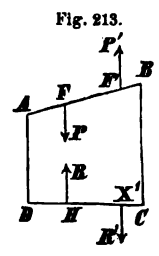


Fig. 213.

§. 4. Eine Ecke D eines veränderlichen Vierecks $ABCD$ (Fig. 214.) von constanten Seiten, aber veränderlichen Winkeln ist fest; auf die Punkte F, G der ihr nicht anliegenden Seiten AB, BC wirken die Kräfte P, Q; man soll die Bedingungen ihres Gleichgewichts aufstellen.

Trennt man die Seiten des Vierecks in den Ecken von einander ab, so müssen, da an DA keine weitere Kraft wirkt, die Pressungen der Linie DA in D und A sich Gleichgewicht halten, also längs DA entgegengesetzt gleich sein. Daher fällt auch die Pressung in A für AB in DA. Sie, die Pressung für AB in B und die Kraft P halten sich an AB Gleichgewicht; daher schneiden sich die beiden letzteren in einem Punkte M auf DA. Die Pressung in B für BC fällt mithin in BM die Pressung in C aber fällt in DC weil die Pressungen in D und C an DC in DC fallen. Es müssen daher die Pressungen der Linie BC in B und C mit Q Gleichgewicht halten und sich also alle drei Kräfte in dem Schnittpunkte N von BM mit DC treffen. Hieraus folgen als Gleichgewichtsbedingungen, dass das Viereck eben sein muss, dass P und Q in seine Ebene fallen und ihre Schnittpunkte M, N mit den dem festen Punkte anliegenden Seiten und die ihm gegenüberliegende Ecke B in gerader Linie liegen müssen. Ist die Gestalt des Vierecks und die Richtung von P gegeben, so ergibt sich die Richtung von Q; kennt man die Intensität von P, so ergibt sich die von Q, indem man P nach MA und MB, Q nach NB und NC zerlegt denkt; die in MB fallenden Componenten müssen sich tilgen. Sind T — T diese beiden Kräfte, so hat man:

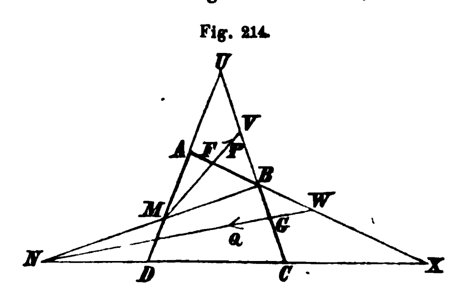


Fig. 214.

$$P : T = \sin AMB : \sin AMF = \frac{AB}{BM} : \frac{AF}{FM}$$

$$Q : (-T) = \sin BNC : \sin GNC = \frac{BC}{BN} : \frac{CG}{GN},$$

mithin

$$P : Q = -\left(\frac{AB}{BM} : \frac{AF}{FM}\right) : \left(\frac{BC}{BN} : \frac{CG}{GN}\right).$$

Schneiden sich BC, DA in U; AB, DC in X und treffen die Kräfte P und Q die Seiten BC, AB in V, W, so hat man in ähnlicher Weise

$$P:T = \frac{UB}{BM}:\frac{UV}{VM},\qquad Q:(-T) = \frac{XB}{BN}:\frac{XW}{WN}$$

$$P:Q = -\left(\frac{UB}{MB}:\frac{UV}{VM}\right):\left(\frac{XB}{BN}:\frac{XW}{WN}\right).$$

Für das Parallelogramm rücken U und X ins Unendliche und reducirt sich wegen $UB:UV = 1$, $XB:XW = 1$ diese Gleichung auf

$$P:Q = -\frac{VM}{MB}:\frac{WN}{NB}.$$

Fällt M in D, d. h. geht die eine Kraft P durch den festen Punkt, so fällt auch N in D und geht auch die andere Kraft Q durch denselben Punkt. Ist das Viereck zugleich ein Parallelogramm, so bleibt

$$P:Q = -VD:WD$$

und da $DV:DC = \sin C:\sin V$, $DW:DA = \sin A:\sin W$, so wird

$$P\cdot BC\sin(P, BC) + Q\cdot AB\sin(Q, AB) = 0.$$

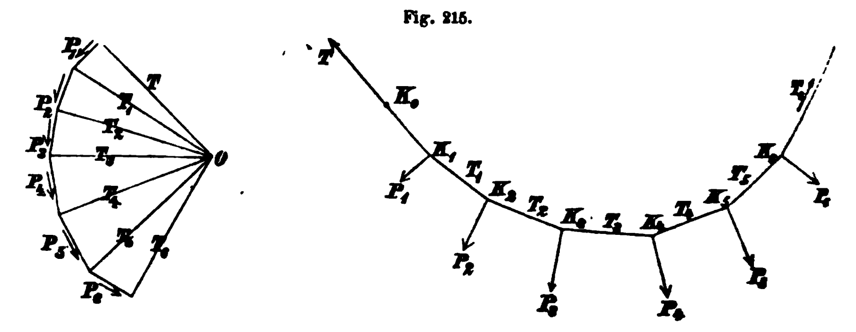
§. 5. Die Kette. Ein System von Körpern, von denen in bestimmter Ordnung jeder mit dem folgenden verbunden ist, ohne dass die Beweglichkeit der einzelnen aufgehoben ist, heisst eine Kette; die Körper, welche sie bilden, sind ihre Glieder. Die Kette ist geschlossen, wenn der letzte Körper mit dem ersten verbunden ist. Die bisher betrachteten Vielecke sind Ketten; ein specieller Fall, welcher im Nachfolgenden besondere Behandlung erfahren wird, ist der, dass sämmtliche Glieder der Kette verschwindend klein und ihre Anzahl unendlich gross angenommen wird; die Kette heisst dann ein biegsamer Faden.

Eine Kette bestehe aus n Gliedern $G_1, G_2, \dots G_n$, welche endliche Dimensionen besitzen und aufeinanderfolgend blos in je einem Punkte berührend miteinander verbunden sind, wie z. B. bei einer gewöhnlichen aus Ringen gebildeten Kette. An G_1 und G_n wirken zwei Kräfte P und Q, es sollen die Gleichgewichtsbedingungen angegeben werden. Sind $B_1, B_2, B_3, \dots B_{n-1}$ die Berührungspunkte der Glieder, $T_1, T_2, T_3, \dots T_{n-1}$ die Intensitäten der in den Berührungspunkten anzubringenden Spannungen oder Pressungen, so halten P und $-T_1$, T_1 und $-T_2$, T_2 und $-T_3, \dots -T_n$ und Q Gleichgewicht, sind folglich entgegengesetzt gleich. Hieraus folgt, dass zum Gleichgewicht erforderlich und hinreichend ist, dass sämmtliche Berührungspunkte in gerader Linie liegen und dass P und Q einander entgegengesetzt gleich sind. Die Spannungen sind alle einander gleich und gleich P oder Q. Nach Cap. VI, §. 7. ist das Gleichgewicht sicher oder unsicher, je nachdem die Kräfte P und Q ziehend oder drückend wirken. Die Unsicherheit des Gleichgewichts ist um so grösser, je mehr Glieder die Kette hat, weil das Ausgleiten eines einzelnen Gliedes zur Störung derselben hinreicht. Bei einem biegsamen Faden kann überhaupt nur bei Zugkräften Gleichgewicht bestehen, es kann nur sicher sein. Der biegsame Faden bildet im Falle des Gleichgewichts eine Gerade, in welche die Endkräfte fallen und ziehend wirken. Die Spannung des Fadens ist in allen Punkten gleich und gleich den Endkräften.

§. 6. Das Seilpolygon. Eine vollkommen biegsame, nicht dehnbare Linie (Faden, Seil), an welchem in bestimmten Punkten $K_1, K_2, K_3, \dots K_n$ Kräfte $P_1, P_2, P_3, \dots P_n$ wirken (Fig. 215.), heisst ein Seilpolygon und die Punkte K sind seine Knoten. Wenn dies System unter Einwirkung der Kräfte eine Gleichgewichtsfigur annimmt, die im Uebrigen, je nach Beschaffenheit der Kräfte, eben oder windschief sein kann, so ist jede Seite gespannt und wenn sie durchschnitten

wird, so sind zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte erorderlich, um das gestörte Gleichgewicht herzustellen. Nach Einführung dieser Spannungen besteht an jedem Knoten K zwischen der Kraft P und den beiden Spannungen Gleichgewicht. Diese Spannungen seien ihrer Intensität nach zwischen K_1 und K_2 gleich T_1, zwischen K_2, K_3 gleich $T_2, \ldots$, an K_n gleich T_n längs der Schlussseite $K_n K_{n+1}$ und an K_1 längs der Anfangsseite $K_1 K_0$ des Polygons wirkend, gleich T.

Fig. 215.



Das Gleichgewicht der Kraft P_i am Knoten K_i und der Spannungen $-T_{i-1}$ und T_i längs den Seilstücken $K_i K_{i-1}$ und $K_i K_{i+1}$ erfordert nun, dass die Kraft P_i in die Ebene dieser beiden Seiten falle und dass jede der drei Kräfte den Sinus des von den beiden anderen eingeschlossenen Winkels proportional sei. In Folge dessen bestehen die Gleichungen

$$\frac{T}{\sin P_1K_1K_2} = \frac{T_1}{\sin P_1K_1K_0} = \frac{P_1}{\sin K_0K_1K_2}$$
$$\frac{T_1}{\sin P_2K_2K_3} = \frac{T_2}{\sin P_2K_2K_1} = \frac{P_2}{\sin K_1K_2K_3}$$
$$\frac{T_2}{\sin P_3K_3K_4} = \frac{T_3}{\sin P_3K_3K_2} = \frac{P_3}{\sin K_2K_3K_4}$$
$$\vdots$$
$$\frac{T_{n-1}}{\sin P_nK_nK_{n+1}} = \frac{T_n}{\sin P_nK_nK_{n-1}} = \frac{P_n}{\sin K_{n-1}K_nK_{n+1}}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, indem man sie gruppenweise miteinander verbindet, die Verhältnisse der Spannungen T und der Kräfte P. Ist das Polygon geschlossen, so ist $T_n = -T$ und tritt zu den Gleichungen noch die weitere hinzu, welche für die Winkelsumme des Polygons besteht. Ist das Polygon offen, so spielen die Endspannungen dieselbe Rolle, wie Kräfte P.

Ist ausser den Kräften P und ihren Richtungen noch die Endspannung T und ihre Richtung gegeben, so kann die Gleichgewichtsform des Polygons, dessen Seitenlängen gleichfalls hierbei als bestimmt vorausgesetzt werden, durch folgende Construction gefunden werden. Man ziehe die Richtung von T und nehme die Lage des ersten Knotens K_1 auf ihr willkürlich an, trage die Kraft P_1 an K_1 in ihrer Richtung an und suche die Resultante von T und P; sie gibt die Richtung der Seite K_1K_2 und hiermit ist die Lage des zweiten Knotens gefunden nebst der Spannung $-T_1$, die an ihm im Sinne K_2K_1 wirkt. Aus T_1 und der Kraft P_2 an K_2 suche man die Resultante T_2, hierdurch ergibt sich die Lage des dritten Knotens K_3 nebst der längs K_3K_2 wirkenden Spannung $-T_2$ u. s. f. — Die Construction wird wesentlich erleichtert, indem man sich von irgend einem Punkte O des Raumes aus das Kräftepolygon (P) construirt, nämlich so dass man von O aus in der gegebenen Richtung die Endkraft T aufträgt, daran die Kraft P_1 in ihrer

Richtung fügt, hieran P_2, dann P_3 u. s. f. Die von O nach den Endpunkten von $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ hinführenden Diagonalen stellen nach Grösse und Richtung die Resultanten von T, P_1 oder T_1; von T_1, P_2 oder T_2; von T_2, P_3 oder T_3, u. s. f., also sämmtliche Spannungen dar. Man braucht also nur Parallellinien mit T, T_1, $T_2, \ldots T_n$ zu ziehen und auf ihnen die bestimmten Seitenlängen K_1K_2, K_2K_3, u. s. f. aufzutragen, um die Gleichgewichtsform des Polygons zu erhalten. Das Kräftepolygon zeigt zugleich, dass sämmtliche Kräfte P nebst den Endkräften T, T_n an einen Punkt verlegt sich Gleichgewicht halten müssen.

Wenn die Kräfte P die Winkel TK_1K_2, $K_1K_2K_3$, $K_2K_3K_4, \ldots$ des Polygons halbiren, so werden die Spannungen sämmtlich gleich und gleich den Endspannungen. In den obigen Gleichungen werden nämlich die Winkel $P_1K_1T = P_1K_1K_2$, $P_2K_2K_1 = P_2K_2K_3$, $P_3K_3K_2 = P_3K_3K_4$, u. s. f., nämlich gleich den Supplementen der halben Polygonwinkel TK_1K_2, $K_1K_2K_3, \ldots$. Daher erhält man noch vermöge $\sin P_1K_1T = \sin P_1K_1K_2 = \sin \frac{1}{2} TK_1K_2$, $\sin P_2K_2K_1 = \sin P_2K_2K_3 = \sin \frac{1}{2} K_1K_2K_3, \ldots$

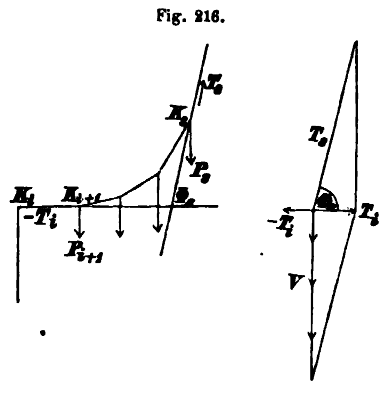
$$\frac{P_1}{\cos \frac{1}{2}(TK_1K_2)} = \frac{P_2}{\cos \frac{1}{2}(K_1K_2K_3)} = \frac{P_3}{\cos \frac{1}{2}(K_2K_3K_4)} = \cdots = \frac{P_n}{\cos \frac{1}{2}(K_{n-1}K_nK_{n+1})}.$$

d. h. es müssen die Kräfte den Cosinussen der halben Polygonwinkel proportional sein.

Die Kräfte P nebst den Endspannungen T, T_n müssen die Bedingungen des Gleichgewichts, wie an einem unveränderlichen System erfüllen; wenn man sie daher für irgend einen Punkt reducirt, so muss ihre Resultante und ihr resultirendes Paar verschwinden. Dasselbe gilt für jede beliebige abgetrennte Parthie des Polygons. Schneiden sich nun die Richtungen der Endspannungen einer solchen Parthie (oder auch des ganzen Polygons) in einem Punkte und wählt man diesen zum Reductionspunkte, so sieht man, dass die betreffenden Endspannungen mit den Resultanten aller Kräfte P der abgetrennten Parthie des Systems an jenem Punkte Gleichgewicht halten müssen. Nimmt man daher diese Resultante in entgegengesetztem Sinne und zerlegt sie nach den Richtungen der Endspannungen, so erhält man diese selbst; insbesondere kann man diese Methode benutzen, wenn die Endspannungen durch feste Punkte ersetzt werden sollen, um die Widerstände zu finden, welche diese leisten müssen.

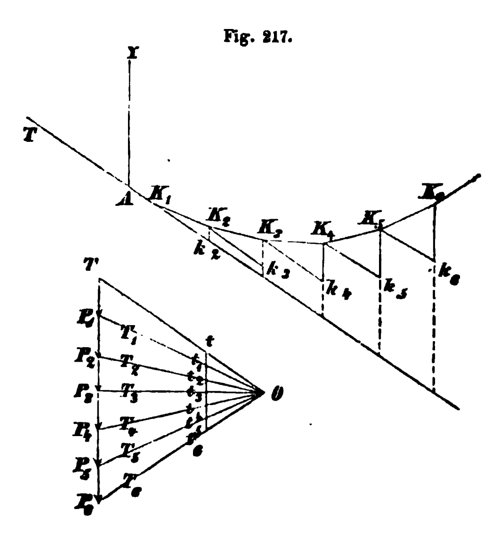
Da drei Kräfte, welche an einem Punkte im Gleichgewichte sind, immer in einer Ebene liegen, so folgt, dass, wenn die Richtungen der Kräfte P sämmtlich einer Ebene parallel sind, das Polygon eben ist. Dies findet insbesondere statt, wenn die Kräfte P parallel sind. Findet sich in diesem Falle eine Polygonseite vor, welche zu der Richtung der Kräfte senkrecht ist, so lassen sich die Spannungen besonders einfach ausdrücken. Ist K_iK_{i+1} (Fig. 216.) die Seite, welche diese Eigenschaft besitzt und T_i ihre Spannung, so bringe man sie mit der Seite K_sK_{s+1}, deren Spannung T_s man sucht, zum Durchschnitt und brauche diesen zum Reductionspunkte O der Kräfte. Ist V_s die Resultante der Kräfte P von K_{i+1} bis K_s, also $V_s = P_{i+1} + P_{i+2} + \cdots + P_s$, so liefert das Parallelogramm der Kräfte $T_s^2 = T_i^2 + V_s^2$ und für die Neigung φ_s der Seite K_sK_{s+1} gegen K_iK_{i+1}: $tg\,\varphi_s = \frac{V_s}{T_i}$.

Fig. 216.



Wir wollen den speciellen Fall der Parallelkräfte am Seilpolygon weiter verfolgen, dass alle Parallelkräfte einander gleich sind und ihre Richtungen aufeinanderfolgend gleichen Normalabstand haben. Das Polygon der Kräfte Fig. 215. geht in diesem Falle in eine Dreiecksform über, auf deren einer, dem Reductionspunkt O gegenüberliegender Seite die Kräfte P sich summiren, während die beiden anderen Seiten die Endspannungen darstellen. Sämmtliche Ecken des Polygons liegen in diesem Falle auf einer Parabel. Nehmen wir auf der Richtung der Endspannung T (Fig. 217.) den Punkt A so an, dass eine durch ihn zu der Richtung der Kräfte parallel gelegte Gerade von der Richtung der ersten Kraft um den halben Normalabstand entfernt sei. Diese Gerade sei die Y-Axe und die Richtung von T die X-Axe, positiv im Sinne $K_1 k_2$ genommen, parallel zu welcher Linien auf den Kraftrichtungen die Punkte k_2, k_3, k_4, ... bestimmen. Die Figur $O\,T\,P_1\,P_2\,...$ des Kräftepolygons schneiden wir mit einer Geraden parallel $T P_1 P_2 \ldots$ in einem Abstande von O gleich dem Normalabstande der Kräfte. Dieselbe liefert die Dreiecke Ott_1, Ott_2, Ott_3, ..., welche den Dreiecken $K_1k_2K_2$, $K_2k_3K_3$, $K_3k_4K_4$, ... congruent sind. Wird $AK_1 = \frac{1}{2}Ot = a$, sowie $tt_1 = b$ gesetzt, wodurch $tt_2 = 2b$, $tt_3 = 3b$, ... wird, so erhält man für die Abscissen der Ecken des Polygons $K_1K_2K_3$, ...

Fig. 217.



$$x_1 = \tfrac{1}{2}a, \quad x_2 = \tfrac{3}{2}a, \quad x_3 = \tfrac{5}{2}a, \; \ldots\ldots \; x_i = \tfrac{1}{2}(2i-1)\,a,$$

sowie für die Ordinaten derselben

$$y_1 = 0, \; y_2 = b, \; y_3 = 3b, \; y_4 = 6b, \ldots y_i = b + 2b + \cdots + (i-1)\,b = \tfrac{1}{2}i\,(i-1)\,b.$$

Eliminirt man nun aus den Coordinaten eines beliebigen Punktes K_i, nämlich

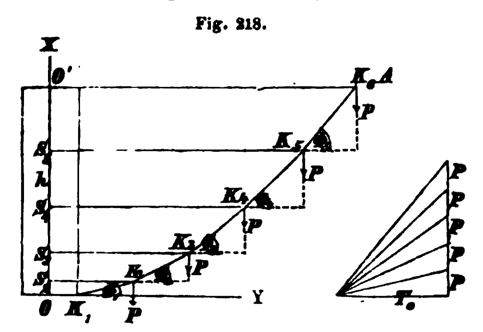
$$x_i = \tfrac{1}{2}(2i-1)a, \quad y_i = \tfrac{1}{2}i\,(i-1)b$$

den Index i, so erhält man die Gleichung, welche für alle gilt, in x_i, y_i, d. h. die Gleichung der Curve, auf welcher alle liegen. Sind x, y laufende Coordinaten dieser Curve, so ist die Gleichung derselben: $x^2 = \frac{2a^2}{b}\left(y + \frac{b}{8}\right)$. Für $x = 0$ wird $y = -\frac{b}{8}$. Verschiebt man daher den Ursprung A in der Richtung der negativen y um $\frac{b}{8}$, so wird die Gleichung $x^2 = \frac{2a^2}{b}y$. Sie drückt eine Parabel aus, bezogen auf die Tangente im Ursprunge und die Richtung der Hauptaxe, welche durch ihn hindurchgeht. Demnach liegen sämmtliche Ecken des Polygons auf einer Parabel, deren Hauptaxe der Richtung der Kräfte parallel ist. Ist unter den Seiten eine zur Kraftrichtung normal, so geht die Hauptaxe der Parabel durch deren Mitte.

Für ein Seilpolygon (Fig. 218.) mit mittlerer horizontaler Seite, in dessen Knoten gleiche Gewichte P in gleichen Abständen angreifen, sei h die Höhe $O'O$ des halben Bogens, $2b$ die Spannweite $2 \cdot O'A$ und $2n+1$ die Anzahl der Seiten, sodass auf jeder Seite des Mittelgliedes deren n liegen. Wird der Abstand der Kraftrichtungen zur Abkürzung gleich a gesetzt, so ist $(2n+1)\,a = 2b$

Es sollen nun gefunden werden: für OO' und OX als Axen der x, y die Coordinaten $x_i = O_iS_i$, $y_i = S_iK_i$ der Knoten, die Neigungen $\varphi_i = K_{i+1}K_iY$ der Glieder gegen die Horizontale, die Längen $l_i = K_iK_{i+1}$ der Glieder, die Horizontalspannung T_0 (Spannung im horizontalen Mittelgliede), die Spannung T_i der Glieder K_iK_{i+1} und die Gleichung der Parabel, auf welcher die Ecken liegen.

Fig. 218.



Man hat $y_1 = \frac{1}{2}a$, $y_2 = \frac{1}{2}a + a$, $y_3 = \frac{1}{2}a + 2a, \ldots$ $y_i = \frac{1}{2}a + (i-1)a$ oder $y_i = \frac{1}{2}(2i-1)a$. Ferner $x_1 = 0$, $x_2 = a\,tg\,\varphi_1$, $x_3 - x_2 = a\,tg\,\varphi_2, \ldots$ $x_i - x_{i-1} = a\,tg\,\varphi_{i-1}$. Weiter ist $tg\,\varphi_2 = \frac{P}{T_0}$, $tg\,\varphi_1 = \frac{2P}{T_0}, \ldots$ $tg\,\varphi_i = \frac{iP}{T_0}$, wodurch $x_i = a\frac{P}{T_0}(1 + 2 + 3 + \cdots + (i-1))$ oder $x_i = \frac{1}{2}i(i-1)a\frac{P}{T_0}$ wird. Für $i = n+1$ wird $x_i = h$ und erhält man also T_0 aus der Gleichung $h = \frac{1}{2}n(n+1)\frac{aP}{T_0}$, nämlich $T_0 = \frac{1}{2}n(n+1)\frac{a}{h}P$, wodurch $tg\,\varphi_i = \frac{2i}{n(n+1)}\cdot\frac{h}{a}$. Die Länge der Glieder folgt aus $l_i = \frac{a}{\cos\varphi_i} = a\left[1 + \left(\frac{2i}{n(n+1)}\cdot\frac{h}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Die Spannungen T_i ergeben sich mit Hülfe von

$$T_i^2 = T_0^2 + i^2P^2 = \left(\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2\frac{h^2}{a^2} + i^2\right)P^2.$$

Die Längen und Spannungen wachsen mit i. Aus $x_i = \frac{1}{2}i(i-1)a\frac{P}{T_0}$ und $y_i = \frac{1}{2}(2i-1)a$ erhält man durch Elimination des Index i die Gleichung der Parabel $y^2 = \frac{2aT_0}{P}\left(x + \frac{1}{8}\frac{aP}{T_0}\right)$. Die Abscisse des Scheitels ist also $x = -\frac{1}{8}\frac{aP}{T_0}$ und also die Scheitelgleichung der Parabel $y^2 = \frac{2aT_0}{P}x$. Für $n = \infty$ geht das Seilpolygon selbst in eine Parabel über; ihre Gleichung ist $y^2 = \frac{b^2}{h}x$ und der Scheitel liegt um h von der Spannweite ab unter deren Mitte.

Für ein Seilpolygon mit mittlerer horizontaler Seite, in dessen Knoten gleiche Gewichte angreifen, dessen Seiten aber gleich lang und gleich a sind, hat man, wenn die durch O gehende Horizontale als x-Axe angesehen wird, $x_1 = \frac{1}{2}a$, $x_2 - x_1 = a\cos\varphi_1$, $x_3 - x_2 = a\cos\varphi_2, \ldots$ $x_i - x_{i-1} = a\cos\varphi_{i-1}$, $y_1 = 0$, $y_2 = a\sin\varphi_1$, $y_3 - y_2 = a\sin\varphi_2, \ldots$ $y_i - y_{i-1} = a\sin\varphi_{i-1}$, mithin $x_i - \frac{1}{2}a = \Sigma a\cos\varphi_{i-1}$, $y_i = \Sigma a\sin\varphi_{i-1}$ und da $tg\,\varphi_i = \frac{iP}{T_0} = i\varepsilon$, wenn $P : T_0 = \varepsilon$ gesetzt wird, so ergibt sich

$$x_i - \tfrac{1}{2}a = \Sigma\frac{a}{\sqrt{1 + (i-1)^2\varepsilon^2}}, \qquad y_i = \Sigma\frac{(i-1)\varepsilon a}{\sqrt{1 + (i-1)^2\varepsilon^2}};$$

T_0 folgt aus der Gleichung $h = y_{n+2} = \Sigma a\sin\varphi_{n+1}$.

Für abnehmende a und wachsende Gliederzahl geht das Seilpolygon in eine Curve über, deren Gleichung man folgendermassen erhält. Man setzt

$$lim\,(\tfrac{1}{2}a + (i-1)\,a) = s, \quad a = \Delta s,$$

sodass s die Bogenlänge, vom tiefsten Punkte der Curve an gerechnet, bedeutet; ferner $lim\,(i-1)\,P = ps$, wo p die Belastung der continuirlich belasteten Linieneinheit bezeichnet, so wird mit Unterdrückung der Indices:

$$x = lim\left(\tfrac{1}{2}a + \Sigma \frac{\Delta s}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{T_0}\right)^2 s^2}}\right)$$

$$= \int\limits_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{T_0}\right)^2 s^2}} = \frac{T_0}{p}\, l\left\{\frac{p}{T_0}s + \sqrt{1+\left(\frac{p}{T_0}\right)^2 s^2}\right\}$$

$$y = lim\,\Sigma\,\frac{p}{T_0}\frac{s\,\Delta s}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{T_0}\right)^2 s^2}} = \frac{p}{T_0}\int\limits_0^s \frac{s\,ds}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{T_0}\right)^2 s^2}} = \frac{T_0}{p}\left(\sqrt{1+\left(\frac{p}{T_0}\right)^2 s^2} - 1\right)$$

und wenn man $\frac{p}{T_0} = h$ und den Ursprung des Coordinatensystems im Sinne der negativen y um $\frac{1}{h}$ verlegt:

$$e^{hx} = \sqrt{1+h^2 s^2} + hs,$$

$$hy = \sqrt{1+h^2 s^2}.$$

Da $e^{-hx} \cdot e^{hx} = 1$ ist, so ergibt sich aus der ersten dieser Gleichungen

$$e^{-hx} = \sqrt{1+h^2 s^2} - hs$$

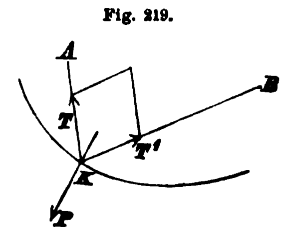
und also mit Rücksicht auf die zweite

$$hy = \tfrac{1}{2}\left(e^{hx} + e^{-hx}\right)$$

als Gleichung der Curven. Hierzu gesellt sich noch $hs = \frac{1}{2}\left(e^{hx} - e^{-hx}\right)$ für die Rectification derselben. Die Curve heisst die gemeine Kettenlienie. (Vgl. Gretschel, elementare Ableitung der Haupteigenschaften der Kettenlinien. Grunert's Archiv Thl. 43, S. 121).

Wir haben bisher angenommen, dass die Angriffspunkte der Kräfte bestimmte Punkte des Seiles (Knoten) seien. Es kommt aber vor, dass dieselben längs des Seiles verschiebbar sind; dies tritt ein, wenn die Kräfte vermittelst Ringe an demselben wirken, welche auf ihm hingleiten können (Fig. 219.). Nehmen wir den einfachsten Fall, dass ein Seil von zwei Kräften T, T' gehalten wird so, dass die Kraft P an dem Ringe wirkend Gleichgewicht mit T, T' herbeiführt. Das Gleichgewicht wird nicht beeinträchtigt, wenn die Angriffspunkte der Kräfte T, T' fest gedacht werden. Da der Ring K auf dem Seile gleiten kann, so kann er wegen der Undehnbarkeit desselben nur solche Lagen annehmen, für welche die Summe der Radienvectoren $AK + BK$ constant bleibt; daher ist K auf die Fläche eines Rotationsellipsoids um AB als Axe und A und B als Brennpunkten beschränkt. Daher können wir das Seil hinwegdenken und annehmen, am Punkte K, welcher auf dieser Fläche zu bleiben gezwungen sei, wirke eine Kraft P und befinde sich derselbe im Gleichgewicht. Dies ist nur möglich, wenn die Richtung von P normal

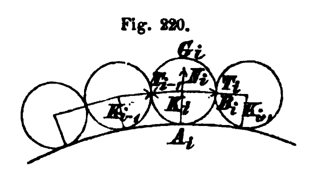
Fig. 219.



dem Ellipsoid ist. Die Normale einer Rotationsfläche schneidet aber immer die Rotationsaxe, daher ist die Richtung von P die Normale des elliptischen, durch K geführten Meridianschnittes und halbirt folglich den Winkel AKB der Radienvectoren. Hieraus folgt aber, dass das Parallelogramm der Kräfte aus T, T' und $-P$ gebildet, ein Rhombus und folglich $T = T'$ ist. Die Spannungen T, T' der Seilstücke sind also gleich gross. Ist α der Winkel der Seilstücke, so ist $P = 2\,T\cos\frac{1}{2}\alpha$.

§. 7. Die über eine Fläche hingespannte Kette und der über sie hingespannte Faden. Berühren die Glieder G_1, G_2, ... G_n einer Kette (Fig. 220.) eine feste Fläche in Punkten A_1, A_2, ... A_n, einander selbst in B_1, B_2, ... B_{n-1} und wirken an G_1 und G_n zwei Kräfte P und Q, so müssen an jedem Gliede G_i die beiden Spannungen $-T_{i-1}$, T_i und der Widerstand N_i der Fläche sich Gleichgewicht halten. Es müssen sich daher die Normalen, in B_{i-1}, B_i, A_i errichtet, in einem Punkte K_i schneiden und die Gleichungen des §. 5. gelten, aus welchen $T_1 : T_2$, $T_1 : T_3$, ... $T_1 : T_{n-1}$ und $P : Q$ sich ergeben. Insbesondere ist

Fig. 220.



$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin A_1K_1B_1}{\sin A_1K_1P} \cdot \frac{\sin A_2K_2B_2}{\sin A_2K_2B_1} \cdots \frac{\sin A_nK_nQ}{\sin A_nK_nK_{n-1}}.$$

Werden nun die Kettenglieder unendlich klein, z. B. unendlich kleine Kugeln, bei welchen die Punkte K die Mittelpunkte sind und die drei Normalen sich stets schneiden, so erscheinen $K_{i-1}K_i$, K_iK_{i+1} als zwei aufeinanderfolgende Elemente eines auf der Fläche aufliegenden Fadens, welche mit der Normalen der Fläche in K_i in einer Ebene liegen. Die Ebene der beiden Elemente ist aber die Schmiegungsebene der Fadencurve und die Normale derselben, welche in diese Schmiegungsebene fällt, die Hauptnormale, welche die Richtung des Krümmungshalbmessers hat. Es geht daher die Schmiegungsebene der Fadencurve in allen Punkten derselben durch die Normale der Fläche, steht also senkrecht auf der Fläche und fällt mithin ihr Krümmungshalbmesser in die Normale der Fläche. Dies ist aber nach Thl. III, Cap. V, §. 3. die charakteristische Eigenschaft der kürzesten Linie auf der Fläche, wenigstens im Allgemeinen. Daher ist die Fadencurve im Allgemeinen zwischen irgend zweien ihrer Punkte eine kürzeste Linie, d. h. kürzer als alle anderen, durch dieselben Punkte gehenden, ihr nächst anliegenden Curven.

Die Curve, deren Schmiegungsebene durch die Normale der Fläche geht, besitzt die Eigenschaft des Minimums nur innerhalb gewisser Grenzen. Denkt man sich nämlich, von einem Punkte der Fläche ausgehend, nach allen Richtungen der Tangentenebene solche Curven, so schneiden sich im Allgemeinen je zwei aufeinanderfolgende derselben in einem Punkte und bilden alle eine Enveloppe auf der Fläche. Nur in dem Bereiche zwischen dem Ausgangspunkte und dem Berührungspunkte mit der Enveloppe ist eine solche Curve kürzeste Linie zwischen zweien ihrer Punkte, wie Jacobi gezeigt hat. Auf der Kugelfläche sind diese Curven grösste Kreise und zieht sich ihre Enveloppe auf den Gegenpunkt des Ausgangspunktes zusammen. Für abwickelbare Flächen, deren kürzeste Linien durch die Abwickelung der Fläche mit einer Ebene in Gerade übergehen, hört die Enveloppe auf zu existiren und besteht das Minimum längs der ganzen Curve. Uebrigens muss bemerkt werden, dass das Minimum sich nur auf die Nachbarcurven bezieht, dass es also zwischen zwei Punkten einer Fläche mehrere kürzeste

Linien geben kann und es z. B. nichts Auffallendes hat, wenn zwischen zwei Punkten der Erzeugungslinie eines Cylinders sowohl die Schraubenlinien, als die Erzeugungslinien selbst kürzeste Linien sind. Sehr irrig reden aber einige Schriftsteller von einer längsten Linie zwischen zwei Punkten auf einer Fläche, während ein Maximum doch offenbar nicht statthaben kann, weil man durch Ausweichungen zur Seite, selbst durch unendlich kleine, immer eine Curve herstellen kann, die länger ist, als jede gegebene Länge.

Die Spannung des Fadens ist in allen Punkten gleich gross; ihre Richtung ist die der Tangente. Es ist nämlich

$$T_i : T_{i-1} = \sin A_i K_i K_{i-1} : \sin A_i K_i K_{i+1};$$

die Summe beider Winkel und des Contingenzwinkels $d\tau$ der Fadencurve beträgt π; daher wird das Sinusverhältniss rechts in der Grenze gleich der Einheit, also $T_i = T_{i-1}$. Ebenso folgt

$$T_{i-1} = T_{i-2} = \cdots = P = T_{i+1} = T_{i+2} = \cdots = Q.$$

Zum Gleichgewicht des Fadens ist daher erforderlich, dass die Componenten der Endkräfte, welche den Faden in der Richtung der Tangenten im Anfangs- und Endpunkte spannen, gleich gross sind und am Faden nach entgegengesetzten Seiten ziehen. Die Spannung des Fadens ist ihnen gleich.

Der Normalwiderstand N der Fläche oder also auch der Druck, welchen der Faden im Punkte K_i auf die Fläche ausübt, halbirt den Winkel der beiden gleichen Spannungen in K_i und es ist $N : T = \sin K_{i-1} K_i K_{i+1} : \sin A_i K_i K_{i+1}$, oder da $K_{i-1} K_i K_{i+1} = \pi - d\tau$ ist und $A_i K_i K_{i+1} = \frac{1}{2}\pi$ wird, $N : T = d\tau$, also $N = T \cdot d\tau$.

Ist nun ϱ der Krümmungshalbmesser der Fadencurve und ds das Bogenelement $K_i K_{i+1}$, so wird $ds = \varrho d\tau$, also $N = \frac{T}{\varrho} \cdot ds$. Der Druck auf die Fläche ist also umgekehrt proportional dem Krümmungshalbmesser der Fadencurve und unendlich klein. Bildet der Faden eine Gerade, so ist $N = 0$. Für einen über eine Kugel hingespannten Faden ist der Druck überall gleich, da ϱ constant ist. Auf einem Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt bildet die Fadencurve eine Schraubenlinie und wenn α ihre Neigung gegen die Erzeugungslinie, a der Radius des Querschnitts ist, so hat man nach Thl. III Cap. I, §. 14, Nr. 5: $\varrho \sin^2 \alpha = a$, mithin wird $N = \frac{T}{a} \sin^2 \alpha$. Es wird daher N ein Maximum für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, d. h. wenn der Faden längs eines Kreisschnitts um den Cylinder geschlungen wird.

Der Coefficient $\frac{T}{\varrho}$ des Bogenelementes in der Formel für N ist einer Interpretation fähig. Man kann sich $\frac{T}{\varrho}$ als die Resultante von lauter gleichen Parallelkräften denken, welche in den Punkten einer der Linieneinheit gleichen Länge angreifen. Die Resultante aller solcher Elementarkräfte, welche ein Bogenelement ds afficiren, würde sich dann zu jener, wie $ds : 1$ verhalten und wäre demzufolge $\frac{T}{\varrho} ds$. Man nennt in diesem Sinne oft $\frac{N}{\varrho}$ den auf die Linieneinheit reducirten Druck.

§. 8. Der Faden, welcher mehrere Körper umspannt. Ein geschlossener Faden sei um drei Körper K_1, K_2, K_3 (Fig. 221.) geschlungen; an den Körpern wirken drei Kräfte P, Q, R. Schneiden wir die Fäden durch ...

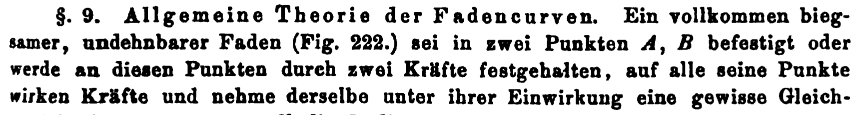
führen die Spannungen ein, so zeigt sich zunächst, dass alle Spannungen gleich sind (§. 7.). Ferner müssen die Spannungen in den beiden Punkten, wo der Faden den Körper K_1 verlässt, mit P im Gleichgewicht sein. Daher fällt P mit ihnen in eine Ebene, schneidet sich mit ihnen in einem Punkte und halbirt den Winkel der Spannungen. Die geradlinigen Fadenstücke fallen daher in die Seiten eines Dreiecks ABC, sodass $P : T = \sin A : \sin \frac{1}{2} A = 2 \cos \frac{1}{2} A$ und überhaupt also

$$\frac{P}{2 \cos \frac{1}{2} A} = \frac{Q}{2 \cos \frac{1}{2} B} = \frac{R}{2 \cos \frac{1}{2} C} = T.$$

Fig. 221.

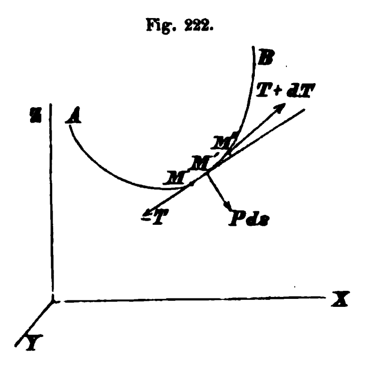
Die Kräfte müssen nach den Aussenräumen des Dreiecks wirken, wenn Gleichgewicht bestehen soll. Sie schneiden sich selbst in einem Punkte, weil sie den Winkel des Dreiecks halbiren oder auch weil das Gleichgewicht fortbestehen muss, wenn das System unveränderlich wird.

Aehnliches gilt von vier Körpern; das Viereck ist im Allgemeinen windschief; die Kräfte, welche seine Winkel halbiren, liegen auf einem einfachen Hyperboloid, weil das Gleichgewicht fortbesteht, wenn das System unveränderlich wird (§. 1.). Da sie die Halbirungslinien der Winkel sind, so folgt, dass die vier Winkelhalbirenden eines Vierecks immer so liegen, dass eine Gerade, welche drei von ihnen schneidet, auch die vierte trifft.



§. 9. **Allgemeine Theorie der Fadencurven.** Ein vollkommen biegsamer, undehnbarer Faden (Fig. 222.) sei in zwei Punkten A, B befestigt oder werde an diesen Punkten durch zwei Kräfte festgehalten, auf alle seine Punkte wirken Kräfte und nehme derselbe unter ihrer Einwirkung eine gewisse Gleichgewichtsform an; man soll die Bedingungen des Gleichgewichts, die Spannung längs der Tangente in einem beliebigen Punkte M und die Gestalt der Fadencurve ermitteln.

Fig. 222.



1. Die Spannung, welche in allen Punkten die Richtung des Bogenelementes oder der Tangente besitzt, wird von Punkt zu Punkt variiren und eine Function der Coordinaten x, y, z des Punktes M sein. Im Sinne MM' genommen sei sie T und seien T_x, T_y, T_z ihre Componenten parallel der Axen. Im folgenden Punkte M' ist sie dann im Sinne $M'M''$ gleich $T + dT$ und sind $T_x + dT_x$, $T_y + dT_y$, $T_z + dT_z$ ihre Componenten. Am Punkte M' halten sich nun die gegebene äussere Kraft und die beiden Spannungen, T im Sinne $M'M$ und $T + dT$ im Sinne $M'M''$ Gleichgewicht und man hat daher mit Rücksicht darauf, dass $-T_x$, $-T_y$, $-T_z$ die Componenten der erstgenannten Spannung darstellen, wenn f_x, f_y, f_z einstweilen die Componenten der äusseren Kraft f bezeichnen, $dT_x + f_x = 0$, $dT_y + f_y = 0$, $dT_z + f_z = 0$. Die Richtung der Tangente in M bildet aber mit den Axen Winkel, deren Cosinusse $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sind, wo $MM' = ds$ ist, wodurch

$$T_x = T\frac{dx}{ds}, \quad T_y = T\frac{dy}{ds}, \quad T_z = T\frac{dz}{ds}$$

wird. In Betreff der äusseren Kraft ist Folgendes zu bemerken. Sie ist unendlich klein, weil die Masse, an welcher sie angreift, es ist. Man denke sich nun sämmtliche in den Punkten des Bogenelementes MM' angreifende äussere Kräfte

für den Punkt M' auf ihre Resultante und ihr resultirendes Paar reducirt. Das letztere verschwindet gegen die erstere, da nicht blos seine Seitenkraft, sondern auch sein Arm unendlich klein ist. Es bleibt also blos jene Resultante. Denkt man sich nun die Elemente der Längeneinheit alle in derselben Weise afficirt, wie ds, so würde die Gesammtresultante aller dieser Einwirkungen eine bestimmte Intensität P besitzen und die hier in Frage kommende, in M' anzubringende Kraft f würde sich zu P verhalten, wie $ds:1$. Es ist daher $f = Pds$. Bildet f mit den Axen die Winkel α, β, γ, so wird $f_x = f\cos\alpha$, $f_y = f\cos\beta$, $f_z = f\cos\gamma$, oder $f_x = P\cos\alpha\cdot ds$, $f_y = P\cos\beta\,.\,ds$, $f_z = P\cos\gamma\cdot ds$, oder endlich wenn die Componenten von P mit X, Y, Z bezeichnet werden, wobei man sich P in der Richtung der Kraft f aufgetragen denkt, $f_x = Xds$, $f_y = Yds$, $f_z = Zds$. Durch Einführung dieser Werthe, sowie der Werthe für T_x, T_y, T_z gehen die Gleichgewichtsbedingungen im Punkte M' oder, was dasselbe ist, die Gleichgewichtsbedingungen für das Element MM' über in

$$d\cdot T\frac{dx}{ds} + Xds = 0, \qquad d\cdot T\frac{dy}{ds} + Yds = 0, \qquad d\cdot T\frac{dz}{ds} + Zds = 0.$$

2. Integrirt man die Ausdrücke links von einem beliebigen Anfangspunkte O des Bogens s über einen beliebigen Bogen M_0M hinweg, so erhält man:

$$T\frac{dx}{ds} - \left(T\frac{dx}{ds}\right)_{s_0} + \int_{s_0}^{s} Xds = 0$$

$$T\frac{dy}{ds} - \left(T\frac{dy}{ds}\right)_{s_0} + \int_{s_0}^{s} Yds = 0$$

$$T\frac{dz}{ds} - \left(T\frac{dz}{ds}\right)_{s_0} + \int_{s_0}^{s} Zds = 0,$$

wo $s_0 = OM_0$ ist. Dies sind aber die drei Gleichungen des translatorischen Gleichgewichts des unveränderlich gedachten Fadens zwischen der Spannung in M_0, deren Componenten $-\left(T\frac{dx}{ds}\right)_{s_0}$, $-\left(T\frac{dy}{ds}\right)_{s_0}$, $-\left(T\frac{dz}{ds}\right)_{s_0}$, der Spannung in M, deren Componenten $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$, $T\frac{dz}{ds}$ sind und den sämmtlichen äusseren Kräften Pds, welche längs des Bogens M_0M_1 angreifen, deren Componentensummen die drei Integrale darstellen. Combinirt man die Gleichungen, wie beim Princip der Flächen, indem man z. B. die letzte mit y multiplicirt, von der vorletzten, mit z multiplicirt abzieht, so ergibt sich

$$yd\cdot T\frac{dz}{ds} - zd\cdot T\frac{dy}{ds} + (yZ - zY)\,ds = 0$$

oder

$$d\left(y\cdot T\frac{dz}{ds} - z\cdot T\frac{dy}{ds}\right) + (yZ - zY)\,ds = 0,$$

woraus durch Integration über den Bogen M_0M hin

$$\left(yT\frac{dz}{ds} - zT\frac{dy}{ds}\right) - \left(yT\frac{dz}{ds} - zT\frac{dy}{ds}\right)_{s_0} + \int_{s_0}^{s}(yZ - zY)\,ds = 0$$

nebst zwei analog gebildeten Gleichungen sich ergeben. Diese Gleichungen drücken aus, dass auch die Bedingungen des rotatorischen Gleichgewichts an dem Faden wie an einem unveränderlichen System erfüllt sind.

3. Die beiden Gleichungen, welche man aus den Gleichungen unter Nr. 1 erhält, indem man T eliminirt, sind die Differentialgleichungen der Fadencurve

Diese Elimination kann in verschiedener Weise ausgeführt werden. Integrirt man über den Bogen $M_0 M$ und bezeichnet mit $-A$, $-B$, $-C$ abkürzend die Componenten der Spannung in M_0, so folgt:

$$\frac{-A+\int_{s_0}^{s} X\,ds}{\frac{dx}{ds}} = \frac{-B+\int_{s_0}^{s} Y\,ds}{\frac{dy}{ds}} = \frac{-C+\int_{s_0}^{s} Z\,ds}{\frac{dz}{ds}} = -T.$$

Die Grössen A, B, C spielen hierin die Rolle von drei willkürlichen Constanten; die Integration dieser zwei Gleichungen führt noch zwei weitere ein. Diese fünf Constanten bestimmen sich, sobald zwei Punkte der Fadencurve und die Bogenlänge zwischen ihnen gegeben sind. Denn die Coordinaten der beiden Punkte müssen den beiden endlichen Gleichungen der Fadencurve genügen, wodurch vier Bedingungen für die Constanten erhalten werden; die gegebene Bogenlänge liefert hierzu die fünfte.

Die vorstehende Form der Differentialgleichungen der Fadencurve ist nur in den einfachsten Fällen brauchbar; übrigens kann man für diese Curve leicht die Differentialgleichungen zweiter Ordnung erhalten. Führt man nämlich die Differentiation in den Gleichungen Nr. 1. aus, so kommt

$$Td\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{dx}{ds}\,dT + X\,ds = 0$$
$$Td\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{dy}{ds}\,dT + Y\,ds = 0$$
$$Td\cdot\frac{dz}{ds} + \frac{dz}{ds}\,dT + Z\,ds = 0\,.$$

Die Elimination von dT und hierauf von T ergibt:

$$\frac{\frac{dy}{ds}\cdot Z - \frac{dz}{ds}Y}{\frac{dy}{ds}\,d\cdot\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds}\,d\cdot\frac{dy}{ds}} = \frac{\frac{dz}{ds}\cdot X - \frac{dx}{ds}Z}{\frac{dz}{ds}\,d\cdot\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d\cdot\frac{dz}{ds}} = \frac{\frac{dx}{ds}\cdot Y - \frac{dy}{ds}X}{\frac{dx}{ds}\,d\cdot\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\,d\cdot\frac{dx}{ds}} = -\frac{T}{ds}.$$

4. Um die Spannung T längs der Tangente des Punktes (xyz) zu finden, multiplicire man die drei Gleichungen unter Nr. 3. mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ und addire sie; dies liefert, da $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$, also

$$\frac{dx}{ds}\,d\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d\cdot\frac{dz}{ds} = 0$$

ist:

$$-dT = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Existirt also für die Kraft P eine Kräftefunction U, sodass

$$X = \frac{\partial U}{\partial x},\quad Y = \frac{\partial U}{\partial y},\quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

wird, so erhält man, wenn T, U sich auf den Punkt (x, y, z) und T_0, U_0 sich auf den Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ beziehen:

$$T - T_0 = -(U - U_0).$$

In allen Fällen, in welchen für die Kraft P eine Kräftefunction besteht, ist die Spannung des Fadens blos eine Function des Ortes und nicht von der Gestalt der Fadencurve abhängig; die Aenderung der Spannung von Punkt zu Punkt ist gleich der Aenderung der Kräftefunction mit entgegengesetzten Zeichen genommen.

In dem besonderen Falle, dass *die Kraft P normal zu der Fadencurve ist*, hat man $\frac{X}{P}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{P}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{P}\frac{dz}{ds} = 0$, also $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ und folglich $T = T_0$, d. h. *die Spannung ist constant*. Dies findet z. B. statt, wenn der Faden auf einer Fläche aufliegt, in welchem Falle der Normalwiderstand der Fläche die Kraft Pds ist.

Einen anderen Ausdruck für die Spannung T findet man, wenn man die Gleichungen in Nr. 3. mit $d\cdot\frac{dx}{ds}$, $d\cdot\frac{dy}{ds}$, $d\cdot\frac{dz}{ds}$ multiplicirt und sie addirt. Der Coefficient von dT wird dann Null und bleibt

$$T\cdot\left[\left(d\cdot\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dz}{ds}\right)^2\right] + \left[Xd\cdot\frac{dx}{ds} + Yd\cdot\frac{dy}{ds} + Zd\cdot\frac{dz}{ds}\right]ds = 0.$$

Es ist aber nach Thl. III, Cap. 4, §. 9. der Krümmungshalbmesser ϱ der Curve im Punkte (xyz):

$$\varrho = \frac{ds}{\left[\left(d\cdot\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dz}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Hiermit erhält man:

$$-\frac{Tds}{\varrho^2} = Xd\cdot\frac{dx}{ds} + Yd\cdot\frac{dy}{ds} + Zd\cdot\frac{dz}{ds}.$$

Quadrirt und addirt man dieselben obigen Gleichungen, so folgt mit Rücksicht auf die eben gefundenen Formeln und den Ausdruck für ϱ, sowie daraus, dass $P^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ ist:

$$\frac{T^2}{\varrho^2} + \frac{dT^2}{ds^2} = P^2.$$

Für Normalkräfte P ist $dT = 0$, mithin $T = P\varrho$. *Der Faden nimmt also für Normalkräfte P eine solche Gestalt an, dass der Krümmungshalbmesser der Kraft P umgekehrt proportional wird.*

Durch die vorstehende Formel ist P in zwei Componenten zerlegt, deren Bedeutung leicht zu ermitteln sein wird. Ist α der Winkel, den P mit der Richtung der Tangente bildet, so liefert die Projection von P auf die Tangente

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = P\cos\alpha$$

und mithin ist der ersten Formel dieser Nummer zufolge $-\frac{dT}{ds} = P\cos\alpha$. Setzt man dies in die vorstehende Gleichung ein, so folgt $\frac{T}{\varrho} = P\sin\alpha$. Nun fällt Pds mit den beiden Spannungen längs den Tangenten, welche sich im Curvenpunkte schneiden, in eine Ebene. Diese Ebene ist, weil sie die beiden auf einanderfolgenden Tangenten enthält, die Schmiegungsebene der Curve. Daher stellt $\frac{T}{\varrho}$ die Componente von P vor, welche in die Richtung der Hauptnormalen oder des Krümmungshalbmessers fällt. Für Normalkräfte P ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, also $dT = 0$. Man gelangt zu den Ausdrücken für die beiden Componenten von P auch unmittelbar, indem man das Gleichgewicht der drei im Curvenpunkte angreifenden Kräfte dadurch ausdrückt, dass man die Componentensummen in den Richtungen der Tangente und Hauptnormalen der Null gleich setzt. Dies liefert nämlich, wenn $d\tau$ den Contingenzwinkel bedeutet:

$$Pds\cos\alpha - T + (T + dT)\cos d\tau = 0$$

und

$$Pds\sin\alpha + (T + dT)\sin d\tau = 0,$$

oder reducirt: $Pds \cos\alpha + dT = 0$ und $Pds \sin\alpha + Td\tau = 0$, wo für $d\tau$ noch $\frac{ds}{\varrho}$ zu setzen ist u. s. f.

5. Liegt der Faden auf einer Fläche $F = 0$ auf, so tritt zu Pds noch der Normalwiderstand der Fläche hinzu. Ist dieser Nds, wo N den auf die Linieneinheit reducirten Normalwiderstand bezeichnet und sind $N_x ds$, $N_y ds$, $N_z ds$ seine Componenten, so sind die Bedingungen des Gleichgewichts:

$$d \cdot T \frac{dx}{ds} + Xds + N_x ds = 0$$

$$d \cdot T \frac{dy}{ds} + Yds + N_y ds = 0$$

$$d \cdot T \frac{dz}{ds} + Zds + N_z ds = 0,$$

wozu noch kommt:

$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2;$$

$$\frac{N_x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{N_y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{N_z}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{N}{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Diese Gleichgewichtsbedingungen unterscheiden sich von denen für den freien Faden nur dadurch, dass $X + N_x$, $Y + N_y$, $Z + N_z$ an die Stelle von X, Y, Z getreten sind. Daher ist

$$-dT = (X + N_x)\, dx + (Y + N_y)\, dy + (Z + N_z)\, dz = Xdx + Ydy + Zdz,$$

da $N_x dx + N_y dy + N_z dz = 0$ ist, weil N auf der Fläche senkrecht steht. Die Resultante von Pds und Nds fällt in die Schmiegungsebene der Fadencurve. Ist daher $P = 0$, so geht die Schmiegungsebene durch die Normale der Fläche und wird die Curve eine kürzeste Linie (s. §. 7.). Für $P = 0$, d. h. $X = Y = Z = 0$ ist T constant und nehmen die Gleichungen des Gleichgewichts die Form an:

$$Td \cdot \frac{dx}{ds} + N_x ds = 0, \quad Td \cdot \frac{dy}{ds} + N_y ds = 0, \quad Td \cdot \frac{dz}{ds} + N_z ds = 0,$$

aus welchen folgt:

$$\frac{N_x}{\frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{ds}} = \frac{N_y}{\frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{ds}} = \frac{N_z}{\frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds}} = -T$$

zum Beweise, dass N_s die Richtung des Krümmungshalbmessers der Fadencurve besitzt. Aus dieser und der obigen Proportion für N_x, N_y, N_z ergeben sich die Differentialgleichungen der Fadencurve, nämlich

$$\frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{ds} : \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{ds} : \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds} : \frac{\partial F}{\partial z},$$

welche die kürzeste Linie charakterisiren. Stellt man die Gleichung der Fläche unter der Form $F = f(x, y) - z = 0$ oder $z = f(x, y)$ dar, so gewinnen sie vermöge $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = q$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$, wo p und b Abkürzungen sind, die einfachere Form:

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} : p = \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} : q = -\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Der Widerstand N der Fläche folgt aus $P \sin\alpha = \frac{T}{\varrho}$ für $N = P \sin\alpha$, nämlich

$N = \frac{T}{\varrho}$, ist also dem Krümmungshalbmesser der Fadencurve umgekehrt proportional.

§. 10. Die Fadencurve für Parallelkräfte. Es seien die Kräfte $P ds$, welche an der Fadencurve angreifen, sämmtlich parallel. Wählt man ihre Richtung zur Richtung der y-Axe, so sind $X = Z = 0$ und werden die Gleichungen des Gleichgewichts

$$d \cdot T \frac{dx}{ds} = 0, \quad d \cdot T \frac{dy}{ds} + Y ds = 0, \quad d \cdot T \frac{dz}{ds} = 0$$

und die unter Nr. 3. des §. 3.:

$$\frac{-A}{\frac{dx}{ds}} = \frac{-B + \int_{s_0}^{s} Y ds}{\frac{dy}{ds}} = \frac{-C}{\frac{dz}{ds}} = -T.$$

Hieraus folgt $A \frac{dz}{ds} = C \frac{dx}{ds}$, also $Az = Cx + D$, d. h. die Punkte der Fadencurve liegen in einer mit der y-Axe, also mit der Kraftrichtung parallelen Ebene. Dies ergibt sich bereits aus §. 6., S. 637, wenn man die Fadencurve als ein Infinitesimalpolygon ansieht. Wählt man die Ebene der Curve zur Ebene der xy, so ist ihre Gleichung $z = 0$, mithin $C = D = 0$ und bleiben daher blos die Gleichungen

$$\frac{-A}{\frac{dx}{ds}} = \frac{-B + \int_{s_0}^{s} Y ds}{\frac{dy}{ds}} = -T.$$

Die Gleichung der Curve wird, wenn Y als Function von x, y gegeben ist

$$-A \frac{dy}{dx} + B = \int_{s_0}^{s} Y ds;$$

ist aber die Gestalt der Curve im Voraus bestimmt, so liefert dieselbe Gleichung Y als Function von x und y.

Die Spannung T ergibt sich aus denselben Gleichungen. Zunächst nämlich ist

$$T \frac{dx}{ds} = A = T_x \quad \text{und} \quad T \frac{dy}{ds} = -B + \int_{s_0}^{s} Y ds = -A \frac{dy}{dx} = T_y.$$

Quadrirt und addirt man beide Ausdrücke, so folgt:

$$T = A \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = A \frac{ds}{dx}.$$

Es ist aber $\frac{dx}{ds} = \sin \psi$, wenn ψ den Winkel bedeutet, welchen die Tangente der Fadencurve mit der Richtung der Kraft bildet. Der Inhalt dieser Formel ist folgender:

Die Spannung des Fadens ist proportional der Cosecante des Winkels, den die Tangente der Fadencurve mit der Kraftrichtung bildet, ihre Componente senkrecht zur Kraftrichtung ist constant, ihre Componente parallel zur Kraftrichtung ist der Cotangente jenes Winkels proportional. Bringt man die Richtungen der Tangenten in

zwei Punkten M und N zum Durchschnitt D, so verhalten sich die Spannungen in M und N wie die Tangentenlängen MD und ND.

§. 11. Die Kettenlinien. Für den Fall eines schweren Fadens ist Pds das Gewicht des Fadenelementes, nämlich $-\delta g\,ds$, wenn δ die specifische Masse im Punkte (xy) bedeutet, welche von Punkt zu Punkt im Allgemeinen variiren wird und die positive y-Axe aufwärts gerichtet ist. Die Fadencurve heisst eine Kettenlinie. Für einen homogenen Faden ist δ constant. In diesem Falle heisst die Kettenlinie eine gemeine (Fig. 223.). Für sie ist also bei vertikal aufwärts gerichteter y-Axe:

$$\int_{s_0}^{s} Y\,ds = -\int_{s_0}^{s} \delta g\,ds = -\,\delta g\,(s - s_0)$$

und folglich

$$-A\,\frac{dy}{dx} + B = -\,\delta g\,(s - s_0).$$

Rechnen wir den Bogen s vom tiefsten Punkte, dem Scheitel, an und wählen diesen auch zu dem Punkte M_0, für welchen A und B die Spannungscomponenten waren, so wird $s_0 = 0$ und da im tiefsten Punkte $\frac{dy}{dx}$ mit s zugleich verschwindet, auch $B = 0$. Demnach reducirt sich die Differentialgleichung der Fadencurve auf $\frac{dy}{dx} = \frac{\delta g}{A} \cdot s$. Darin ist δg das Gewicht der Längeneinheit des Fadens und stellt $\frac{\delta g}{A}$ den reciproken Werth h einer Länge $\frac{1}{h}$ dar, die der Parameter der Kettenlinie heisst. In kürzester Form ist die Gleichung also $\frac{dy}{dx} = hs$. Sie drückt aus, dass die Tangente der Neigung der Curve gegen die Horizontale dem Bogen vom tiefsten Punkte bis zum Berührungspunkte proportional ist.

Fig. 223.

Um dieselbe abermals zu integriren und zu der Gleichung der Kettenlinie zwischen x und y zu gelangen, wollen wir zunächst x und y als Functionen des Winkels ψ darstellen. Nun ist $dx = ds \cdot \sin\psi$, $dy = ds \cdot \cos\psi$, also $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg}\psi$. Daher liefert die Differentialgleichung der Curve $hs = \operatorname{cotg}\psi$, also wenn man sie differentiirt, $h\,ds = -\frac{d\psi}{\sin^2\psi}$ und hiermit:

$$h\,dx = -\frac{d\psi}{\sin\psi}, \qquad h\,dy = -\frac{\cos\psi\,d\psi}{\sin^2\psi}.$$

Hieraus folgt:

$$hx = -\int\frac{d\psi}{\sin\psi} = -\int\frac{d\psi}{2\sin\frac{1}{2}\psi\,\cos\frac{1}{2}\psi} = -\int\frac{d\cdot\frac{1}{2}\psi\,(\cos^2\frac{1}{2}\psi + \sin^2\frac{1}{2}\psi)}{\sin\frac{1}{2}\psi\,\cos\frac{1}{2}\psi}$$

$$= -\int\frac{\cos\frac{1}{2}\psi\,d\cdot\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi} - \int\frac{\sin\frac{1}{2}\psi\,d\cdot\frac{1}{2}\psi}{\cos\frac{1}{2}\psi} = -\,l\,tg\,\tfrac{1}{2}\psi + C,$$

$$hy = \frac{1}{\sin\psi} + C'.$$

Legen wir nun das Coordinatensystem so, dass für $\psi = \frac{1}{2}\pi$ die Abscisse $x = 0$ und die Ordinate $y = \frac{1}{h}$, d. h. gleich dem Parameter wird, so verschwinden C, C' und wir erhalten:

$$hx = -\, l\, tg\, \tfrac{1}{2}\psi, \quad hy = \frac{1}{\sin\psi} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}\psi + \cos^2\frac{1}{2}\psi}{2\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\psi} = \tfrac{1}{2}(\cot g\, \tfrac{1}{2}\psi + tg\, \tfrac{1}{2}\psi),$$

$$hs = \cot g\, \psi = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}\psi - \sin^2\frac{1}{2}\psi}{2\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\psi} = \tfrac{1}{2}(\cot g\, \tfrac{1}{2}\psi - tg\, \tfrac{1}{2}\psi).$$

Hieraus ergibt sich $tg\, \frac{1}{2}\psi = e^{-hx}$ und schliesslich:

$$hy = \tfrac{1}{2}\left(e^{hx} + e^{-hx}\right), \quad hs = \tfrac{1}{2}\left(e^{hx} - e^{-hx}\right).$$

Mit Hülfe der Gudermann'schen hyperbolischen Functionen $\mathfrak{Cos}\cdot\omega = \frac{1}{2}\left(e^{\omega} + e^{-\omega}\right)$ und $\mathfrak{Sin}\cdot\omega = \frac{1}{2}\left(e^{\omega} - e^{-\omega}\right)$ kann man diese Gleichungen auch schreiben:

$$hy = \mathfrak{Cos}\cdot hx, \quad hs = \mathfrak{Sin}\cdot hx,$$

oder in cyclischen Sinus und Cosinus mit imaginärem Argumente:

$$hy = \cos\cdot hxi, \quad hs = i\, \sin\cdot hxi.$$

Man gelangt zur Gleichung der Curve leicht auch auf folgende Weise. Die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = hs$ nochmals differentiirt gibt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = h\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

oder

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = h,$$

deren Integral für $\frac{dy}{dx} = p$ ist: $l\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = hx$, wozu keine Constante tritt, wenn das Coordinatensystem, wie oben, angenommen wird. Hieraus folgt

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{hx}$$

und da $\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right)\left(p - \sqrt{1 + p^2}\right) = -1$ ist, auch

$$p - \sqrt{1 + p^2} = -\, e^{-hx},$$

mithin

$$2p = e^{hx} - e^{-hx}$$

und hieraus durch nochmalige Integration

$$y = \frac{1}{2h}\left(e^{hx} + e^{-hx}\right).$$

Die Gleichung $hy = \frac{1}{2}\left(e^{hx} + e^{-hx}\right)$ zeigt, dass die Ordinatenaxe eine Symmetrieaxe der Kettenlinie ist und dass diese Curve construirt werden kann, indem man die arithmetischen Mittel der Ordinaten der beiden symmetrisch gegen das Coordinatensystem liegenden logarithmischen Linien $hy = e^{hx}$ und $hy = e^{-hx}$ als Ordinaten aufträgt. Die Formel $hs = \frac{1}{2}\left(e^{hx} - e^{-hx}\right)$ liefert unmittelbar ihre Rectification. Aus beiden ergibt sich durch Addition und Subtraction:

$$h(y + s) = e^{hx}, \quad h(y - s) = e^{-hx}$$

und indem man diese Resultate miteinander multiplicirt: $h^2(y^2 - s^2) = 1$, oder $y^2 = s^2 + \frac{1}{h^2}$, d. h. wenn man die unter dem Scheitel liegende und von ihm um den Parameter abstehende Horizontale die **Directrix** der Curve nennt, **das Quadrat des Curvenabstandes von der Directrix ist gleich der Quadratsumme des Bogens vom Scheitel an bis zum Curvenpunkte und des Parameters.** Dieser Satz folgt auch unmittelbar aus der Eigenschaft der

hyperbolischen Functionen, vermöge welcher $\mathfrak{Cof}^2\,\omega - \mathfrak{Sin}^2\,\omega = 1$ ist. (Ueber die hyperbolischen Functionen vgl. Gronau, Theorie und Anwendung der hyperbolischen Functionen; Danzig 1865; oder Sohnke, Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung, 3. Aufl. von Heis, S. 85.)

Auch für die Quadratur der Kettenlinie lässt sich ein einfacher Satz aufstellen. Es ist nämlich den obigen Formeln zufolge

$$y\,dx = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\sin\psi} \cdot ds \sin\psi = \frac{ds}{h},$$

mithin $h\int_{x_0}^{x_1} y\,dx = (s - s_0)$, d. h. die Fläche, welche von den Perpendikeln, die von zwei Curvenpunkten auf die Directrix gefällt werden, von dem zwischenliegenden Stück der Directrix und des Bogens begrenzt wird, ist gleich dem Rechteck aus dem Parameter und diesem Bogenstück, also dem Bogen proportional.

Für die Spannung T ergibt sich dem vorigen §. zufolge $T = A\,\frac{ds}{dx}$, worin $A = T_0$ die Spannung im tiefsten Punkte bezeichnet; sie ist horizontal. Man kann T verschiedene Form geben. Es wurde der Parameter $\frac{1}{h}$ definirt durch die Gleichung $h = \frac{\delta g}{A}$ und war ferner $\frac{dy}{dx} = cotg\,\psi$, wodurch

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = cosec\,\psi$$

wird. Dies liefert zunächst

$$T = \frac{\delta g}{h}\,cosec\,\psi = T_0\,cosec\,\psi, \qquad T_0 = \frac{\delta g}{h}.$$

Es ist aber auch $hy = cosec\,\psi$, mithin:

$$T = \delta g y,$$

und wenn man $hs = cotg\,\psi$ heranzieht:

$$T^2 = T_0^2 + (\delta g s)^2.$$

Die Spannung in irgend einem Punkte ist daher proportional der Secante der Neigung der Tangente gegen die Horizontale, sie ist auch gleich dem Gewichte eines Fadentheiles gleich dem Abstande des Punktes von der Directrix und der Unterschied ihres Quadrates vom Quadrate der Horizontalspannung (im Scheitel) ist gleich dem Quadrate vom Gewichte des Bogens vom Scheitel bis zum Curvenpunkte.

In der letzteren Form folgt der Satz unmittelbar aus der §. 5., S. 637 gegebenen Methode zur Bestimmung der Spannung. Aus $T = \delta g y$ folgt, dass der Faden vom Scheitel bis zu irgend einem Punkte M im Gleichgewicht erhalten wird, wenn man denselben in M über eine kleine Rolle führt und ein Stück derselben bis zur Directrix überhängen lässt. Ebenso folgt, dass die Enden eines im Gleichgewicht befindlichen Fadens, welcher über zwei unendlich kleine Rollen hängt, bis zur Directrix hinabreichen, also beide in einer Horizontalen liegen; ferner dass, wenn ein geschlossener Faden über zwei kleine Rollen hingehängt wird, die beiden Kettenlinien, die er bildet, eine gemeinschaftliche Directrix haben. Denn die Spannungen beider Kettenlinien in je einem Aufhängepunkt sind gleich, also würden auch die Fadenstücke, welche die Kettenstücke im Gleichgewicht erhalten würden, falls der Faden an den Aufhängestellen durchgeschnitten würde, bis zu derselben Horizontalen hinabreichen.

Wir fanden §. 10., Nr. 4. für die Componente von P, welche in die Richtung des Krümmungshalbmessers fällt, die Formel $P \sin \alpha = \frac{T}{\varrho}$, worin α den Winkel bedeutet, den P mit der Tangente bildet. Hier ist nun $\alpha = -(\pi - \psi)$, $P = -\delta g = -T_0 h = -Th \sin \psi$, also $\varrho \sin^2 \psi = \frac{1}{h}$, welches zu einer leichten Construction des Krümmungshalbmessers der Kettenlinie führt. Da $T = T_0 \operatorname{cosec} \psi$ ist, so hat man auch $\varrho = \frac{T^2}{T_0^2 h}$, d. h. der Krümmungshalbmesser ist dem Quadrate der Spannung proportional. Uebrigens bemerkt man leicht, dass der Krümmungshalbmesser gleich der Normalen N ist, letztere vom Curvenpunkte bis zur Directrix gerechnet. Denn da die Tangente mit der Richtung der y den Winkel ψ bildet, so ist $y = N \sin \psi$. Nun gibt aber die eben gefundene Form für ϱ wegen $T = T_0 hy$ sofort $\varrho = hy^2 = hN^2 \sin^2 \psi$ und da $\varrho \sin^2 \psi = \frac{1}{h}$ bereits gefunden wurde, so folgt $\varrho = N$. Im Scheitel ist ϱ gleich dem Parameter.

Wir nehmen jetzt an, es sei ein schwerer Faden von der Länge l gegeben (Fig. 223.), welcher als Kettenlinie zwischen zwei Punkte A, B aufgehängt werden soll und wollen die Elemente dieser Curve bestimmen.

Nimmt man die noch unbekannte Directrix zur x-Axe und die Vertikale des Scheitels S zur y-Axe und bezeichnen x, y die Coordinaten von A, $x + a$, $y + b$ die von B, sodass a, b die Horizontal- und Vertikalprojection des Bogens $AB = l$ darstellen, so hat man für $SA = s$ und $SB = s + l$ den oben entwickelten Gleichungen zufolge:

$$h(y + s) = e^{hx}, \qquad h(y - s) = e^{-hx}$$

$$h(y + b + s + l) = e^{h(x+a)}, \quad h(y + b - s - l) = e^{-h(x+a)},$$

worin h den reciproken Werth des gleichfalls noch unbekannten Parameters $OS = \frac{1}{h}$ bezeichnet. Durch Elimination von y und s aus diesen vier Gleichungen gelangt man zu zwei, die Unbekannten x, h bestimmenden Gleichungen. Die Subtraction der übereinanderstehenden Gleichungen liefert nämlich:

$$h(b + l) = e^{hx}\left(e^{ha} - 1\right), \quad h(b - l) = e^{-hx}\left(e^{-ha} - 1\right) = e^{-hx} \cdot e^{-ha}\left(1 - e^{ha}\right)$$

und weiter liefert die Multiplication dieser Gleichungen, wodurch x eliminirt wird, zur Bestimmung von h die Gleichung:

$$h^2(l^2 - b^2) = e^{-ha}\left(e^{ha} - 1\right)^2.$$

Setzt man nun $ah = z$ und $\frac{1}{a}\sqrt{l^2 - b^2} = c$, so ergibt sich für z die transcendente Gleichung:

$$c = \frac{1}{z}\left(e^{\frac{1}{2}z} - e^{-\frac{1}{2}z}\right).$$

Durch sie ist zunächst z durch a, b, l auszudrücken, wodurch sodann $h = \frac{z}{a}$ und hiermit x aus der Gleichung $h(b + l) = e^{hx}\left(e^{ha} - 1\right)$, sowie y mit Hülfe der Gleichung der Curve $hy = \frac{1}{2}\left(e^{hx} + e^{-hx}\right)$ gewonnen werden. Die ganze Schwierigkeit beruht also in der Behandlung der transcendenten Gleichung für z. Hierzu kann man sich dreier Methoden bedienen: 1. der Entwickelung der rechten Seite dieser Gleichung in eine Potenzreihe, wodurch man erhält:

$$c = 1 + \frac{1}{3!}(\tfrac{1}{2}z)^2 + \frac{1}{5!}(\tfrac{1}{2}z)^4 + \cdots$$

2. der graphischen Darstellung, indem man z als Abscisse des Durchschnitts der Curve $y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}z} - e^{-\frac{1}{2}z}\right)$ mit der Geraden $y = \frac{1}{2}cz$ betrachtet, oder 3. indem man sich eine Tabelle entwirft, in welcher zu einem System von Werthen c die entsprechenden Werthe von z eingetragen sind oder aus welcher dieselben wenigstens leicht ermittelt werden können. Setzt man $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}z} + e^{-\frac{1}{2}z}\right) = \frac{1}{\sin\vartheta}$, so wird wegen $\frac{1}{\sin\vartheta} = \sqrt{1 + \cot g^2\vartheta}$ der Ausdruck $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}z} - e^{-\frac{1}{2}z}\right) = \cot g\,\vartheta$, mithin $e^{\frac{1}{2}z} = \cot g\,\vartheta + \frac{1}{\sin\vartheta} = \frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \cot g\,\frac{1}{2}\vartheta$ und folglich $\frac{1}{2}z = l\,\cot g\,\frac{1}{2}\vartheta$. Hierdurch nimmt die zu behandelnde transcendente Gleichung die Gestalt an:

$$\frac{1}{c} = tg\,\vartheta \cdot l\,\cot g\,\tfrac{1}{2}\vartheta\,.$$

Die Tafel hierfür, welche von Broch berechnet wurde und in Moigno, *leçons de mécanique analytique. Statique* p. 261, sowie auch in Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik, deutsch von Schlömilch, p. 162 aufgenommen ist, liefert zu $\frac{1}{c}$ den Werth von ϑ und es ergibt sich dann z durch die Gleichung $z = 2\,l\,\cot g\,\frac{1}{2}\vartheta$.

Aus der Gleichung $c = \frac{1}{z}\left(e^{\frac{1}{2}z} - e^{-\frac{1}{2}z}\right)$ lässt sich noch eine leichte Folgerung ziehen. Der Werth von c, also auch z ändert sich nicht, wenn $b = 0$, aber zugleich $\sqrt{l^2 - b^2}$ für l gesetzt wird. Ist aber $b = 0$, so liegen die beiden Aufhängepunkte in derselben Horizontalen. Bei gleichem a haben überhaupt alle die Kettenlinien denselben Parameter, für welchen $l^2 - b^2$ denselben Werth besitzt. Ist α^2 dieser gemeinsame Werth, also $l^2 = \alpha^2 + b^2$ und construirt man (Fig. 224.) zu $AB_0 = a$ die Linie $A_0B_0 = \alpha$, so ergibt sich zu jedem Aufhängepunkte B die Bogenlänge $aB = l$ für den Kettenbogen ASB.

Fig. 224.

Entwickelt man die rechte Seite der Gleichung $hy = \frac{1}{2}\left(e^{hx} + e^{-hx}\right)$ in eine Reihe, so ergibt sich $y - \frac{1}{h} = \frac{1}{2!}hx^2 + \frac{1}{4!}h^3x^4 + \cdots$ und für sehr kleine x, also in der Nähe des Scheitels, stimmt diese Gleichung näherungsweise mit der Gleichung $y - \frac{1}{h} = \frac{1}{2}hx^2$ überein, welche eine Parabel vom Parameter $\frac{4}{h}$ bedeutet. Galilei, welcher zuerst die Gestalt eines schweren, an zwei Punkten aufgehängten Fadens zu bestimmen suchte, hielt dieselbe für eine Parabel. Jac. Bernoulli behandelte dies Problem zuerst analytisch und von ihm rührt der Name „Kettenlinie" her (*Acta eruditorum.* Lipsiae 1690, p. 217, oder *Opera* T. I, p. 424). Joh. Bernoulli, Leibnitz und Huyghens gaben 1691 gleichfalls in den *Act. erudit.* Lösungen.

§. 12. Die Kettenlinie auf der schiefen Ebene. Ein homogener, schwerer Faden sei an zwei Punkten einer schiefen Ebene befestigt und liege auf der Ebene auf; dieselbe bilde mit der Vertikalen den Winkel α und werde zur xy-Ebene gewählt, sodass in ihr die x-Axe horizontal angenommen wird. Die y-Axe sei positiv nach oben gerichtet; die z-Axe, senkrecht zur xy-Ebene, liegt dann mit der y-Axe in einer Vertikalebene, welche der Neigungswinkel α enthält. Man hat alsdann behufs Anwendung der Gleichungen §. 9., Nr. 5.: $X = 0$,

$Y = - \delta g \cos \alpha$, $Z = - \delta g \sin \alpha$ und da $F = z = 0$ die Gleichung der Ebene des Fadens ist, $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 1$ und demnach $N_x = N_y = 0$, $N_z = N$, sodass die Gleichungen des Gleichgewichts werden:

$$d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(T \frac{dy}{ds}\right) - \delta g \cos \alpha ds = 0, \quad - \delta g \sin \alpha ds + N ds = 0.$$

Die beiden ersten sind die Gleichgewichtsbedingungen eines freien Fadens, auf dessen Punkte die Schwerkraft nicht mit der vollen Beschleunigung g, sondern mit deren Componente $g \cos \alpha$ wirkt; der Faden bildet daher auf der Ebene eine Kettenlinie und da die Bestimmung dieser Curve dem vorigen §. zufolge diese Beschleunigung nicht enthält, so bleibt die Fadencurve dieselbe, wenn die Ebene um die Horizontale beliebig gedreht wird und stimmt überein mit der Kettenlinie des freihängenden Fadens. Die letzte Gleichung gibt den Druck auf die Ebene: $N = \delta g \sin \alpha$; derselbe ist in allen Punkten der Fadencurve gleich, variirt aber mit dem Winkel α und verschwindet mit α, d. h. für die vertikale Lage des Fadens.

Ueber die Kettenlinie auf der Kugelfläche und auf Rotationsflächen überhaupt s. Gudermann, *de curvis catenariis sphaericis dissertatio analytico-geometrica*. Crelle, Journ. Bd. 33, S. 189 und 281; Biermann, *problemata quaedam mechanica functionum ellipticarum ope soluta*. Berolini 1865, p. 11. („*De catenariis in superficiebus curvis nonnullis rotatione generatis.*") — In mehrfacher Hinsicht wichtig ist die Abhandlung von Aebsch: „Ueber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens" (Crelle's Journal Bd. 57, S. 93, 1860).

§. 13. **Die Kettenlinie von constanter Spannung.** Ein schwerer biegsamer Faden sei an zwei Punkten befestigt; er sei nicht homogen, vielmehr sei die Masse so über ihn vertheilt, dass die Spannung in jedem Punkte der specifischen Masse desselben proportional sei. Man soll die Gestalt des Fadens und das Gesetz der Massenvertheilung längs desselben ermitteln (Coriolis).

Die Gleichgewichtsbedingungen

$$d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(T \frac{dy}{ds}\right) - \delta g ds = 0,$$

wozu noch $T = a\delta$ tritt, wo δ die specifische Masse des Punktes (xy) ist, liefern

$$T \frac{dx}{ds} = T_0, \quad T \frac{dy}{ds} = g \int_0^s \delta \cdot ds, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g}{T_0} \int_0^s \delta \cdot ds,$$

wenn wir den Bogen vom tiefsten Punkte an rechnen, in welchem $\frac{dy}{dx} = 0$ ist. Hiermit folgt weiter durch abermalige Differentiation $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{g\delta}{T_0} \frac{ds}{dx}$ oder vermöge $T_0 = T \frac{dx}{ds}$ und $T = a\delta$ die Differentialgleichung der Fadencurve:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

oder

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{a}.$$

Sie ergibt, indem man den tiefsten Punkt zum Ursprung wählt: $\frac{x}{a} = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}$, also nach einer nochmaligen Integration:

$$e^{\frac{y}{a}} \cdot \cos \frac{x}{a} = 1.$$

Die Curve hat unendlich viele congruente Aeste, welche in Vertikalstreifen von der Breite a theils diesseits, theils jenseits der Abscissenaxe liegen, die sie sämmtlich berühren. Die Grenzlinien der Streifen sind Asymptoten der Curve. Für die specifische Masse δ erhält man:

$$\delta = \frac{T}{a} = \frac{T_0}{a}\frac{ds}{dx} = \frac{T_0}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{T_0}{a} \sec \frac{x}{a}$$

und daher ist:

$$T = T_0 \sec \frac{x}{a}.$$

T_0 kann durch δ_0, die specifische Masse des Scheitels, ausgedrückt werden, nämlich $T_0 = a\delta_0$.

§. 14. **Die parabolische Kette.** Ein gewichtloser Faden sei in seinen Elementen ds durch Gewichte continuirlich belastet, welche proportional den Projectionen dx dieser Elemente auf die Horizontale sind; man soll die Gestalt des Fadens bestimmen.

Es sei p die Last, welche auf einen Bogen fällt, dessen Horizontalprojection die Längeneinheit ist, dann wird $-p\,dx$ die Belastung von ds sein und bestehen folglich die Gleichungen:

$$d\cdot T\frac{dx}{ds} = 0, \qquad d\cdot T\frac{dy}{ds} - p\,dx = 0.$$

Aus diesen folgt:

$$T\frac{dx}{ds} = T_0, \qquad T\frac{dy}{ds} = px + C,$$

wovon die erste Gleichung aussagt, dass die Horizontalcomponente der Spannung constant ist. Weiter ergibt sich aus der letzten mit Hülfe der ersten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{T_0}x + C_1,$$

wenn man $\frac{C}{T_0} = C_1$ setzt; die nochmalige Integration gibt

$$y = \tfrac{1}{2}\frac{p}{T_0}x^2 + C_1 x$$

und zeigt, dass die gesuchte Curve eine Parabel ist. Eine weitere Constante tritt nicht hinzu, wenn einer der Aufhängepunkte als Coordinatenursprung gilt. Ist die Spannweite des Curvenbogens $2a$, so geht die Curve durch den Punkt $x = 2a$, $y = 0$ und erhält man zur Bestimmung der Constanten C_1 die Gleichung: $0 = \frac{p}{T_0}\cdot 2a^2 + 2C_1 a$, d. h. $C_1 = -\frac{pa}{T_0}$, wodurch die Parabelgleichung die Form annimmt: $y = \frac{p}{T_0}(x^2 - 2ax)$. Verlegt man den Ursprung in die Mitte der Spannweite, so wird sie: $y = \frac{p}{T_0}(x^2 - a^2)$. Um die Horizontalspannung T_0 durch Elemente der Curve auszudrücken, wollen wir die Länge des Fadens mit L bezeichnen, d. h.

$$L = a\sqrt{1+\left(\frac{pa}{T_0}\right)^2} + \frac{T_0}{p}\, l\left(\frac{pa}{T_0} + \sqrt{1+\left(\frac{pa}{T_0}\right)^2}\right)$$

setzen. In den Anwendungen ist gewöhnlich der Unterschied $L - 2a$ zwischen der Bogenlänge und der Spannweite sehr klein und folglich auch die Ordinate $\frac{pa^2}{T_0}$ des Scheitels oder der Pfeil des Bogens und also auch $\frac{pa}{T_0}$ sehr klein und kann man daher die Wurzelgrösse und den Logarithmus in Reihen entwickeln, nämlich für $\frac{pa}{T_0} = z$:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{1+z^2} &= 1 + \tfrac{1}{1}\cdot\frac{z^2}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{z^4}{4} + \cdots \\ l\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) &= \frac{z}{1} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5} - \cdots \end{aligned}\right\} -1 < z < +1$$

setzen, wodurch $L = 2a + \frac{1}{3}\frac{p^2a^2}{T_0} + \cdots$ und folglich annähernd $T_0 = \frac{pa\sqrt{a}}{\sqrt{3l-2a}}$ wird.

§. 15. Die Kettenlinie constanter Spannung bei einer continuirlichen Belastung, welche in horizontalem Sinne gleichmässig vertheilt ist. Der biegsame Faden sei belastet durch sein eigenes Gewicht und ausserdem durch continuirlich über ihn vertheilte, den Horizontalprojectionen der Bogenelemente proportionale Gewichte; welches ist die Gestalt der Fadencurve, wenn das Gesetz der Massenvertheilung des Fadens so bestimmt ist, dass die Spannung in jedem Punkte der specifischen Masse δ desselben proportional sein soll?

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen sind die Gleichungen des Problems:

$$d\cdot T\frac{dx}{ds} = 0, \qquad d\cdot T\frac{dy}{ds} - (g\delta\,ds + p\,dx) = 0,$$

von denen die erste $T\frac{dx}{ds} = T_0$ liefert, sodass also $T = T_0\frac{ds}{dx}$. Die zweite Gleichung liefert dann mit Rücksicht auf die Bedingung $T = a\delta$, welche $T_0 = a\delta_0$ nach sich zieht:

$$T_0\frac{d^2y}{dx^2} = g\delta_0\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2 + p$$

und durch Integration derselben erhält man, indem man $\frac{dy}{dx} = y'$ setzt:

$$T_0\int^{\bullet}\frac{dy'}{g\delta_0(1+y'^2)+p} = x + C$$

oder

$$\frac{T_0}{\sqrt{\delta_0 g(p+\delta_0 g)}}\,Arctg\,\frac{y'\sqrt{\delta_0 g}}{\sqrt{p+\delta_0 g}} = x + C.$$

Im tiefsten Punkte ist $y' = 0$; legt man also die Ordinatenaxe durch ihn hindurch, so muss $C = 0$ werden und erhält man zur weiteren Integration die Gleichung:

$$y' = \sqrt{\frac{p+\delta_0 g}{\delta_0 g}}\cdot tang\,\frac{x}{T_0}\sqrt{\delta_0 g(p+\delta_0 g)},$$

aus welcher sich die Gleichung der Fadencurve, nämlich

$$e^{\frac{\delta_0 g}{T_0}y}\cdot cos\,\frac{x}{T_0}\sqrt{\delta_0 g(p+\delta_0 g)} = 1$$

ergibt, wenn der tiefste Punkt zum Coordinatenursprung gewählt wird. Vgl. c. I.

Die hier behandelte Aufgabe hat Wichtigkeit für das Problem der Kettenbrücken.

IX. Capitel.

Reduction der Attractions- und Repulsionskräfte von Massen, Agentien etc. Theorie des Potentials.

§. 1. Nachdem im V. Capitel die allgemeine Theorie der Reduction von Kräften, welche an einem unveränderlichen System angreifen, entwickelt worden ist, erscheint es angemessen, dieselbe auf einige besondere Gattungen von Kräften anzuwenden. Für die Parallelkräfte ist dies bereits geschehen und dabei der besondere Fall ausführlicher behandelt worden, dass die Parallelkräfte von gleichem Sinne sind und den Punkten, auf die sie wirken, constante, von der Lage im Raume unabhängige Beschleunigung ertheilen. Dies geschah mit besonderer Rücksicht auf die Schwere, welche für gewöhnliche Dimensionen in allen Punkten als eine Kraft von derselben Richtung, demselben Sinne und derselben unveränderlichen Beschleunigung g angenommen wurde, sodass ein Punkt von der Masse m durch das Gewicht mg in der Richtung nach dem Schwerpunkte der Erde afficirt erscheint. Parallelkräfte convergiren nach einem unendlich fernen Punkte; die nächst allgemeinere Kategorie von Kräften wird daher von solchen gebildet, deren Richtungen sich in einem Punkte in endlicher Entfernung schneiden und deren Sinn entweder diesem Punkte zugewandt oder von ihm abgewandt ist. Man nennt sie im ersten Falle Attractions- oder Anziehungskräfte, im letzteren Repulsions- oder Abstossungskräfte, jedoch unter der Beschränkung, dass die Beschleunigung, welche sie einem Punkte ertheilen, nach einem bestimmten Gesetze von der Entfernung von jenem Punkte und von dessen Masse oder der Menge eines in ihm befindlichen Agens, im Allgemeinen aber nicht von der Richtung abhängig ist. Jener Punkt heisst das Attractions- oder Repulsionscentrum. Wenn also ein System oder eine Parthie desselben Attractionskräften eines Centrums C unterworfen ist, so greift an jedem Punkte M von der Masse m eine Kraft $m\varphi$ an, gerichtet längs der Geraden MC, deren Beschleunigung φ eine bestimmte Function der Entfernung $MC = r$ und der Masse oder Menge Agens μ des Punktes C ist. Ein sehr allgemeiner Fall dieser Art ist $\varphi = \mu F(r)$, d. h. φ ist proportional μ. Greifen an den Punkten eines Systems Attractionskräfte an, welche blos einem einzigen Centrum zugehören, so sind dieselben als Kräfte, deren Richtungen nach einem Punkte convergiren, stets einer Einzelresultanten äquivalent, welche durch das Centrum hindurchgeht; ist dasselbe aber den Attractionen verschiedener Centra, oder einer continuirlichen Folge, oder einer eine Fläche oder eine Parthie des Raumes continuirlich erfüllenden Menge von Centris ausgesetzt, so lassen sich zwar die Attractionskräfte für jedes einzelne Centrum appart auf eine Einzelkraft reduciren, aber alle zusammen

und mithin auch die sämmtlichen Attractionskräfte des ganzen Systems, sind im Allgemeinen nicht wieder einer blosen Resultanten, sondern einer Resultanten in Verbindung mit einem resultirenden Paare äquivalent. Die Reduction auf diese beiden Elemente ist auf unzählige Arten möglich, insbesondere aber gibt es eine Reduction für die Centralaxe dieser Kräfte, für welche das Axenmoment des Paares der Resultanten parallel wird. So setzt eine sorgfältige Theorie der irdischen Schwere voraus, dass jeder Punkt eines schweren Körpers von Attractionskräften afficirt wird, deren Centra die verschiedenen Punkte des Erdkörpers sind; die Resultante aller dieser Kräfte ist das Gewicht des Körpers; vermöge der Gestalt des Erdkörpers geht diese Resultante nahezu durch dessen Mittelpunkt und verschwindet das resultirende Paar.

Von besonderer Wichtigkeit sind diejenigen Attractions- und Repulsionskräfte, welche wechselseitig so wirken, dass von irgend zwei Punkten M, M' jeder für den anderen Centrum der Anziehung oder Abstossung ist. Die Voraussetzung solcher Kräfte liegt der Newton'schen Theorie der allgemeinen Gravitation zu Grunde, von welcher die der irdischen Schwere nur ein specieller Fall ist. Es mögen die beiden Punkte materiell sein, jeder die Einheit der Masse enthalten und beide in der Entfernung gleich der Linieneinheit voneinander entfernt sein. An M greift dann eine Kraft an, welche durch M' als Centrum geht, an M' eine andere, welche durch M geht, beide seien einander gleich an Intensität, nämlich gleich ε; ihr Sinn ist im Falle, dass beide Punkte Centra der Anziehung oder Abstossung sind, entgegengesetzt und zwar übereinstimmend mit dem Sinne MM' an M und $M'M$ an M' im Falle der Anziehung, mit $M'M$ an M und MM' an M' im Falle der Abstossung; ihr Sinn ist derselbe, wenn der eine ein Centrum der Anziehung, der andere ein Centrum der Abstossung ist. Wird nun die Masse des Punktes M das $m$fache der Masseneinheit, wo m eine beliebige Zahl sein kann, so wird die Kraft, welche M afficirt, $m\varepsilon$, wenn auf jede in M befindliche Masseneinheit dieselbe, durch M' gehende Kraft wirkt und die an M' angreifende Kraft wird gleichfalls $m\varepsilon$, wenn jede in M befindliche Masseneinheit als ein Centrum der Wirkung auf M' angesehen wird. Aus denselben Gründen wird die Kraft $m\varepsilon$ an beiden Punkten zu $mm'\varepsilon$, wenn die Masse von M' zu m' wird. W e r d e n also a l l e m a t e r i e l l e n P u n k t e a l s C e n t r a d e r A n z i e h u n g o d e r A b s t o s s u n g f ü r e i n a n d e r a n g e s e h e n, s o s i n d d i e K r ä f t e, mit w e l c h e n j e z w e i P u n k t e g e g e n s e i t i g b e s c h l e u n i g t w e r d e n, i n d e r E i n h e i t d e r E n t f e r n u n g g l e i c h a n I n t e n s i t ä t und d e m P r o d u k t e i h r e r M a s s e n p r o p o r t i o n a l. Aehnliches findet statt, wenn die Punkte nicht als materiell, sondern als mit gewissen Agentien behaftet angesehen werden. Treten nun die Punkte M, M' aus der Einheit der Entfernung in die Entfernung r auseinander, so

werden die beiden Kräfte immerhin einander gleich bleiben, ihre gemeinsame Intensität wird aber von r abhängen und kann durch $\varepsilon m m' F(r)$ dargestellt werden. Nach dem Gesetze, welches Newton der allgemeinen Gravitationstheorie zu Grunde gelegt hat, ist $F(r) = \frac{1}{r^2}$, d. h. es nimmt die Kraftintensität mit dem Quadrate der Entfernung der beiden Punkte ab.

§. 2. Wir wollen zunächst eine Reihe von Attractionsproblemen behandeln, welche mit elementaren Mitteln durchführbar sind; später werden wir die Theorie der Kräftefunction entwickeln, von welcher alle derartige Untersuchungen abhängen.

1. Die Punkte des homogenen Kreisbogens AB (Fig. 225.) vom Radius r, zum Centriwinkel $ACB = 2\alpha$ gehörig, ziehen einen im Mittelpunkte C befindlichen Punkt von der Masse μ nach dem Newton'schen Gesetze an; man soll die Resultante R aller Anziehungskräfte bestimmen, wenn die constante specifische Masse des Bogens ϱ ist.

Fig. 225.

Die Masse des im Punkte M verschwindenden Linienelementes MM' ist $\varrho \cdot \overline{MM'}$ und die Kraft, mit welcher dasselbe den Punkt C in der Richtung CM afficirt, $\frac{\varepsilon \mu \varrho \cdot \overline{MM'}}{r^2}$; sie zerfällt in zwei Componenten, eine parallel der Sehne AB, die andere längs des Radius CD. Für Winkel $MCD = \vartheta$ ist letztere $\frac{\varepsilon \mu \varrho \cdot \overline{MM'}}{r^2} \cos \vartheta$, die erstere kommt für die Bildung der Resultanten R nicht in Betracht, da je zwei symmetrisch gegen den Radius CD gelegene Punkte M entgegengesetzt gleiche Componenten parallel der Sehne liefern und sich dieselben paarweise tilgen. Die totale Attractionskraft hat die Richtung von CD und ist die Summe aller Componenten längs dieser Linie. Nun ist aber $MM' \cdot \cos \vartheta$ die Projection QQ' des Elementes MM' auf die Sehne AB, weil die Tangente in M mit AB gleichfalls den Winkel ϑ bildet, daher ist $R = \frac{\varepsilon \mu \varrho}{r^2} \Sigma \overline{QQ'} = \frac{\varepsilon \mu \varrho \cdot \overline{AB}}{r^2}$. Denkt man sich die Sehne AB mit Masse von derselben Beschaffenheit wie die des Bogens belegt, so ist dieselbe $\varrho \cdot AB$ und wenn diese in den Punkt D concentrirt gedacht wird, so zieht D den Punkt C mit derselben Kraft R an. Daher der Satz:

Die Attractionskraft, mit welcher ein homogener Kreisbogen einen im Mittelpunkte befindlichen Punkt afficirt, ist nach der Mitte des Bogens gerichtet und gleich der Attraction, welche dieser Mittelpunkt ausüben würde, wenn in ihm die Masse der Sehne vereinigt wäre, letztere von derselben specifischen Masse gedacht, wie der Bogen.

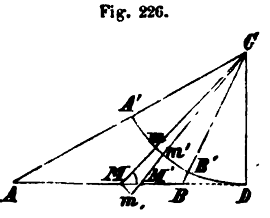
Da $\frac{AB}{r} = 2 \sin \alpha$ ist, so kann man R die Form geben:

$$R = \frac{2 \varepsilon \mu \varrho}{r} \sin \alpha.$$

2. Eine homogene Strecke AB (Fig. 226.) von der specifischen Masse ϱ zieht einen ausser ihr gelegenen Punkt C von der Masse μ nach dem Newton'schen Gesetze an; man soll Richtung und Intensität der Attraction bestimmen.

Beschreibt man um C einen Kreis $A'B'D$, welcher die Richtung der Strecke AB in D berührt und denkt sich den Bogen $A'B'$, dessen Centralprojection von C aus die Strecke AB ist, von derselben specifischen Masse, wie diese Strecke, so sind die Attractionskräfte, welche irgend zwei dem Strale CmM anliegende Elemente MM', mm' der Strecke und des Bogens auf C ausüben,

Fig. 226.



$$\frac{\varepsilon\mu\varrho\cdot\overline{MM'}}{CM^2} \text{ und } \frac{\varepsilon\mu\varrho\cdot\overline{mm'}}{Cm^2}.$$

Bildet nun der Stral CM mit AB den Winkel ϑ und beschreibt man mit CM als Radius das Element Mm_1, welches mit MM' und mm' in demselben Centriwinkel MCm_1 liegt, so wird

$$mm' = Mm_1\cdot\frac{Cm}{CM} = \overline{MM'}\cdot\sin\vartheta\cdot\frac{Cm}{CM} = \overline{MM'}\cdot\frac{CD}{CM}\cdot\frac{Cm}{CM}$$
$$= \overline{MM'}\cdot CD\cdot\frac{Cm}{CM^2} = \overline{MM'}\cdot\frac{Cm^2}{CM^2}$$

und wenn man dies für mm' in den Ausdruck der Attractionskraft des Elementes mm' einführt, so wird er gleich dem Ausdruck der Kraft des Elementes MM'. Demnach üben je zwei entsprechende Elemente der Strecke und des Bogens gleiche Attraction auf C aus und ist daher auch die Resultante aller für beide dieselbe. Nach Nr. 1. folgt daher der Satz:

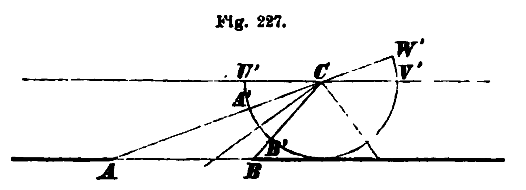
Eine homogene Strecke AB zieht einen äusseren Punkt C mit derselben Kraft an, wie der homogene Bogen eines Kreises derselben specifischen Masse, welcher AB zur Centralprojection von C aus hat und die Richtung der Strecke berührt. Die Richtung der Attractionskraft halbirt demnach den Winkel, unter welchem die Strecke vom angezogenen Punkte aus erscheint und ihre Intensität ist $\frac{2\varepsilon\mu\varrho}{a}\sin\frac{1}{2}\alpha$, wenn α dieser Winkel und a der Abstand des Punktes von der Richtung der Strecke ist.

Beschreibt man in der Ebene der Figur eine Hyperbel, deren Brennpunkte A, B sind und welche durch den Punkt C geht, so halbirt die Tangente derselben in C den Winkel ACB. Construirt man daher das ganze System der für A, B confocalen Hyperbeln, so gibt für jeden Punkt der Ebene die Tangente der durch ihn hindurchgehenden Hyperbel die Richtung der Attractionskraft an, welche die Strecke AB auf ihn ausübt. Diese Hyperbeln heissen daher die Kraftlinien für das Attractionsproblem. Construirt man durch C eine Ellipse, welche A, B zu Brennpunkten hat, so ist die Halbirungslinie des Winkels ACB zu ihr normal; der Punkt C befindet sich daher auf ihr unter Einfluss der Attraction von AB und des Normalwiderstandes im Gleichgewicht. Daher sind die zu A, B confocalen Ellipsen die Niveaulinien des Problems für die Punkte C in der Ebene. Lässt man die Ellipsen um AB als Axe rotiren, so erzeugen sie Rotationsellipsoide, deren Normalen die Halbirungslinien der Winkel ACB aller Punkte C des Raumes sind. Sie sind die Niveauflächen der Attraction der Strecke AB bezüglich der Punkte des Raumes.

Nehmen wir an (Fig. 227.), der homogene Stral, welcher von A nach dem Unendlichen hinläuft, stosse den Punkt C ab, der Stral von B nach dem Unendlichen aber ziehe C mit derselben homogenen Masse an, so kann statt dessen der Bogen $A'U'$, dessen Centralprojection der abstossende Stral ist, als abstossend und der Bogen $B'V'$, dessen Centralprojection der anziehende Stral ist, als

anziehend substituirt werden. Für den abstossenden Bogen $A'U'$ aber kann man den ihm congruenten, im entgegengesetzten Scheitelraume liegenden Bogen $V'W'$ als anziehend einführen. Daher ist die Gesammtwirkung beider Stralen, des anziehenden und des abstossenden zusammen, gleich der Anziehung des Bogens $B'W'$. Die Attractionskraft desselben halbirt aber den Winkel $B'CW'$ und steht, da dieser der Nebenwinkel zu ACB ist, auf der Halbirungslinie des letzteren, welcher die Richtung für die Attraction der Strecke AB angibt, senkrecht. Ihre Richtung ist die Tangente der zu A, B confocalen, durch C gehenden Ellipse und normal zu der ihr confocalen Hyperbel. Daher ist diese Ellipse Kraftlinie für die Wirkung der beiden Stralen und das Rotationshyperboloid um AB als Axe, dessen Generatrix die Hyperbel ist, eine Niveaufläche.

Fig. 227.

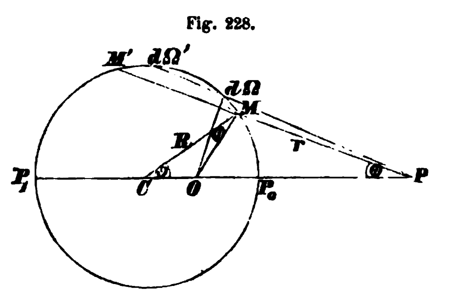


Diese Betrachtung liefert den Satz:

Die Schaar Rotationsellipsoide um dieselbe Axe, welche unter einander confocal sind für zwei Punkte A, B dieser Axe als Brennpunkte, bildet die Niveauflächen für die Newton'sche Attraction der homogenen Strecke AB, die Schaar von Rotationsdoppelhyperboloiden um dieselbe Axe, welche für dieselben Brennpunkte confocal sind, bildet die Niveauflächen für die Gesammtwirkung der von A und B nach dem Unendlichen verlaufenden homogenen Stralen, wenn von ihnen der eine nach dem Newton'schen Gesetze anziehend, der andere nach demselben Gesetze abstossend wirkt.

3. **Attraction einer homogenen Kugelfläche** (Fig. 228.). Es sei C der Mittelpunkt, R der Radius und ϱ die specifische Masse derselben, P der angezogene Punkt von der Masse μ, a seine Entfernung PC vom Mittelpunkte und liege P zunächst im Aussenraume der Kugel. Durch P ziehen wir einen beliebigen Stral PMM', welcher die Kugelfläche in M und M' schneidet und sei $PM = r$. Das Flächenelement $d\Omega$ in M zieht alsdann P mit der Kraft $\varepsilon\mu\varrho\cdot\frac{d\Omega}{r^2}$ an und die längs PC gerichtete Componente derselben, auf welche allein es hier ankommt, da die zu PC senkrechten, von den verschiedenen Flächenelementen herrührenden Componenten sich vermöge der Symmetrie der Figur paarweise tilgen, ist $\varepsilon\mu\varrho\cdot\frac{d\Omega}{r^2}\cos\varphi$, wenn Winkel $MPC = \varphi$. In dem Dreieck PCM tragen wir an M den Winkel $CMO = \varphi$ an und erhalten $\triangle CMO \sim \triangle PCM$, wofür demnach die Proportion besteht:

Fig. 228.



$$\frac{CO}{R} = \frac{R}{a} = \frac{OM}{r},$$

woraus $\overline{CO}\cdot a = R^2$ folgt, sodass O ein und derselbe Punkt für alle Elemente $d\Omega$ bleibt, nämlich der vierte harmonische Punkt zu P als dem einen und den Durchschnitten P_0, P_1 von PC mit der Kugel als dem anderen Paare zugeordneter Punkte. Durch den Umfang des Flächenelementes $d\Omega$ legen wir ferner von O aus einen unendlich schmalen Kegel. Derselbe schneidet aus einer um O mit OM

beschriebenen Kugelfläche ein Element $d\Omega_1$ aus und da die beiden Elemente $d\Omega$, $d\Omega_1$ mit einander demselben Winkel φ einschliessen, wie die Radien CM und OM der Kugelflächen, denen sie angehören und auf welchen sie senkrecht stehen, so wird $d\Omega \cdot \cos\varphi = d\Omega_1$ und mithin die Attractionscomponente von $d\Omega$ längs PC gleich $\varepsilon\mu\varrho \cdot \frac{d\Omega_1}{r^2}$. Nun sei $d\omega$ dass Mass des körperlichen unendlich kleinen Winkels O, welcher über $d\Omega_1$ steht, d. h. die Grösse eines Kugelflächenelementes vom Radius gleich der Längeneinheit, welches von dem unendlich schmalen Kegel ausgeschnitten wird; dann ist $d\Omega_1 = \overline{OM}^2 \cdot d\omega$ und folglich die fragliche Attractionscomponente $\varepsilon\mu\varrho \cdot \frac{\overline{OM}^2}{r^2} \cdot d\omega$. Obiger Proportion zufolge geht dieser Ausdruck aber über in $\varepsilon\mu\varrho \cdot \frac{R^2}{a^2} \cdot d\omega$. Eine ähnliche Componente von derselben Richtung und demselben Sinne liefert das Flächenelement bei M' und wenn $d\omega'$ das Mass des über ihm stehenden Winkelraumes ist, so ist ihr Ausdruck $\varepsilon\mu\varrho \cdot \frac{R^2}{a^2} \cdot d\omega'$. Legt man nun von P aus an die Kugel den Tangentenkegel, so berührt er dieselbe in dem Kreise, in welchem sie von einer in O auf CP senkrechten Ebene geschnitten wird. Diese Ebene zerfällt die Kugelfläche in zwei Theile, von denen der eine die Elemente $d\Omega$ enthält, welche Punkten M anliegen, während der andere solche enthält, welche Punkten M' angehören. Erstere liefern auf der um O mit dem Radius gleich der Einheit beschriebenen Kugel Flächenelemente $d\omega$, letztere solche $d\omega'$. Summiren wir jetzt alle Componenten längs PC, welche von den verschiedenen Elementen der Kugelfläche herrühren, so ergibt sich, weil $\Sigma d\omega + \Sigma d\omega' = 4\pi$, nämlich gleich der ganzen Kugelfläche vom Radius Eins und also das Mass des vollen Winkelraumes ist, als Gesammtcomponente der Attraction:

$$\frac{4\pi\varepsilon\varrho R^2}{a^2}.$$

Die Masse M der Kugelfläche ist $M = 4\pi\varrho R^2$ und wenn man dieselbe im Mittelpunkte C concentrirt denkt, so würde dieser Punkt auf P die Anziehung $\frac{\varepsilon\mu M}{a^2}$ ausüben. Daher der Satz:

Eine homogene Kugelfläche zieht einen Punkt des Aussenraumes ebenso an, als ob ihre Masse im Kugelmittelpunkte vereinigt wäre.*)

Denkt man sich den Punkt P als Spitze eines schmalen Kegels, welcher das Element $d\Omega$ an M enthält, so schneidet derselbe aus der Kugelfläche bei M' ein Element $d\Omega'$ aus, dessen Ebene gegen den Stral PMM' dieselbe Neigung ψ hat, wie $d\Omega$. Man hat $\sin\psi = \frac{1}{2}\overline{MM'} : R$. Wird daher der Winkelraum dieses Kegels mit $d\varpi$ bezeichnet, so sind für $PM = r$, $PM' = r'$ die Grössen $r^2 d\varpi$, $r'^2 d\varpi$ die Projectionen von $d\Omega$, $d\Omega'$ auf Ebenen senkrecht zu r und folglich $r^2 d\varpi = \frac{MM'}{2R} d\Omega$, $r'^2 d\varpi = \frac{MM'}{2R} d\Omega'$, woraus $d\Omega : d\Omega' = r^2 : r'^2$ folgt. Es war ferner

$$\frac{d\Omega}{r^2}\cos\varphi = \frac{R^2}{a^2} d\omega,$$

daher ist

$$d\varpi = \frac{MM' \cdot R}{2a^2 \cos\varphi} d\omega,$$

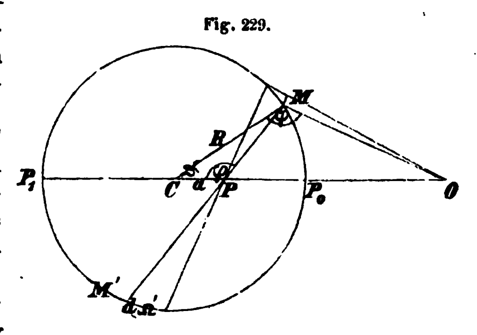
---

*) Die hier gegebene Ableitung dieses Satzes verdanke ich einer freundlichen Bemerkung meines Collegen, Hrn. Prof. Lüroth, die Behandlung desselben Satzes bei Thomson and Tait (*Treatise on natural philosophy*, T. I, p. 349) betreffend.

also $\frac{d\omega}{d\varpi} = \frac{2a^2 \cos\varphi}{MM' \cdot R}$. Das zu $d\Omega'$ gehörige $d\omega'$ ergibt sich vermöge der Relation $\frac{d\Omega'}{r'^2} \cos\varphi = \frac{R^2}{a^2} d\omega'$; man erhält hierfür $d\varpi = \frac{MM' \cdot R}{2a^2 \cos\varphi} \cdot d\omega'$, woraus $\frac{d\omega'}{d\varpi} = \frac{2a^2 \cos\varphi}{MM' \cdot R}$ folgt. Es ist mithin $d\omega = d\omega'$.

Nehmen wir jetzt an, der Punkt P liege im Innenraume der Kugel (Fig. 229.) und construiren den Punkt O auf dieselbe Weise, wie vorher, so wird derselbe jetzt in den Aussenraum fallen, da $CO \cdot CP = R^2$ und $CP < R$ ist. Die beiden Punkte M, M' und die ihnen anliegenden Elemente $d\Omega$ und $d\Omega'$ liegen auf entgegengesetzten Seiten von P und üben auf diesen entgegengesetzte Attractionen $\varepsilon\mu\varrho \frac{R^2}{a^2} d\omega$ und $\varepsilon\mu\varrho \frac{R^2}{a^2} d\omega'$ aus, welche gleich sind und sich folglich tilgen, da wegen der gleichen Neigung von $d\Omega$, $d\Omega'$ gegen MM' die Elemente $d\omega$ und $d\omega'$, wie oben, gleich werden. Eine homogene Kugelfläche übt daher auf einen inneren Punkt keine Anziehung aus und der Punkt befindet sich in jeder Lage im Innenraume im Gleichgewicht.

Fig. 229.



Dieser Satz folgt auch sofort aus der oben gegebenen Proportion $\frac{d\Omega}{r^2} = \frac{d\Omega'}{r'^2}$, wenn dieselbe beiderseits mit $\varepsilon\mu\varrho$ multiplicirt wird. Auch sieht man ein, dass wenn die Punkte M, M' über die Kugel hinlaufen, der Winkelraum des von O aus an die Kugel gelegten Tangentenkegels mit den Elementen $d\omega$, $d\omega'$ so belegt wird, dass die einen Elemente sich über die anderen hinlagern und wenn sie als mit entgegengesetztem Zeichen versehen angesehen werden, sich tilgen.

Rückt der Punkt P auf die Kugelfläche von der Seite des Aussenraumes, so wird die Kraft, mit welcher ihn die Kugel anzieht, $4\pi\varepsilon\mu\varrho$, da $a = R$; gelangt er auf der Innenseite auf dieselbe, so ist diese Kraft gleich Null.

Nach der obigen Methode kann man die Attraction jedes beliebigen Kugelflächenstücks auf einen Punkt P bestimmen, sobald dasselbe in Bezug auf den Durchmesser PC symmetrisch liegt, sodass die Attractionscomponenten senkrecht zu PC sich paarweise tilgen. Man erhält $\frac{\varepsilon\mu\varrho R^2 \omega}{a^2}$, wenn ω den Winkelraum eines Kegels bezeichnet, der von O aus durch die Grenzcurve des Flächenstücks hindurchgeht.

Die obigen Sätze bestehen fort, wenn an die Stelle der Kugelfläche eine unendlich dünne Kugelkruste von constanter specifischer Masse ϱ tritt; die Masse des Flächenelementes $\varrho \cdot d\Omega$ wird hierbei vertreten durch $\varrho \cdot d\Omega \cdot dR$, die Masse des unendlich kleinen Volumens $d\Omega \cdot dR$, wo dR die constante Dicke der Kruste bedeutet. Indem man solcher Krusten unendlich viele übereinander lagert, wobei die specifische Masse von Kruste zu Kruste variiren kann, gelangt man dazu, die Sätze auf eine Kugelschicht von endlicher Dicke auszudehnen. Für den Fall, dass der afficirte Punkt in der Masse der Schicht liegt, hat man die Schicht durch eine durch diesen Punkt gehende Kugelfläche in zwei Schichten zu spalten. In Bezug auf die äussere ist er ein dem Innenraume angehöriger, der Innenfläche anliegender Punkt, in Bezug auf die innere befindet er sich auf der Aussenfläche. Die Sätze lauten demnach:

Eine Kugelschicht von constanter oder von Schale zu Schale veränderlicher specifischer Masse zieht einen Punkt ihres Aussenraumes nach dem Newton'schen Gesetze in der Richtung nach ihrem Mittelpunkte an und zwar so, als ob ihre Masse in diesem Mittelpunkte vereinigt wäre; auf einen Punkt ihres Innenraumes übt sie keine Wirkung und ein Punkt ihrer Masse afficirt sie nur mit der Masse derjenigen Partialschicht, in Bezug auf welche er ein äusserer ist.

Eine Vollkugel zieht einen Punkt ihrer Masse mit der Masse desjenigen Theiles an, welcher von der durch den afficirten Punkt gehenden concentrischen Kugel umschlossen wird.

Ist x die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte, so ist demnach $\frac{4}{3}\pi\varepsilon\varrho x$ bei constanter specifischer Masse die Attractionskraft, also der ersten Potenz des Abstandes vom Mittelpunkte proportional. (Vgl. S. 229, Z. 6 v. u.)

Man dehnt diese Sätze leicht auf die Fälle der Attraction zweier Kugeln aufeinander aus.

4. **Andere Methode, die Attraction einer homogenen Kugelfläche zu bestimmen** (Fig. 228. und 229.) Für Winkel $PCM = \vartheta$, $PM = r$ hat man als Inhalt der schmalen Zone, welche das Linienelement bei M durch Rotation um CP erzeugt, $2\pi R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$ und da alle Elemente dieser Zone den Punkt P gleich stark anziehen und ihre Anziehungskräfte gleiche Neigung gegen CP haben, so ist die totale Attraction der Zone, längs PC gerichtet:

$$\varepsilon\mu\varrho \cdot 2\pi R^2 \cdot \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{r^2} \cdot \cos\varphi,$$

oder da $4\pi\varrho R^2 = M$ die Masse der Kugelfläche darstellt und

$$CP = a = R\cos\vartheta + r\cos\varphi$$

ist,

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon\mu M \cdot \frac{a - R\cos\vartheta}{r^3}\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

An die Stelle der Variabeln ϑ führen wir r ein. Hierzu dient

$$r^2 = a^2 + R^2 - 2aR\cos\vartheta,$$

woraus $r\,dr = aR\sin\vartheta\, d\vartheta$ folgt. Man erhält dann:

$$\tfrac{1}{4}\varepsilon\mu\frac{M}{a^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{R^2 - a^2}{Rr^2}\right)dr.$$

Hieraus erhält man für die Gesammtanziehung A der Kugel durch Integration nach r:

1. für einen äusseren Punkt, für welchen die Grenzen des Integrals $r = a - R$ und $r = a + R$ sind:

$$A = \tfrac{1}{4}\varepsilon\mu\frac{M}{a^2}\left(\frac{r}{R} + \frac{R^2 - a^2}{Rr}\right)_{a-R}^{a+R} = \frac{\varepsilon\mu M}{a^2},$$

2. für einen inneren Punkt, wofür die Grenzen $r = R - a$ und $r = R + a$ sind:

$$A = \tfrac{1}{4}\varepsilon\mu M\left(\frac{r}{R} + \frac{R^2 - a^2}{Rr}\right)_{R-a}^{R+a} = 0.$$

5. **Anziehung einer massiven homogenen Halbkugel auf einen Punkt ihres Randes** (Fig. 230.). Wir suchen die Componente der Attraction des Punktes A in der Richtung des Durchmessers AX des Randes, der Tangente

AY desselben und der zu beiden senkrechten, mit der Höhe der Halbkugel parallelen Richtung AZ. Vermöge der Symmetrie der Figur ist $Y = 0$.

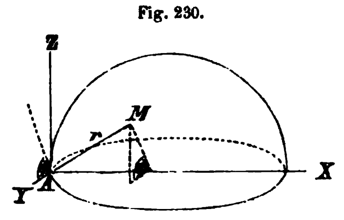


Fig. 230.

Sind r, ϑ, φ die Polarcoordinaten eines beliebigen Punktes M der Halbkugel, so ist $\varrho r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$ die Masse des demselben anliegenden Volumenelementes und sind

$$\varepsilon \mu \varrho \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \cos\vartheta,$$
$$\varepsilon \mu \varrho \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \sin\vartheta \sin\varphi$$

die Componenten seiner Attraction in der Richtung der X und Z; mithin:

$$X = \varepsilon\mu\varrho \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2R\cos\vartheta} \sin\vartheta \cos^2\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \tfrac{2}{3}\pi\varepsilon\mu\varrho R,$$

$$Z = \varepsilon\mu\varrho \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2R\cos\vartheta} \sin^2\vartheta \sin\varphi\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \tfrac{1}{3}\pi\varepsilon\mu\varrho R.$$

6. **Attraction einer homogenen Kreisfläche** (Fig. 231.) **auf einen Punkt P des im Mittelpunkte C auf sie errichteten Perpendikels.** Für Polarcoordinaten r, ϑ in der Kreisfläche für C als Pol ist die Masse des einem Punkte M (r, ϑ) anliegenden Flächenelementes $\varrho r\, dr\, d\vartheta$ und wenn $CP = h$, also

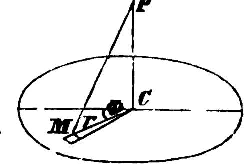


Fig. 231.

$$CM^2 = r^2 + h^2,$$

so ist die Componente der Attraction längs PC, auf welche sich die ganze Attraction reducirt:

$$\varepsilon\mu\varrho \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{h r\, dr\, d\vartheta}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\varepsilon\mu\varrho \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right) = \frac{2\varepsilon\mu M}{R^2}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right),$$

wenn R den Radius der Kreisscheibe und $M = \varrho\pi R^2$ deren Masse bedeutet.

Für $R = \infty$ erhält man die Anziehung der ganzen homogenen Ebene auf einen Punkt; sie ist $2\pi\varepsilon\mu\varrho$ und also unabhängig von der Entfernung des Punktes von ihr. Schneidet man die Kreisscheibe aus der Ebene heraus, so bleibt $\frac{2\pi\varepsilon\mu\varrho h}{\sqrt{R^2 + h^2}}$ für die Attraction des Aussenraumes der Kreisfläche auf einen über den Mittelpunkt um h entfernt liegenden Punkt.

7. **Attraction eines homogenen Kreiscylinders von der Länge l und dem Radius R auf einen Punkt seiner Axe.** Ist a die Entfernung des Punktes von der nächsten Grundfläche und der Punkt nicht der Masse des Cylinders angehörig, so hat man für die Anziehung, welche die Richtung der Cylinderaxe hat in Folge der vorigen Nr.:

$$2\pi\varepsilon\mu\varrho \int_a^{a+l} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right) dh = 2\pi\varepsilon\mu\varrho \left(l - \sqrt{(a+l)^2 + R^2} + \sqrt{R^2 + a^2}\right).$$

Für $l = \infty$ wird dieser Ausdruck $2\pi\varepsilon\mu\varrho\left(\sqrt{R^2 + a^2} - a\right)$ und wenn hierbei noch $a = 0$ ist, $2\pi\varepsilon\mu\varrho R$, welche Grösse die Attraction eines nach einer Seite unendlich langen Cylinders auf den Mittelpunkt seiner Kreisbasis ausdrückt.

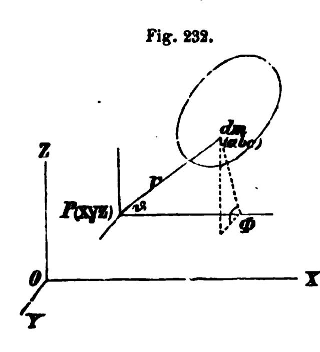
8. **Die Attraction eines abgestumpften geraden homogenen Kreiskegels auf einen Punkt seiner Axe zu bestimmen.**

9. **Von zwei gleich grossen parallelen Kreisscheiben gleicher specifischer Masse, welche beide senkrecht auf ihrer Centrallinie stehen, zieht die eine einen Punkt dieser Centralen an, während die andere ihn abstösst. Welches ist die Resultante dieser Kräfte?**

§. 3. Für Attractionen gibt es immer eine Kräftefunction, deren partielle Differentialquotienten die Componenten der Kraft sind. Diese Function ist eine blose Function des Ortes, d. h. der Coordinaten des afficirten Punktes, weil Attractionen blos von der Entfernung abhängen. Von dieser Kräftefunction ist das ganze Problem der Attraction, wie das Problem der Bewegung des Attractionskräften unterworfenen Punktes abhängig.

Es sei dm (Fig. 232.) das Element einer auf den Punkt $P(xyz)$ von der Masse μ anziehend wirkenden, irgend einen Raum erfüllenden continuirlichen oder auch aus discreten Theilen bestehenden Masse, ε die Anziehungskraft für die Einheit der Entfernung zweier in Punkte concentrirter Masseneinheiten und $F(r)$ das Anziehungsgesetz; dann ist $\varepsilon\mu\, dm\, F(r)$ die Intensität der Kraft, mit welcher das Massenelement dm und die Masse μ des Punktes P in der Entfernung r sich gegenseitig anziehen. Sind ferner a, b, c die Coordinaten von dm, so stellen $\frac{a-x}{r}$, $\frac{b-y}{r}$, $\frac{c-z}{r}$ die Richtungscosinusse der Linie r von P nach dm hinführend gedacht und sind mithin die Richtungscosinusse für die an P angreifende Anziehungskraft. Daher sind die Componenten derselben

Fig. 232.



$$\varepsilon\mu F(r)\,\frac{a-x}{r}\,dm, \quad \varepsilon\mu F(r)\,\frac{b-y}{r}\,dm, \quad \varepsilon\mu F(r)\,\frac{c-z}{r}\,dm.$$

Für den Fall der Abstossung erhalten die Cosinusse das umgekehrte Zeichen, welches man aber mit dem Factor ε vereinigt denken kann, sodass ε als positiv für Anziehungen, als negativ für Abstossungen angesehen wird. Die Summen aller Componenten, mit welchen die verschiedenen Massenelemente auf μ wirken, erhält man, indem man die vorstehenden drei Ausdrücke durch die ganze Masse hindurch integrirt oder, wenn dieselbe auf discrete Punkte vertheilt ist, von Punkt zu Punkt summirt. Diese Summen stellen die Componenten X, Y, Z der Gesammtattraction zwischen der Totalmasse und dem Punkte P, d. h. die Componenten der Kraft, mit welcher diese P angreift und $-X$, $-Y$, $-Z$ sind die Componenten der entgegengesetzt wirkenden, ebenso

grossen Kraft, mit welcher P auf jener Masse anziehend wirkt. Es sind demnach:

$$X = \varepsilon\mu \int F(r) \frac{a - x}{r} dm,$$

$$Y = \varepsilon\mu \int F(r) \frac{b - y}{r} dm,$$

$$Z = \varepsilon\mu \int F(r) \frac{c - z}{r} dm,$$

worin das Integralzeichen eine einfache, doppelte oder dreifache Integration anzeigt, je nachdem dm unendlich klein von der ersten, zweiten oder dritten Ordnung ist, d. h. das Massenelement einer Linie, einer Fläche oder eines Körperraumes ist, über welchen die Masse vertheilt ist. Nun ist

$$r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2$$

und sind folglich (nach einer zuerst von Lagrange gemachten Bemerkung) die Cosinusse der Richtungswinkel

$$\frac{a - x}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{b - y}{r} = -\frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{c - z}{r} = -\frac{\partial r}{\partial z}$$

und hiermit werden

$$X = \varepsilon\mu \int - F(r) \frac{\partial r}{\partial x} dm,$$

$$Y = \varepsilon\mu \int - F(r) \frac{\partial r}{\partial y} dm,$$

$$Z = \varepsilon\mu \int - F(r) \frac{\partial r}{\partial z} dm,$$

und wenn man also $- F(r)$ als den Differentialquotienten einer Function $\varphi(r)$ darstellt, sodass $- F(r) = \varphi'(r)$ und $\varphi(r) = \int - F(r)\, dr$ wird, so nimmt die Grösse $- F(r) \frac{\partial r}{\partial x}$ die Gestalt $\varphi'(r) \frac{\partial r}{\partial x}$ an und geht in den partiell nach x genommenen Differentialquotienten $\frac{\partial \cdot \varphi(r)}{\partial x}$ von $\varphi(r)$ über. Ebenso wird

$$- F(r) \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \cdot \varphi(r)}{\partial y}, \quad - F(r) \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial \cdot \varphi(r)}{\partial z}.$$

und man erhält:

$$X = \varepsilon\mu \int \frac{\partial \cdot \varphi(r)}{\partial x} dm = \varepsilon\mu \frac{\partial \int \varphi(r)\, dm}{\partial x},$$

$$Y = \varepsilon\mu \int \frac{\partial \cdot \varphi(r)}{\partial y} dm = \varepsilon\mu \frac{\partial \int \varphi(r)\, dm}{\partial y},$$

$$Z = \varepsilon\mu \int \frac{\partial \cdot \varphi(r)}{\partial z} dm = \varepsilon\mu \frac{\partial \int \varphi(r)\, dm}{\partial z}.$$

Setzt man daher

$$U = \int \varphi(r)\, dm,$$

so erhält man schliesslich X, Y, Z durch blosse Differentiation von U nach x, y, z, nämlich:

$$X = \varepsilon\mu \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \varepsilon\mu \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \varepsilon\mu \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Die Function U von x, y, z, welche hierin auftritt, heisst die **Kräftefunction** der Attraction der gegebenen Masse und kann der Inhalt der geführten Untersuchung in den Satz zusammengefasst werden:

Wenn die Elemente dm einer Masse M nach dem Attractionsgesetze $F(r)$ auf einen Punkt P von der Masse μ wirken und man aus $F(r)$ zunächst die Function $\varphi(r) = \int - F(r)\,dr$ und aus ihr die Kräftefunction $U = \int \varphi(r)\,dm$ bildet, so sind die Componenten der Attractionskraft, welche an P angreift, die partiellen Differentialquotienten der Kräftefunction, genommen nach den Coordinaten x, y, z des afficirten Punktes, multiplicirt mit dessen Masse und dem Factor ε, welcher die Wirkung zweier Masseneinheiten in der Entfernung gleich der Linieneinheit darstellt.

§. 5. Die Intensität der Kraft P, mit welcher der Punkt (xyz) angezogen wird und ihre Richtung α, β, γ sind bestimmt durch die Gleichungen

$$P = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon\mu \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\cos\alpha}{X} = \frac{\cos\beta}{Y} = \frac{\cos\gamma}{Z} = \frac{1}{P}.$$

Mit derselben Kraft P, mit welcher die Masse auf den Punkt wirkt, wirkt dieser im entgegengesetzten Sinne auf sie; denn jedes Massenelement wird von ihm mit derselben Kraft afficirt, wie er von ihm, und die sämmtlichen von ihm herrührenden, an den verschiedenen Massenelementen angreifenden Elementarkräfte liefern, weil sie sich alle in ihm schneiden, eine der Kraft P entgegengesetzt gleiche Resultante, welche man an irgend einem Punkte der Masse, welcher auf ihrer Richtung liegt, angreifend denken kann.

Die Kraft P ist eine Function des Ortes (xyz); ihre Componenten parallel den Richtungen der Coordinatenaxen sind proportional den partiellen Differentialquotienten der Kräftefunction. Der Sinn hiervon ist folgender. Es sei U der Werth der Kräftefunction im Punkte xyz, U' ihr Werth in einem folgenden Punkte $(x + dx, y, z)$, für welchen blos x sich geändert hat, dann ist $U' - U$ die partielle Aenderung von U nach x und sie ist durch dx zu dividiren und mit $\varepsilon\mu$ zu multipliciren, um X zu erhalten. Es stellt daher

$$X dx = \varepsilon\mu \frac{(U' - U)}{dx} dx = \varepsilon\mu \frac{\partial U}{\partial x} dx$$

die Elementararbeit der Kraft P längs des Weges dx dar. Ebenso wird

$$Ydy = \varepsilon\mu \frac{\partial U}{\partial y} dy \quad \text{und} \quad Zdz = \varepsilon\mu \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

und wenn daher dx, dy, dz die Projectionen eines unendlich kleinen Weges ds sind, längs welches der afficirte Punkt aus der Lage (xyz) in die Lage $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ übergehend gedacht wird, so ist die Elementararbeit der Kraft P längs dieses Weges, welcher mit der Richtung von P den Winkel ϑ bilden mag:

$$P \cos\vartheta \cdot ds = Xdx + Ydy + Zdz = \varepsilon\mu \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right),$$

also die Componente $P\cos\vartheta$ in der Richtung von ds:

$$P\cos\vartheta = \varepsilon\mu \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right) = \varepsilon\mu \frac{dU}{ds},$$

Diese Componente wird also erhalten, indem man die Aenderung der Kräftefunction längs des Weges ds durch ds dividirt und mit $\varepsilon\mu$ multiplicirt.

Die Kräftefunction hat im Allgemeinen als Function des Ortes (xyz) in den verschiedenen Punkten des Raumes verschiedene Werthe. Der Inbegriff aller Punkte (xyz), in welchem sie ein und denselben constanten Werth c besitzt, heisst eine Niveaufläche (s. S. 244) und $U = c$ stellt deren Gleichung dar. Indem man c alle reellen Werthe durchlaufen lässt, erhält man die ganze Schaar Niveauflächen des Attractionsproblems, welchem U zugehört. Durch jeden Punkt des Raumes geht eine Niveaufläche und wenn U in diesem Punkte eindeutig ist, nur eine. Die Richtungscosinusse der Normalen im Punkte (xyz) der Niveaufläche $U - c = 0$ sind proportional $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ und mithin proportional der Componenten X, Y, Z der Kraft P. Es hat daher in jedem Punkte des Raumes die Kraft P die Richtung der Normalen der durch diesen Punkt gehenden Niveaufläche und wenn dn die unendlich kleine Strecke dieser Normalen vom Fusspunkte bis zur folgenden Niveaufläche bedeutet, so stellt Pdn die Elementararbeit von P längs dieses Weges dar und ist also dem Obigen zufolge gleich $\varepsilon\mu\, dU$, wenn dU die Aenderung von U bedeutet, welche U bei diesem Uebergange zur folgenden Niveaufläche erleidet, sodass also $P = \varepsilon\mu \frac{dU}{dn}$ wird. Es ist daher die Intensität der Kraft dem Aenderungsverhältnisse der Kräftefunction längs der Normalen der Niveaufläche proportional; dieselbe ist für alle Punkte derselben Niveaufläche constant.

Eine Curve, welche das System der Niveauflächen in allen Punkten normal durchschneidet, gibt durch ihre Tangente in diesen Punkten die

Richtung der Kraft P an und heisst eine **Kraftlinie.** Zu jedem System der Niveauflächen gehört ein System von Kraftlinien, welche die orthogonalen Trajectorien desselben sind. Die Differentialgleichungen desselben sind, da $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Richtungscosinusse der Tangente einer Kraftlinie bedeuten:

$$\frac{dx}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}}.$$

Ist das System der Niveauflächen unter der Form $F(x, y, z, c) = 0$ gegeben, sodass die Gleichung desselben nicht nach der Constanten aufgelöst ist, so hat man aus

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad F(x, y, z, c) = 0$$

vor der Integration die Constante c zu eliminiren.

§. 5. Für die Newton'sche Attraction ist

$$F(r) = \frac{1}{r^2}, \quad \varphi(r) = \int -\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r}$$

und folglich

$$U = \int \varphi(r)\, dm = \int \frac{dm}{r}.$$

Die Kräftefunction für die Anziehung, welche umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung wirkt, heisst das Potential der anziehenden Masse in Bezug auf den angezogenen Punkt und ist das Integral des Massenelementes dividirt durch seine Entfernung vom angezogenen Punkte, ausgedehnt über die gesammte anziehende Masse. Wird dasselbe, wie üblich, mit v bezeichnet, so ist seine Definitionsgleichung

$$v = \int \frac{dm}{r}$$

und die Componenten der Attraction sind:

$$X = \varepsilon\mu \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Y = \varepsilon\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad Z = \varepsilon\mu \frac{\partial v}{\partial z}$$

oder

$$X = \varepsilon\mu \int dm \frac{\partial \cdot \frac{1}{r}}{\partial x} = \varepsilon\mu \int -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}\, dm = \varepsilon\mu \int \frac{a-x}{r^3}\, dm,$$

$$Y = \varepsilon\mu \int \frac{b-y}{r^3}\, dm, \quad Z = \varepsilon\mu \int \frac{c-z}{r^3}\, dm,$$

da

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2,$$

$$-\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{a-x}{r}, \quad -\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{b-y}{r}, \quad -\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{c-z}{r},$$

Wählt man (Fig. 232.) Polarcoordinaten r, ϑ, φ, deren Pol im angezogenen Punkte $(x\,y\,z)$ liegt, deren Polaraxe und Fundamentalebene der x-Axe und xy-Ebene parallel laufen, sodass

$$a - x = r \cos\vartheta,\quad b - y = r \sin\vartheta \cos\varphi,\quad c - z = r \sin\vartheta \sin\varphi$$

ist, so wird das Massenelement $dm = \varrho \cdot r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$ und erhält man für die Richtungscosinusse des Radiusvectors r gegen die Axen der x, y, z:

$$\cos g = \frac{a - x}{r} = \cos\vartheta,$$

$$\cos h = \frac{b - y}{r} = \sin\vartheta \cos\varphi,$$

$$\cos i = \frac{c - z}{r} = \sin\vartheta \sin\varphi.$$

Daher nehmen Potential und Kraftcomponenten die Gestalt an:

$$v = \int\!\!\int\!\!\int \varrho \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$X = \varepsilon\mu \int\!\!\int\!\!\int \varrho \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \cdot \cos g$$

$$= \varepsilon\mu \int\!\!\int\!\!\int \varrho \cos\vartheta \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \varepsilon\mu \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$Y = \varepsilon\mu \int\!\!\int\!\!\int \varrho \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \cdot \cos h$$

$$= \varepsilon\mu \int\!\!\int\!\!\int \varrho \sin^2\vartheta \cos\varphi\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \varepsilon\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$Z = \varepsilon\mu \int\!\!\int\!\!\int \varrho \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \cdot \cos i$$

$$= \varepsilon\mu \int\!\!\int\!\!\int \varrho \sin^2\vartheta \sin\varphi\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \varepsilon\mu \frac{\partial v}{\partial z}.$$

§. 6. Beispiele.

1. **Potential einer concentrisch geschichteten Hohlkugel (Fig. 233.).** Eine Hohlkugelschicht sei enthalten zwischen zwei concentrischen Kugelflächen von den Radien a, b; die specifische Masse ϱ sei blos eine Function des Abstandes vom Mittelpunkte, also für concentrische Krusten constant. Für Polarcoordinaten u, ϑ, φ, deren Pol im Mittelpunkte c liegt und deren Polaraxe und Fundamentalebene durch den afficirten Punkt P, für welchen $CP = x$ sei, gehen, hat man:

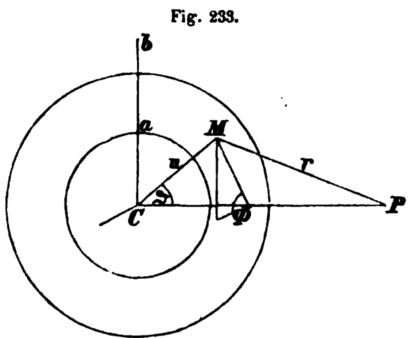


Fig. 233.

$$v = \int\!\!\int\!\!\int \varrho \frac{u^2}{r} \sin\vartheta\, du\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= 2\pi \int\!\!\int \varrho \frac{u^2}{r} \sin\vartheta\, du\, d\vartheta.$$

Führt man die Entfernung r des anziehenden Elementes vom afficirten Punkte als Variabele durch die Gleichung

$$r^2 = u + x^2 - 2ux\cos\vartheta$$

ein, welche $r\,dr = xu\sin\vartheta\,d\vartheta$ liefert, so wird

$$v = \frac{2\pi}{x}\int\int \varrho u\,du\,dr.$$

Hinsichtlich der Integrationsgrenzen für r und u sind die Fälle zu unterscheiden, ob der Punkt P dem äusseren Raume oder dem inneren Hohlraume angehört.

Für einen äusseren Punkt sind $x - u$ und $x + u$ die Grenzen für r und wird

$$v = \frac{4\pi}{x}\int_a^b \varrho u^2\,du,$$

oder weil

$$M = 4\pi\int_a^b \varrho u^2\,du$$

die Masse der Schicht ist, $v = \frac{M}{x}$. Die Componenten der Attractionskraft sind demnach:

$$X = \varepsilon\mu\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\varepsilon\mu M}{x^2}, \quad Y = \varepsilon\mu\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad Z = \varepsilon\mu\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

und die ganze Kraft $P = \frac{\varepsilon\mu M}{x^2}$ ist nach dem Mittelpunkte gerichtet und gleich der Anziehung der in diesem Punkte vereinigt gedachten Gesammtmasse der Schicht.

Für einen Punkt im inneren Hohlraume sind $u - x$ und $u + x$ die Grenzen für r und wird

$$v = 4\pi\int_a^b \varrho u\,du,$$

also constant. Daher sind $X = Y = Z = P = 0$ und übt die Schicht auf den Punkt keine Wirkung aus.

Liegt der Punkt in der Masse der Schicht selbst, so zerfällt diese in eine von den Radien a und x und eine andere von den Radien x und b. Für erstere ist der Punkt ein äusserer, für letztere ein innerer. Daher ist das Potential

$$v = \frac{4\pi}{x}\int_a^x \varrho u^2\,du + 4\pi\int_x^b \varrho u\,du.$$

Bei constanter specifischer Masse ϱ erhält man für den äusseren Punkt $v = \frac{4}{3}\frac{\pi\varrho}{x}(b^3 - a^3)$ und für die Vollkugel, für welche $a = 0$ ist: $v = \frac{4}{3}\pi\varrho b^3$; für den inneren Punkt $v = 2\pi\varrho(b^2 - a^2)$ und für den der Masse angehörenden Punkt:

$$v = \frac{4}{3}\pi\varrho\left(x^2 - \frac{a^3}{x}\right) + 2\pi\varrho(b^2 - x^2) = 2\pi\varrho\left(b^2 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}\frac{a^3}{x}\right)$$

und insbesondere bei der Vollkugel in diesem Falle: $v = 2\pi\varrho(b^2 - \frac{1}{3}x^2)$.

Für zwei Kugelschichten von den Mittelpunkten C, C' und den Massen M, M' sind die Potentiale für einen äusseren Punkt P gleich, wenn $\frac{M}{CP} = \frac{M'}{C'P}$. Der Ort der Punkte gleicher äusserer Potentiale ist daher eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt auf der Centralen CC' liegt und welche diese Strecke im Verhältniss $M : M'$ harmonisch theilt. Für drei Kugelschichten enthält der Schnittkreis zweier der-

drei Potentialkugeln die Punkte gleicher äusserer Potentiale für alle drei Schichten, daher schneiden sich die drei Potentialkugeln in einem und demselben Kreise. Bei vier Schichten gibt es sechs Potentialkugeln, welche eine gemeinsame Sehne besitzen, welche die beiden Punkte gleicher Potentiale für alle Schichten verbindet.

2. **Potential einer homogenen Kreislinie P_0MP_1 in Bezug auf einen äusseren Punkt P ihrer Ebene** (Fig. 234.). Für $CP = x$, $CM = R$, $PM = u$, Winkel $CP_0M = \vartheta$ ist zunächst:

$$v = \varrho \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\,R d\vartheta}{u},$$

da der Centriwinkel $MCM' = 2 \cdot MP_0M' = 2\,d\vartheta$ ist. Ferner ergibt sich u aus dem Dreieck PP_1M durch die Gleichung:

$$u^2 = (R + x)^2 + (2\,R \sin \vartheta)^2 - 2\,(R + x)\,2\,R \sin \vartheta \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \vartheta\right),$$

nämlich:

$$u^2 = (R + x)^2 - 4\,Rx \sin^2 \vartheta = (R + x)^2 \left[1 - \left(\frac{2\sqrt{Rx}}{R + x}\right)^2 \sin^2 \vartheta\right].$$

Hiermit wird:

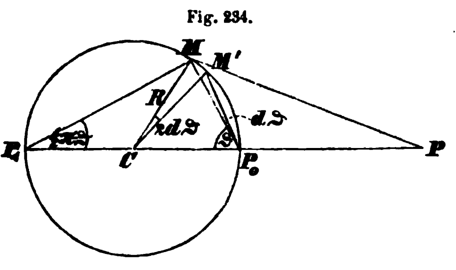
$$v = \frac{4\,\varrho R}{R + x} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{Rx}}{R + x}\right)^2 \sin^2 \vartheta}} = \frac{4\,\varrho R}{R + x}\, F\left(\tfrac{1}{2}\pi,\ \frac{2\sqrt{Rx}}{R + x}\right).$$

Die Niveaulinien sind Kreise, concentrisch mit dem anziehenden. Auf dem Umfange wird $v = \infty$ und von da nimmt es ab und verschwindet für $x = \infty$. — Das Potential hängt blos von dem Verhältnisse $\frac{x}{R}$ ab, denn es ist

$$\frac{R}{R + x} = 1 : \left(1 + \frac{x}{R}\right) \quad \text{und} \quad \frac{2\sqrt{Rx}}{R + x} = 2\sqrt{\frac{x}{R}} : \left(1 + \frac{x}{R}\right).$$

Für zwei in einer Ebene liegende Kreise von den Radien R, R' um die Mittelpunkte C, C' ist der geometrische Ort aller Punkte P der Ebene, welche in Bezug auf sie gleiche Potentiale bei gleicher specifischer Masse besitzen, so beschaffen, dass $\frac{CP}{R} = \frac{C'P}{R'}$. Der Ort ist daher ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Centralen CC' liegt und welcher die Centralstrecke im Verhältniss $R : R'$ harmonisch theilt. Für drei Kreise gibt es drei solcher Potentialkreise und da die Schnittpunkte zweier von ihnen gleiches Potential in Bezug auf alle drei Kreise besitzen, so geht der dritte Kreis durch die Schnittpunkte derselben. Alle drei besitzen daher eine gemeinschaftliche Sehne.

Fig. 234.



3. **Wirkung eines idealen Magnetes auf einen magnetischen Punkt.** Von zwei Punkten A und B ziehe A einen Punkt P an, B stosse ihn ab, beides mit Kräften, welche in der Einheit der Entfernung gleich und dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sind. A und B seien z. B. die Pole eines idealen Magnetes und P ein mit Magnetismus von der Art wie B behaftet. Sind r, r' die Entfernungen PA, PB, ist m die Quantität magne-

tischen Agens in A und B, so ist das Potential $v = \frac{\varepsilon m}{r} - \frac{\varepsilon m}{r'} = \varepsilon m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$. Die Niveauflächen sind Rotationsflächen um AB als Rotationsaxe und liegen symmetrisch gegen die Ebene, welche auf AB in dessen Mitte senkrecht steht. Die Gleichung des Systems der Niveauflächen in dem bipolaren System der Pole AB ist: $\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = C$. Für $C = 0$ ist die Niveaufläche die eben erwähnte Symmetrieebene, auf der Seite von A ist das Potential positiv, weil $r < r'$, auf der anderen ist es negativ. Wird C sehr gross im Negativen, so wird r sehr klein, also reducirt sich die Niveaufläche auf einen sehr kleinen, den Punkt A umgebenden Raum; für sehr grosse positive C findet dasselbe in B statt.

§. 7. Das Potential besitzt viele interessante und für die Anwendung auf mathematische Physik wichtige Eigenschaften, von denen wir einige entwickeln wollen. Dieselben erleiden mancherlei Modificationen, je nachdem die anziehende Masse oder das Agens einen körperlichen Raum erfüllt oder auf einer Fläche ausgebreitet oder längs einer Linie vertheilt ist oder sich in discreten Punkten befindet. Der letztere Fall bietet keine besonderen Schwierigkeiten dar; wir handeln hier zunächst und vorzugsweise von dem ersten. Einen wesentlichen Unterschied in allen derartigen Untersuchungen begründet der Umstand, dass der afficirte Punkt ausserhalb der anziehenden Masse liegen oder ihr selbst angehören kann. Was die Vertheilung des Agens im körperlichen Raume betrifft, so nehmen wir zunächst an, dass dasselbe ein allseitig begrenztes Continuum bilde oder aus mehreren getrennten Parthieen von derselben Eigenschaft bestehe und dass es in allen Punkten von endlicher specifischer Masse sei. Man kann dann behaupten:

Das Potential v und seine nach den Coordinaten des afficirten Punktes genommenen partiellen Derivirten $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ sind continuirliche Functionen von endlichem Werthe im ganzen Raume und die Grössen xv, yv, zv, sowie $x^2\frac{\partial v}{\partial x}$, $y^2\frac{\partial v}{\partial y}$, $z^2\frac{\partial v}{\partial z}$ überschreiten in keinem Theile desselben eine bestimmte angebbare Grenze.

Für einen der Masse nicht angehörenden Punkt (xyz) leuchtet die Endlichkeit und Continuität von $v = \int\frac{\varrho}{r}$, worin dt das Volumenelement und ϱdt dessen Masse dm darstellt, dt sofort ein, da ϱ und $\frac{1}{r}$ endlich sind, $\frac{\varrho}{r}dt$ immer unendlich klein ist und die Integration über endliche Räume erstreckt wird. Für den Fall, dass ϱ in einzelnen Punkten oder längs einer Linie oder Fläche eine plötzliche Aenderung erleidet, zeigt eine Spaltung des Integrals, dass dieser Umstand die Endlichkeit und Continuität desselben nicht beeinträchtigt. Dasselbe gilt von

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int \frac{a-x}{r^3}\,\varrho\,dt, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \int \frac{b-y}{r^3}\,\varrho\,dt, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \int \frac{c-z}{r^3}\,\varrho\,dt,$$

sowie von den Kraftcomponenten

$$X = \varepsilon\mu\,\frac{\partial v}{\partial x}, \quad Y = \varepsilon\mu\,\frac{\partial v}{\partial y}, \quad Z = \varepsilon\mu\,\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Für einen in der Masse des Agens selbst liegenden Punkt (xyz) leuchtet die Richtigkeit der Behauptung nicht unmittelbar ein, denn für die diesem Punkte nächst anliegenden Massenelemente wird $\frac{1}{r}$ unendlich gross und wenn auch

$$\frac{a-x}{r} = \cos g, \quad \frac{b-y}{r} = \cos h, \quad \frac{c-z}{r} = \cos i$$

endlich bleiben, so findet sich doch im Nenner des Elementarfactors der Ausdrücke für $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ und X, Y, Z noch die Grösse r^2 vor, welche die Endlichkeit derselben zweifelhaft macht. Indessen zeigt der Uebergang zu Polarcoordinaten für den Punkt (xyz) als Pol, dass in

$$v = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\varrho}{r} \cdot r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$\frac{X}{\varepsilon\mu} = \frac{\partial v}{\partial x} = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\varrho}{r} \cos g \cdot r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi,$$

$$\frac{Y}{\varepsilon\mu} = \frac{\partial v}{\partial y} = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\varrho}{r} \cos h \cdot r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi,$$

$$\frac{Z}{\varepsilon\mu} = \frac{\partial v}{\partial z} = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\varrho}{r} \cos i \cdot r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

die störenden Factoren des Nenners getilgt werden können. Nichtsdestoweniger scheint es nicht vollkommen streng auch für unendlich kleine r, diese Factoren sofort zu beseitigen und dadurch die unter der Form $\frac{0}{0}$ auftretende Unbestimmtheit zu heben. Vielmehr muss man für innere Punkte v, X, Y, Z neu definiren. Zu diesem Zwecke lege man um diesen Punkt eine kleine Kugelfläche und schliesse die Masse derselben zunächst bei der Aufstellung dieser Grössen aus, sodass man nur über die übrige, ausserhalb dieser Kugel liegende Masse hinweg integrirt, tilge die Nenner r gegen den im Zähler stehenden Factor r^2 und verstehe unter v, $\frac{X}{\varepsilon\mu}$, $\frac{Y}{\varepsilon\mu}$, $\frac{Z}{\varepsilon\mu}$ die Grenzwerthe

$$v = \lim \cdot \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, r \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi,$$

$$\frac{X}{\varepsilon\mu} = \lim \cdot \int\!\!\int\!\!\int \varrho \cos g \cdot r \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi,$$

$$\frac{Y}{\varepsilon\mu} = lim \cdot \int\int\int \varrho \cos h \cdot r \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi,$$
$$\frac{Z}{\varepsilon\mu} = lim \cdot \int\int\int \varrho \cos i \cdot r \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi,$$

welche man erhält, wenn die kleine Kugel sich auf den Punkt $(x\,y\,z)$ zusammenzieht. Man hat dann aber zu erweisen, dass die Derivirten des Potentials nach x, y, z auch in diesem Falle die Grössen $\frac{X}{\varepsilon\mu}$, $\frac{Y}{\varepsilon\mu}$, $\frac{Z}{\varepsilon\mu}$ darstellen. Nun erhält man aber z. B. $\frac{\partial v}{\partial x}$, wenn P' einen dem afficirten Punkte P in der Richtung der x in der Entfernung Δx benachbarten Punkt bezeichnet, für welchen $MP' = r'$ und v' der Werth des Potentials ist, indem man die Grenze von $\frac{v'-v}{\Delta x}$ für abnehmende Δx, d. h. die Grenze von

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\int\int\int \frac{\varrho}{r'} r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi - \int\int\int \frac{\varrho}{r} r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi\right)$$
$$= \int\int\int \varrho r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

bestimmt. Es ist aber

$$r' = (r^2 - 2\,r\,\Delta x \cos g + \Delta x^2)^{\frac{1}{2}} = r\,[1 - 2\,\Delta x\,(\cos g - \tfrac{1}{2}\,\Delta x^2)]^{\frac{1}{2}}$$

und folglich

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\left\{[1 - 2\,\Delta x\,(\cos g - \tfrac{1}{2}\,\Delta x)^2]^{-\frac{1}{2}} - 1\right\} = \frac{\Delta x}{r} \cos g + \cdots$$

Daher wird

$$\frac{\partial v}{\partial x} = lim \frac{v' - v}{\Delta x} = lim \int\int\int \varrho r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \cdot \frac{\cos g}{r} = \frac{X}{\varepsilon\mu}$$

und Aehnliches gilt für die beiden anderen Derivirten. Hiernach ist kein Zweifel mehr möglich über die Endlichkeit und Continuität von v, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, X, Y, Z für alle Punkte des Raumes und dürfen die Factoren r, r^2 der Nenner unter den Integralzeichen getilgt und Differentiationen nach x, y, z ausgeführt werden.

Behufs der Grenzen für xv, yv, zv; $x^2 \frac{\partial v}{\partial x}$, $y^2 \frac{\partial v}{\partial y}$, $z^2 \frac{\partial v}{\partial z}$ bemerke man, dass aus

$$r = [(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{1}{2}},$$

abgesehen vom Zeichen, also mit bloser Rücksicht auf absolute Werthe, folgt: $r > a - x$, also auch $\frac{1}{r} < \frac{1}{a-x}$ und wenn A das Maximum der Coordinate a ist, auch $\frac{1}{r} < \frac{1}{A-x}$. Hiermit ergibt sich

$$\int \frac{\varrho}{r}\, dt < \int \frac{\varrho}{A - x}\, dt,$$

d. h. weil $\int \varrho\, dt = M$ die anziehende Masse darstellt,

$$v < \frac{M}{A - x}$$

und mithin

$$x v < \frac{M x}{A - x}.$$

Da sich der absolute Werth von $\frac{x}{A - x}$ mit wachsendem x der Einheit nähert, so bleibt xv stets unter M als Grenze. Ebenso für die Grössen yv, zv. Ferner ist aus ähnlichen Gründen $\frac{1}{r^3} < \frac{1}{(a - x)^3}$, also

$$\int \frac{a - x}{r^3}\, \varrho\, dt < \int \frac{\varrho}{(a - x)^2}\, dt, \text{ d. h. } \frac{\partial v}{\partial x} < \frac{M}{(a - x)^2}$$

und folglich $x^2 \frac{\partial v}{\partial x} < M \left(\frac{x}{a - x}\right)^2$ und wenn man für a das Maximum A einsetzt, aus noch stärkerem Grunde $x^2 \frac{\partial v}{\partial x} < M \left(\frac{x}{A - x}\right)^2$ u. s. w.

Man kann die Grenze, welcher sich xv für wachsende x nähert, angeben. Denkt man den angezogenen Punkt in der Richtung der x-Axe nach dem Unendlichen sich entfernend, nennt u den Radiusvector vom Ursprunge O nach dem Massenelemente dm und ξ seine Projection auf die x-Axe, so ist die Entfernung

$$r = (x^2 + u^2 - 2 u \xi)^{\frac{1}{2}} = x \left(1 + \frac{u^2 - 2 u \xi}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

und folglich

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{u^2 - 2 u \xi}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{u^2 + 2 u \xi}{x^2} + \cdots\cdots\right).$$

Man hat dann

$$v = \int \frac{dm}{r} = \int \frac{dm}{x} - \tfrac{1}{2}\int \frac{u^2 - 2 u \xi}{x^2}\, dm + \cdots\cdot$$

Der Werth des ersten Integrales in dieser Reihe ist $\frac{M}{x}$, daher

$$x v = M - \tfrac{1}{2}\int \frac{u^2 - 2 u \xi}{x}\, dm + \cdots\cdot,$$

Für wachsende x nähern sich alle auf M folgenden Integrale der Null und wird also $\lim (xv) = M$. Ebenso für yv, zv. Dieser Satz lässt sich auch von anderer Seite her direct einsehen. Je weiter sich nämlich der angezogene Punkt in irgend einer Richtung entfernt, desto mehr nähern sich die Richtungen der anziehenden Kräfte dem Parallelismus und da letztere den Massen proportional sind, so bilden sie im Grenzfalle

ein System von Parallelkräften, deren Resultante durch den Mittelpunkt der Masse geht. Diese Resultante ist die Summe aller Kräfte und folglich

$$-\varepsilon\mu\,\Sigma\,\frac{dm}{r^2} = -\,\frac{\varepsilon\mu M}{r^2}$$

und ist also $\frac{M}{r}$ die Function v, deren partielle Differentialquotienten die Componenten der Attraction geben. Dies liefert aber zugleich den Satz:

Je weiter der afficirte Punkt sich von der anziehenden Masse entfernt, desto mehr nähert sich die Attractionskraft und das Potential der Attractionskraft und dem Potentiale des Massenmittelpunktes, wenn in demselben die Gesammtmasse vereinigt gedacht wird (s. S. 273 am Ende).

§. 8. Auch die zweiten und höheren Differentialquotienten des Potentials sind für Punkte, welche der Masse nicht angehören, bestimmte endliche Functionen von x, y, z. Für Punkte der Masse findet dies nicht immer statt, vielmehr gibt es besondere kritische Punkte, Linien und Flächen, in welchen bei Discontinuität der specifischen Masse auch eine Discontinuität der zweiten Differentialquotienten eintritt, sodass diese an solchen Stellen zwei verschiedene Werthe erlangen. Beim Durchgang des angezogenen Punktes durch die Oberfläche der Masse z. B., woselbst die specifische Masse plötzlich Null wird, ereignet sich dies. Bildet man $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ z. B., indem man

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int \frac{a-x}{r^3}\,\varrho\,dt$$

nochmals differentiirt, welches liefert

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \int\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3\,(a-x)^2}{r^5}\right)dt$$

und transformirt diesen Ausdruck auf Polarcoordinaten, wobei

$$dt = r^2 \sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi,\qquad \frac{a-x}{r} = \cos\vartheta$$

wird, so erhält man die Form

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \int\!\!\int\!\!\int \frac{-1+3\cos^2\vartheta}{r}\,\varrho\,\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi,$$

in welcher sich der Factor r nicht mehr hinweghebt und aus welcher man also in unserem Falle nichts über die Natur von $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ erkennen kann. Es muss daher hierfür eine ganz andere Methode der Discussion eintreten. Diese besteht darin, dass man das dreifache Integral, welches $\frac{\partial v}{\partial x}$ darstellt, in ein Doppelintegral umwandelt, welches über die Ober-

fläche der Masse zu erstrecken ist. Die nachfolgende Untersuchung wird in dieser Hinsicht den Satz beweisen:

Abgesehen von Punkten, in welchen die specifische Masse plötzlich ihren Werth ändert, sind auch die drei Grössen $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ endliche und eindeutige Functionen von x, y, z und bestehen für sie die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -4\pi\varrho,$$

erstere für einen äusseren, letztere für einen in der Masse liegenden Punkt, der sich an einer Stelle $(x y z)$ befindet, an welcher die specifische Masse gleich ϱ ist.

Von diesen beiden Gleichungen wurde die erstere von Laplace gegeben, die letztere, welche eine Verallgemeinerung der ersteren ist, indem sie für einen äusseren Punkt, für welchen der mit ihm zusammenfallende Massenpunkt die specifische Masse $\varrho = 0$ besitzt, mit der ersteren zusammenfällt, rührt von Poisson her.

Drücken wir das Massenelement $dm = \varrho\, dt$ durch $\varrho\, da\, db\, dc$ aus, so ist:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \iiint \frac{\partial \cdot \frac{1}{r}}{\partial x} \varrho\, da\, db\, dc.$$

Aus $r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$ folgt aber $r\frac{\partial r}{\partial x} = -(a-x)$ und andererseits $r\frac{\partial r}{\partial a} = a - x$; daher wird $\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial a}$ und also weiter $-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial a}$, d. h.:

$$\frac{\partial \cdot \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{r}\right)}{\partial a}.$$

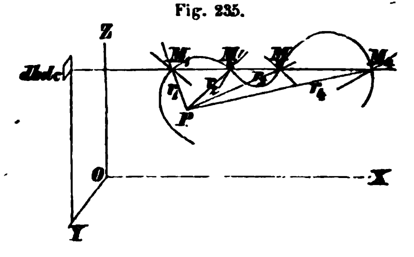
Hierdurch geht aber der Ausdruck für $\frac{\partial v}{\partial x}$ über in

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \iiint \frac{\partial\left(-\frac{1}{r}\right)}{\partial a} \varrho\, da\, db\, dc = \iint db\, dc \int \frac{\partial\left(-\frac{1}{r}\right)}{\partial a} \varrho\, da.$$

Denkt man sich nun über dem verschwindend kleinen Rechteck $db\, dc$ senkrecht zur Ebene der yz ein unendlich schmales Parallelepiped errichtet, so ist die Integration nach a auszudehnen über die Masse, welche dasselbe aus der Gesammtmasse herausschneidet. Es trete (Fig. 235.)

die Kante des Parallelepipeds, deren Punkte die Coordinaten b, c haben, bei M_1 in die Masse ein, bei M_2 aus, bei M_3 wieder ein, bei M_4 wieder aus u. s. f. und seien r_1, r_2, r_3, r_4, ... die Radienvectoren PM_1, PM_2,

Fig. 235.



PM_3, ..., welche nach diesen Punkten hinführen, sowie ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ... die Werthe von ϱ in denselben und a_1, a_2, a_3, ... ihre Coordinatenwerthe a. Nun ist allgemein:

$$\int \frac{\partial\left(-\frac{1}{r}\right)}{\partial a} \varrho\, da = -\frac{\varrho}{r} + \int \frac{1}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial a} da$$

und indem man dies Integral von a_1 bis a_2, von a_3 bis a_4 u. s. f. nimmt, erhält man:

$$\int \frac{\partial\left(-\frac{1}{r}\right)}{\partial a} \varrho\, da = -\frac{\varrho_2}{r_2} + \frac{\varrho_1}{r_1} - \frac{\varrho_4}{r_4} + \frac{\varrho_3}{r_3} - \cdots + \int \frac{1}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial a} da,$$

die beiden hier angedeuteten Integrationen längs der mit Masse belegten Kante des Parallelepipeds geführt gedacht. Demnach wird jetzt:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \iint db\, dc \left(\frac{\varrho_1}{r_1} - \frac{\varrho_2}{r_2} + \frac{\varrho_3}{r_3} - \frac{\varrho_4}{r_4} + \cdots\right) + \iint db\, dc \int \frac{1}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial a} da.$$

Die Elemente der Oberfläche der Masse, welche das Parallelepiped bei M_1, M_2, M_3, ... trifft, seien nun ds_1, ds_2, ds_3, ... und die Winkel, welche die nach aussen gerichtete Normale der Oberfläche in diesen Punkten mit der x-Axe bildet, seien α_1, α_2, α_3, ... Diese Winkel sind der Reihe nach abwechselnd stumpf und spitz, stumpf bei jedem Eintritt in die Masse, spitz beim Austritt aus derselben und sind also $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_3$, $\cos \alpha_5$, ... negativ, $\cos \alpha_2$, $\cos \alpha_4$, ... positiv. Nun stellt $db\, dc$ die gemeinschaftliche Projection aller Flächenelemente ds_1, ds_2, ... auf die yz-Ebene dar und wird also erhalten, indem man diese Elemente mit den Cosinussen ihrer Neigung gegen die yz-Ebene multiplicirt. Jedes Element bildet aber mit dieser Ebene einen Winkel, wie die Normale mit der x-Axe und da $db\, dc$ den absoluten Werth der Projection darstellt, so sind die Cosinusse der stumpfen Winkel α durch die Cosinusse ihrer spitzen Nebenwinkel zu ersetzen. Man hat daher

$$db\, dc = -ds_1 \cos \alpha_1 = + ds_2 \cos \alpha_2 = - ds_3 \cos \alpha_3 = + ds_4 \cos \alpha_4 = \cdots$$

und wenn man in dem ersten Integrale von $\frac{\partial v}{\partial x}$ unter dem Integralzeichen die Multiplication, mit $db\,dc$ ausführt und in jedem Bestandtheile der Summe für dieses Elementarrechteck seinen Ausdruck durch das dem betreffenden r und ϱ entsprechende Flächenelement ds einführt, wodurch man erhält:

$$-\cos\alpha_1\cdot\frac{\varrho_1}{r_1}\,ds_1-\cos\alpha_2\cdot\frac{\varrho_2}{r_2}\,ds_2-\cos\alpha_3\cdot\frac{\varrho_3}{r_3}\,ds_3-\cdots$$

so ist die Bedeutung des Integrales die, dass die Summe aller Elemente $-\frac{\varrho}{r}\cos\alpha\cdot ds$ über die ganze Oberfläche hinweg erstreckt, gebildet werden solle. Bezeichnen wir dies Oberflächenintegral mit

$$-\int\frac{\varrho}{r}\cos\alpha\cdot ds$$

und schreiben in dem zweiten Bestandtheile von $\frac{\partial v}{\partial x}$ wieder dt für $da\,db\,dc$, so kommt

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\int\frac{\varrho}{r}\cos\alpha\cdot ds+\int\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varrho}{\partial a}\,dt,$$

das erste Integral über die Oberfläche der Masse, das zweite über die körperliche Masse selbst zu erstrecken. Diese Gleichung gilt für einen äusseren Punkt, wie für einen inneren; für einen inneren Punkt hat man nun wieder die Masse einer kleinen Kugel um diesen Punkt herum auszuscheiden und den Grenzwerth zu suchen, welchem sich die rechte Seite nähert, wenn diese Kugel selbst die Null zur Grenze hat. Uebrigens setzt die Gleichung voraus, dass ϱ durch die ganze Masse hindurch continuirlich sei, damit $\frac{\partial\varrho}{\partial a}$ niemals unbestimmt werde.

Differentiiren wir jetzt die Gleichung nach x, welcher Operation nichts im Wege steht, da r blos in erster Potenz im Nenner vorkommt, und bilden die beiden analogen Gleichungen für $\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial z}$, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\int\frac{a-x}{r^3}\,\varrho\cos\alpha\,ds+\int\frac{a-x}{r^3}\,\frac{\partial\varrho}{\partial a}\,dt$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\int\frac{b-y}{r^3}\,\varrho\cos\beta\,ds+\int\frac{b-y}{r^3}\,\frac{\partial\varrho}{\partial b}\,dt$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-\int\frac{c-z}{r^3}\,\varrho\cos\gamma\,ds+\int\frac{c-z}{r^3}\,\frac{\partial\varrho}{\partial c}\,dt,$$

worin α, β, γ also die Richtungswinkel der nach aussen gerichteten Normale der Oberfläche der Masse bedeuten. Die Addition dieser drei Gleichungen liefert weiter:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-\int\left(\frac{a-x}{r}\cos\alpha+\frac{b-y}{r}\cos\beta+\frac{c-z}{r}\cos\gamma\right)\frac{\varrho}{r^2}ds$$
$$+\int\left(\frac{a-x}{r}\frac{\partial\varrho}{\partial a}+\frac{b-y}{r}\frac{\partial\varrho}{\partial b}+\frac{c-z}{r}\frac{\partial\varrho}{\partial c}\right)\frac{dt}{r^2}.$$

Zur Interpretation des ersten der beiden Integrale rechts dient die Bemerkung, dass der Cosinus des Winkels σ, den der Radiusvector r mit der Normalen der Oberfläche bildet,

$$\cos\sigma=\frac{a-x}{r}\cos\alpha+\frac{b-y}{r}\cos\beta+\frac{c-z}{r}\cos\gamma$$

ist und mithin das erste Integral, das wir mit N bezeichnen wollen, die Bedeutung hat:

$$N=\int\frac{\cos\sigma}{r^2}\varrho\,ds.$$

Behufs des zweiten Integrales, dessen Werth mit M bezeichnet werden möge, differentiiren wir die Gleichungen für die Richtungscosinusse des Radiusvectors r, nämlich:

$$r\cos g=a-x,\qquad r\cos h=b-y,\qquad r\cos i=c-z$$

so, dass blos der Radiusvector r und a, b, c als veränderlich gedacht werden, nicht aber seine Richtung. Dies liefert:

$$\cos g=\frac{\partial a}{\partial r},\qquad \cos h=\frac{\partial b}{\partial r},\qquad \cos i=\frac{\partial c}{\partial r}$$

und hiermit wird:

$$\frac{a-x}{r}\frac{\partial\varrho}{\partial a}+\frac{b-y}{r}\frac{\partial\varrho}{\partial b}+\frac{c-z}{r}\frac{\partial\varrho}{\partial c}=\frac{\partial\varrho}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{\partial\varrho}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial r}+\frac{\partial\varrho}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial r}=\frac{\partial\varrho}{\partial r},$$

wodurch M übergeht in

$$M=\int\frac{\partial\varrho}{\partial r}\frac{dt}{r^2}.$$

Demnach ist jetzt:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-N+M,$$
$$N=\int\frac{\cos\sigma}{r^2}\varrho\,ds,\qquad M=\int\frac{\partial\varrho}{\partial r}\frac{dt}{r^2}.$$

Jetzt verwandeln wir das dreifache Integral M in ein doppeltes. Sein Werth fällt verschieden aus, je nachdem der Punkt $P\,(xyz)$ der Masse angehört oder ausserhalb derselben liegt. Um P beschreiben wir eine Kugelfläche mit dem Radius 1 und zugleich durch das Oberflächenelement ds einen unendlich schmalen Kegel; derselbe schneidet aus der Kugel ein sphärisches Element $d\tau$ heraus, welches den körperlichen Winkel des Kegels misst. Das Volumenelement wird dann $dt=r^2dr\,d\tau$ und mithin:

$$M=\int\frac{\partial\varrho}{\partial r}\frac{dt}{r^2}=\int\frac{\partial\varrho}{\partial r}dr\,d\tau$$

und wenn wir nach r integriren und mit $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ die specifischen Massen in P und den Punkten bezeichnen, in welchen der Radiusvector die Oberfläche trifft (Fig. 236.):

$$M = \int (-\varrho + \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \cdots)\, d\tau,$$

welches Integral über die Kugelfläche oder einen Theil derselben auszudehnen ist, je nachdem P im Innern der Masse liegt oder nicht.

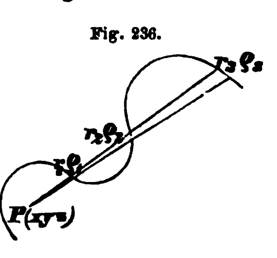


Fig. 236.

Für den inneren Punkt erstreckt sich das Integral über die ganze Kugelfläche. Der erste Bestandtheil $\int -\varrho_0\, d\tau$ liefert $-4\pi\varrho$, der Rest $\int(\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots)\, d\tau$ lässt sich leicht auf das Integral N reduciren. Sind nämlich r_1, r_2, $r_3, \ldots$ die Radienvectoren für die Schnittpunkte mit der Oberfläche, $ds_1, ds_2, ds_3, \ldots$ die Flächenelemente und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ die Winkel, welche die Normale daselbst mit dem Radiusvector bildet, so ist, weil r_1, ds_1, σ_1 dem ersten Austritt aus der Oberfläche, r_2, ds_2, σ_2 dem folgenden Wiedereintritt u. s. f. entsprechen:

$$r_1^2 d\tau = + ds_1 \cdot \cos\sigma_1, \quad r_2^2 d\tau = - ds_2 \cdot \cos\sigma_2, \quad r_3^2 d\tau = + ds_3 \cdot \cos\sigma_3, \ldots,$$

indem beide Seiten dieser Gleichungen die Projectionen der Flächenelemente auf die mit den Radien $r_1, r_2, r_3, \ldots$ beschriebenen Kugeln ausdrücken. Hieraus folgt:

$$d\tau = \frac{\partial s_1}{r_1^2} \cos\sigma_1 = - \frac{\partial s_2}{r_2^2} \cos\sigma_2 = \frac{\partial s_3}{r_3^2} \cos\sigma_3 = \cdots$$

und indem man diese Werthe einführt, hat man die Summe

$$\varrho_1 \frac{\cos\sigma_1}{r_1^2} ds_1 + \varrho_2 \frac{\cos\sigma_2}{r_2^2} ds_2 + \varrho_3 \frac{\cos\sigma_3}{r_3^2} ds_3 + \cdots,$$

welche sich auf die Richtung ein und desselben Radiusvectors bezieht, über die ganze Oberfläche zu integriren, d. h.: $\int \frac{\cos\sigma}{r^2} ds$ zu bilden, welches Integral mit N übereinstimmt. Es ist daher für einen inneren Punkt:

$$M = -4\pi\varrho + N$$

und also schliesslich:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -N + M = -4\pi\varrho,$$

unter ϱ die specifische Masse des mit P zusammenfallenden Massenpunktes verstanden.

Für einen äusseren Punkt liefert die Integration nach r:

$$M = \int (-\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3 + \varrho_4 - \cdots)\, d\tau$$

und weil jetzt beim ersten Schnittpunkte des Radiusvectors mit der Oberfläche ein Eintritt ins Innere, beim zweiten ein Austritt erfolgt u. s. f., so ist:

$$d\tau = -\frac{ds_1}{r_1^2}\cos\sigma_1 = +\frac{ds_2}{r_2^2}\cos\sigma_2 = -\frac{ds_3}{r_3^2}\cos\sigma_3 = \cdots$$

und hiermit erhält man für M folgendes, ebenfalls über die ganze Oberfläche auszudehnende Integral

$$M = \int \frac{\cos\sigma}{r^2}\,ds = N$$

und hiermit:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

Der Beweis des Satzes setzte zwar voraus, dass die specifische Masse an keiner Stelle sich sprungweise ändere, indessen lässt sich diese Beschränkung hinwegräumen, sodass der Satz auch dann noch Gültigkeit behält, wenn die specifische Masse Discontinuitäten zeigt. Es sei die Masse längs einer Fläche discontinuirlich. Auf einen äusseren Punkt hat dies keinen Einfluss, da man mit Hülfe dieser Fläche die Masse in zwei Theile zerlegen kann, sodass in jedem die specifische Masse continuirlich ist, also für jeden Theil das Potential der Laplace'schen Gleichung genügt, mithin auch das Gesammtpotential, welches die Summe der Potentiale beider Theile ist, ihr gleichfalls genügt. Aehnliches gilt, wenn die specifische Masse längs einer Linie oder in einzelnen Punkten discontinuirlich wird, indem man diese Gebilde als Grenzfälle von Flächen ansehen kann. Für einen inneren Punkt, der aber nicht an einer Discontinuitätsstelle liegen darf, kann man die Poisson'sche Gleichung dadurch beweisen, dass man um den Punkt einen Raum abgrenzt, innerhalb welches die specifische Masse durchaus continuirlich ist. Das Potential für diesen Raum sei v', das Potential für den übrigen Raum, für welchen der Punkt ein äusserer ist, v'', dann ist das Gesammtpotential $v = v' + v''$. Nach dem Vorstehenden ist aber

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} = -4\pi\varrho \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v''}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v''}{\partial z^2} = 0,$$

mithin wenn man beide Gleichungen addirt:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -4\pi\varrho.$$

Liegt der Punkt aber an einer Scheidestelle, so haben daselbst $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ doppelte Werthe und lassen acht verschiedene Combinationen zu, sodass in Folge dessen die Summe $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ achtwerthig wird.

§. 9. Die Bedingungen, dass die Function v und ihre Derivirten der ersten Ordnung endliche und continuirliche Functionen von x, y, z und dass xv, yv, zv; $x^2 \frac{\partial v}{\partial x}$, $y^2 \frac{\partial v}{\partial y}$, $z^2 \frac{\partial v}{\partial z}$ an feste Grenzen gebunden sind, die sie nicht überschreiten dürfen, dass ferner die zweiten Derivirten, abgesehen von Discontinuitäten längs Flächen, Linien oder in einzelnen Punkten, bestimmte eindeutige Werthe haben und v der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -4\pi\varrho$$

genügt, sind für das Potential charakteristisch, sodass es keine zweite Function derselben Eigenschaften gibt und die Function, die ihnen genügt, ist daher das Potential.

Dieser Satz, welcher von Dirichlet herrührt (Crelle's Journal, Bd. 32, S. 80) ergibt sich folgendermassen. Gesetzt, es seien v und v' zwei Functionen, welche den Bedingungen genügen und $v' - v = u$; man kann zeigen, dass u constant und gleich Null ist. Zunächst ist klar, dass dann auch u den beiden ersten Bedingungen genügt, während aus

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} = -4\pi\varrho, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -4\pi\varrho$$

für u die Differentialgleichung folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Integriren wir den Ausdruck zur Linken, mit u multiplicirt, über den Raum eines um den Coordinatenursprung als Mittelpunkt beschriebenen Würfels, dessen Kanten die Länge $2a$ und die Richtung der Axen haben, so sind die Discontinuitäten, da sie nicht durch einen körperlichen Raum hindurch, sondern höchstens auf Flächen stattfinden, ohne Einfluss auf diese dreifache Integration und ist

$$\int\int_{-a}^{+a}\int u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz = 0.$$

Nun ist aber vermöge der partiellen Integration:

$$\int_{-a}^{+a} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx = \left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx,$$

$$\int_{-a}^{+a} u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, dy = \left(u \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy,$$

$$\int_{-a}^{+a} u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\, dz = \left(u \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz$$

und folglich, wenn man diese Gleichungen addirt und nachher noch zweimal zwischen den Grenzen $-a$, $+a$ integrirt, vermöge der vorigen Relation:

$$\int\int\int_{-a}^{+a}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz$$

$$=\int\int_{-a}^{+a}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-a}^{+a}dy\,dz+\int\int_{-a}^{+a}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{-a}^{+a}dy\,dz+\int\int_{-a}^{+a}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{-a}^{+a}dy\,dz.$$

Vermöge der Bedingungen für v und v' hinsichtlich der Grenzen, unter welchen xv, xv', ... bleiben, folgt, dass auch $xu<\lambda$, also $u<\frac{\lambda}{x}$ bleibt, wo λ eine bestimmte Constante ist; ebenso ist $x^2\frac{\partial u}{\partial x}<\mu$, also $\frac{\partial u}{\partial x}<\frac{\mu}{x^2}$ und folglich

$$u\frac{\partial u}{\partial x}<\frac{\lambda\mu}{x^3}\quad\text{und}\quad\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-a}^{+a}<\frac{\varkappa}{a^3},$$

wo $\varkappa$ ebenfalls ein bestimmter constanter Werth ist. Daher wird

$$\int\int_{-a}^{+a}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-a}^{+a}dy\,dz<\frac{\varkappa}{a^3}\int\int_{-a}^{+a}dy\,dz,\quad\text{d. h.}\quad<\frac{4\varkappa}{a}$$

und mithin bleibt

$$\int\int\int_{-a}^{+a}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz<\frac{12\varkappa}{a}.$$

Da das Integral links positiv ist und die Grenze rechts für $a=\infty$ verschwindet, so folgt, dass sein Werth Null ist und hiermit weiter, dass $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ sämmtlich verschwinden, d. h. dass u constant ist. Dieser Werth kann aber nur Null sein, denn es ist auch für $x=\infty$ stets $xu<\lambda$.

§. 10. Als Beispiel zum vorigen §. wollen wir das Potential einer sphärischen Schicht bestimmen, wenn die specifische Masse auf concentrischen Kugelflächen constant ist und nur mit dem Abstande vom Mittelpunkte variirt.

Vermöge der vorausgesetzten Massenvertheilung und der geometrischen Natur der Kugelfläche ist das Potential blos eine Function des Abstandes s des angezogenen Punktes $P(xyz)$ vom Mittelpunkte. Wir können daher die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-4\pi\varrho$$

so transformiren, dass sie blos Derivirte von v nach s enthält. Es ist nämlich

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\partial s}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2 v}{ds^2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \frac{dv}{ds}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\partial s}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{d^2 v}{ds^2}\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \frac{dv}{ds}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\partial s}{\partial z}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{d^2 v}{ds^2}\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 + \frac{dv}{ds}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

und hierzu liefert die Gleichung $s^2 = x^2 + y^2 + z^2$:

$$s\frac{\partial s}{\partial x} = x, \qquad s\frac{\partial s}{\partial y} = y, \qquad s\frac{\partial s}{\partial z} = z$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + s\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 1, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + s\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 1, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 + s\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 1$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in die vorigen Gleichungen bildet man leicht:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{d^2 v}{ds^2}\left[\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{dv}{ds}\left[\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right] = \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{2}{s}\frac{dv}{ds}.$$

Demnach geht die Laplace-Poisson'sche partielle Differentialgleichung über in die folgende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen zwei Variabeln v, s:

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{2}{s}\frac{dv}{ds} = -4\pi\varrho.$$

Für einen der Masse nicht angehörenden Punkt ist $\varrho = 0$, mithin die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{2}{s}\frac{dv}{ds} = 0.$$

Setzt man für einen ausser der Masse liegenden Punkt $\frac{dv}{ds} = u$, so nimmt sie die Gestalt an:

$$\frac{du}{ds} + \frac{2}{s}u = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} + 2\frac{ds}{s} = 0,$$

woraus $us^2 = \alpha$ folgt, unter α eine willkürliche Constante verstanden. Hiermit ist weiter $u = \frac{dv}{ds} = \frac{\alpha}{s^2}$, also $v = \frac{\alpha}{s} + \beta$, wobei für das willkürliche $-\alpha$ wiederum α geschrieben ist. Der Punkt kann nun entweder im inneren Hohlraume der Schicht oder im Aussenraume liegen, wenn er der Masse nicht angehören soll. Für den inneren Hohlraum muss $\alpha = 0$ sein, weil sonst das Potential im Mittelpunkte der Schicht (für $s = 0$) unendlich werden könnte, was offenbar unzulässig ist. Daher ist $v = \beta$, also constant, die Differentialquotienten von v sind Null und die Schicht übt auf den Punkt keine Wirkung aus. Um die Constante β zu finden, kann man v für den Mittelpunkt direct bilden. Es ist, wenn r die Entfernung des Massenelementes dm von diesem Punkte bedeutet,

$$dm = \varrho r^2 d\sigma\, dr$$

für $d\sigma$ als Element des Körperwinkels und folglich

$$v = 4\pi\int_a^b \varrho r\, dr = \beta,$$

wenn a und b den inneren und äusseren Radius der Schicht bedeuten. Für die Punkte des Aussenraumes ist $\beta = 0$, weil v für $s = \infty$ verschwinden muss. Es

bleibt demnach $v = \frac{\alpha}{s}$ und da sv sich für wachsende s der Masse M als Grenze nähert (§. 7.), so muss $\alpha = M$ sein. Demnach ist $v = \frac{M}{s}$, wo

$$M = 4\pi \int_a^b \varrho r^2 dr.$$

Die Derivirten von s nach x, y, z sind:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{M}{s^2} \cdot \frac{x}{s}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{M}{s^2} \cdot \frac{y}{s}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{M}{s^2} \cdot \frac{z}{s}$$

und folglich:

$$X = -\frac{\varepsilon\mu Mx}{s^3}, \quad Y = -\frac{\varepsilon\mu My}{s^3}, \quad Z = -\frac{\varepsilon\mu Mz}{s^3}, \quad P = \frac{\varepsilon\mu M}{s^2}.$$

Die Schicht zieht einen Punkt des Aussenraumes so an, als ob ihre Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre.

Für einen der Masse angehörigen Punkt ist die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{2}{s}\frac{dv}{ds} = -4\pi\varrho.$$

Sie geht, wenn man sie mit s^2 multiplicirt, über in

$$\frac{d}{ds}\left(s^2 \frac{dv}{ds}\right) = -4\pi\varrho s^2$$

und liefert also, wenn man von $s = a$ an integrirt, für welchen Werth $s = \beta$, also $\frac{\partial v}{\partial s} = 0$ ist:

$$s^2 \frac{dv}{ds} = -4\pi \int_a^s \varrho s^2 ds.$$

Hierin bedeutet, da ϱ mit s variirt, die rechte Seite, abgesehen vom Zeichen, die Masse einer Schicht, welche zu Radien a und s besitzt, deren äussere Grenzfläche also durch den angezogenen Punkt geht. Ist ihre Masse M', so wird $\frac{dv}{ds} = -\frac{M'}{s^2}$, d. h. eine durch den angezogenen Punkt concentrisch zur Schicht gelegte Kugelfläche theilt dieselbe in zwei Schichten, von denen die äussere nicht auf den Punkt wirkt, während die Wirkung der inneren dieselbe ist, als ob ihre Masse im Mittelpunkte concentrirt wäre. Dies harmonirt mit der vorigen Untersuchung, indem für die erstere Schicht der Punkt ihrem inneren Hohlraume angehört.

Für constante specifische Masse wird für einen Punkt in der Masse

$$\frac{dv}{ds} = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho s,$$

da $M' = \frac{4}{3}\pi\varrho s^3$ ist. Integrirt man und berücksichtigt, dass für $s = a$ das Potential $v = \beta = 2\pi\varrho(b^2 - a^2)$ wird, so kommt $v = 2\pi\varrho(b^2 - a^2) - \frac{2}{3}\pi\varrho s^2$. Für einen Punkt des Aussenraumes ist $v = \frac{4}{3}\pi\varrho \frac{b^3 - a^3}{s}$.

Für eine homogene Vollkugel sind diese Formeln wegen $a = 0$ einfacher, nämlich:

$$v = 2\pi\varrho b^2 - \tfrac{2}{3}\pi\varrho s^2, \quad v = \tfrac{4}{3}\pi\varrho \frac{b^3}{s}.$$

Die Constantenbestimmung bei den Integrationen gründete sich darauf, dass v con-

tinuirlich für alle Punkte des Raumes bleibt, auch wenn der Punkt durch die Oberflächen hindurchgeht. In dem Falle einer homogenen Vollkugel hat man

$$X = \varepsilon\mu \frac{\partial v}{\partial x} = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho\varepsilon\mu s \frac{\partial s}{\partial x} = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho x,$$
$$Y = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho\varepsilon\mu y, \quad Z = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho\varepsilon\mu z$$

für den inneren Punkt und

$$X = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho\varepsilon\mu \frac{b^3 x}{s^3}, \quad Y = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho\varepsilon\mu \frac{b^3 y}{s^3}, \quad Z = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho\varepsilon\mu \frac{b^3 z}{s^3}$$

für den äusseren Punkt. Auf der Oberfläche fallen beiderlei Werthe zusammen. Die zweiten Derivirten von v sind im ersten Falle

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho,$$

im letzten

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \tfrac{4}{3}\pi\varrho \frac{b^3}{s^5}(3x^2 - s^2),$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \tfrac{4}{3}\pi\varrho \frac{b^3}{s^5}(3y^2 - s^2),$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \tfrac{4}{3}\pi\varrho \frac{b^3}{s^5}(3z^2 - s^2);$$

auf der Oberfläche fallen dieselben nicht zusammen, sondern sind um

$$4\pi\varrho \frac{x^2}{b^2}, \quad 4\pi\varrho \frac{y^2}{b^2}, \quad 4\pi\varrho \frac{z^2}{b^2}$$

von einander verschieden. Daher hat $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ an der Oberfläche acht verschiedene Werthe.

§. 11. Man hat für die Laplace-Poisson'sche Gleichung verschiedene Beweise gegeben. Für der Masse nicht angehörige Punkte folgt sie unmittelbar, indem man aus $r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$ die Derivirten

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{a-x}{r} = -\cos g, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - (a-x)^2}{r^3} = \frac{1}{r}\sin^2 g$$

und hiermit

$$\frac{\partial \cdot \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\cos \alpha}{r^2},$$
$$\frac{\partial^2 \cdot \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{r^3}(-1 + 3\cos^2 g),$$

sowie die analogen, auf die Axen der y und z bezüglichen bildet und bei der Darstellung des Ausdrucks für die Summe der zweiten Derivirten verwerthet. Man erhält:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \int dm \left(\frac{\partial^2 \cdot \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \cdot \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)$$
$$= \int \frac{dm}{r^3}\left[-3 + 3(\cos^2 g + \cos^2 h + \cos^2 i)\right] = 0.$$

Für einen der Masse angehörigen Punkt legt man um diesen eine kleine Kugel und setzt das Potential v der Gesammtmasse aus dem Potentiale v' der ausserhalb dieser Kugel liegenden Masse und dem Potentiale v'' der Kugelmasse zusammen, nämlich $v = v' + v''$. Für die erstere Masse gilt die bereits aufgestellte Laplace'sche Gleichung $\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \cdots = 0$, weil der Punkt in der Masse nicht liegt; für die zweite erhält man das Potential nach §. 10., da die specifische Masse, wenn die Kugel sich der Grenze Null nähert, von constanter specifischer Masse ϱ angenommen werden kann und hierfür weiter $\frac{\partial^2 v''}{\partial x^2} + \cdots = -4\pi\varrho$. Beide Gleichungen zusammen liefern $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -4\pi\varrho$.

Ist das Potential v als Function von x, y, z bekannt, ohne dass die Massenvertheilung, d. h. die specifische Masse ϱ als Function des Ortes gegeben ist, so liefert die Poisson'sche Gleichung dieselbe, nämlich:

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right).$$

Der in §. 9. gegebene Beweis rührt bis auf kleine formelle Verschiedenheiten von Gauss her (Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Leipzig 1840, oder Resultate der magnetischen Beobachtungen für 1839, oder Liouville, Journal de mathém., T. VII). Andere Beweise gaben Weingarten (Crelle's Journal, Bd. 49, S. 367) mit Hülfe der Fourier'schen Doppelintegrale und ganz neuerdings Kronecker (Crelle's Journal, Bd. 70, S. 246) auf einer Grundlage von ausserordentlicher Allgemeinheit.

§. 12. Von besonderer Bedeutung für die Attractionstheorie ist das Problem der Attraction des homogenen oder concentrisch geschichteten Ellipsoids, welches seit Newton Gegenstand der tiefsten Studien der hervorragendsten Mathematiker geworden ist. Wir werden zunächst das Potential eines homogenen Ellipsoids, sowie die daraus folgenden Attractionscomponenten nach Dirichlet's Methode entwickeln und später eine synthetische Lösung dieser Aufgabe für das concentrisch geschichtete Ellipsoid von Chasles geben. Dirichlet's Methode gründet sich auf die Theorie des von ihm entdeckten Discontinuitätsfactors der vielfachen Integrale und findet sich in den Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1839, erschienen 1841, S. 61 der mathem. Abhandlungen (Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale von Lejeune Dirichlet, vorgel. am 14. Febr. 1839) nebst weiteren Ausführungen in Crelle's Journal Bd. 32, S. 88 (*Sur un moyen général de vérifier l'expression potential relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène*). Vgl. auch Schlömilch, analytische Studien, Leipzig 1848, 1. Abth., S. 126.

Der Ausdruck

$$v = \varrho \int\int\int \frac{da\, db\, dc}{r}$$

ist das Potential des homogen gedachten Ellipsoids $\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} = 1$ in Bezug auf den Punkt (xyz), für welchen $r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$ ist, wenn

das dreifache Integral über alle Elemente $da\,db\,dc$ des von der Fläche umschlossenen Raumes erstreckt wird. Die Ausführung dieser Integration findet aber darin bedeutende Schwierigkeiten, dass die Grenzen derselben von der Integrationsordnung abhängig und veränderlich sind. Um diesem misslichen Umstande vorzubeugen und die Grenzen auf constante Werthe zu bringen, multiplicirt man unter dem dreifachen Integralzeichen mit einem Factor $f(a, b, c)$, dessen Werth in jedem im Innern und auf der Oberfläche des Ellipsoids gelegenen anziehenden Punkte $(a\,b\,c)$ gleich 1, in jedem Punkte des nicht mit Masse erfüllten Aussenraumes aber gleich Null ist. Durch Zufügung dieses Factors werden die Elemente $\frac{da\,db\,dc}{r}$ des Integrales, welche der anziehenden Masse zugehören, nicht geändert, während solche Elemente, welche Punkten des Aussenraumes entsprechen, unbedenklich zugefügt werden können, da der Factor $f(a, b, c)$ sie annullirt. Fügen wir sie zu, so können die Grenzen des Integrales von $-\infty$ bis ∞ ausgedehnt werden und wird

$$v = \varrho \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(a, b, c)\, \frac{da\,db\,dc}{r}.$$

Es kommt nun zunächst darauf an, einen solchen Factor $f(a, b, c)$, dem Dirichlet den Namen eines Discontinuitätsfactors gegeben hat, zu finden. Die Theorie der Fourier'schen Doppelintegrale liefert solche Factoren von beliebiger Menge und Beschaffenheit; für unseren Zweck genügt es, den einfachsten zu wählen, welcher zur Zeit, als Dirichlet seine Methode zuerst entwickelte, zugleich der einzig bekannte gewesen zu sein scheint. Es ist

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos\sigma\varphi \cdot d\varphi,$$

Es wird dieser Ausdruck für alle Werthe von $\sigma < 1$ selbst gleich 1, für Werthe $\sigma > 1$ aber Null. Man gelangt zu diesem Integrale leicht auf folgende Weise. Es ist, wie leicht gezeigt wird:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\psi}{\psi}\, d\psi = \frac{\pi}{2}.$$

Das etwas allgemeinere Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\varkappa\psi}{\psi}\, d\psi = \int_0^{\infty} \frac{\sin\varkappa\psi}{\varkappa\psi}\, d(\varkappa\psi)$$

geht, wenn $\varkappa$ positiv ist, durch die Substitution $\varkappa\psi = \psi'$ in

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\psi}{\psi}\, d\psi = \frac{\pi}{2},$$

für negative $\varkappa$ aber, wenn man $\varkappa\psi = -\psi'$ setzt, in

$$-\int_0^{\infty} \frac{\sin\psi'}{\psi}\, d\psi' = -\frac{\pi}{2}$$

über und verschwindet für $\varkappa = 0$. Man hat daher

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\varkappa\psi}{\psi}\, d\psi = \frac{\pi}{2},\ 0,\ -\frac{\pi}{2},$$

je nachdem $\varkappa$ positiv, Null oder negativ ist. Nun hat man weiter vermöge der Formel $2 \sin m\psi \cos n\psi = \sin(m+n)\psi + \sin(m-n)\psi$ die Gleichung:

$$2\int_0^\infty \frac{\sin m\psi \cos n\psi}{\psi} d\psi = \int_0^\infty \frac{\sin(m+n)\psi}{\psi} d\psi + \int_0^\infty \frac{\sin(m-n)\psi}{\psi} d\psi.$$

Sind nun m und n positiv und ist $m > n$, so ist $m - n$ positiv und hat jedes der Integrale rechts den Werth $\frac{\pi}{2}$, ist aber $m = n$, so ist die rechte Seite $\frac{\pi}{2} + 0$, für $m < n$ aber ist sie $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$. Demnach hat

$$\int_0^\infty \frac{\sin m\psi \cos n\psi}{\psi} d\psi$$

die Werthe $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, 0, je nachdem $m \gtreqless n$ oder also $\frac{n}{m} \lesseqgtr 1$ ist. Setzt man nun noch $m\psi = \varphi$ und $\frac{n}{m} = \sigma$, so folgt, dass

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos\sigma\varphi \cdot d\varphi = 1,\ \tfrac{1}{2},\ 0,$$

je nachdem $\sigma \lesseqgtr 1$. Für unser Problem ist nun für alle dem Ellipsoid angehörigen Punkte

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} \leqq 1,$$

für alle Punkte ausserhalb desselben aber wird dies Trinom > 1. Setzen wir also

$$\sigma = \frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2},$$

so stellt, da das dem Werthe $\sigma = 1$ entsprechende Element des Integrales im Gesammtwerthe nur einen verschwindenden Einfluss hat,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos\left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}\right)\varphi \cdot d\varphi$$

einen Discontinuitätsfactor unsers Problems dar und wird v nach Umkehrung der Integrationsordnung:

$$v = \frac{2\varrho}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} d\varphi \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \cos\left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}\right)\varphi \cdot \frac{da\,db\,dc}{r}.$$

Nun ist $\cos\sigma\varphi$ die reelle Parthie von $e^{\sigma\varphi i} = \cos\sigma\varphi + i \sin\sigma\varphi$. Daher wird v die reelle Parthie des folgenden Ausdrucks v_1 sein, den wir, als den etwas bequemer zu behandelnden, weiter verfolgen wollen und aus welchem wir mit Leichtigkeit jeden Augenblick den Werth von v wieder herauslesen können, nämlich

$$v_1 = \frac{2\varrho}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{\left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}\right)\varphi i} \cdot \frac{da\,db\,dc}{r}.$$

Um dies Integral an andere bekannte Formen aus der Theorie der bestimmten Integrale anlehnen zu können, empfiehlt es sich, den Nenner r in den Exponenten zu bringen. Dies gelingt mit Hülfe der bereits von Euler aufgefundenen Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{e^{r^2\psi i}}{\sqrt{\psi}}\,d\psi = \frac{\sqrt{\pi}}{r}\,e^{\frac{1}{4}\pi i}.$$

Entnimmt man aus ihr den Werth für $\frac{1}{r}$ und führt ihn in den Ausdruck für v_1 ein, so kommt:

$$v_1 = \frac{2\varrho e^{-\frac{1}{4}\pi i}}{\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi\sqrt{\psi}}\,d\varphi\,d\psi \int_{-\infty}^\infty\!\!\int_{-\infty}^\infty\!\!\int_{-\infty}^\infty e^{\left[\left(\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}\right)\varphi + r^2\psi\right]i}\,da\,db\,dc.$$

Indem man nun für r^2 seinen Werth

$(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2 = x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2$

einsetzt, zerfällt das innere dreifache Integral in drei Factoren

$$Q_x = \int_{-\infty}^\infty e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)a^2 - 2x\psi a\right]i}\,da,$$

$$Q_y = \int_{-\infty}^\infty e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{\beta^2}\right)b^2 - 2y\psi b\right]i}\,db,$$

$$Q_z = \int_{-\infty}^\infty e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{\gamma^2}\right)c^2 - 2z\psi c\right)i}\,dc,$$

und den weiteren Factor $c^{(x^2+y^2+z^2)\psi i}$, welcher sich vorschiebt, sodass man hat

$$v_1 = \frac{2\varrho e^{-\frac{1}{4}\pi i}}{\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi\sqrt{\psi}}\,e^{(x^2+y^2+z^2)\psi i}\,Q_x Q_y Q_z\,d\varphi\,d\psi.$$

Nach einer bekannten Formel hat man aber

$$\int_{-\infty}^\infty du\,e^{(hu^2-2ku)i} = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\,e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{k^2}{h}\right)i};$$

mit Hülfe derselben findet man:

$$Q_x = \int_{-\infty}^\infty e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)a^2 - 2x\psi a\right]i}\,da = \frac{\sqrt{\pi}\,e^{\frac{1}{4}\pi i}}{\sqrt{\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}}}\,e^{-\frac{\psi^2x^2}{\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}}i}.$$

$$Q_y = \frac{\sqrt{\pi}\,e^{\frac{1}{4}\pi i}}{\sqrt{\psi+\frac{\varphi}{\beta^2}}}\,e^{-\frac{\psi^2y^2}{\psi+\frac{\varphi}{\beta^2}}i}, \qquad Q_z = \frac{\sqrt{\pi}\,e^{\frac{1}{4}\pi i}}{\sqrt{\psi+\frac{\varphi}{\gamma^2}}}\,e^{-\frac{\psi^2z^2}{\psi+\frac{\varphi}{\gamma^2}}i}$$

und indem man diese Werthe in v_1 einsetzt, ergibt sich

$$v_1 = 2\varrho e^{\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi\sqrt{\psi}}\,\frac{e^{S\varphi i}}{\sqrt{\left(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)\left(\psi+\frac{\varphi}{\beta^2}\right)\left(\psi+\frac{\varphi}{\gamma^2}\right)}}\,d\varphi\,d\psi,$$

worin abkürzend

$$S = \left[x^2\left(1 - \frac{1}{\psi + \frac{\varphi}{\alpha^2}}\right) + y^2\left(1 - \frac{1}{\psi + \frac{\varphi}{\beta^2}}\right) + z^2\left(1 - \frac{1}{\psi + \frac{\varphi}{\gamma^2}}\right)\right]\psi$$

$$= \left(\frac{x^2}{\varphi + \alpha^2\psi} + \frac{y^2}{\varphi + \beta^2\psi} + \frac{z^2}{\varphi + \gamma^2\psi}\right)\psi$$

gesetzt ist. Zur weiteren Vereinfachung führe man die Substitution $\frac{\varphi}{\psi} = s$ ein, sodass an die Stelle von ψ die Variabele s tritt, wodurch die Grenzen für s gleich ∞ und 0 werden, wofür wir mit Aenderung des Zeichens wieder 0 und ∞ schreiben. So ergibt sich

$$v_1 = 2\varrho e^{\frac{1}{2}\pi i}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^2}\frac{e^{S\varphi i}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\,d\varphi\,ds,$$

$$S = \frac{x^2}{\alpha^2 + s} + \frac{y^2}{\beta^2 + s} + \frac{z^2}{\gamma^2 + s}.$$

Nach Umkehrung der Integrationsordnung nimmt v_1 die Gestalt an:

$$v_1 = 2\varrho e^{\frac{1}{2}\pi i}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^2}\,e^{S\varphi i}\,d\varphi.$$

Der reelle Bestandtheil hiervon ist v; derselbe wird vermöge

$$e^{\frac{1}{2}\pi i} = \cos\tfrac{1}{2}\pi + i\sin\tfrac{1}{2}\pi = i$$

und

$$e^{S\varphi i} = \cos S\varphi + i\sin S\varphi$$

erhalten als

$$v = -2\varrho\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^2}\sin S\varphi\,d\varphi$$

$$= -2\varrho\int_0^\infty\frac{ds}{D}\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi^2}\sin S\varphi\,d\varphi,$$

wo

$$D = \sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}$$

gesetzt ist.

Die Ausführung der inneren Integration wollen wir auf indirectem Wege bewerkstelligen, indem wir zunächst $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ bilden und aus diesen Grössen hierauf v zusammensetzen. Die Grösse S allein enthält nun die Coordinaten x, y, z des angezogenen Punktes und da $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{2x}{\alpha^2 + s}$, so ergibt sich:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -4\varrho x\int_0^\infty\frac{ds}{(\alpha^2+s)D}\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos S\varphi\,d\varphi$$

und zwei ähnliche Formeln finden sich für die anderen Derivirten von v nach y und z. Nun ist aber der Discontinuitätsfactor

$$\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos S\varphi\,d\varphi = \begin{matrix}\frac{1}{2}\pi & \text{für } S < 1\\ 0 & \text{für } S > 1\end{matrix};$$

um daher den Resultaten eine definitive Form zu geben, werden wir die weitere Untersuchung spalten und unterscheiden, ob der afficirte Punkt im inneren oder im äusseren Raume liegt.

Für einen inneren Punkt ist $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < 1$, mithin auch

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + s} + \frac{y^2}{\beta^2 + s} + \frac{z^2}{\gamma^2 + s} < 1,$$

d. h. $S < 1$, weil s nur positive Werthe im Integrale annimmt. Daher werden für innere Punkte:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2\pi\varrho x \int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2 + s) D},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2\pi\varrho y \int_0^\infty \frac{ds}{(\beta^2 + s) D},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -2\pi\varrho z \int_0^\infty \frac{ds}{(\gamma^2 + s) D}.$$

Hiermit erhält man die Componenten X, Y, Z der Attraction, indem man diese Grössen mit $\mu\varepsilon$ multiplicirt. Es sind dieselben mithin den Coordinaten x, y, z proportional.

Für einen äusseren Punkt ist $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} > 1$. Nun ist dieser Ausdruck der Werth, den S für $s = 0$ annimmt und da S um so kleiner wird, je grösser s wird und für $s = \infty$ verschwindet (vorausgesetzt, dass x, y, z endlich sind), so folgt, dass es einen positiven Werth $s = \sigma$ gibt, aber auch nur einen, für welchen $S = 1$ wird. Es hat demnach die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + \sigma} + \frac{y^2}{\beta^2 + \sigma} + \frac{z^2}{\gamma^2 + \sigma} = 1$$

eine positive Wurzel und sie scheidet die Werthe $s < \sigma$, für welche $S > 1$ wird, von den Werthen $s > \sigma$, für welche $S < 1$ wird. Die Werthe $s < \sigma$ kommen bei dem obigen Integrale für $\frac{\partial v}{\partial x}$ nicht in Betracht, weil für sie wegen $S > 1$ der Discontinuitätsfactor verschwindet, es ist die Integration nach s vielmehr blos über alle s von σ bis ∞ zu erstrecken, wobei wegen $S < 1$ dieser Factor $\frac{1}{2}\pi$ beträgt. Demnach erhält man für einen äusseren Punkt:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2\pi\varrho x \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\alpha^2 + s) D},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2\pi\varrho y \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\beta^2 + s) D},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -2\pi\varrho z \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\gamma^2 + s) D}.$$

Um nun das Potential v selbst aus seiner Derivirten zu bilden, haben wir zufolge des Satzes

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

für einen inneren Punkt:

$$dv = -\pi\varrho\int\limits_0^\infty\left(\frac{2\,x\,dx}{\alpha^2+s}+\frac{2\,y\,dy}{\beta^2+s}+\frac{2\,z\,dz}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D}$$

und mithin

$$v = \pi\varrho\int\limits_0^\infty\left(C-\frac{x^2}{\alpha^2+s}-\frac{y^2}{\beta^2+s}-\frac{z^2}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D}$$

und ähnlich für einen äusseren Punkt:

$$v = \pi\varrho\int\limits_\sigma^\infty\left(C'-\frac{x^2}{\alpha^2+s}-\frac{y^2}{\beta^2+s}-\frac{z^2}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D}.$$

Für Punkte der Oberfläche des Ellipsoids $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ müssen beide Ausdrücke für v zusammenfallen. Nun ist für diesen Fall $\sigma = 0$, wie die Vergleichung der Gleichung des Ellipsoids mit der Gleichung, welcher σ genügen muss, lehrt. Daher sind in dem zweiten Ausdruck für v hierfür die Integrationsgrenzen dieselben, wie im ersten und da x, y, z in beiden dieselben Werthe haben, so folgt, dass auch die Constanten C und C' dieselben Werthe haben müssen. Es genügt daher, C' zu bestimmen. Hierzu dient die Eigenschaft des Potentials, dass es im Unendlichen verschwindet. Nun wird für $x = y = z = \infty$ also $\sigma = \infty$ und werden die untere und obere Grenze des Integrales für v unendlich gross. Das ganze Integral reducirt sich daher auf ein einziges Element, welches verschwinden muss. Dasselbe hat vermöge der Gleichung, welche σ bestimmt, den Factor $C'-1$, dessen Werth allein von den unendlich gross werdenden x, y, z abhängt und der mithin das Verschwinden herbeiführen muss. Aus $C'-1=0$ folgt aber $C'=1$. Demnach ist der Werth des Potentials des Ellipsoids gefunden; er ist:

$$v = \pi\varrho\int\limits_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2+s}-\frac{y^2}{\beta^2+s}-\frac{z^2}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D},$$

oder

$$v = \pi\varrho\int\limits_\sigma^\infty\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2+s}-\frac{y^2}{\beta^2+s}-\frac{z^2}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D},$$

je nachdem der Punkt im Innern der Masse oder im Aussenraume liegt und wo σ die positive Wurzel der Gleichung $\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma}+\frac{y^2}{\beta^2+\sigma}+\frac{z^2}{\gamma^2+\sigma}=1$ ist.

Um jeden Anstoss zu vermeiden, welchen diese Bestimmung der Constanten veranlassen könnte, wollen wir *a posteriori* die für v gefundenen Ausdrücke mit Hülfe der Laplace-Poisson'schen Gleichung und der übrigen, §. 9. angeführten, das Potential unzweideutig definirenden Bedingungen verificiren.

Zunächst liefert die Differentiation der Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma}+\frac{y^2}{\beta^2+\sigma}+\frac{z^2}{\gamma^2+\sigma}=1$$

die Grössen $\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \frac{\partial\sigma}{\partial y}, \frac{\partial\sigma}{\partial z}$, nämlich:

$$l\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{2\,x}{\alpha^2+\sigma},\quad l\frac{\partial\sigma}{\partial y}=\frac{2\,y}{\beta^2+\sigma},\quad l\frac{\partial\sigma}{\partial z}=\frac{2\,z}{\gamma^2+\sigma},$$

wenn

$$l=\frac{x^2}{(\alpha^2+\sigma)^2}+\frac{y^2}{(\beta^2+\sigma)^2}+\frac{z^2}{(\gamma^2+\sigma)^2}.$$

Die Differentiation des Potentials v für den inneren Punkt gibt unmittelbar den Werth:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2\pi x \int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)D},$$

während die für den äusseren Punkt, weil auch σ veränderlich ist, liefert:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2\pi\varrho x \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)D} + \pi\varrho\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_\sigma^\infty\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2+s}-\frac{y^2}{\beta^2+s}-\frac{z^2}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x}.$$

Nach einem bekannten Satze über die Differentiation bestimmter Integrale ist aber allgemein:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_\sigma^b \psi(s)\,ds = -\psi(\sigma).$$

Daher wird im vorliegenden Falle der zu suchende Differentialquotient nach σ gleich

$$\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma}-\frac{y^2}{\beta^2+\sigma}+\frac{z^2}{\gamma^2+\sigma}\right)\cdot\frac{1}{D_\sigma}$$

und verschwindet vermöge der Definitionsgleichung für σ und da $\frac{\partial\sigma}{\partial x}$ nicht unbestimmt wird, so bleibt auch für den äusseren Punkt

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2\pi\varrho x \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)D}.$$

Dass die Ausdrücke für v und $\frac{\partial v}{\partial x}$, sowie die analog gebildeten für $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ continuirliche Functionen von x, y, z für den inneren sowohl wie für den äusseren Punkt sind, erhellt aus demselben unmittelbar, ebenso dass die Continuität beim Durchgange des Punktes durch die Oberfläche des Ellipsoids nicht unterbrochen wird.

Die Bedingungen, dass xv, yv, zv, $x^2\frac{\partial v}{\partial x}$, $y^2\frac{\partial v}{\partial y}$, $z^2\frac{\partial v}{\partial z}$ an gewisse Grenzen gebunden sind, bewahrheiten sich für den inneren Punkt unmittelbar, denn es ist

$$v < \pi\int_0^\infty \frac{ds}{D}, \quad \text{also} \quad xv < \pi x\int_0^\infty \frac{ds}{D}$$

und ebenso

$$x^2\frac{\partial v}{\partial x} < \varrho x^3 \int_0^\infty \frac{ds}{\alpha^2+s}$$

und es ist x an die Grösse der Halbaxe des Ellipsoids, welche in die Richtung der x-Axe fällt, als Grenze gebunden. Um sie aber für einen äusseren Punkt zu verificiren, sei λ die kleinste der drei Halbaxen α, β, γ des Ellipsoids. Es ist dann vermöge $D = \alpha\beta\gamma\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)(\gamma^2+s)} > \alpha\beta\gamma(\lambda^2+s)^{\frac{3}{2}}$

$$v < \pi\varrho\alpha\beta\gamma\int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\lambda^2+s)^{\frac{3}{2}}},$$

d. h.:

$$v < \frac{2\pi\varrho\alpha\beta\gamma}{(\lambda^2+\sigma)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ferner ist absolut genommen:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x} < 2\pi\varrho\alpha\beta\gamma\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{ds}{(\lambda^2+s)^{\frac{5}{2}}},$$

d. h.:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x} < \frac{4\pi\varrho\alpha\beta\gamma}{3(\lambda^2+\sigma)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun erhält man aus der Gleichung für σ hierzu $\frac{x}{(\alpha^2+\sigma)^{\frac{1}{2}}} < 1$ und hiermit werden

$$xv < 2\pi\varrho\alpha\beta\gamma\left(\frac{\alpha^2+\sigma}{\lambda^2+\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad x^2\frac{\partial v}{\partial x} < \tfrac{4}{3}\pi\varrho\alpha\beta\gamma\left(\frac{\alpha^2+\sigma}{\lambda^2+\sigma}\right)^{\frac{3}{2}},$$

welche Ungleichheiten ihre Gültigkeit bewahren, wenn auch x und damit σ ins Unendliche wächst.

Um zu zeigen, dass die Ausdrücke für v auch der Laplace-Poisson'schen Gleichung genügen, hat man

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2\pi\varrho\int\limits_0^{\infty}\frac{ds}{(\alpha^2+s)D}$$

und

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2\pi\varrho\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{ds}{(\alpha^2+\sigma)D} + \frac{2\pi x}{(\alpha^2+\sigma)D_\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial x}$$

und daher mit Hülfe der analog gebildeten Ausdrücke einerseits für den inneren Punkt:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -2\pi\varrho\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^2+s}+\frac{1}{\beta^2+s}+\frac{1}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D},$$

andererseits für den äusseren:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -2\pi\varrho\int\limits_{\sigma}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^2+s}+\frac{1}{\beta^2+s}+\frac{1}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D}$$
$$+\left(\frac{2x}{\alpha^2+\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{2y}{\beta^2+\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{2z}{\gamma^2+\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)\frac{\pi\varrho}{D_\sigma}.$$

Nun ist aber

$$\int^{s}\left(\frac{1}{\alpha^2+s}+\frac{1}{\beta^2+s}+\frac{1}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D} = -\frac{2}{D}+Const.,$$

folglich, da D für $s=\infty$ verschwindet:

$$\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^2+s}+\frac{1}{\beta^2+s}+\frac{1}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D} = 2.$$

Daher wird die rechte Seite der ersten Gleichung $-4\pi\varrho$, wie es die Poisson'sche Gleichung verlangt. In Betreff der zweiten Gleichung hat man vermöge der zu Anfang dieser Untersuchung aufgestellten Relationen:

$$l\left(\frac{2x}{\alpha^2+\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{2y}{\beta^2+\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{2z}{\gamma^2+\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)$$
$$=4\left(\frac{x^2}{(\alpha^2+\sigma)^2}+\frac{y^2}{(\beta^2+\sigma)^2}+\frac{z^2}{(\gamma^2+\sigma)^2}\right) = 4l,$$

Daher wird der vom Integralzeichen freie Bestandtheil auf der rechten Seite gleich $\frac{4\pi\varrho}{D_\sigma}$. Der erste Bestandtheil ist aber

$$-2\pi\varrho\int_{\sigma}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^2+s}+\frac{1}{\beta^2+s}+\frac{1}{\gamma^2+s}\right)\frac{ds}{D}=-2\pi\varrho\cdot\frac{2}{D_\sigma}=-\frac{4\pi\varrho}{D_\sigma}$$

und wird mithin für den äusseren Punkt die Laplace'sche Gleichung erfüllt.

Man bemerke, dass die zweiten Derivirten der Potentialausdrücke auf der Oberfläche des Ellipsoids nicht zusammenfallen.

Hiermit ist gezeigt, dass die Grössen v allen charakteristischen Bedingungen des Potentials genügen und also dasselbe wirklich darstellen.

§. 13. Die Integrale

$$\int_0^{\infty}\frac{ds}{(\alpha^2+s)D},\quad \int_0^{\infty}\frac{ds}{(\beta^2+s)D},\quad \int_0^{\infty}\frac{ds}{(\gamma^2+s)D},$$

welche in den Ausdrücken für $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ in Bezug auf einen inneren Punkt auftreten, hängen nicht von den absoluten Längen, sondern nur von den Verhältnissen $\alpha:\beta:\gamma$ der Halbaxen des anziehenden Ellipsoids ab. Denn setzt man z. B. in dem ersten von ihnen $s=\alpha^2 s'$, so entsteht

$$\int_0^{\infty}\frac{ds'}{(1+s')\sqrt{(1+s')\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}s'\right)\left(1+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}s'\right)}}.$$

So lange also die Verhältnisse der Axen dieselben bleiben, behalten diese Integrale dieselben Werthe und mithin auch die Attractionscomponenten X, Y, Z, welche ihnen proportional sind. Zwei Ellipsoide von denselben Axenverhältnissen sind aber ähnlich. Daher der Satz:

Zwei homogene concentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipsoide derselben specifischen Masse ziehen einen inneren Punkt mit derselben Intensität und in derselben Richtung an. Hieraus folgt weiter: Eine homogene ellipsoidische Schicht von zwei ähnlichen und concentrisch ähnlich liegenden Ellipsoiden begrenzt übt auf einen Punkt ihres inneren Hohlraumes keine Wirkung aus.

Wird die Schicht unendlich dünn, so kann man die Attractionscomponenten für einen äusseren Punkt frei von Integralzeichen darstellen. Man hat nämlich zunächst, wenn man αs statt s als Variabele einführt:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-2\pi\varrho x\int_{\frac{\sigma}{\alpha^2}}^{\infty}\frac{ds}{(1+s)\sqrt{(1+s)\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}s\right)\left(1+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}s\right)}};$$

für ein zweites ähnliches, dem ersten unendlich nahes Ellipsoid mögen α', β', γ' die Halbaxen sein, welche wir uns kleiner als α, β, γ denken wollen, sodass $\alpha'=\alpha+d\alpha$, $\beta'=\beta+d\beta$, $\gamma'=\gamma+d\gamma$ und wenn $1-\lambda$ das Aehnlichkeitsverhältniss ist, wo λ unendlich klein, $\alpha+d\alpha=(1-\lambda)\alpha$, also $d\alpha=-\lambda\alpha$ und ebenso $d\beta=-\lambda\beta$, $d\gamma=-\lambda\gamma$ wird. Denkt man sich $\frac{\partial v}{\partial x}$ für das zweite Ellipsoid hingeschrieben und von dem dem ersten entsprechenden Werthe von $\frac{\partial v}{\partial x}$ abgezogen, so stellt die Differenz mit $\varepsilon\mu$ multiplicirt die Attractionscomponente X der Schicht dar. Auf der rechten Seite aber erscheint das Differential des Inte-

grales nach α, welches die einzige darin enthaltene Axe ist, die sich ändert. Man hat daher:

$$X = -2\pi\varrho\varepsilon\mu x \frac{\partial}{\alpha}\int\limits_{\frac{\sigma}{\alpha^2}}^{\infty}\frac{ds}{(1+s)\sqrt{(1+s)\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}s\right)\left(1+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}s\right)}}$$

$$= 2\pi\varrho\varepsilon\mu x\frac{1}{1+\frac{\sigma}{\alpha^2}}\cdot\frac{1}{D_\sigma}\frac{\partial\cdot\frac{\sigma}{\alpha^2}}{\partial\alpha}\cdot\varepsilon\alpha.$$

Es ist aber $\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma}+\frac{y^2}{\beta^2+\sigma}+\frac{z^2}{\gamma^2+\sigma}=1$ oder

$$\frac{x^2}{1+\frac{\sigma}{\alpha^2}}+\frac{y^2}{\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\sigma}{\alpha^2}}+\frac{z^2}{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+\frac{\sigma}{\alpha^2}}=\alpha^2$$

und die Differentiation dieser Gleichung liefert:

$$-\frac{\partial\cdot\frac{\sigma}{\alpha^2}}{\partial\alpha}\left(\frac{x^2}{\left(1+\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)^2}\right)=2\alpha,$$

d. h. $\frac{\partial\cdot\frac{\sigma}{\alpha^2}}{\partial\alpha}=-\frac{2}{l\alpha^3}$ und hiermit werden, wenn die analogen Entwickelungen für $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ durchgeführt werden:

$$X = -4\pi\mu\varepsilon\varrho x\cdot\frac{1}{\alpha^2+\sigma}\cdot\frac{\lambda}{lD_\sigma},$$

$$Y = -4\pi\mu\varepsilon\varrho y\cdot\frac{1}{\beta^2+\sigma}\cdot\frac{\lambda}{lD_\sigma},$$

$$Z = -4\pi\mu\varepsilon\varrho z\cdot\frac{1}{\gamma^2+\sigma}\cdot\frac{\lambda}{lD_\sigma},$$

und folglich die Attractionskraft P selbst:

$$P = 4\pi\mu\varepsilon\varrho\frac{\lambda}{\sqrt{l}\cdot D_\sigma}.$$

Dieses Resultat ist einer einfachen geometrischen Interpretation fähig. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma}+\frac{y^2}{\beta^2+\sigma}+\frac{z^2}{\gamma^2+\sigma}=1$$

bedeutet nämlich ein durch den Punkt (xyz) gehendes Ellipsoid, dessen Halbaxen α', β', γ' durch die Relationen

$$\alpha'^2=\alpha^2+\sigma,\qquad \beta'^2=\beta^2+\sigma,\qquad \gamma'^2=\gamma^2+\sigma$$

gegeben sind, aus denen

$$\alpha'^2-\beta'^2=\alpha^2-\beta^2,\quad \beta'^2-\gamma'^2=\beta^2-\gamma^2,\quad \alpha'^2-\gamma'^2=\alpha^2-\gamma^2$$

folgt. Diese Gleichungen drücken aus, dass die Quadratdifferenzen der Halbaxenpaare für dieses Ellipsoid und das anziehende Ellipsoid dieselben sind. In Folge dessen haben beide Ellipsoide gleiche Excentricitäten und dieselben Brennpunkte der Hauptschnitte oder sind confocal. Die Gleichung der Tangentenebene an unser neues Ellipsoid im afficirten Punkte (xyz) ist nun

$$\frac{x}{\alpha^2+\sigma}\cdot\xi+\frac{y}{\beta^2+\sigma}\cdot\eta+\frac{z}{\gamma^2+\sigma}\cdot\zeta=1$$

und daher wird ihr Abstand vom Mittelpunkt:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{(\alpha^2+\sigma)^2} + \frac{y^2}{(\beta^2+\sigma)^2} + \frac{z^2}{(\gamma^2+\sigma)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{l}}.$$

Ferner ist:

$$D_\sigma = \sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}$$
$$= \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\sqrt{(\alpha^2+\sigma)(\beta^2+\sigma)(\gamma^2+\sigma)} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma}.$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke wird jetzt

$$P = 4\pi\mu\varepsilon\varrho\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}\cdot p\lambda,$$

worin man noch die Masse des anziehenden Ellipsoids, nämlich $M = \frac{4}{3}\pi\varrho\alpha\beta\gamma$ verwerthen kann; sodass P die Form annimmt:

$$P = 3\mu\frac{Mp\lambda}{\alpha'\beta'\gamma'}.$$

Aus diesen Entwickelungen folgt leicht der Satz:

Die Attractionskraft einer unendlich dünnen, zwischen zwei ähnlichen, concentrisch und ähnlich liegenden Ellipsoiden enthalhaltenen homogenen Schicht in Bezug auf einen äusseren Punkt hat die Richtung der Normalen an ein durch diesen Punkt gelegtes, mit der äusseren Grenzfläche der Schicht confocales Ellipsoid und ist der Masse der anziehenden Schicht und dem Abstande der Tangentenebene jenes Ellipsoids im angezogenen Punkte vom Mittelpunkte proportional.

Die Niveauflächen der Attraction der Schicht sind mithin die mit ihrer Aussenfläche confocalen Ellipsoide. Die Aussenfläche selbst ist daher eine Niveaufläche. Für einen Punkt auf ihr kann man noch in dem Ausdrucke für P die Grösse $p\lambda$ durch die Dicke d der Schicht in der Richtung der Normalen ersetzen, wie man leicht aus der Aehnlichkeit der Begrenzungsflächen erkennt. Sind nämlich r, s die Radienvectoren der äusseren und inneren Grenzfläche, welche die Richtung vom Mittelpunkte nach dem angezogenen Punkte bilden, so ist $p : d = r : s$. Vermöge der Aehnlichkeit der Grenzfläche ist aber $r : s = 1 : \lambda$, also $p : d = 1 : \lambda$ oder $p\lambda = d$.

§. 14. Das Potential eines Ellipsoids, wie einer zwischen ähnlichen Ellipsoiden enthaltenen Schicht kann durch elliptische Integrale dargestellt werden. Wir werden dies nicht ausführen, sondern verweisen in dieser Hinsicht auf Legendre, *Traité de fonctions elliptiques*, T. I, p. 539, sowie Sturm, *Cours de mécanique de l'école polytechnique*, T. I, p. 97.

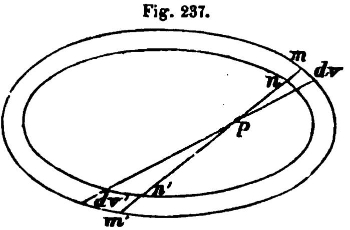
Für die ellipsoidischen Rotationsflächen gehen diese elliptischen Integrale in Kreisfunctionen, Logarithmen und algebraische Functionen über. Ausführlich über diese Fälle handelt Moigno, *Leçons de mécanique analytique*; *statique*, p. 477—498, sowie Legendre a. a. O.

§. 15. Das Problem der Attraction des Ellipsoids ist durch die Schwierigkeiten berühmt geworden, welche es der Lösung entgegensetzte. Dieselbe wurde von Newton und Maclaurin auf synthetischem Wege gesucht, allein vergebens strebte man darnach, die schönen Einzelresultate des letzteren zu einer vollständigen Lösung auf analytischem Wege zu verallgemeinern (D'Alembert, *Opuscules mathématiques*, T. VI. u. VII. und Lagrange, *Mém. de l'Académie de Berlin*, 1773, 1774, 1775 und 1795), bis sie endlich Legendre (*Mém. des savants*

étrangers, T. X, 1783) und Laplace (*Mécanique céleste*, T. II, livre 3) gelang. Seit dieser Zeit war man der merkwürdigen Ansicht, dass das Problem einer synthetischen Behandlung überhaupt unzugänglich sei und Legendre und Poisson sprachen sich in diesem Sinne etwas voreilig und entschieden aus (*Mém. de l'Acad. des sciences*, 1788 und 1834); Chasles widerlegte glänzend diese Meinung, indem er 1838 eine vollkommen synthetische Lösung gab (*Comptes rendus de l'Acad. des sciences*, T. VI, p. 902 (25. Juin); *Rapport de M. Poinsot*, T. VI, p. 808 (11. Juin; als Vorläufer *Journal de l'école polytechn.*, Cah. 25, p. 244 u. 266) (1837). Wir geben im Folgenden eine Bearbeitung der Chasles'schen Synthese und folgen dabei der Redaction seiner Arbeit, die er in Liouville's *Journal de mathém.* T. V (1840) unter dem Titel: „*Nouvelle solution du problème de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point exterieur*" publicirt hat. Er knüpft darin an die Betrachtungen Newton's und Maclaurin's an.

Wir beginnen mit dem Newton'schen Satze über die Wirkung einer homogenen oder concentrisch geschichteten, zwischen zwei ähnlichen und concentrisch ähnlich liegenden Ellipsoiden enthaltenen Masse auf einen Punkt des inneren Hohlraumes. Ein unendlich schmaler Kegel (Fig. 237.), dessen Mittelpunkt der afficirte Punkt P ist, schneidet aus der zunächst unendlich dünn gedachten Schicht zwei unendlich kleine Volumina dv, dv' aus, welche dem durch P gehenden Strale anliegen, der die äussere Grenzfläche in m, m', die innere in n, n' trifft. Das Volumen dv an nm ist unendlich wenig verschieden von dem Volumen welches der Kegel aus einer mit den Radien Pn, Pm um P beschriebenen Kugelschicht herausschneidet; ebenso verhält es sich mit dv' an $n'm'$. Ist nun $d\sigma$ das Mass des Winkelraumes im Kegel, d. h. das Kugelflächenelement, welches der Kegel in der Entfernung 1 bestimmt, so hat man

Fig. 237.



$$dv = \overline{Pm}^2 \cdot d\sigma \cdot mn, \qquad dv' = \overline{Pm'}^2 \cdot d\sigma \cdot m'n'$$

und wenn ϱ die specifische Masse der ellipsoidischen Schicht darstellt, so sind

$$\frac{\varepsilon\mu\varrho dv}{\overline{Pm}^2} = \varepsilon\mu\varrho \cdot mn \cdot d\sigma \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon\mu\varrho dv'}{\overline{Pm'}^2} = \varepsilon\mu\varrho \cdot m'n' \cdot d\sigma$$

die Kräfte, mit welchen die Masse μ von P von den Massen ϱdv, $\varrho dv'$ der beiden kleinen Volumina längs der Linie mm' in entgegengesetztem Sinne afficirt wird. Wir werden aber sogleich zeigen, dass $mn = m'n'$ ist und dass diese Kräfte mithin sich Gleichgewicht halten. Da dasselbe von je zwei Massenelementen ϱdv, $\varrho dv'$ der Schicht gilt, deren Verbindungslinie durch P geht, so folgt der Satz:

Eine homogene, zwischen zwei concentrischen ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden enthaltene unendlich dünne Schicht übt auf einen Punkt ihres inneren Hohlraumes keine Wirkung aus.

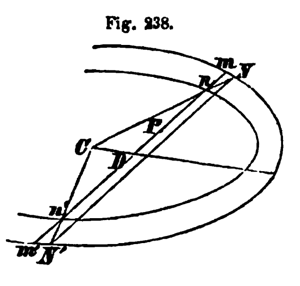
Indem man solcher Schichten unendlich viele bis zu einer Schicht von endlicher Dicke übereinander lagert, folgt weiter:

Eine zwischen zwei ähnlichen, concentrischen und ähnlich liegenden Ellipsoiden enthaltene Schicht von endlicher Dicke und constanter oder auf concentrisch ähnlich liegenden Schalen constanter specifischer Masse übt auf einen Punkt des Hohlraumes keine Wirkung aus.

Der zum Beweise herangezogene Satz, dass zwei ähnliche concentrisch liegende Ellipsoide jede Transversale so schneiden, dass die

zwischen die Grenzflächen fallenden Strecken gleich sind, folgt so. Man lege durch den Mittelpunkt C (Fig. 238.) der Schicht und die Transversale mm' eine Ebene und ziehe in ihr den zu nn' conjugirten Diameter CD; er halbirt die Sehne nn' des inneren elliptischen Schnittes in D. Man ziehe ferner Cn, Cn', wodurch auf der äusseren Schnittellipse der Schicht die homologen Punkte der Aehnlichkeit N, N' zu n, n' gefunden werden, deren Verbindungslinie NN' homolog zu nn' und wegen der ähnlichen Lage der Figurensysteme parallel mit nn' ist. Es wird daher auch NN' von jenem Diameter halbirt, d. h. er ist auch für die äussere Ellipse zu der Richtung der Transversalen mm' conjugirt und wird folglich auch mm' von ihm halbirt; daher ist:

Fig. 238.



$$Dm - Dn = mn = Dm' - Dn' = m'n'.$$

§. 16. Die weiteren Entwickelungen gründen sich auf eine gewisse projectivische Verwandtschaft zweier Räume, welche die Affinität genannt wird. Wir nehmen drei rechtwinklige Axen als Coordinatenaxen an und bestimmen zu jedem Punkte (xyz) einen anderen $(x'y'z')$, sodass $x' = \varkappa x$, $y' = \varkappa' y$, $z' = \varkappa'' z$ wird, wo $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ drei absolute Zahlen bedeuten. Dadurch werden zwei Räume eindeutig aufeinander bezogen, d. h. so, dass jedem Punkte (xyz) des einen ein einziger bestimmter Punkt $(x'y'z')$ des anderen Raumes entspricht. Diese räumlichen Systeme sind nicht ähnlich, vielmehr würden sie dies erst, wenn $\varkappa = \varkappa' = \varkappa''$ gesetzt würde. Sie sind vielmehr durch folgende Umstände ausgezeichnet.

1. Einem unendlich fernen Punkte des einen Raumes entspricht ein unendlich ferner Punkt des anderen.

2. Allen Punkten (xyz) einer Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ entsprechen Punkte einer Ebene

$$\frac{A}{\varkappa} x' + \frac{B}{\varkappa'} y' + \frac{C}{\varkappa''} z' + D = 0$$

und mithin allen Punkten einer Geraden, als der Durchschnittslinie zweier Ebenen, wiederum die Punkte einer Geraden, nämlich die der Schnittlinie der beiden homologen Ebenen. Die Punktreihen zweier homologer Geraden sind ähnlich, aber das Aehnlichkeitsverhältniss variirt mit der Lage der Geraden. In den Coordinatenebenen und in der unendlich fernen Ebene fallen homologe Ebenen zusammen.

3. Der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ entspricht das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{(\varkappa a)^2} + \frac{y^2}{(\varkappa' a)^2} + \frac{z^2}{(\varkappa'' a)^2} = 1.$$

4. Dem Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ entspricht ein anderes Ellipsoid

$$\frac{x'^2}{(\varkappa a)^2} + \frac{y'^2}{(\varkappa' b)^2} + \frac{z'^2}{(\varkappa'' c)^2} = 1.$$

5. Sind zwei Ellipsoide ähnlich, z. B.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = n^2,$$

so sind auch ihre homologen Ellipsoide

$$\frac{x'^2}{(\varkappa a)^2} + \frac{y'^2}{(\varkappa' b)^2} + \frac{z'^2}{(\varkappa'' c)^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x'^2}{(\varkappa a)^2} + \frac{y'^2}{(\varkappa' b)^2} + \frac{z'^2}{(\varkappa'' c)^2} = n^2$$

ähnlich und zwar nach demselben Aehnlichkeitsverhältnisse n.

6. Homologe Volumina stehen in constantem Verhältniss. Denn es ist $dx'dy'dz' = \varkappa\varkappa'\varkappa'' dx\,dy\,dz$, also $\frac{\Sigma\, dx'dy'dz'}{\Sigma\, dx\,dy\,dz} = \varkappa\varkappa'\varkappa''$.

7. Nimmt man die Verhältnisszahlen $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ so an, dass die beiden homologen Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x'^2}{(\varkappa a)^2} + \frac{y'^2}{(\varkappa' b)^2} + \frac{z'^2}{(\varkappa'' c)^2} = 1$$

confocal werden, d. h. dass ihre Hauptschnitte dieselben Brennpunkte besitzen, welche Bedingung durch $\varkappa^2 a^2 - a^2 = \varkappa'^2 b^2 - b^2 = \varkappa''^2 c^2 - c^2$ ausgesprochen wird, so werden die Quadratdifferenzen der Halbaxen zweier jener ähnlicher und sich homologer Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = n^2 \quad \text{und} \quad \frac{x'^2}{(\varkappa a)^2} + \frac{y'^2}{(\varkappa' b)^2} + \frac{z'^2}{(\varkappa'' c)^2} = n^2$$

ebenfalls gleich, nämlich:

$$n^2(\varkappa^2 a^2 - a^2) = n^2(\varkappa'^2 b^2 - b^2) = n^2(\varkappa''^2 c^2 - c^2).$$

Die beiden letzteren Ellipsoide sind daher gleichfalls confocal. Um $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ der angeführten Bedingung gemäss zu bestimmen, seien a', b', c' die Halbaxen des zweiten mit dem Ellipsoid von den Halbaxen a, b, c confocalen Ellipsoides. Dann ist $\varkappa a = a'$, $\varkappa' b = b'$, $\varkappa'' c = c'$, also $\varkappa = \frac{a'}{a}$, $\varkappa' = \frac{b'}{b}$, $\varkappa'' = \frac{c'}{c}$ zu setzen und sind Bedingungen $a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2$ für den Confocalismus dieser Voraussetzung nach erfüllt.

8. Es seien M, N zwei Punkte des einen und M', N' die ihnen homologen Punkte des anderen der beiden confocalen Ellipsoide, dann ist der Abstand $MN' = M'N$. Man hat nämlich, wenn x, y, z und ξ, η, ζ die Coordinaten von M und N, x', y', z'; ξ', η', ζ' die von M', N' sind:

$$\overline{MN'}^2 = (\xi - x')^2 + (\eta - y')^2 + (\zeta - z')^2$$
$$= \left(\xi - \frac{a'}{a}x\right)^2 + \left(\eta - \frac{b'}{b}y\right)^2 + \left(\zeta - \frac{c'}{c}z\right)^2$$
$$\overline{M'N}^2 = (\xi' - x)^2 + (\eta' - y)^2 + (\zeta' - z)^2$$
$$= \left(\frac{a'}{a}\xi - x\right)^2 + \left(\frac{b'}{b}\eta - y\right)^2 + \left(\frac{c'}{c}\zeta - z\right)^2,$$

mithin:

$$\overline{MN'}^2 - \overline{M'N}^2 = \left(\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)(a^2 - a'^2) + \left(\frac{\eta^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)(b^2 - b'^2) + \left(\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)(c^2 - c'^2)$$

Da aber $a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2$ ist, so wird

$$\overline{MN'}^2 - \overline{M'N}^2 = (a^2 - a'^2)\left[\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right] = 0,$$

weil sowohl (xyz) als $(\xi\eta\zeta)$ vom Punkte des Ellipsoides $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ist. Folglich ist $MN' = M'N$.

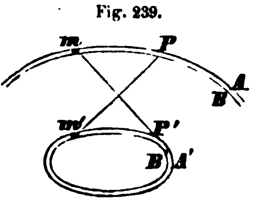


Fig. 239.

Dieser Satz rührt von Ivory her; er nennt die homologen Punkte der confocalen Ellipsoide „correspondirende Punkte" beider.

§. 17. Es seien (Fig. 239.) (AB) und $(A'B')$ zwei unendlich dünne Schichten, beide von ähnlichen Ellipsoiden begrenzt und zwar so, dass ihre äusseren und ihre inneren Grenzflächen A, A' und B, B' confocal sind. Sind dann P, P' zwei correspondirende feste Punkte der äusseren Grenzflächen, m, m' zwei correspondirende laufende Punkte derselben.

und dv, dv' die ihnen anliegenden homologen Volumenelemente, so hat man nach §. 16., Nr. 6.: $\frac{dv}{dv'} = \frac{abc}{a'b'c'}$ und weil nach §. 16., Nr. 8. $mP' = m'P$ ist, wenn ϱ, ϱ' die specifischen Massen der Schichten bezeichnen:

$$\frac{\varrho\, dv}{mP'} : \frac{\varrho' dv'}{m'P} = \frac{\varrho\, abc}{\varrho' a'b'c'}$$

und folglich, wenn man durch die ganzen Schichten hindurch summirt:

$$\Sigma \frac{\varrho\, dv}{mP'} : \Sigma \frac{\varrho' dv'}{m'P} = \frac{\varrho\, abc}{\varrho' a'b'c'};$$

$abc : a'b'c'$ ist das Verhältniss der Volumina und $\varrho\, abc : \varrho' a'b'c'$ folglich das Verhältniss der Massen der Schichten. Die vorstehende Gleichung sagt daher aus:

Die Potentiale v, v' zweier unendlich dünner ellipsoidischer Schichten (AB), $(A'B')$ von constanten specifischen Massen ϱ, ϱ', begrenzt von ähnlichen und ähnlich liegenden concentrischen Ellipsoiden, deren äussere Grenzflächen A, A', wie ihre inneren B, B' unter sich confocal sind, in Bezug auf zwei correspondirende Punkte P, P' ihrer äusseren Grenzflächen, sodass v sich auf P und v' auf P' bezieht, stehen im Verhältniss der Massen der Schichten.

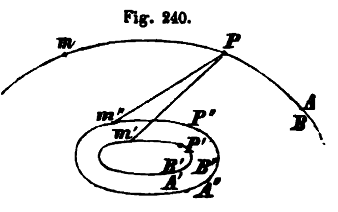
Die Verallgemeinerung dieses Satzes für ein beliebiges Anziehungsgesetz gab Amsler [Crelle's Journal Bd. 42, S. 314 (1848)].

Es sei die Schicht $A'B'$ von der Schicht AB umschlossen; nach dem Newton-schen Satze §. 15. übt die Schicht AB auf den inneren Punkt P' keine Wirkung aus; daher sind die Derivirten des Potentials $\Sigma \frac{\varrho\, dv}{mP'}$, nach den Coordinaten dieses Punktes genommen, Null und ist mithin dies Potential constant. Hieraus folgt, dass auch das Potential $\Sigma \frac{\varrho' dv'}{m'P}$ der Schicht $(A'B')$ in Bezug auf P' constant sein müsse, wo auch immer P' auf der Fläche A liegen möge, d. h.:

Für eine unendlich dünne, zwischen zwei ähnlichen Ellipsoiden enthaltene Schicht von constanter specifischer Masse ist das Potential in Bezug auf einen äusseren Punkt constant für alle Punkte eines mit der äusseren Grenzfläche der Schicht confocalen Ellipsoids. Das System aller mit der äusseren Grenzfläche confocalen Ellipsoide ist das System der Niveauflächen für die Attraction der Schicht. Die Richtung der Attractionskraft der Schicht ist die Normale des durch den afficirten Punkt mit der äusseren Grenzfläche confocalen Ellipsoids. Die äussere Grenzfläche ist selbst eine Niveaufläche.

Es seien (Fig. 240.) (AB), $(A'B')$, $(A''B'')$ drei Schichten von der Beschaffenheit, wie die vorigen, m, m', m''; P, P', P'' correspondireude Punkte ihrer Aussenflächen, dv, dv', dv'' die correspondirenden Volumenelemente an m, m', m''; ϱ, ϱ', ϱ'' die specifischen Massen der Schichten und werde angenommen, dass die Schicht (AB) die beiden anderen umschliesse. Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise hat man dann:

Fig. 240.



$$\Sigma \frac{\varrho' dv'}{m'P} = \frac{\varrho' a'b'c'}{\varrho\, abc} \Sigma \frac{\varrho\, dv}{mP'}$$

$$\Sigma \frac{\varrho'' dv''}{m''P} = \frac{\varrho'' a''b''c''}{\varrho\, abc} \Sigma \frac{\varrho\, dv}{mP''}.$$

Da aber P' und P'' beide innere Punkte für die Schicht AB sind, so ist:

$$\Sigma \frac{\varrho\, dv}{m P'} = \Sigma \frac{\varrho\, dv}{m P''};$$

daher erhält man die Proportion:

$$\Sigma \frac{\varrho' dv'}{m' P} : \Sigma \frac{\varrho'' dv''}{m'' P} = \frac{\varrho' a b c}{\varrho'' a'' b'' c''},$$

d. h. die Potentiale zweier unendlich dünner ellipsoidischer Schichten von constanten specifischen Massen, begrenzt von ähnlichen Ellipsoiden mit confocalen Aussenflächen in Bezug auf einen äusseren Punkt stehen im Verhältniss der Massen dieser Schichten.

Sind daher x, y, z wie früher die Coordinaten des angezogenen Punktes P in Bezug auf die Hauptaxen der Schichten, so erhält man für die Componenten X', Y', Z'; X'', Y'', Z'' der Attractionskräfte P', P'':

$$X' = \varepsilon\mu \frac{\partial \Sigma \frac{\varrho' dv'}{m' P}}{\partial x}, \quad Y' = \varepsilon\mu \frac{\partial \Sigma \frac{\varrho' dv'}{m' P}}{\partial y}, \quad Z' = \varepsilon\mu \frac{\partial \Sigma \frac{\varrho' dv'}{m' P}}{\partial z},$$

$$X'' = \varepsilon\mu \frac{\partial \Sigma \frac{\varrho'' dv''}{m'' P}}{\partial x}, \quad Y'' = \varepsilon\mu \frac{\partial \Sigma \frac{\varrho'' dv''}{m'' P}}{\partial y}, \quad Z'' = \varepsilon\mu \frac{\partial \Sigma \frac{\varrho'' dv''}{m'' P}}{\partial z},$$

sowie für diese Kräfte $P' = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}$, $P'' = \sqrt{X''^2 + Y''^2 + Z''^2}$ selbst, mithin mit Rücksicht auf die vorstehende Gleichung:

$$X' : X'' = Y' : Y'' = Z' : Z'' = P' : P'' = \varrho' a' b' c' : \varrho'' a'' b'' c'',$$

d. h. die Intensitäten der Attractionskräfte, mit welchen die beiden Schichten auf einen äusseren Punkt wirken, stehen im Verhältniss der Massen beider Schichten.

Von den beiden zuletzt aufgestellten Sätzen bestimmt der erste die Richtung und kann der zweite dazu dienen, die Intensität der Attraction einer Schicht bezüglich eines äusseren Punktes zu bestimmen. Die Richtung ist für alle Schichten der Art dieselbe.

Indem man unendlich dünne Schichten übereinander lagert, gelangt man zu dem dem letzten Satze entsprechenden Satze für Schichten von endlicher Dicke. Es seien A, A' zwei confocale Ellipsoide, man zerlege sie beide in unendlich dünne Schichten, von denen jede zwischen ähnlichen Ellipsoiden enthalten ist; a, b, c; a', b', c' seien die Halbaxen beider Ellipsoide. Die Halbaxen der äusseren Grenzfläche einer Schicht des einen seien na, nb, nc; die einer Schicht des anderen na', nb', nc'. Ertheilt man n für beide denselben Werth, so bleiben ihre Grenzflächen confocal und ihre Attractionskräfte in Bezug auf einen äusseren Punkt und deren Componenten stehen im Verhältniss $\frac{\varrho a b c}{\varrho' a' b' c'}$ ihrer Massen. Die Grössen ϱ, ϱ' variiren dabei mit n. Aehnliches gilt für die beiden nächstfolgenden Schichten, ebenso für die weiteren. Bleibt nun das Verhältniss $\varrho : \varrho'$ constant, während beide Grössen selbst veränderlich sein können, so stehen die Componentensummen der Attraction, welche von einer Reihe solcher entsprechenden Schichtenpaare herrühren, in demselben Verhältnisse, also auch schliesslich wie die Gesammtattractionskräfte selbst. Dies Verhältniss ist aber zugleich das der Massen der beiden Schichten von endlicher Dicke, welche durch die beiden Schichtenreihen gebildet werden. Daher also der Satz:

Die Attractionskräfte, welche zwei ähnliche ellipsoidische Schichten endlicher Dicke auf einen äusseren Punkt ausüben, stehen im Verhältniss von deren Massen.

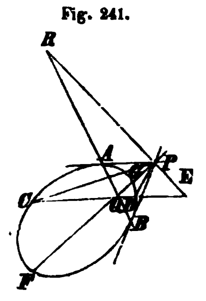
Für zwei volle Ellipsoide wurde dieser Satz von Maclaurin zuerst aufgestellt.

Den Satz über die Richtung der Attractionskraft einer unendlich dünnen Schicht in Bezug auf einen äusseren Punkt hat Poisson (*l'Institut*, 12. Oct. 1833; *Mémoires de l'Acad. des sciences*, T. XIII.) in einer anderen Fassung aufgestellt und Steiner gab dafür einen synthetischen Beweis (Crelle's Journ. d. Math. Bd. XII, S. 141 (1834), wie folgt:

Die Richtung der Attractionskraft einer unendlich dünnen homogenen ellipsoidischen Schicht in Bezug auf einen äusseren Punkt ist die Axe des Kegels, welcher diesen Punkt zum Mittelpunkte hat und der äusseren Grenzfläche der Schicht umschrieben ist.

Der Steiner'sche Beweis gründet sich auf folgenden Satz: Wenn PA, PB (Fig. 241.) die Ellipse $ACFB$ in A, B berühren und die Gerade PQ ihren Winkel halbirt und die Berührungssehne AB in Q schneidet, so bildet PQ gleiche Winkel mit je zwei Geraden PC, PD, welche nach den Schnittpunkten einer beliebigen, durch Q gelegten Geraden mit der Ellipse hinlaufen. Ist nämlich PR senkrecht zu PQ, so sind PA, PB; PQ, PR vier harmonische Stralen, weil PQ, PR die Winkel von PA, PB halbiren. Daher sind die Punkte A, B; Q, R harmonisch. Ferner sind, weil P der Pol von AB ist, F, G; Q, P harmonisch. Daher ist PR die Polare von Q oder der Ort aller vierten harmonischen Punkte E zu Q; C, D auf allen durch Q gehenden Geraden DE. Deshalb sind PQ, PE; PC PD harmonische Stralen und da zwei zugeordnete PQ, PR von ihnen zu einander rechtwinklig sind, so halbiren sie die Winkel der beiden anderen PC, PD.

Fig. 241.



Legt man nun durch die Axe des umschriebenen Kegels und irgend einen Punkt C auf der äusseren Grenzfläche der Schicht eine Ebene, welche die äussere Fläche in einer Ellipse $ACBD$, den Kegel in zwei diese berührenden Stralen PA, PB und die Ebene der Berührungscurve in der Sehne AB schneiden wird, so bestimmt die Kegelaxe auf letzterer den Punkt Q, sodass PQ mit PC, PD gleiche Winkel bildet. Denkt man sich nun Q als Mittelpunkt eines unendlich schmalen Kegels, welcher bei C und D aus der ellipsoidischen Schicht zwei kleine Volumina dv, dv' ausschneidet, so sind die Attractionskräfte p, p' ihrer Massen ϱdv, $\varrho dv'$:

$$p = \frac{\varepsilon\mu\varrho\, dv}{\overline{QC}^2}, \quad p' = \frac{\varepsilon\mu\varrho\, dv'}{\overline{QD}^2}.$$

Nach dem Newton-Maclaurin'schen Satze sind diese Kräfte gleich und folglich

$$\frac{dv}{\overline{QC}^2} = \frac{dv'}{\overline{QD}^2}.$$

Nun ist aber vermöge des oben angezogenen Satzes $QC : QD = PC : PD$, also auch:

$$\frac{\varepsilon\mu\varrho\, dv}{\overline{PC}^2} = \frac{\varepsilon\mu\varrho\, dv'}{\overline{PD}^2}.$$

Diese Grössen sind aber die Kräfte, mit welchen die Elemente der Schicht bei C und D den Punkt P anziehen.

Der Beweis ergibt zugleich noch den Satz:

Eine beliebige durch Q gehende Ebene zerlegt die Schicht in zwei Theile, welche auf P gleiche Anziehung ausüben.

§. 18. Wir schreiten nun zur Bestimmung der Anziehung einer unendlich dünnen ellipsoidischen Schicht in Bezug auf einen Punkt ihrer äusseren Grenz-

fläche, auf welches Problem das der Anziehung für einen äusseren Punkt leicht zurückgeführt werden kann.

Nach §. 17. ist diese Grenzfläche selbst eine Niveaufläche der Schicht und mithin hat die Richtung der Kraft in irgend einem ihrer Punkte P (Fig. 242.) die Richtung der Normalen dortselbst. Um die Intensität zu finden, betrachten wir P als die Spitze eines gegen die Dicke der Schicht unendlich dünnen Kegels, welcher aus der Schicht zwei unendlich kleine anziehende Volumina bei Pn und $n'm'$ herausschneidet. Um P beschreiben wir mit der Einheit als Radius eine Kugelfläche; sie bestimmt in dem Kegel ein sphärisches Flächenelement $d\sigma$, welches gegen die Dicke der Schicht unendlich klein ist. In der Entfernung r von P liegt nun im Kegel ein Volumenelement $r^2\,d\sigma\,dr$ von der Masse $\varrho r^2\,d\sigma\,dr$, dessen Anziehung auf P proportional $\varepsilon\mu\varrho\,d\sigma\,dr$ ist. Die Summe aller dieser Attractionen, welche die gemeinschaftliche Richtung Pm' haben, durch die Längen Pn und $n'm$ hindurch integrirt, ist die Attractionskraft der auf dem Strale Pm' liegenden Massentheile der Schicht; sie ist demnach $\varepsilon\mu\varrho\,d\sigma\cdot(Pn+n'm')$ oder da $n'm'=Pn$ ist: $2\,\varepsilon\mu\varrho\,d\sigma\cdot\overline{Pn}$. Von dieser Kraft brauchen wir nur die Componente längs der Normalen der Aussenfläche der Schicht, nämlich $2\,\varepsilon\mu\varrho\,d\sigma\cdot\overline{Pn}\cos(nPA)$, indem die Totalattraction die Richtung der Normalen hat und sich folglich alle tangentiellen Componenten tilgen. Da aber die Dicke PA der Schicht unendlich klein ist, so ist dies auch mit dem Dreieck PAn der Fall, welche Richtung auch immer Pn haben möge; es ist daher An immer unendlich klein und senkrecht zu PA, d. h. $\cos(nPA)=\frac{PA}{Pn}$.

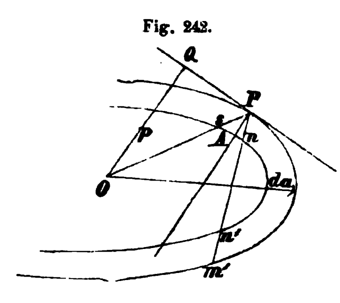


Fig. 242.

Hierdurch wird die fragliche Componente $2\,\varepsilon\mu\varrho\,d\sigma\cdot\overline{PA}$. Um nun hieraus die Summe aller ähnlichen Componenten für die Massen, welche längs den verschiedenen Stralen Pm' in der Schicht enthalten sind, d. h. die Gesammtattraction der Masse der Schicht zu finden, hat man diesen Ausdruck über die Halbkugel hinweg zu integriren, denn es liegen nur diesseits der Tangentenebene des Punktes P Massen. Dies liefert für die gesuchte Grösse $4\pi\varepsilon\mu\varrho\cdot PA$, d. h. **die Intensität der Kraft, mit welcher eine aus ähnlichen Elipsoiden gebildete unendlich dünne Schicht einen Punkt ihrer äusseren Grenzfläche anzieht, ist der Dicke der Schicht, gemessen längs der Normalen der äusseren Grenzfläche im angezogenen Punkte, proportional.** Dieser Satz wurde in einer allgemeineren Fassung zuerst von **Laplace** bewiesen, indem er zeigte, dass wenn irgend eine Schicht von beliebiger Gestalt auf einen inneren Punkt keine Wirkung ausübt, ihre Wirkung auf einen Punkt der äusseren Grenzfläche dem Ausdrucke $4\pi\varrho\delta$ proportional ist, für δ als Dicke der Schicht, wie oben, in normaler Richtung gemessen.

Wir wollen die Dicke PA der Schicht in diesem Satze etwas anders ausdrücken. Fällt man nämlich vom Mittelpunkte O der Schicht auf die Normale das Perpendikel $OQ=p$ und zieht den Stral OP, welcher die innere Grenzfläche der Schicht in S treffen mag, so ist wegen der ähnlichen Lage der Grenzflächen $\frac{PA}{OQ}=\frac{PS}{PO}$ und da $\frac{PS}{PO}$ durch die ganze Figur hindurch constant bleibt, so kann es, wenn a_1, b_1, c_1 die Halbaxen der Aussenfläche sind und da_1 die Dicke der Schicht längs der Halbaxe a_1 bedeutet, durch $\frac{da_1}{a_1}$ dargestellt werden. Daher hat man

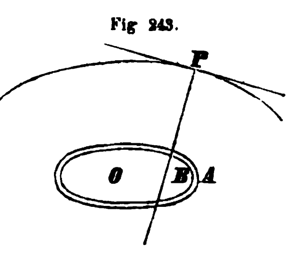
$$\frac{PA}{OQ} = \frac{da_1}{a_1}, \text{ d. h.: } \overline{PA} = \frac{da_1}{a_1} \cdot p$$

und folglich für die Kraft:

$$4\pi\varepsilon\mu\varrho \frac{da_1}{a_1} \cdot p\,.$$

Um jetzt die Anziehung einer ellipsoidischen Schicht für einen äusseren Punkt auf den eben entwickelten Fall zurückzuführen, legen wir durch den angezogenen Punkt P (Fig. 243.) ein mit der äusseren Grenzfläche der Schicht confocales Ellipsoid A, sowie ein diesem ähnliches unendlich nahes zweites Ellipsoid B, sodass wir eine unendlich dünne Schicht $(A_1 B_1)$ erhalten, auf deren Aussenfläche P liegt. Die gegebene Schicht (AB), deren Aussenfläche die Halbaxen a, b, c haben möge, übt auf P eine Anziehung aus, welche sich zu der Anziehung der eben construirten Schicht verhält, wie sich die Massen beider Schichten verhalten. Legen wir jener Hülfsschicht die specifische Masse ϱ von (AB) bei, so wird dies Verhältniss gleich dem Verhältnisse $\frac{abc}{a_1 b_1 c_1}$ der Volumina der Schichten, wo $a_1 b_1 c_1$ die Halbaxen der Aussenfläche der Hülfsschicht bedeuten. Die gesuchte Anziehung der gegebenen Schicht folgt daher aus dem Ausdrucke am Ende des §. 18. durch Multiplication mit diesem Verhältnisse und wird

Fig 243.



$$4\pi\varepsilon\mu\varrho p \cdot \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \cdot \frac{da_1}{a_1}\,.$$

Wir wollen nun die Dicke der Hülfsschicht so bestimmen, dass die Flächen A_1, B_1 in demselben Verhältnisse n einander ähnlich seien, wie die Flächen A, B. Dann ist $\frac{da_1}{a_1} = n - 1 = \frac{da}{a}$ und folglich geht der vorige Ausdruck für die Attraction der Schicht über in

$$4\pi\varepsilon\mu\varrho p \cdot \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \cdot \frac{da}{a}\,.$$

Die Richtung der Kraft ist die Normale des durch den angezogenen Punkt gelegten, mit der Aussenfläche der anziehenden Schicht confocalen Ellipsoids $(a_1 b_1 c_1)$.

§. 19. Um die Attraction eines Ellipsoids darzustellen, zerlegen wir dasselbe in unendlich dünne Schichten, welche zwischen concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Flächen enthalten sind. Alle diese sind mithin auch der äusseren Grenzfläche des Ellipsoids ähnlich. Für jede Schicht, deren Aussenfläche die Halbaxen a, b, c habe, construiren wir durch den angezogenen Punkt (xyz) ein mit dieser Aussenfläche confocales Ellipsoid, dessen Halbaxen a_1, b_1, c_1 seien. Wir bestimmen nun die Componenten der Anziehung der Schicht parallel den Hauptaxen des Ellipsoids, indem wir den Ausdruck am Ende des vorigen §. mit den Richtungscosinussen $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ der Normalen des Ellipsoids $(a_1 b_1 c_1)$ multipliciren und die so gewonnenen Ausdrücke durch die Masse des anziehenden Ellipsoids hindurch integriren. Eine Ebene durch die x-Axe und den angezogenen Punkt schneidet das Ellipsoid $(a_1 b_1 c_1)$ in einer Ellipse, deren Tangente die x-Axe im Abstande $\frac{a_1^2}{x}$ trifft und da diese Tangente in die Tangentenebene des Punktes (xyz) fällt, so trifft diese Ebene die x-Axe in demselben Abstande. Ebenso trifft sie die beiden anderen Axen in den Abständen $\frac{b_1^2}{y}$, $\frac{c_1^2}{z}$ vom Mittelpunkte. Das

Perpendikel p vom Mittelpunkte auf die Tangentenebene gefällt, ist die gemeinschaftliche Projection dieser drei Strecken und folglich

$$\cos\lambda = \frac{px}{a_1^2}, \qquad \cos\mu = \frac{py}{b_1^2}, \qquad \cos\nu = \frac{pz}{c_1^2}$$

woraus

$$\frac{1}{p^2} = \frac{x^2}{a_1^4} + \frac{y^2}{b_1^4} + \frac{z^2}{c_1^4}$$

vermöge der Gleichung $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$ folgt. Man hat daher für die Componenten der Anziehung der Schicht (abc):

$$\pi\varepsilon\mu\varrho x \frac{abc}{a_1b_1c_1}\frac{p^2}{a_1^2}\frac{da}{a}, \qquad \pi\varepsilon\mu\varrho y \frac{abc}{a_1b_1c_1}\frac{p^2}{b_1^2}\frac{da}{a}, \qquad \pi\varepsilon\mu\varrho z \frac{abc}{a_1b_1c_1}\frac{p^2}{c_1^2}\frac{da}{a}$$

Als Integrationsvariabeln wählt nun Chasles die Halbaxe a der Aussenfläche der anziehenden Schicht und vertauscht diese Variabeln später mit $x = \frac{a}{a_1}$. Wir ziehen es vor, um die Untersuchung der Dirichlet'schen Form der Lösung anzuschliessen, den Parameter λ des durch (xyz) gehenden, mit (abc) confocalen Ellipsoids $(a_1b_1c_1)$ zu wählen. Setzt man nämlich

$$a_1^2 - a^2 = b_1^2 - b^2 = c_1^2 - c^2 = \lambda,$$

sodass

$$a_1^2 = a^2 + \lambda, \qquad b_1^2 = b^2 + \lambda, \qquad c_1^2 = c^2 + \lambda$$

wird, so besteht die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1,$$

welche ausdrückt, dass (xyz) auf diesem Ellipsoide liegt. Um die Variabeln a, b, c zu entfernen, setzen wir weiter vermöge der Aehnlichkeit der Fläche (abc) mit der Aussenfläche $(\alpha\beta\gamma)$ des anziehenden Ellipsoids:

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \varkappa,$$

wodurch jene Gleichung die Form

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\varkappa^2\lambda} + \frac{y^2}{\beta^2+\varkappa^2\lambda} + \frac{z^2}{\gamma^2+\varkappa^2\lambda} = \frac{1}{\varkappa^2}$$

annimmt. Grösserer Einfachheit wegen wählen wir schliesslich $\varkappa^2\lambda = s$ zur Integrationsvariabeln und schreiben diese Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2+s} + \frac{y^2}{\beta^2+s} + \frac{z^2}{\gamma^2+s} = \frac{1}{\varkappa^2},$$

worin s und das Aehnlichkeitsverhältniss $\varkappa = \frac{\alpha}{a}$ von Schicht zu Schicht variiren. Die Differentiation derselben liefert nun:

$$l\,ds = \frac{2\,d\varkappa}{\varkappa^3} = -\frac{2\,\alpha}{\varkappa^3}\frac{da}{a^2} = -\frac{2}{\varkappa^2}\frac{da}{a}$$

$$l = \frac{x^2}{(\alpha^2+s)^2} + \frac{y^2}{(\beta^2+s)^2} + \frac{z^2}{(\gamma^2+s)^2}.$$

Nach der oben für p entwickelten Formel ist aber

$$\frac{1}{p^2} = \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2} = \left[\frac{x^2}{(\alpha^2+s)^2} + \frac{y^2}{(\beta^2+s)^2} + \frac{z^2}{(\gamma^2+s)^2}\right]\varkappa^4$$

d. h. $l = \frac{1}{p^2\varkappa^4}$, wodurch wir erhalten:

$$\frac{da}{a} = -\frac{1}{2}\frac{ds}{p^2\varkappa^2}.$$

Weiter wird

$$abc = \frac{\alpha\beta\gamma}{\varkappa^3}, \quad a_1 b_1 c_1 = \varkappa^3 \sqrt{(\alpha^2 + s)(\beta^2 + s)(\gamma^2 + s)}, \quad a_1^2 = \frac{\alpha^2 + s}{\varkappa^2}$$

und hiermit die x-Componente der Attraction der Schicht:

$$-2\pi\varepsilon\mu\,\alpha\beta\gamma\, x \frac{\varrho\, ds}{(\alpha^2 + s)\sqrt{(\alpha^2 + s)(\beta^2 + s)(\gamma^2 + s)}}$$

$$= -2\pi\varepsilon\mu x \frac{\varrho\, ds}{\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}}.$$

Dieser Ausdruck ist nun für das velle Ellipsoid zwischen den Werthen von s als Grenzen zu integriren, welche $a = \alpha$ und $a = 0$ entsprechen, wofür $\varkappa = 1$ und $\varkappa = \infty$ und vermöge $\varkappa^2 \lambda = s$ die Werthe von s gleich σ und ∞ werden, wo σ die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\gamma^2 + \lambda} = 1$$

ist. Demnach erhalten wir, indem wir zugleich die analogen Integrale bilden:

$$X = -2\pi\varepsilon\mu \cdot x \int_\sigma^\infty \frac{\varrho\, ds}{(\alpha^2 + s) D},$$

$$Y = -2\pi\varepsilon\mu \cdot y \int_\sigma^\infty \frac{\varrho\, ds}{(\beta^2 + s) D},$$

$$Z = -2\pi\varepsilon\mu \cdot z \int_\sigma^\infty \frac{\varrho\, ds}{(\gamma^2 + s) D},$$

$$D = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}.$$

Die specifische Masse ϱ ist von Schicht zu Schicht veränderlich, mithin eine Function von dem Aehnlichkeitsverhältniss $\varkappa$ der Grenzfläche der Schicht zum Ellipsoid $(\alpha\beta\gamma)$ oder auch von $\frac{1}{\varkappa}$. Diese Grösse ist aber Function von s vermöge der obigen Gleichung

$$\frac{1}{\varkappa^2} = \frac{x^2}{\alpha^2 + s} + \frac{y^2}{\beta^2 + s} + \frac{z^2}{\gamma^2 + s}.$$

Daher kann ϱ als Function von s dargestellt werden durch

$$\varrho = \varphi\left(\frac{x^2}{\alpha^2 + s} + \frac{y^2}{\beta^2 + s} + \frac{z^2}{\gamma^2 + s}\right).$$

Ist das Ellipsoid kein volles, sind vielmehr α_1, β_1, γ_1 die Halbaxen der inneren Grenzfläche, so ist die Integration bis $a = \alpha_1$ auszudehnen, also, wenn σ_1 die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha_1^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\beta_1^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\gamma_1^2 + \lambda} = 1$$

ist, erhält man:

$$X = -2\pi\varepsilon\mu x \int_\sigma^{\sigma_1} \frac{\varrho\, ds}{(\alpha^2 + s) D} \quad \text{u. s. w.}$$

Für einen der Masse angehörigen Punkt (xyz) trennt ein durch denselben

mit der Aussenfläche ähnliches Ellipsoid die anziehende Masse in zwei Theile, eine äussere Schicht, welche nach dem Newton'schen Satze keine Wirkung auf den Punkt ausübt und ein Restellipsoid oder eine Restschicht, deren Anziehung die Totalanziehung der Gesammtmasse darstellt, welche nach dem Vorstehenden leicht bestimmt wird.

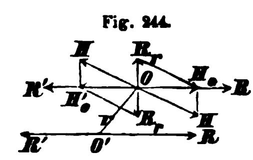
§. 20. Nach Behandlung des Potentials von Massen, welche im Raume von drei Dimensionen vertheilt sind, würden wir zu dem Potentiale der massig gedachten Flächen und Linien fortzuschreiten haben. Bei Flächen zeigt sich, dass bereits die ersten Derivirten des Potentials nach den Coordinaten des angezogenen Punktes beim Durchgange durch die Fläche discontinuirlich werden und mit ihnen die Componenten der Kraft. Wir können übrigens die Untersuchung der Flächen- und Linienpotentiale nicht in den Bereich unseres Lehrbuches ziehen, sondern verweisen in dieser Hinsicht auf Gauss, Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte, Art. 12 u. s. w., Clausius, die Potentialfunction und das Potential. 2. Aufl. Leipzig 1867, S. 57, Moigno. *Leçons de mécanique analytique* p. 562.

Ebenso müssen wir eine grosse Anzahl von Sätzen über Körperpotentiale, welche Gauss und Chasles gefunden haben, übergehen; man vgl. neben der Gauss'schen Abhandlung auch die Gauss'sche Lösung des Attractionsproblems des Ellipsoids (*Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum homogeneorum methodo nova tractata.* Gauss' Werke, B. 5, S. 1 u. 279), sowie Jullien, *problèmes de mécanique rationelle*, T. II, p. 307.

Dagegen wollen wir der Anziehung zweier räumlich ausgedehnter Massen aufeinander noch in Kürze gedenken.

Wir wollen annehmen, zwei unveränderliche Systeme Σ, Σ' wirken gegenseitig aufeinander ein, sodass jeder Punkt P des ersten auf jeden Punkt P' des zweiten und umgekehrt jeder Punkt P' des zweiten auf jeden Punkt P des ersten wirkt; die Kräfte, welche diese Einwirkungen darstellen, sollen an Intensität gleich, dem Produkte beider Massen und einer Function der Entfernung beider Punkte proportional, dem Sinne nach aber entgegengesetzt sein. Sämmtliche an den Punkten des Systems Σ wirkenden Kräfte, welche von den Punkten des Systems Σ' herrühren, reduciren wir für irgend einen Punkt O (Fig. 244.) des Raumes auf ihre Resultante R und ihr resultirendes Paar H. An allen Punkten des Systems Σ' wirken dieselben Kräfte, nur in entgegengesetztem Sinne genommen; wir wollen auch sie für denselben Punkt O reduciren und erhalten hierdurch ebenfalls eine Resultante R' und ein resultirendes Paar H'. R' und H' sind an Grösse und Richtung gleich R und H, dem Sinne nach jedoch entgegengesetzt. Führt man daher die in Cap. V, S. 552 angegebene Construction für die Centralaxe aus, so erkennt man, dass die Centralaxen für beide Systeme in dieselbe Gerade fallen und dass die Paare H_0, H_0', welche ihr entsprechen, entgegengesetzt gleich sind. Hieraus ergibt sich der Satz:

Fig. 244.



Die Kräfte, mit welchen die Massen zweier unveränderlicher Systeme, deren Punkte sich proportional dem Produkte ihrer Massen und einer Function der Entfernung anziehen oder abstossen, aufeinander wirken, sind äquivalent zwei Resultanten R, R' und zwei Kräftepaaren H_0, H_0' und zwar sind die beiden Resultanten gleich an Intensität, entgegengesetzten Sinnes und fallen in dieselbe Gerade, nämlich die gemeinschaftliche Centralaxe beider Systeme und

haben die beiden Paare gleiche Momente, aber entgegengesetzte, der Centralaxe parallele Axen.

Die Kraft R kann man in jedem Punkte der Centralaxe angreifend denken, ebenso die ihr gleiche und entgegengesetzte R'. Nun kann man fragen, in welcher Entfernung von einander die Massen M, M' der beiden Systeme in zwei Punkten vereinigt gedacht werden können, wenn sie sich mit den Kräften R, R' anziehen oder abstossen sollen. Ist $\varphi(r)$ die Function der Entfernung, welche dem zu Grunde liegenden Attractionsgesetze entspricht, so hat man r aus der Gleichung $\varepsilon M M' \varphi(r) = R$ zu suchen. Für die Newton'sche Attraction ist $\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$, also $\frac{\varepsilon M M'}{r^2} = R$, mithin $r = \sqrt{\frac{\varepsilon M M'}{R}}$. Demnach kann man sich die Wirkung der beiden Systeme aufeinander vorstellen als die Wirkung zweier Punkte aufeinander, in welchen die Massen der Systeme concentrirt gedacht werden, beide auf der gemeinschaftlichen Centralaxe liegend, in Verbindung mit zwei entgegengesetzt drehenden Kräftepaaren von gleichen Momenten und Axen parallel der Centralaxe. Die gegenseitige Einwirkung zweier Systeme ist also eine translatorische und eine drehende, beides bei beiden in entgegengesetztem Sinne.

In besonderen Fällen können die beiden Paare verschwinden und blos die beiden Resultanten übrig bleiben. Dies tritt ein 1. wenn eines der Systeme sich auf einen einzigen Punkt reducirt; 2. wenn eines der Systeme eine homogene oder concentrisch geschichtete Kugel ist (denn die Resultante R' der Kräfte, mit welchen ein Punkt der nicht kugelförmigen Masse auf die Elemente der Kugel wirkt, geht durch den Kugelmittelpunkt, folglich auch R als die Resultante aller dieser Resultanten). — Sind die Massen zwei Kugeln von der eben erwähnten Beschaffenheit, so findet dasselbe doppelt statt. Die Kugeln wirken aufeinander blos translatorisch, wie wenn ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt wären.

Wir wollen jetzt annehmen, die beiden Systeme wirken aus sehr grosser Entfernung aufeinander. Je weiter sich Σ' von Σ entfernt, desto mehr nähern sich die Richtungen der an Σ angreifenden Kräfte dem Parallelismus und reduciren sich dieselben immer mehr auf eine blose Resultante R, welche durch den Mittelpunkt der parallelen Kräfte hindurchgeht; um so mehr nähert sich also das Paar H_0 der Null. Aehnliches gilt vom System Σ'. Daher der Satz:

Je weiter sich zwei Systeme von einander entfernen, desto geringer ist die drehende Wirkung, welche sie aufeinander ausüben und um so genauer fällt die Richtung ihrer anziehenden oder abstossenden Wirkung in die Verbindungslinie der Mittelpunkte ihrer Massen. (Anwendung hiervon auf die Körper unseres Sonnensystems.)

§. 21. Man kann die Untersuchung der Newton'schen Attraction zweier Massensysteme Σ, Σ' aufeinander von einer Grösse abhängig machen, welche das Potential v beider Massen aufeinander genannt wird. Ist nämlich r der Abstand zweier Massenelemente dm, dm', deren Coordinaten x, y, z; x', y', z' sein mögen, wodurch $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ wird, so ist diese Grösse

$$v = \int \frac{dm\, dm'}{r},$$

wobei von den Integrationen die eine über Σ, die andere über Σ' auszudehnen ist. Um den Zusammenhang von v mit den Componenten X, Y, Z der Resultanten R und L, M, N des resultirenden Paares H aller an Σ angreifenden Kräfte zu erkennen, drücken wir die Aequivalenz aller Anziehungskräfte $\varepsilon \frac{dm\, dm'}{r^2}$ mit

R und H oder das Gleichgewicht zwischen ihnen und $-X$, $-Y$, $-Z$; $-L$, $-M$, $-N$ mit Hülfe des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten aus. Nun ist die virtuelle Arbeit der Attractionskraft, welche am Elemente dm angreift, gleich $-\frac{\varepsilon\, dm\, dm'}{r^2}\cdot\delta r$, wenn δr so verstanden wird, dass in r blos x, y, z sich ändern, oder also $\delta\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\varepsilon\, dm\, dm'$ und die Summe aller dieser virtuellen Arbeiten ist mithin $\varepsilon\int\int\delta\left(\frac{1}{r}\right)\cdot dm\, dm'$ oder $\varepsilon\,\delta v$. Sind ferner $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ unendlich kleine Verschiebungen parallel den Axen, $d\vartheta$, $d\vartheta'$, $d\vartheta''$ unendlich kleine Rotationsamplituden um Axen parallel denselben, so wird

$$-X_1\delta\xi - Y_1\delta\eta - Z_1\delta\zeta - L\delta\vartheta - M\delta\vartheta' - N\delta\vartheta''$$

die virtuelle Arbeit von R und H darstellen und wird man haben

$$\varepsilon\,\delta v = X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta + L\delta\vartheta + M\delta\vartheta' + N\delta\vartheta''.$$

Es stellt demnach die Aenderung des Potentials beim Uebergange des Systems aus einer Lage in die unmittelbar folgende Lage, multiplicirt mit der Kraft, welche zwischen zwei Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung wirkt, die Elementararbeit aller am System angreifenden Attractionskräfte dar.

Das Potential v hängt nun von den Dimensionen, der Massenvertheilung und der relativen Lage beider Systeme gegen einander ab. Ist $O\,(\xi\eta\zeta)$ irgend ein Punkt von Σ, $O'\,(\xi'\eta'\zeta')$ ein anderer von Σ' und sind $(\lambda\mu\nu)$, $(\lambda'\mu'\nu')$, $(\lambda''\mu''\nu'')$ die Richtungen dreier in Σ fester, durch O gehender Axen, sowie $(\lambda_1\mu_1\nu_1)$, $(\lambda_1'\mu_1'\nu_1')$, $(\lambda_1''\mu_1''\nu_1'')$ die Richtungen dreier solcher durch O' gehender, Σ' angehöriger Axen, so ist v eine Function von ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' und von sechs Winkelgrössen, welche aus den λ und μ gebildet werden können. Ertheilt man nun dem System Σ virtuelle Verschiebungen parallel den absoluten Coordinatenaxen, so ändern sich ξ, η, ζ und ergibt sich

$$\varepsilon\frac{\partial v}{\partial\xi} = X, \quad \varepsilon\frac{\partial v}{\partial\eta} = Y, \quad \varepsilon\frac{\partial v}{\partial\zeta} = Z,$$

indem in der Gleichung der virtuellen Arbeit jedesmal alle Verschiebungen bis auf eine verschwinden. Ebenso wenn dem System nach und nach drei Rotationen um Axen parallel den Coordinatenaxen ertheilt werden:

$$\varepsilon\frac{\partial v}{\partial\vartheta} = L, \quad \varepsilon\frac{\partial v}{\partial\vartheta'} = M, \quad \varepsilon\frac{\partial v}{\partial\vartheta''} = N,$$

wo aber die hier bezeichneten Differentiationen in solche nach den drei Winkelgrössen, welche die Lage von Σ bestimmen, umzusetzen sind.

Uebrigens erhält man unmittelbar:

$$X = \varepsilon\int\int\frac{x - x'}{r^3}\,dm\,dm', \qquad L = \varepsilon\int\int\frac{yz' - y'z}{r^3}\,dm\,dm',$$

$$Y = \varepsilon\int\int\frac{y - y'}{r^3}\,dm\,dm', \qquad M = \varepsilon\int\int\frac{zx' - z'x}{r^3}\,dm\,dm',$$

$$Z = \varepsilon\int\int\frac{z - z'}{r^3}\,dm\,dm', \qquad N = \varepsilon\int\int\frac{xy' - x'y}{r^3}\,dm\,dm',$$

Die Bedingung, dass die rotatorische Wirkung wegfällt, ist:

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Ein hierher gehöriges Beispiel bietet die Attraction zweier homogener Ellipsoide dar (vgl. Mertens, Crelle's Journ. Bd. 63, S. 360). Dirichlet gibt in der §. 12. citirten Abhandlung am Schlusse Andeutungen über die Behandlung dieser Aufgabe, hat aber darüber nichts weiter mitgetheilt.

Die Entwickelung der Attractionstheorie und der Theorie des Potentials lehnte sich vorzugsweise an die Lösung des Attractionsproblems des Ellipsoids an, welche zunächst ein Bedürfniss der Astronomie war. Bereits Newton fand den Satz, dass eine ellipsoidische Schicht keine Wirkung auf einen inneren Punkt ausübt (*Principia phil. nat.* lib. I, propos. 91). Er fand ferner, dass zwei concentrische Rotationsellipsoide ähnlicher Gestalt und Lage auf zwei homologe Punkte ihrer Oberfläche Anziehungen von derselben Richtung und proportional dem Abstande vom Mittelpunkte ausüben. Hieran knüpfte Maclaurin an (*Treatise on fluxions*, l. I, ch. XIV, *De causa physica fluxus et refluxus maris*; *Académ. des sciences*, T. IV) und bestimmte die Attraction eines Rotationsellipsoids für einen Punkt seiner Oberfläche und einen äusseren in der Ebene des Aequators liegenden Punkt und bewies, dass zwei confocale Ellipsoide auf einen Punkt einer Hauptaxe Wirkungen ausüben in der Richtung dieser Axe und proportional ihren Massen. Lagrange dehnte diesen Satz für alle Punkte eines Hauptschnitts aus (*Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin*, 1773). Die vollständige Lösung dieses Problems gelang erst Laplace (*Mém. de l'Académie des sciences*, 1782; *Mécanique céleste*, liv. III, chap. 1). Seitdem wurde das Problem von fast allen bedeutenden Mathematikern behandelt. Jvory gab ein Reductionstheorem für die Attraction eines inneren Punktes auf die für einen äusseren (*on the attractions of homogeneous ellipsoids, Philosoph. Transactions*, 1809); Gauss, *theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata* (*Commentatt. Goetting. recent.* T. II (1813) oder Werke, Bd. 5, p. 1 u. 279); Legendre (*Traité des fonctions elliptiques*, T. I, p. 539); Poisson, *Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène* (*Mém. de l'Académie des sciences*, T. XIII); Chasles, *Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes* [*Journ. de l'école polytechn.*, Cah. XXV, p. 244 (1837)]; *Comptes rendus de l'Acad. des sciences*, T. VI, p. 902 (1838); *Nouvelle solution du problème de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur, Journ. de math. p. Liouville*, T. V (1840); Dirichlet, Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale (Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1839, oder *Comptes rendus de l'Acad. des sciences*, T. VIII, p. 156); Jacobi, *Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville* (*Journ. de math.*, T. XI, p. 341).

Bezüglich der Ausbildung der Theorie des Potentials sind vorzugsweise zu citiren: Laplace, (*Mécan. celeste*, l. II, §. 11., die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung enthaltend). — Poisson's Gleichung (*Bulletin de la société philomatique*, T. III, p. 368). — Green, *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism.* Nottingham 1828, abgedruckt mit kurzer Biographie und anderen einleitenden Notizen von Thomson in Crelle's Journal Bd. 39, p. 73; 44, p. 356; 47, p. 161 u. 195. Von Green rührt der Name Potential her. — Gauss, Allgemeine Lehrsätze, s. oben §. 20. — Chasles, *Mémoire sur l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince, et les rapports qui ont lieu entre cette attraction et les lois de la chaleur en mouvement dans un corps en equilibre de temperature*, *Journ. de l'école polytechn.*, Cah. 25, p. 266 (1837); *Enoncé de deux théorèmes généraux sur l'attraction des corps et la théorie de la chaleur*, *Comptes rendus* 1839; *Theorèmes généraux sur l'attraction des corps*, *Addit. à la connaiss. des temps p. l'an* 1845 (*publ. en* 1842). — Dirichlet, *sur un moyen*

général de vérifier l'expression du potential relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène, Crelle's Journ. Bd. 32, p. 80. — Despeyrous, *Recherches sur les surfaces isothermes et sur l'attraction des ellipsoïdes* (Crelle's Journ. Bd. 31, p. 136). — Sturm, *Note sur un mémoire de M. Chasles* (*Journ. de math.* T. VII, p. 345). — Thomson, *Note sur la théorie de l'attraction* (*Journ. de math.* T. IX. p. 239). — Liouville (*Addit. à la connaissance des temps* p. 1845). — Briot, *sur l'attraction* (*Journ. de math.* T. XI, p. 174). — Heine, Beitrag zur Theorie der Anziehung und der Wärme (Crelle's Journ. Bd. 29, p. 185; Theorie der Anziehung des Ellipsoids, ebend. Bd. 42, p. 70). — Weingarten, Zur Theorie des Potentials (Crelle's Journ. Bd. 49, p. 367). — Amsler, Zur Theorie der Anziehung und der Wärme (Crelle's Journ. Bd. 42, p. 316; neue geometrische Eigenschaft der Niveauflächen, Bd. 42, p. 314). — Scheibner, Ueber das Flächenpotential (Crelle's Journ. Bd. 54, p. 77). — Christoffel, Zur Theorie der einwerthigen Potentiale (Crelle's Journ. Bd. 64, p. 321). — Roch, Ueber eine Transformation des Potentials (Crelle's Journ. Bd. 63, p. 9). — Kronecker, Zur Potentialtheorie (Crelle's Journ. Bd. 70, S. 246).

Speciellere Arbeiten, welche vorzugsweise das Ellipsoid oder verwandte Flächen betreffen, sind noch anzuführen:

Boole, *on the attraction of a solid of revolution on an external point* Cambridge and Dublin mathem. Journal T. II, p. 1) (1847). — Collins, *The attraction of ellipsoïds considered geometrically* (Ibid. T. IX, p. 255; 1854). — Cayley, *on a multiple integral connected with the theory of attraction*, Ibid. T. II, p. 21[illegible]; *on the attraction of an ellipsoid* (*Legendre's method*), Ibid. T. IV, p. 50; *on the attraction of an ellipsoid* (*Jacobi's method*), Ibid. T. V, p. 217; *on Rodrigues' method for the attraction of ellipsoids; Quarterly Journal of pure and appl. math.* T. II, p. 333 (1859); *Note on the theory of attraction*, Ibid. p. 338; *on Laplace's method for the attraction of ellipsoids*; Ibid. T. I, p. 285 (1857); *on Gauss' method for the attraction of ellipsoids*; Ibid. T. I, p. 162. — Joachimsthal, *on the attraction of a straight line* (Cambridge and Dublin, math. Journ. T. III, p. 93; Attraction der Geraden (Crelle's Journ. Bd. 58, S. 135). — Mehler, Ueber die Anziehung einer mit Masse belegten abwickelbaren Fläche auf einen materiellen Punkt (Crelle's Journ. Bd. 58, S. 240); über die Anziehung einer von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades begrenzten Schale (Crelle's Journ. Bd. 60, p. 321); über die Anziehung eines homogenen Polyeders (Crelle's Journ. Bd. 66, p. 375, aus den Schriften der naturf. Gesellsch. zu Danzig). — Grube, Ueber die Anziehungscomponente eines geraden elliptischen Cylinders in der Richtung der Axe, wenn die Elementaranziehung irgend einer Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist (Crelle's Journ. Bd. 65, p. 62); über die Anziehung des homogenen Ellipsoids (Crelle's Journ. Bd. 69, p. 359). — Röthig, das Potential eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipedes (Crelle's Journ. Bd. 58, p. 249); über das Potential eines homogenen rechtwinkligen Cylinders (Crelle's Journ. Bd. 61, p. 180); Bemerkung hierzu von Clebsch (Bd. 61, p. 187). — Mertens, Bestimmung des Potentials eines homogenen Polyeders (Crelle's Journ. Bd. 69, p. 286). Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids (Crelle's Journ. Bd. 70, p. 1): *de functione potentiali duarum ellipsoidum homogenearum* (Crelle's Journ. Bd 6[illegible], p. 360). — Bourget, *Note sur l'attraction des paraboloïdes elliptiques* [*Journ. de math.* 2ième *Série*, T. II, p. 81 (1857)]; *Note à l'occasion du mémoire de M. Hirst sur l'attraction des paraboloïdes elliptiques* (Ibid. T. III, p. 47). — Hirst, *sur le potentiel d'une conche infiniment mince comprise entre deux paraboloïdes elliptiques* [*Journ. de math.* 2ième *Série*, T. II, p. 385 (1857)].

X. Capitel.

Reduction der Widerstände von Flächen und Curven.

§. 1. Wir haben bereits mehrfach des Widerstandes gedacht, welchen Flächen und Curven von Systemen gegenseitig leisten müssen, wenn sie durch Kräfte in Berührung erhalten werden, sei es, dass letztere sich im Gleichgewichte befinden oder Beschleunigungen hervorrufen. Es wurde dabei aber vorzugsweise der Normalwiderstand berücksichtigt und war von der tangentiellen Componente des Gesammtwiderstandes, der Reibung, nur vorübergehend die Rede. Wenn nun auch eine umfassende theoretische Behandlung der letzteren und insbesondere ihre Reduction auf Resultante und resultirendes Paar bei dem dermaligen Zustande der Wissenschaft noch nicht in allen Fällen geleistet werden kann, so dürfen wir dennoch diesen wichtigen Gegenstand nicht bei Seite schieben, müssen vielmehr eine Darstellung der betreffenden Lehren geben, welche wenigstens der Hauptsache nach als befriedigend angesehen werden darf.

Sind zwei unveränderliche Systeme Σ, Σ' genöthigt, sich mit Flächen oder Curven zu berühren, so kann dieser Zwang durch Kräfte dargestellt werden, welche zu den ohnehin an ihnen wirkenden Kräften hinzutreten. Diese Kräfte heissen Widerstände und zwar sagt man, dass an Σ Widerstände angreifen, welche von Σ' und an Σ' solche, welche von Σ herrühren. Wie auch immer dieselben beschaffen sein mögen, in allen Fällen werden sie an jedem Systeme einer Resultanten und einem resultirenden Paare äquivalent sein.

Wir wollen einen besonders einfachen Fall betrachten, nämlich den, dass beide Systeme Σ, Σ' sich mit zwei Flächen S, S' berühren, dass die Berührungsstelle ein einziger Punkt A sei und die Kräfte sich im Gleichgewicht befinden, wobei übrigens die Systeme in Ruhe oder in Bewegung begriffen sein können. Sind die beiden Flächen glatt, so erfährt Σ von Σ' in A einen Widerstand R, welcher eine längs der gemeinsamen Normale wirkende Einzelkraft ist. Ebenso findet dies für Σ' statt. Sind dagegen die sich berührenden Flächen rauh, so braucht der Widerstand nicht normal zu sein, vielmehr kann er je nach Beschaffenheit der Kräfte und dem Grade der Rauhheit der Fläche mehr oder weniger gegen die Normale geneigt sein. Legen wir durch die Richtung des Widerstandes und die Normale eine Ebene, so zerfällt in ihr R in zwei Componenten, eine in der Richtung der Normalen wirkende, der Normalwiderstand R_n und eine andere, welche in die Schnittlinie dieser Ebene mit der Tangentenebene in A fällt, die Reibung R_r. Bei glatten Flächen bringt die geringste Aenderung in den an Σ angreifenden Kräften eine sofortige Störung des Gleichgewichtes

hervor, sodass der Punkt A auf der Fläche beschleunigt wird. In diesem Falle ist $R = R_n$, $R_r = 0$; bei rauhen Flächen kann man aber jene Kräfte sich ändern lassen und es ändert dann R seine Intensität und Neigung gegen die Normale. Lassen wir jene Kräfte sich so ändern, dass R in derselben Normalebene bleibt, also R_r dieselbe Richtung in der Tangentenebene beibehält. Je mehr sich R von der Normalen abbiegt, desto grösser wird das Verhältniss $R_r : R_n$. Bei gegebenem Rauhigkeitszustande in der Richtung von R_r wird diese davon abhängige Componente des Widerstandes bis zu einer gewissen Grenze trotz der Aenderung der Kräfte das Gleichgewicht zu erhalten vermögen. über jene Grenze hinaus aber wird sofort Beschleunigung von A eintreten. Aenliches gilt für Aenderungen der Kräfte, denen entsprechend R auf die andere Seite der Normalen fällt und der Sinn von R_r sich umkehrt. In der betrachteten Normalebene lassen sich demzufolge durch A zwei Stralen ziehen, welche die äussersten Grenzen der Richtung des Widerstandes bezeichnen, für welche derselbe überhaupt noch Gleichgewicht herbeizuführen im Stande ist. Diese beiden Stralen bestimmen zwei Scheitelräume, in deren einen die Normale fällt. Alle Stralen dieses Scheitelraumes sind mögliche Widerstandsrichtungen, in den anderen Scheitelraum kann der Widerstand nie fallen.

Man kann sich nun die an Σ angreifenden Kräfte auch so geändert denken, dass R in andere Normalebenen fällt. Da für jede derselben sich die nämlichen Betrachtungen anstellen lassen, so folgt, dass der Berührungspunkt A der Flächen S, S' der Mittelpunkt eines Kegels ist, dessen Erzeugungslinien die äussersten Grenzlagen des noch möglichen Widerstandes der Flächen bezeichnen und dessen die Normale umschliessender Scheitelraum die Richtungen aller möglichen Widerstände erhält. Dieser Kegel heisst der Reibungskegel der beiden Flächen im gemeinsamen Berührungspunkte. Seine Beschaffenheit hängt ab von dem Grade der Rauhigkeit beider Flächen. Er ist ein gerader Kreiskegel mit der Normalen als Axe, wenn in der gemeinschaftlichen Tangentenebene nach allen Richtungen vom Berührungspunkte aus gleiche Rauhigkeit stattfindet, seine Erzeugungslinien biegen sich mehr oder weniger von der Normalen ab, wenn längs den Schnittlinien der durch sie gelegten Normalebenen mit der Tangentenebene ein grösserer oder geringerer Rauhigkeitsgrad stattfindet, also auch ein grösserer oder geringerer Reibungswiderstand geleistet werden kann. Für glatte Flächen zieht sich der Kegel auf die Normale zusammen.

§. 2. Das Verhältniss $R_r : R_n$ der Componenten des Widerstandes R mag der Coefficient des Widerstandes heissen; er ist die Tangente des Winkels, welchen R mit der Normalen bildet und welcher der Widerstandswinkel genannt wird. Für den Fall, dass der Wider-

stand eine Erzeugungslinie des Reibungskegels ist, heissen dieser Coefficient und dieser Winkel Reibungscoefficient und Reibungswinkel. Bezeichnen wir sie resp. mit μ und ϱ, so wird

$$\frac{R_r}{R_n} = \mu = tg\,\varrho, \qquad R_r = \mu R_n, \qquad R_n = \frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}} = R\cos\varrho.$$

Der Reibungswiderstand R_r, welcher der äusseren Grenze für irgend eine Richtung in der Tangentenebene entspricht, wird daher erhalten, indem man den Normalwiderstand R_n mit dem Reibungscoefficienten multiplicirt.

Der Reibungscoefficient variirt für ein und denselben Berührungspunkt der sich reibenden Flächen mit der Richtung in der gemeinschaftlichen Tangentenebene mit der Rauheit der beiden Punkte, welche im Berührungspunkte zusammentreten und kann bis jetzt nicht theoretisch bestimmt werden. Man bedient sich daher in den Anwendungen constanter, durch Versuche festgestellter Mittelwerthe, wie sie die zahlreichen Tafeln der Reibungscoefficienten enthalten.

§. 3. Sobald das Gleichgewicht zwischen den am System angreifenden Kräften und dem Widerstande aufhört, sagt man, es werde die Reibung überwunden. Für diesen Zustand hat der Widerstand die Grenzlage einer Erzeugungslinie des Reibungskegels und während der Bewegung passirt seine Richtung fortwährend andere und andere Erzeugungslinien der verschiedenen Kegel, welche den verschiedenen Berührungspunkten der Reibungsflächen angehören. Befindet sich das System in Ruhe, so kann Bewegung nur dann eintreten, wenn die Reibung überwunden wird und also die Widerstandsrichtung in die Kegelfläche eingetreten ist. Mit diesem Eintritt besteht noch Gleichgewicht und erst dann, wenn die angreifenden Kräfte die Richtung des Widerstandes nöthigen, in den Aussenraum des Kegels zu treten, erfolgt Beschleunigung. Von aussen einwirkende Momentankräfte können allerdings auch in dem eben erwähnten, dem Beschleunigungszustande nächst anliegenden Gleichgewichtszustande Bewegung von endlichen Geschwindigkeiten hervorrufen und diese können fortdauern, während der Grenzgleichgewichtszustand gleichfalls fortbesteht.

Für alle Lagen der Widerstandsrichtung im Innern des Reibungskegels besteht Gleichgewicht und zwar ist dasselbe sicher, für alle Lagen in der Kegelfläche selbst ist es unsicher. Ist der Reibungskegel ein gerader Kreiskegel mit der Normalen als Axe, so findet das Maximum der Sicherheit des Gleichgewichtes statt, wenn der Widerstand in die Axe des Kegels fällt.

§. 4. Für das Gleichgewicht von Kräften in Verbindung mit dem Widerstande R, dessen Richtung $(\lambda\mu\nu)$ sei und welcher von der Fläche $U(x, y, z) = 0$ geleistet wird, hat man die Gleichungen

$$X + R\cos\lambda = 0, \qquad Y + R\cos\mu = 0, \qquad Z + R\cos\nu = 0,$$

woraus

$$\frac{\cos\lambda}{-X} = \frac{\cos\mu}{-Y} = \frac{\cos\nu}{-Z} = \frac{1}{R},$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

und für den Widerstandswinkel ϑ:

$$\cos\vartheta = \left(X\frac{\partial U}{\partial x} + Y\frac{\partial U}{\partial y} + Z\frac{\partial U}{\partial z}\right) RW,$$

$$W = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

folgt.

Für den Zustand der Bewegung dagegen hat man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + R\cos\lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + R\cos\mu, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + R\cos\nu,$$

$$U(x, y, z) = 0$$

und weil die Reibung stets der Bewegungsrichtung entgegenwirkt, also R in die Normalebene fällt, welche durch die Richtung der Bewegung des Berührungspunktes hindurchgeht, also ein Perpendikel auf der Normalen und der Tangente der Bahn jenes Punktes zugleich auf R senkrecht steht:

$$\left(dy\frac{\partial U}{\partial z} - dz\frac{\partial U}{\partial y}\right)\cos\lambda + \left(dz\frac{\partial U}{\partial x} - dx\frac{\partial U}{\partial z}\right)\cos\mu$$
$$+ \left(dx\frac{\partial U}{\partial y} - dy\frac{\partial U}{\partial x}\right)\cos\nu = 0.$$

Diese Gleichung folgt so. Es sei $(\alpha\beta\gamma)$ die Richtung jenes Perpendikels, so ist zunächst, weil es senkrecht zur Normalen ist:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma = 0.$$

sodann, weil es senkrecht zur Richtung $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ ist:

$$dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma = 0,$$

aus welchen beiden Gleichungen

$$\frac{\cos\alpha}{dy\frac{\partial U}{\partial z} - dz\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\cos\beta}{dz\frac{\partial U}{\partial x} - dx\frac{\partial U}{\partial z}} = \frac{\cos\gamma}{dx\frac{\partial U}{\partial y} - dy\frac{\partial U}{\partial z}}$$

folgt. Endlich muss

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0$$

sein, weil die Richtung $(\alpha\beta\gamma)$ auch auf R senkrecht steht und hiermit ergibt sich die vorstehende Gleichung. Weil aber R im Falle der Bewegung eine Erzeugungslinie des Reibungskegels ist, so tritt zu diesen Gleichungen die Gleichung $\frac{y'-y}{z'-z} = \varphi\left(\frac{x'-x}{z'-z}\right)$ oder durch $(\lambda\mu\nu)$ ausgedrückt:

$$\frac{\cos\mu}{\cos\nu} = \Phi\left(\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}\right)\text{*)}$$

hinzu. Endlich ergibt sich der Reibungswinkel für die Richtung der Bewegung durch die Gleichung:

$$\cos\varrho = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos\lambda + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\mu + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\nu\right) : W.$$

Hierdurch ist es möglich, x, y, z, λ, μ, ν, R, ϱ als Functionen der Zeit zu bestimmen, vorausgesetzt, dass der Reibungskegel für alle Punkte der Fläche U und jede Beschaffenheit des berührenden Punktes bestimmbar ist.

§. 5. Berühren sich die reibenden Flächen mit mehreren Punkten oder längs einer Linie oder im Bereiche eines endlichen Flächenraumes, so kann man den Widerstand, welcher in je einem Punkte, in je einem Linien- oder Flächenelemente auftritt, in eine Normal- und eine Tangentialcomponente zerlegen und alle sammt den ohnehin am System angreifenden Kräften für irgend einen Punkt des Systems reduciren. Die Bedingungen des Gleichgewichts werden alsdann auch noch innerhalb eines gewissen Spielraums bis zu einem Grenzreibungswiderstande erfüllt werden können, darüber hinaus aber nicht mehr. Es tritt aber hierbei nicht blos eine Resultante, sondern auch ein resultirendes Paar des Widerstandes auf und letzteres kann in zwei andere gespalten werden, von denen das eine der Reibung allein seinen Ursprung verdankt. Eine allgemeinere Untersuchung dieses Gegenstandes fehlt bis jetzt aber in der Literatur, einen speciellen Fall werden wir weiter unten behandeln.

§. 6. Wenn ein System Σ genöthigt ist, mit einer Curve einen Punkt gemeinschaftlich zu haben, so kann ein Widerstand R die Curve vertreten. Derselbe kann in eine Componente R_r längs der Tangente und eine andere R_n, welche in die Normalebene fällt, zerlegt werden. Die erstere heisst wieder die Reibung, letztere der Normalwiderstand, das Verhältniss beider $R_r : R_n$ der Widerstandscoefficient und der Winkel, den R mit der Normalebene der Curve bildet, der Widerstandswinkel. Der von der Curve zu leistende Widerstand ist seiner Intensität und Richtung nach von den am System angreifenden Kräften und

*) Damit eine durch den Ursprung gehende Gerade eine bestimmte Kegelfläche erzeuge, muss zwischen den ihre Lage bestimmenden Elementen eine Bedingungsgleichung gegeben sein. Diese Bestimmungsstücke sind aber u. a. die Verhältnisse $\varepsilon = \frac{\cos\lambda}{\cos\nu}$, $\varepsilon' = \frac{\cos\mu}{\cos\nu}$ ihrer Richtungscosinusse und wenn also $\varepsilon = \Phi(\varepsilon')$ eine Bedingungsgleichung ist, so erhält man die obige Gleichung der Kegelfläche, welche mit Hülfe von $\frac{\cos\lambda}{x'-x} = \frac{\cos\mu}{y'-y} = \frac{\cos\nu}{z'-z}$ leicht in rechtwinklige Coordinaten x', y', z' umgesetzt werden kann.

der Beschaffenheit der Curve und des Systems in dem gemeinschaftlichen Punkte abhängig, jedoch so, dass bei Aenderung der Kräfte eine Grenze von R_r nicht überschritten werden darf, ohne dass Gleichgewicht zwischen jenen Kräften und dem Widerstande aufhört möglich zu sein. Die Grenzlagen aller Widerstandsrichtungen, für welche Gleichgewicht noch möglich ist, bilden einen Kegel, welcher in den extremsten Fällen in die Normalebene degenerirt. Das Verhältniss $R_r : R_n$ für eine Grenzlage des Widerstandes heisst der Reibungscoefficient μ auf der Curve und der Winkel ϱ, den sie mit der Normalebene der Curve bildet und für welchen $tang\, \varrho = \mu$ ist, der Reibungswinkel.

Für den Fall des Gleichgewichtes auf der Curve $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$ hat man

$$X + R \cos \lambda = 0, \quad Y + R \cos \mu = 0, \quad Z + R \cos \nu = 0,$$

$$\frac{\cos \lambda}{-X} = \frac{\cos \mu}{-Y} = \frac{\cos \nu}{-Z} = \frac{1}{R}, \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

und für den Winkel ϑ, den der Widerstand mit der Normalebene bildet:

$$\sin \vartheta = \frac{X}{R}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R}\frac{dz}{ds}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

für den Fall der Bewegung aber:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + R \cos \lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + R \cos \mu, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + R \cos \nu,$$

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1, \quad x = \varphi(z), \quad y = \psi(z),$$

$$\frac{\cos \mu}{\cos \nu} = \Phi\left(\frac{\cos \lambda}{\cos \nu}\right), \quad \sin \varrho = \frac{dx}{ds}\cos \lambda + \frac{dy}{ds}\cos \mu + \frac{dz}{ds}\cos \nu$$

zur Bestimmung von $x, y, z, \lambda, \mu, \nu, R, \varrho$ als Functionen der Zeit.

§. 7. Damit Kräfte, welche an einem System angreifen, welches sich mit einem Punkte auf eine Fläche oder Curve stützt, und sich auf eine blose Resultante reduciren, welche durch den Stützpunkt geht, im Gleichgewichte seien, ist erforderlich, dass diese gegen die Fläche oder Curve andrückt und in den Innenraum des Reibungskegels oder auf dessen Oberfläche fällt. Im ersteren Falle ist das Gleichgewicht sicher, im zweiten unsicher. Um nun, während die Kräfte ihre Richtung und Intensität beibehalten, den Stützpunkt in irgend einer Richtung soweit zu verschieben, dass für dieselbe die Grenze des Gleichgewichts erreicht wird, ist eine positive Arbeit einer Kraft erforderlich und zwar von endlicher Grösse. Sobald diese geleistet ist, genügt eine fernere unendlich kleine Arbeit, um den Punkt zu beschleunigen. Da dieselbe gleichfalls positiv sein muss, weil sie den Punkt, der die Beschleunigung Null besass, beschleunigt, so folgt, dass die Elementararbeit der Resultanten der gegebenen Kräfte und des Widerstandes zusammen negativ ist, an der Grenze des Gleichgewichts aber Null wird, und da die vir

tuelle Arbeit der Kräfte der virtuellen Arbeit ihrer Resultanten gleich ist, so folgt weiter, dass für jede virtuelle Verschiebung des Stützpunktes aus der Lage des sicheren Gleichgewichts die Summe der Elementararbeiten aller Kräfte und des Widerstandes negativ ist und dass dasselbe bis an die Grenze des möglichen Gleichgewichts gilt. Die Arbeit des Widerstandes zerfällt dabei in zwei Theile, die des Normalwiderstandes und die der Reibung. Für unveränderliche Flächen und Curven ist erstere Null.

Jedes beliebige veränderliche System kann in Theilsysteme zerlegt werden von endlicher oder unendlicher Anzahl mit äusseren und inneren Kräften, welche an freien Punkten oder an Punkten angreifen, welche auf Flächen oder Curven zu bleiben gezwungen sind, welche letzteren im Allgemeinen Reibungswiderstände darbieten werden. Zum Gleichgewichte des ganzen Systems ist dann erforderlich und hinreichend, dass in jedem Angriffspunkte von Kräften die Resultante aller verschwinde bei einem freien Punkte, oder in das Innere oder auf die Fläche des Reibungskegels falle, bei Stützpunkten.

Zum Gleichgewichte des Systems ist aber auch erforderlich und hinreichend, dass die Summe aller virtuellen Arbeiten, der äusseren, inneren und der Widerstandskräfte für jede mit der Natur des Systems verträgliche Verschiebung Null oder negativ sei. Null ist sie für solche Gleichgewichtszustände, welche an der Grenze des Eintritts von Beschleunigung stehen, negativ für alle übrigen.

§. 8. Beispiele und Anwendungen.

1. Ein biegsamer Faden ist über eine ebene Curve hingespannt; dieselbe ist rauh und bietet in Bezug auf den Faden in allen Punkten constanten Reibungswiderstand dar; an den Enden ziehen zwei Kräfte P, Q tangential. Man soll die Spannung und den Widerstand für den Fall des Gleichgewichts bestimmen.

Projicirt man die im Punkte M der Curve sich Gleichgewicht haltenden Kräfte, die Spannungen $T + dT$, $-T$ und den Gesammtwiderstand R (auf die Längeneinheit bezogen) auf die Tangente und Normale, so erhält man, wenn $d\varepsilon$ der Contingenzwinkel, ϱ der Krümmungshalbmesser, μ der Widerstandscoefficient, R_n und R_r die Componenten von R sind, $(T + dT) \sin d\varepsilon - R_n ds = 0$, $(T + dT) \cos d\varepsilon - T + \mu R_n ds = 0$, oder abgekürzt, wegen $ds = \varrho d\varepsilon$:

$$T = R_n \cdot \varrho\,, \qquad dT + \mu R_n ds = 0$$

und hiermit weiter $\frac{dT}{T} = -\mu \frac{ds}{\varrho} = -\mu d\varepsilon$, folglich $T = Ce^{-\mu\varepsilon}$, wenn ε den Winkel bedeutet, den die Tangente in M mit einer festen Richtung bildet, dessen Differential also der Contingenzwinkel $d\varepsilon$ ist. Auf die Endspannungen P, Q angewandt gibt diese Gleichung

$$P = Ce^{-\mu\varepsilon_1}, \qquad Q = Ce^{-\mu\varepsilon_2},$$

wenn ε_1, ε_2 die Winkel ε für die Endrichtungen sind. Hieraus folgt

$$T = Pe^{-\mu(\varepsilon - \varepsilon_1)}$$

und die Bedingung des Gleichgewichts:

$$\frac{P}{Q} \leq e^{-\mu(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)},$$

wodurch μ näher bestimmt wird. Das Gleichheitszeichen gilt für den Grenzzustand des Gleichgewichts. Sobald μ bekannt ist, erhält man weiter

$$R_n = \frac{T}{\varrho} = \frac{P}{\varrho} e^{-\mu(\varepsilon - \varepsilon_1)}, \quad R_r = \mu R_n = \frac{\mu P}{\varrho} e^{-\mu(\varepsilon - \varepsilon_1)},$$
$$R = R_n \sqrt{1 + \mu^2} = \frac{P}{\varrho} \sqrt{1 + \mu^2} \cdot e^{-\mu(\varepsilon - \varepsilon_1)}.$$

Sind P und Q parallel und von demselben Sinne, so ist $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \pi$, mithin die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{P}{Q} < e^{\mu\pi}.$$

2. **Ein biegsamer Faden wird von zwei Endkräften P, Q über eine rauhe krumme Fläche gespannt, für welche bezüglich des Fadens in jedem Punkte der Reibungskegel bekannt ist: man soll Spannung und Flächenwiderstand für den Fall bestimmen, dass die Fadencurve in der Grenzlage des Gleichgewichts ist, dass eine geringe Aenderung einer der Endkräfte hinreicht, sie in sich selbst gleiten zu machen.**

Indem man die in einem beliebigen Punkte M der Fadencurve sich Gleichgewicht haltenden Kräfte $T' + dT$, $-T'$, R, welche in der Schmiegungsebene des Punktes M liegen, auf die Tangente und Hauptnormale projicirt, erhält man, wie bei der vorigen Aufgabe,

$$T = R_n \varrho, \quad dT + \mu R_n ds = 0,$$

unter ϱ den Krümmungshalbmesser der Fadencurve verstanden. Aus diesen Gleichungen folgt

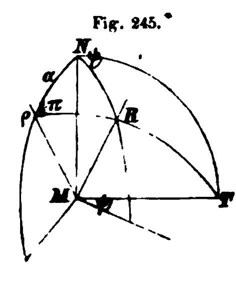
$$\frac{dT}{T} = -\mu \frac{ds}{\varrho} = -\mu d\varepsilon,$$

wenn wieder $d\varepsilon$ den Contingenzwinkel bedeutet. Die Integration liefert mit Rücksicht auf P und Q:

$$T = Pe^{-\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \mu d\varepsilon}, \quad \frac{P}{Q} = e^{-\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \mu d\varepsilon},$$

ε_1, ε_2 sind die Winkel, welche auf der abgewickelten Tangentenfläche der Fadencurve die Endtangenten, oder also die Richtungen von P und Q mit einer festen Richtung bilden und $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ ist die Summe der Contingenzwinkel.

Der Widerstandscoefficient μ ist die Tangente des Winkels, den R mit der Normalen der Fläche bildet. Die Normalebene, welche durch R geht, bildet mit der die Curve berührenden Normalebene einen Winkel ψ, welcher im vorliegenden Falle Null sein muss. Denn die Punkte der Fadencurve beginnen eben in den Tangenten derselben zu gleiten und die Richtung der Reibung ist immer entgegengesetzt der beginnenden Bewegung. Die Schnittlinie der Normalebene, welche durch R geht, mit der Tangentialebene ist aber die Richtung, in welcher R_r wirkt, weshalb sie mit der Tangente der Fadencurve zusammenfallen muss. Der Winkel ψ ergibt sich nun im Allgemeinen so. Die Schmiegungsebene und die Normalebene der Fadencurve bestimmen mit der Normalebene, welche den Widerstand enthält, ein sphärisches Dreieck $RN\varrho$ (Fig. 245.), dessen zwei Ecken N, ϱ durch die Richtung



der Flächennormalen und der Hauptnormalen der Curve bezeichnet werden. Die Seite RN ist der Reibungswinkel, also $tg\, RN = \mu$, die Seite $N\varrho = \alpha$ ist die Neigung der Schmiegungsebene der Fadencurve gegen die sie berührende Normalebene der Fläche, die dritte Seite wird gebildet von dem Winkel zwischen dem Widerstande R und der Hauptnormalen der Curve; ihre Tangente sei $\varkappa$. Von den Winkeln des Dreiecks ist $(R\varrho, \alpha) = \frac{1}{2}\pi$ und $(RN, \alpha) = \frac{1}{2}\pi - \psi$. Demnach hat man

$$\cos RN = \cos R\varrho \cdot \cos \alpha, \qquad \sin RN = \frac{\sin R\varrho}{\cos \psi},$$

woraus

$$\cos \psi \cdot tg\, RN = \frac{tg\, R\varrho}{\cos \alpha}$$

oder also

$$\cos \psi = \frac{\varkappa}{\mu} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

folgt. Nach dem Meunier'schen Satze besteht aber zwischen den Krümmungshalbmessern ϱ_0 und ϱ des berührenden Normalschnitts und der berührten Curve die Relation $\varrho = \varrho_0 \cos \alpha$, daher wird schliesslich

$$\cos \psi = \frac{\varkappa}{\mu} \cdot \frac{\varrho}{\varrho_0}.$$

Die Bedingungen der Aufgabe fordern, dass diese Grösse 1, also

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\mu}{\varkappa}$$

werde. Diese Gleichung wird nur durch die kürzeste Linie als Fadencurve befriedigt, denn wenn ψ verschwindet, so fällt R in die Ebene des berührenden Normalschnitts und wird $\mu = \varkappa$, also $\varrho = \varrho_0$ und fällt die Schmiegungsebene mit jener Normalebene zusammen. Die kürzeste Linie ist demnach die Gleichgewichtsform des Fadens, auch bei Reibung an der Grenze des Gleichgewichts.

Für den Kreiscylinder als Fläche und die Schraubenlinie (kürzeste Linie) als Gleichgewichtsform hat man die Gleichgewichtsbedingung für die Grenze am Gleiten bei constantem μ:

$$\frac{P}{Q} = e^{-\mu \int_0^s \frac{ds}{\varrho}} = e^{-\frac{\mu}{\varrho} s},$$

da ϱ constant ist. Bezeichnet α den Winkel der Schraubenlinie gegen die Erzeugungslinie des Cylinders, a den Radius den Kreisschnitts, so wird

$$\varrho = \frac{R}{\sin^2 \alpha}, \qquad s = \frac{2 n \pi a}{\sin \alpha},$$

wenn n die Anzahl der Umwickelungen des Fadens ist und hiermit

$$\frac{P}{Q} = e^{-2 n \pi \mu \sin \alpha}.$$

Für grosse Q wird bei α nahezu gleich $\frac{1}{2}\pi$ und vielen Umwickelungen P sehr klein. Hieraus ergibt sich leicht, welchen Vortheil man in den Anwendungen von der Reibung in diesem Sinne ziehen kann.

3. Eine homogene Gerade vom Gewichte G und der Länge $2a$ liegt mit ihrem Schwerpunkte S auf einer verticalen ebenen Curve in C auf; sie wird an den Enden A und P mit Gewichten P und $P + p$ belastet, in welcher Grenzlage (Fig. 246.) wird sie sodann sich im Gleichgewichte befinden, wenn der Reibungscoefficient μ ist?

Ist D der Berührungspunkt für die Grenzlage des Gleichgewichtes, an welchem

der Widerstand R wirkt und reduciren wir die Kräfte für den Punkt S, so folgt, wenn $SD = Bog\, CD = s$ gesetzt wird:

$$R = 2P + p + G, \quad Rs = pa.$$

Um s zu finden, sei $y = f(x)$ die Gleichung der Curve, bezogen auf eine horizontale x-Axe und verticale y-Axe. Da R vertical ist und mit der Normalen den Reibungswinkel bildet, so ist μ gleich der Tangente des Winkels, den die Gerade mit der x-Axe bildet, d. h. $f'(x) = \mu$. Der grösste Werth ξ von x, welcher dieser Gleichung genügt, liefert

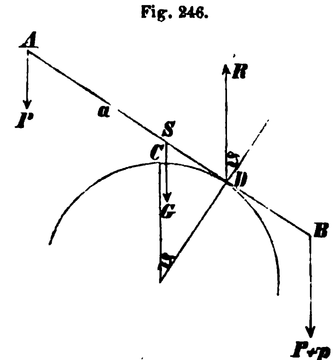


Fig. 246.

$$s = \int_0^{\xi} dx \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Für einen Kreis vom Radius r z. B. ist der Reibungswinkel gleich dem Winkel ϑ der Normalen in C und D, also $tg\,\vartheta = \mu$ und folglich wegen $s = r\vartheta$

$$(2P + G)\, r\vartheta = p\,(a - r\vartheta)$$

die Bedingung des äussersten Gleichgewichtes.

4. Ueber einen homogenen vertical stehenden Kreis vom Radius a (Fig. 247.) ist ein Faden gelegt, welcher von zwei Gewichten P, $P + p$ gespannt wird. Der Kreis berührt mit Reibung eine feste Horizontale und besitzt das Gewicht G. Welchen Widerstand hat die Horizontale zu leisten für den Fall der äussersten Grenze des Gleichgewichts?

Die Kräftereduction für den Berührungspunkt des Kreises liefert eine Resultante $2P + p + G$ und ein resultirendes Paar pa, welchen der Widerstand Gleichgewicht zu halten hat. Hierzu genügt ein Widerstand R, welcher im Abstande s vom Berührungspunkte vertical aufwärts gerichtet ist, so beschaffen, dass

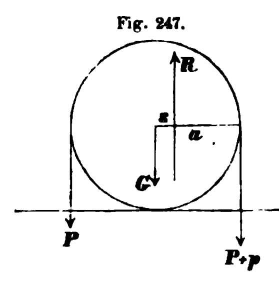


Fig. 247.

$$R = 2P + p + G, \quad Rs = pa$$

wird. Sobald p um ein Weniges zunimmt, rollt der Kreis auf der Geraden. $\frac{s}{a}$ heisst der Reibungscoefficient des Rollens; es ist

$$\frac{s}{a} = \frac{p}{2P + p + G}.$$

In der Theorie der Bewegung der Systeme werden wir noch zweimal Gelegenheit haben, über Fragen vorliegender Art zu sprechen. Vgl. übrigens Dorna, *Nozioni teoretiche sull' attrito* [Battaglini, *Giornale di matematica*, Vol. III, p. 202 (1865)].

XI. Capitel.

Theorie des Trägheitsmomentes.

§. 1. Die in den folgenden Capiteln zu entwickelnde Theorie der Bewegung eines Systems unter Einfluss von gegebenen Kräften erfordert die Theorie einer Grösse, welche den Namen des Trägheitsmomentes des Systems führt. Sie hängt nicht von den Kräften und dem Bewegungszustande, sondern von der Massenvertheilung im System und der Lage der Massen gegen die verschiedenen Axen des Raumes ab. Es bildet diese Theorie in Verbindung mit der Theorie des Mittelpunktes der Massen einen Bestandtheil der Geometrie der Massen. Der Name „Trägheitsmoment" rührt von Euler her; er braucht ihn, weil diese Grösse in den Untersuchungen über die Rotation eines unveränderlichen Systems dieselbe Rolle spielt, wie die Masse bei der Bewegung des Punktes, welche von Vielen als das Maass der „Trägheit" angesehen wird, ein Begriff, der nach unserer Ansicht nicht in die theoretische Mechanik gehört.

Ist m die Masse eines Punktes, r sein Abstand von einer Axe, so heisst das Produkt mr^2 aus der Masse des Punktes und dem Quadrate seines Abstandes von der Axe das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf diese Axe. Das Trägheitsmoment eines Systems von Punkten, deren Massen $m, m', m'', \ldots$ sind, in Bezug auf eine Axe, von der sie die Abstände $r, r', r'', \ldots$ besitzen, ist die Summe

$$mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \cdots = \Sigma mr^2$$

der Trägheitsmomente der einzelnen Punkte bezüglich dieser Axe. Sind Massen nicht in einzelne Punkte concentrirt, sondern continuirlich auf einer Linie, Fläche oder in einem Körperraum vertheilt, so nimmt das Trägheitsmoment die Form eines Integrales $\int r^2 dm$ an, ausgedehnt über die ganze Masse und zwar ist dasselbe ein einfaches, doppeltes oder dreifaches Integral, je nachdem dm ein lineares, ein flächenartiges oder körperliches Massenelement ist.

Ist ϱ' der kleinste, ϱ'' der grösste unter den Abständen r der Massenpunkte von der Axe, so hat man

$$(m + m' + m'' + \cdots)\,\varrho'^2 < \Sigma mr^2 < (m + m' + m'' + \cdots)\,\varrho''^2;$$

es gibt daher einen gewissen Werth $\varkappa$ des Abstandes, sodass

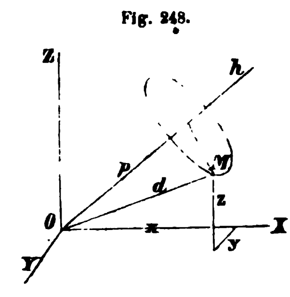
$$(m + m' + m'' + \cdots)\,\varkappa^2 = \Sigma mr^2,$$

oder, indem wir die Gesammtmasse des Systems mit M bezeichnen, $M\varkappa^2 = \Sigma mr^2$ wird. Die Linie $\varkappa$, welche die Eigenschaft besitzt, dass ein Punkt von der Masse M des ganzen Systems in einem Abstande gleich ihr von der Axe ein Trägheitsmoment besitzt gleich dem Träg-

heitsmomente des ganzen Systems, heisst der **Trägheitsradius** des Systems in Bezug auf jene Axe; ihre Länge ist $\varkappa = \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{M}}$. Beschreibt man mit ihr als Abstand eine Cylinderfläche um die Axe und breitet auf dieser nach irgend einem beliebigen Gesetze die Masse M aus, so ist das Trägheitsmoment dieser Cylinderfläche gleich dem Trägheitsmomente des Systems.

§. 2. Ein und dasselbe System besitzt unendlich viele Trägheitsmomente, weil der Raum unendlich viele Gerade enthält, deren jede zur Axe für das Trägheitsmoment gewählt werden kann. Diese Trägheitsmomente sind nicht alle von einander verschieden; um die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Lage der Axe gegen das System zu untersuchen, wollen wir 1. die Werthe des Trägheitsmomentes für Axen bestimmen, welche durch denselben Punkt des Raumes hindurchgehen, sowie 2. die Werthe des Trägheitsmomentes für Axen, welche mit einer gegebenen Axe parallel laufen.

Fig. 248.



Ist O (Fig. 248.) ein beliebiger Punkt des Raumes, h irgend eine durch ihn gehende Axe, welche gegen drei rechtwinklige Coordinatenaxen, deren Ursprung O ist, unter den Winkeln α, β, γ geneigt ist, r der Abstand irgend eines Systempunktes M $(x\,y\,z)$ von h, d sein Abstand von O und p von einer zu h senkrechten, durch O gehenden Ebene, so erhält man für das Trägheitsmoment H des Systems bezüglich der Axe h den Ausdruck

$$H = \Sigma m r^2 = \Sigma m\,(d^2 - p^2),$$

oder wegen $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $p = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma$:

$$\begin{aligned} H &= \Sigma m\,[(x^2 + y^2 + z^2) - (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)^2] \\ &= \Sigma m\,[(x^2 + y^2 + z^2)\,(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \\ &\quad - (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)^2], \end{aligned}$$

wenn man der Grösse $x^2 + y^2 + z^2$ den Factor $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ zufügt. Ordnet man nach den Cosinussen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} H &= \cos^2\alpha \cdot \Sigma m\,(y^2 + z^2) + \cos^2\beta \cdot \Sigma m\,(z^2 + x^2) + \cos^2\gamma \cdot \Sigma m\,(x^2 + y^2) \\ &\quad - 2 \cos\alpha \cos\beta \cdot \Sigma m x y - 2 \cos\beta \cos\gamma \cdot \Sigma m y z - 2 \cos\gamma \cos\alpha \cdot \Sigma m z x, \end{aligned}$$

wofür man auch die Form

$$\begin{aligned} H &= \sin^2\alpha \cdot \Sigma m x^2 + \sin^2\beta \cdot \Sigma m y^2 + \sin^2\gamma \cdot \Sigma m z^2 \\ &\quad - 2 \cos\alpha \cos\beta \cdot \Sigma m x y - 2 \cos\beta \cos\gamma \cdot \Sigma m y z - 2 \cos\gamma \cos\alpha \cdot \Sigma m z x \end{aligned}$$

gebrauchen kann.

Die Coefficienten von $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$, nämlich $\Sigma m\,(y^2 + z^2)$, $\Sigma m\,(z^2 + x^2)$, $\Sigma m\,(x^2 + y^2)$ sind selbst Trägheitsmomente des Systems

nämlich die Trägheitsmomente für die Axen der x, y, z, indem die Grössen $y^2 + z^2$, $z^2 + x^2$, $x^2 + y^2$ die Quadrate der Abstände des Punktes $M(x\,y\,z)$ von diesen Axen bedeuten. Die Coefficienten Σmxy, Σmyz, Σmzx der mit dem Minuszeichen versehenen doppelten Producte der Cosinusse wollen wir nach dem Vorgange einiger englischer Schriftsteller (z. B. Rankine, *A manual of applied mechanics*, 3. edit., p. 522) Deviationsmomente nennen. Mit Hülfe einer in der analytischen Geometrie sehr gebräuchlichen Bezeichnungsweise setzen wir:

$$a_{11} = \Sigma m(y^2 + z^2), \quad a_{22} = \Sigma m(z^2 + x^2), \quad a_{33} = \Sigma m(x^2 + y^2)$$
$$a_{12} = \Sigma mxy, \quad a_{23} = \Sigma myz, \quad a_{31} = \Sigma mzx,$$

indem wir die x-, y-, z-Axe als erste, zweite und dritte Axe ansehen und durch die doppelten Indices an a_{11}, a_{22}, a_{33} andeuten, dass diese Grössen die Coefficienten von den auf die erste, zweite und dritte Axe sich beziehenden Cosinusverbindungen $\cos\alpha \cdot \cos\alpha$, $\cos\beta \cdot \cos\beta$, $\cos\gamma \cdot \cos\gamma$ sind, während a_{12}, a_{23}, a_{31} die Beziehung zu den zu ungleichnamigen Axen gehörigen Verbindungen $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, $\cos\beta \cdot \cos\gamma$, $\cos\gamma \cdot \cos\alpha$ an sich tragen, wobei a_{23} mit a_{32}, a_{31} mit a_{13}, a_{12} mit a_{21} als gleichbedeutend angesehen werden. Durch Einführung dieser Bezeichnungsweise erhalten wir für die erste der obigen Formen:

$$H = a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\cos^2\beta + a_{33}\cos^2\gamma$$
$$- 2a_{12}\cos\alpha\cos\beta - 2a_{23}\cos\beta\cos\gamma - 2a_{31}\cos\gamma\cos\alpha.$$

Hiernach kann also das Trägheitsmoment des Systems für die Axe h gefunden werden, sobald die Trägheits- und Deviationsmomente desselben für irgend drei zu einander senkrechte, sich in einem Punkte O auf h schneidende Axen bekannt sind.

Das Trägheitsmoment ist seiner Bildung nach eine positive Grösse, denn es sind seine sämmtlichen Elemente mr^2 positiv. In dem Ausdrucke für H sind also a_{11}, a_{22}, a_{33} positiv. Die Deviationsmomente von Σmxy enthalten aber positive und negative Elemente, sie können also je nach der Lage der Coordinatenaxen, auf die sie sich beziehen, bald positiv, bald negativ ausfallen. Es entsteht daher die Frage, ob es nicht möglich sei, diese Axen so zu wählen, dass diese Momente alle drei verschwinden und dadurch der Ausdruck für H eine wesentliche Vereinfachung erleiden würde.

Um diese Frage zu entscheiden, ziehen wir senkrecht zu einer der drei Coordinatenaxen, z. B. zur z-Axe, auf welche sich die beiden Deviationsmomente Σmxz, Σmyz beziehen, durch O eine beliebige Gerade, welche mit der x-Axe den Winkel ϑ bilden mag und projiciren auf sie den Linienzug der x, y, z und des nach dem Systempunkte M hinführenden Radiusvectors. Ist die Projection des letzteren gleich s, positiv oder negativ genommen, je nachdem s diesseits oder jenseits O

fällt, so wird $s = x \cos\vartheta + y \sin\vartheta$ und also, da ϑ für alle Systempunkte constant ist:

$$\Sigma m z s = \cos\vartheta\, \Sigma m x z + \sin\vartheta\, \Sigma m y z.$$

Sollen also $\Sigma m x z$ und $\Sigma m y z$ zugleich verschwinden, so muss auch $\Sigma m z s$ verschwinden und umgekehrt zerfällt die Bedingung $\Sigma m z s = 0$ wegen der Willkührlichkeit der Wahl von ϑ in die beiden Bedingungen

$$\Sigma m x z = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma m y z = 0.$$

Es seien jetzt X', Y', Z' drei durch O gehende rechtwinklige Coordinatenaxen der x', y', z' und Z' so gewählt, dass für sie die Bedingung $\Sigma m z' s = 0$ erfüllt ist. Bildet Z' mit den ursprünglichen Axen die Winkel λ, μ, ν, so wird $z' = x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu$; sind ferner a, b, c die Winkel, welche eine beliebige, durch O gehende, zu Z' senkrechte Gerade mit jenen Axen bildet, so wird $s = x \cos a + y \cos b + z \cos c$. Daher ist jene Bedingung:

$$\Sigma m (x \cos a + y \cos b + z \cos c)\,(x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu) = 0,$$

oder geordnet:

$$\begin{aligned} &(\cos\lambda\, \Sigma m x^2 + \cos\mu\, \Sigma m x y + \cos\nu\, \Sigma m x z) \cos a \\ + &(\cos\lambda\, \Sigma m y x + \cos\mu\, \Sigma m y^2 + \cos\nu\, \Sigma m y z) \cos b \\ + &(\cos\lambda\, \Sigma m z x + \cos\mu\, \Sigma m z y + \cos\nu\, \Sigma m z^2) \cos c = 0, \end{aligned}$$

oder kürzer:

$$\begin{aligned} &(\alpha_{11} \cos\lambda + \alpha_{12} \cos\mu + \alpha_{13} \cos\nu) \cos a \\ + &(\alpha_{21} \cos\lambda + \alpha_{22} \cos\mu + \alpha_{23} \cos\nu) \cos b \\ + &(\alpha_{31} \cos\lambda + \alpha_{32} \cos\mu + \alpha_{33} \cos\nu) \cos c = 0, \end{aligned}$$

indem man

$$\alpha_{11} = \Sigma m x^2, \quad \alpha_{12} = \Sigma m x y = \alpha_{21}, \quad \alpha_{13} = \Sigma m x z = \alpha_{31},$$
$$\alpha_{23} = \Sigma m y z = \alpha_{32}, \quad \alpha_{22} = \Sigma m y^2, \quad \alpha_{33} = \Sigma m z^2$$

setzt. Hierzu tritt noch die Bedingung des Senkrechtstehens der Richtungen $(\lambda\mu\nu)$ und (abc) aufeinander, nämlich:

$$\cos\lambda \cos a + \cos\mu \cos b + \cos\nu \cos c = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen einen der Winkel a, b, c, z. B. c, so bleibt eine Gleichung, welche wegen der Willkürlichkeit von a und b sich in zwei andere spaltet, welche identisch sind mit der Proportion

$$\frac{\cos\lambda}{\alpha_{11} \cos\lambda + \alpha_{12} \cos\mu + \alpha_{13} \cos\nu} = \frac{\cos\mu}{\alpha_{21} \cos\lambda + \alpha_{22} \cos\mu + \alpha_{23} \cos\nu}$$
$$= \frac{\cos\nu}{\alpha_{31} \cos\lambda + \alpha_{32} \cos\mu + \alpha_{33} \cos\nu} = \sigma$$

wo σ den gemeinschaftlichen Werth dieser drei Verhältnisse abkürzend bezeichnen soll. Man erhält daraus

$$\begin{aligned} (\alpha_{11} - \sigma) \cos\lambda + \alpha_{12} \cos\mu + \alpha_{13} \cos\nu &= 0 \\ \alpha_{21} \cos\lambda + (\alpha_{22} - \sigma) \cos\mu + \alpha_{23} \cos\nu &= 0 \\ \alpha_{31} \cos\lambda + \alpha_{32} \cos\mu + (\alpha_{33} - \sigma) \cos\nu &= 0 \end{aligned}$$

und hiermit durch Elimination von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ zur Bestimmung von σ die cubische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\sigma & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\sigma & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Die drei Wurzeln derselben sind sämmtlich reell. Um dies bequem einzusehen, stellt man die Gleichung unter einer etwas anderen Form dar, indem man auf eine etwas andere Weise die Winkel eliminirt. Die erste der drei in $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ linearen Gleichungen gibt nämlich, wenn man $\frac{\cos\lambda}{\alpha_{23}}$ addirt und subtrahirt, nachdem man mit α_{12}, α_{13} dividirt hat:

$$\frac{\cos\lambda}{\alpha_{23}}+\frac{\cos\mu}{\alpha_{31}}+\frac{\cos\nu}{\alpha_{12}}=\frac{\cos\lambda}{\alpha_{12}\alpha_{13}}\left(\sigma-\alpha_{11}+\frac{\alpha_{12}\alpha_{13}}{\alpha_{23}}\right)$$

und ähnlich die beiden anderen:

$$\frac{\cos\lambda}{\alpha_{23}}+\frac{\cos\mu}{\alpha_{31}}+\frac{\cos\nu}{\alpha_{12}}=\frac{\cos\mu}{\alpha_{23}\alpha_{12}}\left(\sigma-\alpha_{22}+\frac{\alpha_{23}\alpha_{12}}{\alpha_{31}}\right)$$

$$\frac{\cos\lambda}{\alpha_{23}}+\frac{\cos\mu}{\alpha_{31}}+\frac{\cos\nu}{\alpha_{12}}=\frac{\cos\nu}{\alpha_{23}\alpha_{31}}\left(\sigma-\alpha_{33}+\frac{\alpha_{23}\alpha_{31}}{\alpha_{12}}\right),$$

d. h.:

$$\frac{\cos\lambda}{\alpha_{23}}+\frac{\cos\mu}{\alpha_{31}}+\frac{\cos\nu}{\alpha_{12}}$$

$$=\frac{\cos\lambda}{\alpha_{12}\alpha_{13}}(\sigma-L)=\frac{\cos\mu}{\alpha_{23}\alpha_{12}}(\sigma-M)=\frac{\cos\nu}{\alpha_{23}\alpha_{31}}(\sigma-N)$$

$$=\frac{\frac{\cos\lambda}{\alpha_{23}}}{\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}}{\alpha_{23}^2(\sigma-L)}}=\frac{\frac{\cos\mu}{\alpha_{31}}}{\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}}{\alpha_{31}^2(\sigma-M)}}=\frac{\frac{\cos\nu}{\alpha_{12}}}{\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}}{\alpha_{12}^2(\sigma-N)}}$$

$$=\frac{\frac{\cos\lambda}{\alpha_{23}}+\frac{\cos\mu}{\alpha_{31}}+\frac{\cos\nu}{\alpha_{12}}}{\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}}{\alpha_{23}^2(\sigma-L)}+\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}}{\alpha_{31}^2(\sigma-M)}+\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}}{\alpha_{12}^2(\sigma-N)}},$$

wenn

$$L=\alpha_{11}-\frac{\alpha_{12}\alpha_{13}}{\alpha_{23}},\quad M=\alpha_{22}-\frac{\alpha_{23}\alpha_{12}}{\alpha_{31}},\quad N=\alpha_{33}-\frac{\alpha_{23}\alpha_{31}}{\alpha_{12}}$$

gesetzt wird. Die Vergleichung des ersten und letzten dieser Ausdrücke liefert sofort die Gleichung für σ in der Form:

$$\frac{\frac{1}{\alpha_{23}^2}}{\sigma-L}+\frac{\frac{1}{\alpha_{31}^2}}{\sigma-M}+\frac{\frac{1}{\alpha_{12}^2}}{\sigma-N}+\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}}=0.$$

Diese Gleichung lässt erkennen, dass wenn die Aufeinanderfolge L, M, N auch die relative Grösse von L, M, N bezeichnet, sodass $L < M < N$ ist, die Wurzeln zwischen $-\infty$, L, M, N oder L, M, N, $+\infty$ fallen

und also alle drei reell sind, je nachdem $\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{31}$ positiv oder negativ ist.

Es seien nun σ', σ'', σ''' die drei Wurzeln der cubischen Gleichung. Jeder derselben gehört ein Werthsystem $(\lambda'\mu'\nu')$, $(\lambda''\mu''\nu'')$, $(\lambda'''\mu'''\nu''')$ an, d. h. jeder Wurzel σ entspricht eine Linie $(\lambda\mu\nu)$, für welche $\Sigma m z s$ verschwindet. Diese drei Linien stehen paarweise aufeinander senkrecht. Denn z. B. für $(\lambda'\mu'\nu')$ und $(\lambda''\mu''\nu'')$ hat man die Gleichungssysteme:

$$\alpha_{11}\cos\lambda' + \alpha_{12}\cos\mu' + \alpha_{13}\cos\nu' = \sigma'\cos\lambda'$$
$$\alpha_{21}\cos\lambda' + \alpha_{22}\cos\mu' + \alpha_{23}\cos\nu' = \sigma'\cos\mu'$$
$$\alpha_{31}\cos\lambda' + \alpha_{32}\cos\mu' + \alpha_{33}\cos\nu' = \sigma'\cos\nu',$$

$$\alpha_{11}\cos\lambda'' + \alpha_{12}\cos\mu'' + \alpha_{13}\cos\nu'' = \sigma''\cos\lambda''$$
$$\alpha_{21}\cos\lambda'' + \alpha_{22}\cos\mu'' + \alpha_{23}\cos\nu'' = \sigma''\cos\mu''$$
$$\alpha_{31}\cos\lambda'' + \alpha_{32}\cos\mu'' + \alpha_{33}\cos\nu'' = \sigma''\cos\nu'';$$

multiplicirt man nun die Gleichungen des ersten derselben der Reihe nach mit $\cos\lambda''$, $\cos\mu''$, $\cos\nu''$, die des zweiten mit $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$, summirt die Gleichungen jedes Systems und subtrahirt hierauf die beiderlei Resultate, so tilgt sich linker Hand alles und bleibt nach der Division mit $\sigma' - \sigma''$ die Gleichung

$$\cos\lambda'\cos\lambda'' + \cos\mu'\cos\mu'' + \cos\nu'\cos\nu'' = 0,$$

welche die behauptete Rechtwinkligkeit beweist. Ebenso für die beiden anderen Paare von Richtungen.

Wählt man die so gewonnenen drei Richtungen zu Coordinatenaxen, so verschwinden für sie die drei Deviationsmomente und erhält man das Trägheitsmoment H einfach durch die Gleichung

$$H = a\cos^2\alpha + a\cos^2\beta + a\cos^2\gamma,$$

wo α, β, γ jetzt die Winkel sind, die die Axe h mit diesen drei Richtungen bildet und a_{11}, a_{22}, a_{33} die Trägheitsmomente des Systems in Bezug auf sie bedeuten.

Die drei Axen eines Punktes, für welche die Deviationsmomente Σmxy, Σmyz, Σmzx verschwinden, heissen die **Hauptträgheitsaxen** oder kürzer die **Hauptaxen** des Systems für diesen Punkt. Die Trägheitsmomente a_{11}, a_{22}, a_{33} für dieselben sind die **Hauptträgheitsmomente**. Die Reellität der Wurzeln der cubischen Gleichung beweist, dass es für jeden Punkt des Raumes drei solche Axen gibt. Für die Trägheitsradien a, b, c der Hauptaxen oder die **Hauptträgheitsradien** bestehen die Gleichungen $Ma^2 = a_{11}$, $Mb^2 = a_{22}$, $Mc^2 = a_{33}$ und wenn $\varkappa$ der Trägheitsradius für die Axe h ist, so kann die Gleichung für H auch umgeschrieben werden, wie folgt:

$$\varkappa^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma$$

oder:

$$H = M(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma).$$

§. 3. Trägt man auf jeder der durch O gehenden Axen h diesseits und jenseits von O eine Länge ϱ auf, welche der Wurzel aus dem Trägheitsmomente H der Axe h umgekehrt proportional ist, am einfachsten $\varrho = \frac{1}{\sqrt{H}}$, indem man den Proportionalitätsfactor auf die Einheit reducirt, so bilden, weil das Trägheitsmoment sich von Axe zu Axe continuirlich ändert, endlich und positiv ist, die Endpunkte dieser Längen eine geschlossene Fläche, deren Mittelpunkt O ist. Bezeichnen x, y, z die Coordinaten des Endpunktes von ϱ, sodass $\varrho \cos\alpha = x$, $\varrho \cos\beta = y$, $\varrho \cos\gamma = z$ wird, so erhält man aus der letzten Gleichung für H des vor. §., welche sich auf die Hauptaxen des Systems bezieht, indem man mit ϱ^2 multiplicirt und berücksichtigt, dass $\varrho^2 H = 1$ ist, als Gleichung dieser Fläche:

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 = 1.$$

Diese Gleichung stellt aber, da die drei Coefficienten a_{11}, a_{22}, a_{33} als Trägheitsmomente positive Grössen sind, ein Ellipsoid dar, dessen Hauptaxen mit den Hauptträgheitsaxen des Systems zusammenfallen. Dies Ellipsoid wurde von Poinsot gefunden; es heisst das erste Trägheitsellipsoid des Punktes O (zum Unterschiede von einem später zu entwickelnden zweiten). Für den Fall, dass O der Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) des Systems ist, nennt man es das Centralellipsoid des Systems. Sobald das Trägheitsellipsoid eines Punktes bekannt ist, sind auch die Trägheitsmomente für alle Axen seines Mittelpunktes bekannt durch die Formel $H = \frac{1}{\varrho^2}$, sowie die entsprechenden Trägheitsradien $\varkappa$ durch die Formel $\varkappa^2 = \frac{1}{M\varrho^2}$. Die Halbaxen des Trägheitsellipsoids sind $\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}$, $\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}$, $\frac{1}{\sqrt{a_{33}}}$. Mit Hülfe der Hauptträgheitsradien a, b, c, für welche $Ma^2 = a_{11}$, $Mb^2 = a_{22}$, $Mc^2 = a_{33}$ ist, kann die Gleichung des Ellipsoids auch geschrieben werden:

$$M(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) = 1.$$

§. 4. Um die Hauptträgheitsmomente und die Richtungen der Hauptaxen zusammen zu finden, kann man berücksichtigen, dass ein Radiusvector des Trägheitsellipsoids, vom Mittelpunkte desselben aus gezogen, die Richtung einer Hauptaxe besitzt, wenn er auf der Tangentenebene senkrecht steht, d. h. mit der Normalen zusammenfällt. Gehen wir zu diesem Zwecke zur Formel

$$H = a_{11} \cos^2\alpha + a_{22} \cos^2\beta + a_{33} \cos^2\gamma$$
$$- 2 a_{12} \cos\alpha \cos\beta - 2 a_{23} \cos\beta \cos\gamma - 2 a_{31} \cos\gamma \cos\alpha$$

des §. 2. zurück, welche sich auf das ursprüngliche Coordinatensystem bezieht, multipliciren sie mit ϱ^2 und setzen

$$\varrho^2 H = 1, \quad \varrho \cos\alpha = x, \quad \varrho \cos\beta = y, \quad \varrho \cos\gamma = z,$$

wie in §. 3., so erhalten wir die Gleichung des Trägheitsellipsoids in der Form:

$$U \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 - 2a_{12}xy - 2a_{23}yz - 2a_{31}zx - 1 = 0$$

Nun sind die Richtungscosinusse der Normalen des Punktes (xyz) dieser Fläche proportional den Grössen

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} = \quad a_{11}x - a_{12}y - a_{13}z = \varrho(\quad a_{11}\cos\alpha - a_{12}\cos\beta - a_{13}\cos\gamma$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial y} = -a_{21}x + a_{22}y - a_{23}z = \varrho(-a_{21}\cos\alpha + a_{22}\cos\beta - a_{23}\cos\gamma$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial z} = -a_{31}x - a_{32}y + a_{33}z = \varrho(-a_{31}\cos\alpha - a_{32}\cos\beta + a_{33}\cos\gamma$$

und wenn diese Richtung mit der des Radiusvectors $(\alpha\beta\gamma)$ zusammenfallen soll, so müssen folgende Gleichungen bestehen, in denen λ einen noch unbestimmten Proportionalitätsfactor bezeichnet:

$$\begin{aligned} a_{11}\cos\alpha - a_{12}\cos\beta - a_{13}\cos\gamma &= \lambda\cos\alpha \\ -a_{21}\cos\alpha + a_{22}\cos\beta - a_{23}\cos\gamma &= \lambda\cos\beta \\ -a_{31}\cos\alpha - a_{32}\cos\beta + a_{33}\cos\gamma &= \lambda\cos\gamma. \end{aligned}$$

Die Bedeutung von λ erhellt sofort. Multiplicirt man nämlich die Gleichungen mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und addirt sie, so kommt:

$$\begin{gathered} a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\cos^2\beta + a_{33}\cos^2\gamma \\ -2a_{12}\cos\alpha\cos\beta - 2a_{23}\cos\beta\cos\gamma - 2a_{31}\cos\gamma\cos\alpha = \lambda \end{gathered}$$

und die Vergleichung mit dem Ausdrucke für H zeigt, dass $\lambda = H$, d. h. gleich dem der Richtung $(\alpha\beta\gamma)$ zugehörigen Trägheitsmomente ist. Schreiben wir daher die Gleichungen so:

$$\begin{aligned} (H - a_{11})\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma &= 0 \\ a_{21}\cos\alpha + (H - a_{22})\cos\beta + a_{23}\cos\gamma &= 0 \\ a_{31}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + (H - a_{33})\cos\gamma &= 0 \end{aligned}$$

und eliminiren die Cosinusse, so ergibt sich zur Bestimmung der drei den Hauptaxen entsprechenden Trägheitsmomente die cubische Gleichung

$$\begin{vmatrix} H - a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & H - a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & H - a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

und nachdem die Wurzeln H', H'', H''' derselben gefunden sind, liefern die vorstehenden Gleichungen die drei zugehörigen Richtungen $(\alpha'\beta'\gamma')$, $(\alpha''\beta''\gamma'')$, $(\alpha'''\beta'''\gamma''')$ der Hauptaxen.

Der grössten Hauptaxe des Trägheitsellipsoids entspricht das kleinste der kleinsten das grösste Trägheitsmoment, der mittleren ein mittleres. Man kann daher zu denselben Resultaten auch dadurch gelangen, dass man den Ausdruck

$$\begin{gathered} H = a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\cos^2\beta + a_{33}\cos^2\gamma \\ -2a_{12}\cos\alpha\cos\beta - 2a_{23}\cos\beta\cos\gamma - 2a_{31}\cos\gamma\cos\alpha \end{gathered}$$

mit Rücksicht auf $cos^2 \alpha + cos^2 \beta + cos^2 \gamma = 1$ in Bezug auf $cos\,\alpha$, $cos\,\beta$, $cos\,\gamma$ zu einem Maximum oder Minimum werden lässt. Für die Ausführung der Rechnung wird man behufs Elimination einer der drei Winkel den unbestimmten Factor λ benutzen, die Grösse

$$H - \lambda\,(cos^2 \alpha + cos^2 \beta + cos^2 \gamma) = (a_{11} - \lambda)\,cos^2 \alpha + \cdots$$

nach $cos\,\alpha$, $cos\,\beta$, $cos\,\gamma$ differentiiren und $\frac{\partial H}{\partial\, cos\,\alpha}$, $\frac{\partial H}{\partial\, cos\,\beta}$, $\frac{\partial H}{\partial\, cos\,\gamma}$ der Null gleich setzen. Dies führt zu denselben Gleichungen wie vorher.

Die cubische Gleichung für H und die für σ (§. 2.) haben dieselbe Form und zwischen den Elementen der beiden Determinanten bestehen die Relationen:

$$a_{11} = \alpha_{22} + \alpha_{33}, \quad a_{22} = \alpha_{33} + \alpha_{11}, \quad a_{33} = \alpha_{11} + \alpha_{22},$$
$$a_{12} = \alpha_{12}, \quad a_{23} = \alpha_{23}, \quad a_{31} = \alpha_{31}.$$

§. 5. Durch das Trägheitsellipsoid erlangt die Theorie des Trägheitsmomentes einen bedeutenden Grad geometrischer Durchsichtigkeit, indem fast jeder Satz über die Diameter des Ellipsoids die Interpretation eines Satzes über Trägheitsmomente liefert und somit eine grosse Parthie der Theorie der Flächen zweiter Ordnung in eine entsprechende Parthie der Theorie des Trägheitsmomentes übersetzt werden kann.

Nach einem bekannten Satze ist die Quadratsumme der reciproken Werthe dreier zu einander senkrechter Semidiameter der Ellipsoids constant. Sind daher ϱ', ϱ'', ϱ''' drei solche Semidiameter des Trägheitsellipsoids und H', H'', H''' die ihnen entsprechenden Trägheitsmomente, sowie $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$ die zugehörigen Trägheitsradien, sodass also

$$\varrho'^2 H' = \varrho''^2 H'' = \varrho'''^2 H''' = 1 = M\varkappa'^2 \varrho'^2 = M\varkappa''^2 \varrho''^2 = M\varkappa'''^2 \varrho'''^2,$$

so wird $H' + H'' + H'''$ oder $\varkappa'^2 + \varkappa''^2 + \varkappa'''^2$ constant, d. h.:

Die Summe der Trägheitsmomente für drei zu einander senkrechte, sich in einem Punkte schneidende Axen eines Systems ist constant, nämlich gleich der Summe der Hauptträgheitsmomente dieses Punktes.

Ein anderer Satz sagt aus, dass die Quadratsumme dreier conjugirter Semidiameter eines Ellipsoids constant sei. Hieraus folgt für die Trägheitsmomente, dass für drei zu einander conjugirten Axen h, h', h'' $\frac{1}{H'} + \frac{1}{H''} + \frac{1}{H'''}$ oder $\frac{1}{\varkappa'^2} + \frac{1}{\varkappa''^2} + \frac{1}{\varkappa'''^2}$ constant sei, d. h.:

Die Summe der reciproken Werthe der Trägheitsmomente, welche dreien conjugirten Diametern des Trägheitsellipsoids eines Punktes entsprechen, ist constant, nämlich gleich der entsprechenden Summe für die Hauptträgheitsmomente.

Der geometrische Ort aller Diameter des Ellipsoids von constanter Länge r ist ein Kegel zweiten Grades, welcher mit dem Ellipsoid den

Mittelpunkt und die Hauptaxen gemein hat und dasselbe in einer sphärischen Ellipse durchdringt. Dies liefert uns den Satz:

Der Ort aller Axen constanter Trägheitsmomente, welche sich in einem Punkte schneiden, ist ein Kegel zweiten Grades, welcher mit dem Trägheitsellipsoide dieses Punktes gemeinschaftliche Hauptaxen besitzt.

Sind a_{11}, a_{22}, a_{33} die Hauptträgheitsmomente, so erhält man aus

$$H = a_{11} \cos^2 \alpha + a_{22} \cos^2 \beta + a_{33} \cos^2 \gamma$$

für ein constantes H die Gleichung des Kegels, indem man die Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes der Richtung $(\alpha \beta \gamma)$, dessen Radiusvector ϱ sei, mit Hülfe der Gleichungen $\varrho \cos \alpha = x$, $\varrho \cos \beta = y$, $\varrho \cos \gamma = z$ einführt, nämlich:

$$(H - a_{11}) x^2 + (H - a_{22}) y^2 + (H - a_{33}) z^2 = 0.$$

Die Schnittcurve mit dem Trägheitsellipsoid

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 - 1 = 0$$

liegt auf der Kugel $H (x^2 + y^2 + z^2) = 1$ vom Radius $r = \frac{1}{\sqrt{H}}$.

Ist $a_{11} < a_{22} < a_{33}$, sodass also a_{11} der grössten, a_{22} der mittleren und a_{33} der kleinsten Hauptaxe des Trägheitsellipsoids zugehört, so zerfällt der Kegel für $H = a_{22}$ in die beiden reellen Ebenen

$$(a_{22} - a_{11}) x^2 + (a_{22} - a_{33}) z^2 = 0 \quad \text{oder} \quad z = \pm x \sqrt{\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{33} - a_{22}}},$$

welche durch die mittlere Hauptaxe hindurchgehen und die centralen Kreisschnitte des Trägheitsellipsoids enthalten. Dies Ebenenpaar theilt den Raum in zwei Scheitelräume, von denen der eine die grösste, der andere die kleinste Axe des Ellipsoids enthält. Für alle Axen h des ersten Raumes ist $a_{11} < H < a_{22}$, für alle Axen h des zweiten $a_{22} < H < a_{33}$. Soll also $H > a_{11}$, aber noch nicht gleich a_{22} sein, so umgibt der Kegel der Axen constanten Trägheitsmomentes die Axe des kleinsten Trägheitsmomentes, soll $H < a_{33}$, aber $> a_{22}$ sein, so umgibt sie die des grössten Trägheitsmomentes.

Die Projectionen der sphärischen Ellipse auf die Coordinatenebenen sind

$$(a_{11} - a_{33}) x^2 + (a_{22} - a_{33}) y^2 = \frac{H - a_{33}}{H},$$

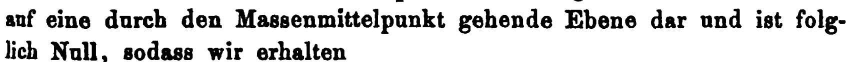
$$(a_{11} - a_{22}) x^2 + (a_{33} - a_{22}) z^2 = \frac{H - a_{22}}{H},$$

$$(a_{22} - a_{11}) x^2 + (a_{33} - a_{11}) z^2 = \frac{H - a_{11}}{H}.$$

§. 6. Durch die bisherigen Untersuchungen sind wir in den Stand gesetzt, die Trägheitsmomente für alle Axen zu finden, welche sich in

ein und demselben Punkte O schneiden. Um die Trägheitsmomente für die Axen eines anderen Punktes O' (Fig. 249.) zu finden, wollen wir durch beide zwei parallele Axen h, h' legen, ihre Trägheitsmomente mit H, H', ihren Abstand mit d, die Abstände eines Systempunktes von ihnen mit r, r' und die Projection von r auf die Richtung von d mit x bezeichnen. Dann ist

Fig. 249.



$$r'^2 = r^2 + d^2 - 2\,d\,x$$

und folglich

$$\Sigma m r'^2 = \Sigma m r^2 + d^2 \cdot \Sigma m - 2\,d\,\Sigma m x,$$

d. h.:

$$H' = H + M d^2 - 2\,d\,\Sigma m x.$$

Ist nun h eine Axe, welche durch den Massenmittelpunkt S des Systems geht, so stellt $\Sigma m x$ die Summe der Momente aller Massenpunkte in Bezug auf eine durch den Massenmittelpunkt gehende Ebene dar und ist folglich Null, sodass wir erhalten

$$H' = H + M d^2,$$

d. h. unter allen Axen des Raumes, welche ein Parallelstralenbündel bilden, hat die Axe des Massenmittelpunktes das kleinste Trägheitsmoment und haben alle Axen rings um sie herum, welche denselben Abstand besitzen, gemeinsamen Werth des Trägheitsmomentes; der Unterschied zwischen dem Trägheitsmomente einer solchen Axe und dem Trägheitsmomente der Axe des Massenmittelpunktes ist gleich dem Trägheitsmomente der Gesammtmasse des Systems, im Massenmittelpunkte vereinigt gedacht, in Bezug auf jene Axe.

Führt man in die vorige Gleichung die Trägheitsradien ein, nämlich setzt man $H = M\varkappa^2$, $H' = M\varkappa'^2$, so nimmt die Gleichung die Form an: $\varkappa'^2 = \varkappa^2 + d^2$; demnach bilden $\varkappa'$, $\varkappa$, d immer ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse $\varkappa'$ ist.

Aus dem Vorstehenden erkennt man, dass die Kenntniss der Richtungen und Trägheitsmomente für die Hauptaxen des Massenmittelpunktes genügen, um die Trägheitsmomente für alle Axen des Raumes finden zu können. Sind nämlich A, B, C die Hauptträgheitsmomente des Massenmittelpunktes und α, β, γ die Winkel, welche die Richtung einer beliebigen Axe h' des Raumes oder die ihr parallele Axe des Massenmittelpunktes h mit den Hauptaxen des Massenmittelpunktes bildet, so ist das Trägheitsmoment für sie

$$H' = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma + M d^2,$$

wenn d den Abstand des Massenmittelpunktes von h' bedeutet.

§. 7. Um über die Vertheilung der Axen constanten Trägheitsmomentes H' um den Massenmittelpunkt ins Klare zu kommen, bedenken wir

dass in der Gleichung $H'^2 = H^2 + Md^2$ zwei Grössen H und d vorkommen, welche variiren können, ohne dass H' aufhört, denselben Werth zu behalten. Ziehen wir durch den Massenmittelpunkt eine Axe h, welche dem Kegel für das Trägheitsmoment H angehört, so liegen alle Axen des Raumes, welche dieser parallel sind und das Trägheitsmoment H' besitzen, auf einem Cylinder um h mit einem bestimmten Radius $d = \sqrt{\frac{H' - H}{M}}$ beschrieben. Wechselt h seine Lage auf dem Kegel, so verschiebt sich dieser Cylinder im Raume. Wählt man einen anderen Kegel, welchem ein anderer Werth von H zugehört, so ergibt sich eine andere Schaar Cylinder. Indessen ist die Wahl dieser Kegel an einen gewissen Spielraum gebunden, dessen Grenzen nicht überschritten werden dürfen, wenn H' sich nicht ändern soll. Denn ist A der kleinste, C der grösste Werth von H, so ist der grösste Werth, den d erreichen darf, $d = \sqrt{\frac{H' - A}{M}}$ und der kleinste, unter den d nicht herabgehen darf, $d = \sqrt{\frac{H' - C}{M}}$. Beschreibt man daher mit diesen beiden Längen als Radien um den Massenmittelpunkt zwei Kugeln, so geben die Tangenten dieser Flächen die Grenzabstände der Axen an, welche dasselbe Trägheitsmoment H' besitzen. Zwischen diesen Grenzen aber kann man der Grösse d jeden Werth δ beilegen und sofort eine Menge Cylinder finden, deren Axen im Massenmittelpunkte eine Kegelfläche

$$(H - A)\,x^2 + (H - B)\,y^2 + (H - C)\,z^2 = 0$$

bilden, für deren Erzeugungslinien der Werth des Trägheitsmomentes $H = H' - M\delta^2$ ist.

§. 8. Ehe wir in der allgemeinen Theorie der Trägheitsmomente weiter vorwärts gehen, wollen wir einige Beispiele für die Bestimmung von Trägheitsmomenten geben.

Es sei ein homogenes, continuirlich den Raum erfüllendes System von der specifischen Masse 1 bezogen auf drei rechtwinklige Axen der x, y, z; das Trägheitsmoment A bezüglich der x-Axe ist:

$$A = \Sigma\,(y^2 + z^2)\,dm = \Sigma y^2 dm + \Sigma z^2 dm.$$

Um $\Sigma y^2 dm$ zu bestimmen, legen wir senkrecht zur y-Axe zwei Ebenen in den Abständen y und $y + dy$ von der x-Axe; alle Massenelemente des Systems zwischen diesen haben dasselbe y und wenn also der Querschnitt im Abstande y die Grösse Q_y hat, so wird $\Sigma y^2 dm = \int y^2 Q_y\,dy$; in ähnlicher Weise hat man für die zweite Summe $\Sigma z^2 dm = \int z^2 Q_z\,dz$, wenn Q_z der Querschnitt senkrecht zur z-Axe ist. Ist endlich Q_x der Querschnitt senkrecht zur x-Axe, so gelangt man zu den Formeln

$$A = \int y^2 Q_y\,dy + \int z^2 Q_z\,dz, \qquad B = \int z^2 Q_z\,dz + \int x^2 Q_x\,dx,$$

$$C = \int x^2 Q_x\,dx + \int y^2 Q_y\,dy.$$

Wenden wir diese Formeln an

1. auf die Bestimmung der Trägheitsmomente der drei Axen des Massenmittelpunktes eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipeds von den Kantenlängen a, b, c, welche Axen den Kanten parallel laufen. Man hat

$$Q_x = bc, \qquad Q_y = ca, \qquad Q_z = ab,$$

$$\int x^2 Q_x dx = bc \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} x^2 dx = \frac{M}{12} a^2,$$

$$\int y^2 Q_y dy = ca \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} y^2 dy = \frac{M}{12} b^2,$$

$$\int z^2 Q_z dz = ab \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} z^2 dz = \frac{M}{12} c^2,$$

da $M = abc$. Hiermit werden

$$A = \frac{M}{12}(b^2 + c^2), \quad B = \frac{M}{12}(c^2 + a^2), \quad C = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

Zugleich sieht man, dass die drei Axen die Hauptaxen des Massenmittelpunktes sind und

$$\int xy\, dm = \int yz\, dm = \int zx\, dm = 0$$

sind vermöge der Symmetrie der Figur; daher ist das Trägheitsmoment für eine beliebige Axe h des Massenmittelpunktes von der Richtung $(\alpha\beta\gamma)$:

$$H = \frac{M}{12}\left\{(b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma\right\}$$

und das Quadrat des Trägheitsradius

$$\varkappa^2 = \frac{1}{12}\left\{(b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma\right\},$$

sowie die Gleichung des Centralellipsoids

$$\frac{M}{12}\left\{(b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2\right\} = 1.$$

2. Es seien ebenso zu bestimmen die Trägheitsmomente eines homogenen Ellipsoids von der specifischen Masse 1 in Bezug auf die drei Hauptaxen der Figur, welche auch hier Hauptträgheitsaxen des Mittelpunktes (Schwerpunktes) sind. Die Gleichung des Ellipsoids sei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Der Schnitt Q_x, senkrecht zur x-Axe, ist die Ellipse

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$

und ihr Inhalt

$$Q_x = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Ebenso ist

$$Q_y = \pi ca\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$Q_z = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Hiermit werden

$$\int x^2 Q_x dx = \pi bc \int_{-a}^{+a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) x^2 dx,$$

$$\int y^2 Q_y dy = \pi ca \int_{-b}^{+b} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) y^2 dy,$$

$$\int z^2 Q_z dz = \pi ab \int_{-c}^{+c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) z^2 dz$$

die Werthe annehmen: $\frac{4}{15}\pi a^3 bc$, $\frac{4}{15}\pi ab^3 c$, $\frac{4}{15}\pi abc^3$, oder, da die Masse M den Werth hat: $\frac{4}{3}\pi abc$, so werden $\frac{M}{5}a^2$, $\frac{M}{5}b^2$, $\frac{M}{5}c^2$ diese drei Integrale darstellen. Demnach erhält man für die Hauptträgheitsmomente des Massenmittelpunktes

$$A = \frac{M}{5}(b^2 + c^2), \quad B = \frac{M}{5}(c^2 + a^2), \quad C = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)$$

und für das Trägheitsmoment einer beliebigen Massenmittelpunktsaxe von der Richtung $(\alpha\beta\gamma)$:

$$H = \frac{M}{5}\left\{(b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma\right\},$$

sowie die Gleichung des Centralellipsoids:

$$\frac{M}{5}(b^2 + c^2)\cdot x^2 + \frac{M}{5}(c^2 + a^2)\cdot y^2 + \frac{M}{5}(a^2 + b^2)\cdot z^2 = 1.$$

Man kann leicht ein homogenes Ellipsoid finden, welches in Bezug auf alle sich im Mittelpunkt schneidenden Axen dieselben Trägheitsmomente besitzt, wie ein gegebenes System, welches mit diesem dieselbe Masse M und denselben Massenmittelpunkt hat. Sind A, B, C die Hauptträgheitsmomente des Systems für jenen Punkt, so findet man, weil die Centralellipsoide für das System und das Ellipsoid dieselben sein müssen, die Halbaxen a, b, c des Ellipsoids aus den Gleichungen

$$b^2 + c^2 = 5\cdot\frac{A}{M}, \quad c^2 + a^2 = 5\cdot\frac{B}{M}, \quad a^2 + b^2 = 5\cdot\frac{C}{M}.$$

Hieraus folgt

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{2M}(A + B + C) = \frac{5}{M}\Sigma(x^2 + y^2 + z^2)\,dm$$

und folglich durch Subtraction der vorigen Gleichungen einzeln:

$$a^2 = \frac{5}{M}\Sigma x^2 dm, \quad b^2 = \frac{5}{M}\Sigma y^2 dm, \quad c^2 = \frac{5}{M}\Sigma z^2 dm.$$

Hierdurch erlangen die drei Summen $\Sigma x^2 dm$, $\Sigma y^2 dm$, $\Sigma z^2 dm$, welche einige Schriftsteller die Trägheitsmomente der Massen in Bezug auf die Ebenen der yz, zx, xy nennen, eine gewisse geometrische Bedeutung.

Für das Rotationsellipsoid $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ wird

$$A = B = \frac{M}{5}(a^2 + c^2), \quad C = \frac{2}{5}Ma^2, \quad H = \frac{M}{5}\left\{a^2 + c^2 + (b^2 - c^2)\cos^2\gamma\right\}.$$

Für die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ist $A = B = C = H = \frac{2}{5}Ma^2$.

Um das Trägheitsmoment H der homogenen Kugel für irgend einen Durchmesser h unmittelbar zu finden, sei dieser die x-Axe, sodass

$$H = \Sigma(y^2 + z^2)\,dm = \Sigma y^2 dm + \Sigma z^2 dm$$

wird. Vermöge der Symmetrie der Massenvertheilung der Kugel ist aber

$$\Sigma x^2 dm = \Sigma y^2 dm = \Sigma z^2 dm = \tfrac{1}{3}\Sigma (x^2 + y^2 + z^2)\, dm = \tfrac{1}{3}\Sigma r^2 dm,$$

wenn r den Radiusvector nach dem Punkte (xyz) bedeutet. Nun ist aber

$$dm = \varrho \cdot 4\pi r^2 dr,$$

also wird

$$\tfrac{1}{3}\Sigma r^2 dm = \tfrac{4}{3}\pi\varrho \int_0^a r^4 dr = \tfrac{4}{15}\pi\varrho a^5 = \Sigma x^2 dm = \Sigma y^2 dm = \Sigma z^2 dm.$$

Dies liefert

$$H = \tfrac{8}{15}\pi\varrho a^5 = \tfrac{2}{5} M a^2, \quad \text{wo} \quad M = \tfrac{4}{3}\pi\varrho a^3.$$

Man kann die Aufsuchung der Hauptträgheitsmomente des Ellipsoids bezüglich des Mittelpunktes auf das Trägheitsmoment der Kugel für einen Durchmesser zurückführen. Die Gleichung des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ geht nämlich durch die Substitution $x = ax'$, $y = by'$, $z = cz'$ über in $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ und wird $dm = \varrho\, dx\, dy\, dz = \varrho\, abc\, dx'\, dy'\, dz' = abc\, dm'$, mithin

$$\Sigma x^2 dm = abc \cdot a^2 \Sigma x'^2 dm',$$
$$\Sigma y^2 dm = abc \cdot b^2 \Sigma y'^2 dm',$$
$$\Sigma z^2 dm = abc \cdot c^2 \Sigma z'^2 dm'.$$

Die Gleichung $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ stellt aber eine Kugelfläche vom Radius 1 dar und die Summen $\Sigma x'^2 dm'$, $\Sigma y'^2 dm'$, $\Sigma z'^2 dm'$ beziehen sich auf diese, deren Massenelement dm' ist. Für sie ist aber nach dem Obigen:

$$\Sigma x'^2 dm' = \Sigma y'^2 dm' = \Sigma z'^2 dm' = \tfrac{4}{15}\pi\varrho$$

und daher werden

$$\frac{1}{a^2}\Sigma x^2 dm = \frac{1}{b^2}\Sigma y^2 dm = \frac{1}{c^2}\Sigma z^2 dm = \tfrac{4}{15}\pi\varrho\, abc = \tfrac{1}{5} M,$$

mithin

$$A = \Sigma (y^2 + z^2)\, dm = \tfrac{1}{5} M (b^2 + c^2), \quad B = \tfrac{1}{5} M (c^2 + a^2), \quad C = \tfrac{1}{5} M (a^2 + b^2).$$

Diese Bemerkung wurde von Hearn gemacht. [Thomson and Ferrers, Cambridge and Dublin mathem. Journal, Vol. VIII, p. 37 (1853).]

§. 9. Es sei ein homogener Rotationskörper gegeben, man sucht das Trägheitsmoment für die Rotationsaxe und eine zu dieser senkrechten Geraden, welche die Rotationsaxe in einem Punkte O schneidet. Man bemerkt leicht, dass die Rotationsaxe und alle Axen durch O senkrecht zu ihr Hauptaxen des Punktes O sind und dass das Centralellipsoid ein Rotationsellipsoid um die Rotationsaxe der Figur ist. Für die Rotationsaxe als x-Axe, ω als Winkel, den ein beliebiger Meridian des Körpers mit der xy-Ebene bildet, r als Abstand eines Punktes in der Ebene des Meridians von der Axe erhält man das Element der Masse, indem man den Körper schneidet 1. mit zwei Ebenen im Abstande x und $x + dx$ von O, 2. mit zwei Meridianebenen, entsprechend den Winkeln ω und $\omega + d\omega$, sowie 3. mit zwei Cylinderflächen um die x-Axe mit den Radien r und $r + dr$ durch die Formel $dm = \varrho r\, dr\, d\omega\, dx$. Dies ist einzusetzen in die Formeln

$$A = \Sigma (y^2 + z^2)\, dm = \Sigma r^2 dm,$$
$$B = C = \Sigma (z^2 + x^2)\, dm = \Sigma (r^2 \sin^2\omega + x^2)\, dm$$

und hierauf ist zu integriren nach ω von $\omega = 0$ bis $\omega = 2\pi$, wobei die Integrale

$$\int_0^{2\pi} d\omega = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\omega\, d\omega = \pi$$

in Anwendung kommen, nach r von $r = 0$ bis $r = y = f(x)$, wenn $y = f(x)$ die Gleichung des Meridians für den Punkt O als Ursprung ist und nach x zwischen zwei constanten Werthen x_0, x_1. Man erhält auf dem hier angedeuteten Wege zunächst:

$$A = 2\pi\varrho \int_{x_0}^{x_1}\int_0^y r^3\,dr\,dx\,,$$

$$B = C = \pi\varrho \int_{x_0}^{x_1}\int_0^y r^3\,dr\,dx + 2\pi\varrho \int_{x_0}^{x_1}\int_0^y r\,dr\cdot x^2 dx = \tfrac{1}{2}A + 2\pi\varrho \int_{x_0}^{x_1}\int_0^y r\,dr\cdot x^2 dx$$

und hierauf durch Ausführung der Integration nach r:

$$A = \tfrac{1}{2}\pi\varrho \int_{x_0}^{x_1} y^4 dx\,, \quad B = C = \tfrac{1}{4}A + \pi\varrho \int_{x_0}^{x_1} x^2 dx\,.$$

Hiermit erhält man weiter für das Trägheitsmoment um eine beliebige Axe $h\,(\alpha\beta\gamma)$:

$$H = A\cos^2\alpha + B(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) = A\cos^2\alpha + B(1 - \cos^2\alpha)$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi\varrho(1 + \cos^2\alpha)\int_{x_0}^{x_1} y^4 dx + \pi\sin^2\alpha \int_{x_0}^{x_1} x^2 y^2 dx\,.$$

Wir wenden diese Formel an:

1. auf den Rotationskegel für die Spitze als Punkt O. Es sei h die Höhe, r der Radius der Basis. Man erhält wegen $y = \frac{r}{h}x$, $A = \frac{3}{10}Mr^2$, $M = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $B = C = \frac{3}{20}Mr^2 + \frac{3}{5}Mh^2$, $H = \frac{3}{10}Mr^2(1 + \cos^2\alpha) + \frac{3}{5}Mh^2\sin^2\alpha$;

2. auf das sphärische Segment für den Scheitel desselben als Punkt O. Ist r der Radius der Kugel, so wird $y = \sqrt{2rx - x^2}$, $x_0 = 0$, $x_1 = x$.

$$\int_0^x y^4 dx = x^3\left(\tfrac{4}{3}r^2 + \tfrac{1}{5}x^2 - rx\right), \qquad \int_0^x y^2 x^2 dx = x^4\left(\tfrac{1}{2}r - \tfrac{1}{5}x\right),$$

$$A = \pi\varrho x^3\left(\tfrac{2}{3}r^2 + \tfrac{1}{10}x^2 - \tfrac{1}{2}rx\right), \qquad B = C = \pi\varrho x^3\left(\tfrac{1}{3}r^2 - \tfrac{3}{20}x^2 + \tfrac{1}{4}rx\right).$$

Für die Vollkugel wird wegen $M = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = \frac{2}{5}Mr^2$, $B = \frac{2}{5}Mr^2$. — Für die Halbkugel erhält man wegen $M = \frac{2}{3}\pi r^3$, $A = \frac{2}{5}Mr^2$, $B = \frac{13}{20}Mr^2$;

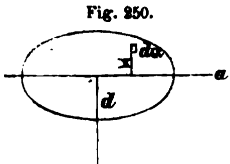
3. auf den Kreiscylinder für den Schwerpunkt als Punkt O. Ist r der Radius, a die Länge des Cylinders, so wird $A = \frac{M}{2}r^2$, $B = C = \frac{M}{4}r^2 + \frac{M}{12}a^2$, $M = \pi r^2 a$. — Für die cylindrische Röhre vom inneren Radius r und der Wanddicke d hat man $M = \pi a\left\{(r+d)^2 - r^2\right\}$, $A = \frac{M}{2}\left\{(r+d)^2 + r^2\right\}$, $B = \frac{M}{2}\left\{(r+d)^2 + r^2\right\} + \frac{M}{12}a^2$.

Für den homogenen Ovalkörper, welcher durch Rotation der Ovallinie $r = 2a\cos^2\vartheta$ um die Polaraxe entsteht, die Hauptträgheitsmomente und Trägheitsradien des Schwerpunktes zu finden.

Das Trägheitsmoment einer Biconvexlinse für einen Durchmesser der gemeinschaftlichen Kreisbasis als Axe zu finden, an welcher die beiden Planconvexlinsen zusammenstossen, welche die Biconvexlinse bilden.

§. 10. Für Trägheitsmomente von homogenen Rotationskörpern kann man einen den Guldin'schen Sätzen über den Massenmittelpunkt nicht unähnlichen Satz aufstellen. Besitzt nämlich eine ebene Figur (Fig. 250.) eine Symmetrieaxe a, so ist, wenn $d\alpha$ ein Flächenelement derselben und x seinen Abstand von dieser Axe bedeutet, $\Sigma x\,d\alpha = 0$ und $\Sigma x^3 d\alpha = 0$, weil vermöge der Symmetrie der

Figur die Flächenelemente, welche paarweise in entgegengesetzt gleichem Abstande x diesseits und jenseits der Axe liegen, sich tilgen. Setzt man weiter $\Sigma x^2 d\alpha = \varkappa^2 \alpha$, wo α den Flächenraum der Figur und $\varkappa$ deren Trägheitsradius für die Axe a darstellt, so wird das Trägheitsmoment des Rotationskörpers, den die Fläche α bei der Drehung um eine mit a im Abstande d parallele Axe h erzeugt:


Fig. 250.

$$H = 2\pi\varrho\,\Sigma(x + d)^3 d\alpha,$$

indem $2\pi(x + d)\,d\alpha \cdot \varrho$ einen Elementarring der Masse darstellt. Dieser Ausdruck nimmt aber vermöge der vorstehenden Bemerkungen die Form an:

$$H = 2\pi\varrho\,(d^3 \Sigma d\alpha + 3\,d^2 \Sigma x\,d\alpha + 3\,d\,\Sigma x^2 d\alpha + \Sigma x^3 d\alpha) = 2\pi\varrho\alpha d\,(d^2 + 3\varkappa^2).$$

Da nach dem Guldin'schen Satze das Volumen des Rotationskörpers $2\pi\alpha d$ und also $2\pi\varrho\alpha d$ seine Masse M ist, so hat man

$$H = M\,(d^2 + 3\varkappa^2).$$

Es darf hierbei aber die Rotationsaxe h die Fläche α nicht schneiden. Der fragliche Satz lautet demnach:

Besitzt ein geschlossener ebener Flächenraum eine Symmetrieaxe und ist $\varkappa$ sein Trägheitsradius in Bezug auf sie, so ist der Trägheitsradius des homogenen Rotationskörpers, welchen die Figur durch Rotation um eine im Abstande d mit der Symmetrieaxe parallele Axe erzeugt, in Bezug auf diese Axe gleich $d^2 + 3\varkappa^2$.

Der Satz ist von Townsend [*On the moment of inertia of a ring with respect to its atis of revolution.* Cambridge and Dublin *Quarterly Journal of pure and appl. Mathem.*, T. X, p. 203 (1869)].

§. 11. Für nicht besonders complicirte, insbesondere homogene Systeme kann man sich zur Bestimmung der Trägheitsmomente des Satzes §. 6. mit Erfolg bedienen, wenn man damit noch einen anderen Satz über die Trägheitsmomente ähnlicher Systeme in Bezug auf homolog liegende Axen verbindet. Denkt man sich nämlich zwei homogene ähnliche Systeme in gleichviel ähnliche Massenelemente zerlegt, so stehen die Massen je zwei homologer solcher Elemente in dem constanten Verhältnisse ihrer Raumdimensionen, welches Verhältniss für lineäre Systeme ε, für flächenartige Systeme ε^2 und für räumliche Systeme ε^3 sei; die Abstände dieser Elemente von zwei homolog liegenden Axen stehen im Verhältniss ε der Linien und ihre Quadrate also im Verhältniss ε^2. Demnach stehen die Trägheitsmomente der Elemente im Verhältniss ε^3, ε^4, ε^5 und in demselben Verhältnisse auch die Trägheitsmomente der ähnlichen Systeme bezüglich jener Axen. Daher der Satz:

Ist ε das Aehnlichkeitsverhältniss zweier ähnlicher homogener Systeme, so ist das Verhältniss ihrer Trägheitsmomente H, H' in Bezug auf zwei ähnlich liegende Axen h, h' gleich ε^n, wo $n = 3, 4, 5$, je nachdem die Systeme eine, zwei oder drei Dimensionen besitzen, d. h.:

$$H' = \varepsilon^n \cdot H, \quad n = 3, 4, 5.$$

Einige Beispiele sollen die Anwendung dieses Satzes erläutern.

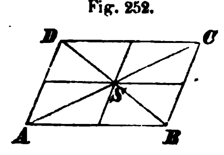
1. Trägheitsmoment H einer homogenen Strecke AB (Fig. 251.) für eine Schwerpunktsaxe h, mit welcher die Strecke den Winkel α bildet. Das Trägheitsmoment H für die Axe h ist die Summe der Trägheitsmomente der beiden Hälften AS und SB der Strecke AB für dieselben Axen und diese haben gleiches

Trägheitsmoment in Bezug auf sie, gleich $\frac{1}{4} H$. Ebenso gross ist das Trägheitsmoment der halben Strecke AS in Bezug auf eine durch A gehende, mit h parallele Axe h', denn AS und SB sind ähnliche Systeme für $\varepsilon = 1$ und beide Axen haben gegen sie homologe Lage. Das Trägheitsmoment H' der ganzen Länge AB für die Axe h' steht aber zu dem Trägheitsmoment von AS für h' in dem Verhältniss 2^3, da $AB = 2\,AS$. Daher ist $H' = 8 \cdot \frac{1}{2} H = 4H$. Nun ist aber auch $H' = H + \frac{1}{4} l M \sin^2 \alpha$, wenn $AB = l$ ist, indem $\frac{1}{2} l \sin \alpha$ den Abstand des Massenmittelpunktes S von der Axe h' darstellt. Daher hat man schliesslich $4H = H + \frac{1}{4} l M \sin^2 \alpha$ oder $H = \frac{1}{12} l M \sin^2 \alpha$.

Fig. 251.

2. **Trägheitsmoment H der Fläche eines homogenen Parallelogramms $ABCD$** (Fig. 252.) **für eine Axe h des Massenmittelpunktes S.** Das Trägheitsmoment H ist die Summe der Trägheitsmomente der vier Parallelogramme SA, SB, SC, SD, welche unter sich congruent und dem Ganzen im Verhältniss $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ähnlich sind. Die Parallelogramme SA, SC einerseits und SB, SD andererseits haben gleiches Trägheitsmoment für die Axe h. Sind also H_{SA}, H_{SB} ihre Werthe, so wird $H = 2\,(H_{SA} + H_{SB})$. Das Parallelogramm SA liefert aber für die Axe h und eine durch A gehende, ihr parallele Axe h' denselben Werth $H_{SA} = H'_{SA}$, da SC und AS congruent und gleicher Lage gegen h und h' sind. Ebenso ist $H_{SB} = H''_{SB}$, wenn h'' eine durch B gehende, zu h parallele Axe bedeutet. Daher ist auch $H = 2\,(H'_{SA} + H''_{SB})$. Nennen wir jetzt H' und H'' die Trägheitsmomente des Ganzen für h' und h'', so liefert die Aehnlichkeit der Figuren AS und AC, sowie BS, BC die Relationen $H' = 2^4 \cdot H'_{SA}$, $H'' = 2^4 \cdot H''_{SB}$ und zugleich ist $H' = H + Mp^2$, $H'' = H + Mq^2$, wenn p und q die Abstände des Massenmittelpunktes des Ganzen von den Axen h', h'' ist, welche durch zwei nicht gegenüber liegende Ecken der Figur gehen. Hieraus folgt

Fig. 252.



$$H' + H'' = 2H + M(p^2 + q^2)$$

und weiter also:

$$16\,(H'_{SA} + H'_{SB}) = 8H = 2H + M(p^2 + q^2),$$

d. h.:

$$H = \tfrac{1}{6} M (p^2 + q^2).$$

Die Grössen p und q sind die Abstände zweier nicht gegenüberliegender Ecken des Parallelogramms von der Axe h. Sie können nicht grösser werden, als die halben Diameter AS und BS des Parallelogramms, deren Projectionen auf eine zur Axe h senkrechte Ebene sie sind. Daher wird H ein Maximum für die Axe h, welche auf der Ebene des Parallelogramms senkrecht steht. Die beiden andern Hauptaxen der Trägheit fallen in die Ebene der Figur und sind senkrecht zu deren Seiten. Für die mit der Seite BC parallele Axe wird

$$p = q = \tfrac{1}{2}\, \overline{AB} \cdot \sin \alpha,$$

wenn α den Winkel des Parallelogramms bezeichnet, mithin

$$H = \tfrac{1}{12} M \cdot \overline{AB}^2 \sin^2 \alpha.$$

Man erhält dies Resultat auch aus Nr. 1, wenn man das Parallelogramm in unendlich schmale Streifen parallel AB zerlegt. Den Maximalwerth

$$H = \tfrac{1}{12} M (\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2)$$

kann man mit Hülfe der Seiten darstellen, indem

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \cdot BC \cdot \cos \alpha, \quad \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AB \cdot BC \cdot \cos \alpha.$$

also

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2)$$

wird, nämlich:

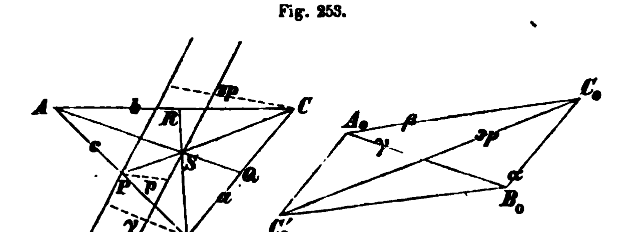
$$H = \tfrac{1}{12} M (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2).$$

3. **Trägheitsmoment der homogenen Dreiecksfläche** ABC (Fig. 253.) für eine Massenmittelpunktsaxe h. Ergänzt man das Dreieck zu einem Parallelogramm, so erhält man für das Trägheitsmoment H' um eine durch die Mitte P der Seite AB gehende, zu h parallele Axe h' das halbe Trägheitsmoment des Parallelogramms (s. Nr. 2), nämlich, wenn $\varDelta$ die Dreiecksfläche und also $2\varDelta$ die des Parallelogramms ist:

$$H' = \tfrac{1}{6} \varDelta [(\tfrac{1}{2}\gamma)^2 + (3p)^2],$$

wo $\frac{1}{2}\gamma$ und $3p$ die Perpendikel bedeuten, welche von B oder A und C auf die Axe h' gefällt werden können. γ ist die Projection der Seite $AB = c$ und $3p$

Fig. 253.



die Projection der Mediane CP, also p die des Massenmittelpunktsabstandes SP auf eine zu den Axen h, h' senkrechte Ebene. Um aus H' das Trägheitsmoment H für die Massenmittelpunktsaxe h zu erhalten, hat man $\varDelta \cdot p^2$ abzuziehen; dadurch kommt:

$$H = \tfrac{1}{24} \varDelta \cdot \gamma^2 + \tfrac{1}{2} \varDelta \cdot p^2.$$

Bezeichnet man nun mit α, β, $3q$, $3r$ die Projectionen der Seiten a, b und der Medianen AQ, BR auf jene Ebene, so erhält man in gleicher Weise

$$H = \tfrac{1}{24} \varDelta \cdot \beta^2 + \tfrac{1}{2} \varDelta \cdot q^2, \qquad H = \tfrac{1}{24} \varDelta \cdot \alpha^2 + \tfrac{1}{2} \varDelta \cdot r^2$$

und indem man die Summe der drei Ausdrücke für H durch 3 dividirt:

$$H = \tfrac{1}{72} \varDelta (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \tfrac{1}{6} \varDelta (p^2 + q^2 + r^2).$$

In der Projection $A_0B_0C_0$ des Dreiecks ABC auf die zu h senkrechte Ebene sind $3p$, $3q$, $3r$ die drei Medianen zu den Seiten γ, β, α und ist $6p$ die Diagonale des Parallelogramms C_0C_0', zu welchem $A_0B_0C_0$ ergänzt werden kann. Man hat daher:

$$(6p)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos C_0$$

oder da

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos C_0$$

ist,

$$(6p)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) - \gamma^2.$$

In ähnlicher Weise ist

$$(6q)^2 = 2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2, \quad (6r)^2 = 2(\gamma^2 + \alpha^2) - \beta^2.$$

Daher erhält man durch Addition dieser Ausdrücke

$$12(p^2 + q^2 + r^2) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

und indem man hiermit $p^2 + q^2 + r^2$ aus der Gleichung für H eliminirt:

$$H = \tfrac{1}{36} \varDelta (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Steht die Axe h senkrecht auf der Ebene des Dreiecks, so werden α, β, γ gleich den Seiten des Dreiecks selbst. Daher ist H zugleich das Trägheitsmoment des Dreiecks $A_0B_0C_0$, d. h.:

Das Trägheitsmoment eines homogenen Dreiecks für irgend eine Massenmittelpunktsaxe ist gleich dem Trägheitsmomente der Projection des Dreiecks auf eine zu dieser Axe senkrechte Ebene in Bezug auf dieselbe Axe, wenn die Projection mit derselben Masse belegt gedacht wird, wie das ursprüngliche Dreieck.

Eliminirt man nicht $p^2 + q^2 + r^2$, sondern $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, so ergibt sich

$$H = \tfrac{1}{3}\Delta(p^2 + q^2 + r^2);$$

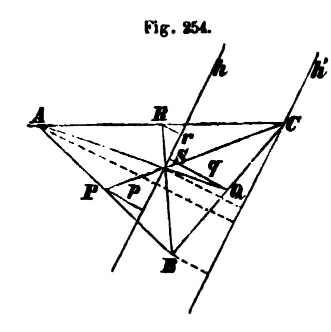
es sind aber $\frac{1}{3}\Delta \cdot p^2$, $\frac{1}{3}\Delta \cdot q^2$, $\frac{1}{3}\Delta \cdot r^2$ die Trägheitsmomente der drei Seitenmitten P, Q, R, wenn in jeder derselben die Masse $\frac{1}{3}\Delta$ concentrirt gedacht wird, d. h.

Das Trägheitsmoment einer homogenen Dreiecksfläche in Bezug auf eine Mittelpunktsaxe ist gleich dem Trägheitsmoment der drei Seitenmitten, wenn jede von diesen den dritten Theil der Dreiecksmasse enthält.

Fällt die Axe h in die Ebene des Dreiecks, so fallen die Projectionen α, β, γ der Seiten auf eine zu h senkrechte Ebene in eine Gerade und ist $\alpha + \beta + \gamma = 0$, also das Quadrat jeder von ihnen gleich dem Quadrat der Summe der beiden anderen. Daher wird hierfür $H = \frac{1}{36}\Delta(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{1}{18}\Delta(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$.

Die Gleichung $H = \frac{1}{3}\Delta(p^2 + q^2 + r^2)$ wollen wir noch benutzen, um das Trägheitsmoment für eine in der Ebene des Dreiecks liegende, durch die Ecke C gehende Axe h' zu bestimmen, indem hierfür p, q, r die Perpendikel von den Seitenmitten P, Q, R auf eine mit h' durch den Massenmittelpunkt parallel gelegte Axe h bedeuten (Fig. 254.). Ist s der Abstand des Massenmittelpunktes von h', so wird

Fig. 254.



$$H' = \tfrac{1}{3}\Delta(p^2 + q^2 + r^2) + \Delta \cdot s^2.$$

Bezeichnen wir jetzt mit a, b die Abstände der Ecken A, B von h', so wird

$$p = \tfrac{1}{2}(a + b) - s, \quad q = \tfrac{1}{2}b - s, \quad r = \tfrac{1}{2}a - s,$$

oder weil $s = \frac{1}{3}(a + b)$:

$$p = \tfrac{1}{6}(a + b), \quad q = \tfrac{1}{6}(b - 2a), \quad r = \tfrac{1}{6}(a - 2b),$$

folglich:
$$p^2 + q^2 + r^2 = \tfrac{1}{6}(a^2 + b^2 - ab),$$

also:
$$H' = \tfrac{1}{6}\Delta(a^2 + ab + b^2).$$

4. **Das Trägheitsmoment der homogenen Fläche eines regulären Vielecks in Bezug auf die zur Figur senkrechte Schwerpunktsaxe zu finden.**

5. **Die Trägheitsmomente für ein rechtwinkliges Parallelepiped und ein dreiseitiges gerades Prisma zu finden.**

§. 12. Wir wollen jetzt die Richtungen der Hauptaxen und die Grösse der Hauptträgheitsmomente für einen beliebigen Punkt $O(xyz)$ des Raumes mit Hülfe der bekannten Elemente des Massenmittelpunktes S bestimmen. Das Trägheitsmoment für irgend eine Axe h $(\alpha\beta\gamma)$ des Punktes O, welche von S den Abstand d hat, ist

$$H = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma + Md^2,$$

oder, wenn wir lieber mit den entsprechenden Trägheitsradien ϱ, a, b, c die Untersuchung führen wollen, so ist

$$\varrho^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma + d^2,$$

oder weil

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$$
$$= r^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2,$$

wo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist,

$$\varrho^2 = (a^2 + r^2) \cos^2 \alpha + (b^2 + r^2) \cos^2 \beta + (c^2 + r^2) \cos^2 \gamma$$
$$- (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2.$$

Um die Richtungen der Hauptaxen des Punktes O zu finden, hat man ϱ^2 in Bezug auf α, β, γ mit Rücksicht auf $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1 = 0$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen. Indem man letztere Gleichung mit dem unbestimmten Factor $-\lambda$ multiplicirt und sie zur vorigen addirt, ergibt die Differentiation nach $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$:

$$(a^2 + r^2 - \lambda) \cos \alpha = x (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)$$
$$(b^2 + r^2 - \lambda) \cos \beta = y (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)$$
$$(c^2 + r^2 - \lambda) \cos \gamma = z (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma).$$

Aus diesen Gleichungen findet sich, wenn man sie der Reihe nach mit $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ multiplicirt und addirt, dass $\lambda = \varrho^2$, d. h. gleich dem gesuchten Werthe von ϱ^2 ist; wenn man sie dagegen mit x, y, z multiplicirt und nach der Division mit resp. $a^2 + r^2 - \varrho^2$, $b^2 + r^2 - \varrho^2$, $c^2 + r^2 - \varrho^2$ addirt, erhält man die cubische Gleichung für die Maximal- und Minimalwerthe von ϱ^2:

$$\frac{x^2}{a^2 + r^2 - \varrho^2} + \frac{y^2}{b^2 + r^2 - \varrho^2} + \frac{z^2}{c^2 + r^2 - \varrho^2} = 1;$$

endlich ergibt sich noch für die Richtung $\alpha \beta \gamma$ der Hauptaxen des Punktes O:

$$\frac{\cos \alpha}{\dfrac{x}{a^2 + r^2 - \varrho^2}} = \frac{\cos \beta}{\dfrac{y}{b^2 + r^2 - \varrho^2}} = \frac{\cos \gamma}{\dfrac{z}{c^2 + r^2 - \varrho^2}}.$$

Die Wurzeln der cubischen Gleichung liegen zwischen $a^2 + r^2$ und $b^2 + r^2$, zwischen $b^2 + r^2$ und $c^2 + r^2$ und zwischen $c^2 + r^2$ und $+\infty$ und die drei Werthe von $r^2 - \varrho^2$ sind die drei Parameter λ, μ, ν dreier Flächen zweiter Ordnung

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2 + \nu} + \frac{y^2}{b^2 + \nu} + \frac{z^2}{c^2 + \nu} = 1,$$

welche mit dem Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

confocal sind und durch den Punkt $O (xyz)$ hindurchgehen. Von diesen Flächen ist eine ein Ellipsoid, die andere ein einfaches und die dritte

ein Doppelhyperboloid. Die Proportion für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ zeigt, dass die Richtungen der Hauptaxen in O die Normalen der drei confocalen Flächen sind. Das Grundellipsoid um den Massenmittelpunkt als Mittelpunkt mit den Hauptträgheitsradien als Halbaxen, in den Richtungen der Hauptaxen des Schwerpunktes wird von Clebsch (Zur Theorie der Trägheitsmomente und der Drehung um einen Punkt, Crelle's Journ. B. 57, S. 73) das zweite Centralellipsoid genannt. Man erhält dasselbe, indem man auf jeder Axe des Massenmittelpunktes die Länge ihres Trägheitsradius aufträgt und in dessen Endpunkte eine Ebene normal zu ihm errichtet; die Enveloppe aller dieser Ebenen ist das zweite Centralellipsoid. Legt man nämlich im Punkte xyz an dasselbe die Tangentenebene, so ist $\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}=1$ deren Gleichung und erhält man für die Richtung des Perpendikels $\varkappa$ auf die Tangentenebene:

$$\cos\alpha=\frac{\varkappa x}{a^2},\quad \cos\beta=\frac{\varkappa y}{b^2},\quad \cos\gamma=\frac{\varkappa z}{c^2},$$

woraus folgt:

$$a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma=\varkappa^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=\varkappa^2$$

und dies ist genau der Ausdruck für den Trägheitsradius der Axe $(\alpha\beta\gamma)$, wie er §. 3. am Ende gefunden ward.

Die Grössen der Hauptträgheitsradien des Punktes O ergeben sich aus den Parametern λ, μ, ν der drei confocalen Flächen, nämlich da $r^2-\varrho^2=\lambda, \mu, \nu$ ist, so wird ϱ die drei Werthe haben:

$$\varrho_1=\sqrt{r^2+\lambda},\quad \varrho_2=\sqrt{r^2+\mu},\quad \varrho_3=\sqrt{r^2+\nu}.$$

Wir können daher jetzt den Satz aufstellen:

Um die Hauptaxen für irgend einen Punkt O des Raumes zu finden, wenn die Hauptaxen und Hauptträgheitsradien des Massenmittelpunktes gegeben sind, construire man das zweite Centralellipsoid dieses Punktes und die drei mit ihm confocalen Flächen zweiter Ordnung, welche durch den gegebenen Punkt gehen; die Normalen dieser drei Flächen in diesem Punkte sind die gesuchten Hauptaxen desselben und die Quadrate der Hauptträgheitsradien sind gleich den Summen, gebildet aus dem Quadrate des Abstandes des Punktes vom Massenmittelpunkte und den Parametern jener Flächen. Dieser Satz rührt von Binet her (*Journ. de l'école Polyteckn.* Cah. XVI. p. 41, 1811).

§. 13. Es sei $a>b>c$ und λ der Parameter des Ellipsoids, μ der des einfachen und ν der des doppelten Hyperboloids; dann ist

$$a^2 + \lambda > 0 \quad b^2 + \lambda > 0 \quad c^2 + \lambda > 0$$
$$a^2 + \mu > 0 \quad b^2 + \mu > 0 \quad c^2 + \mu > 0$$
$$a^2 + \nu > 0 \quad b^2 + \nu > 0 \quad c^2 + \nu > 0.$$

Hieraus folgt:

$$-\lambda < c^2 < -\mu < b^2 < -\lambda < a^2,$$

d. h. wegen $\varrho_1^2 = r^2 - \lambda$, $\varrho_2^2 = r^2 - \mu$, $\varrho_3^2 = r^2 - \nu$:

$$\varrho_1^2 < c^2 + r^2 < \varrho_2^2 < b^2 + r^2 < \varrho_3^2 < a^2 + r^2.$$

Der kleinste von den drei Hauptträgheitsradien eines Punktes gehört also der Richtung, welche die Normale des mit dem Centralellipsoid confocalen Ellipsoids ist, der mittlere der Normalen des einfachen und der grösste der Normalen des doppelten Hyperboloids an.

Aus der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 + r^2 - \varrho^2} + \frac{y^2}{b^2 + r^2 - \varrho^2} + \frac{z^2}{c^2 + r^2 - \varrho^2} = 1,$$

deren Wurzeln ϱ_1^2, ϱ_2^2, ϱ_3^2 sind, folgt, indem man den Coefficienten von ϱ^2 gleich der Summe der Wurzeln setzt mit geändertem Vorzeichen:

$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2 = 2\,r^2 + a^2 + b^2 + c^2.$$

Die Quadratsumme der Hauptträgheitsradien eines Punktes bleibt daher mit r, d. h. für alle Punkte auf einer um den Massenmittelpunkt beschriebenen Kugelfläche constant.

Es entsteht die Frage, ob es nicht Punkte x, y, z im Raume gebe, für welche zwei Hauptträgheitsradien, also auch zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich werden und folglich das Centralellipsoid ein Rotationsellipsoid wird. Da jeder Diameter des Centralellipsoids, welcher in die Ebene der gleichen Hauptträgheitsradien fällt, in diesem Falle als Hauptaxe angesehen werden kann, so müssen die Gleichungen, welche die Richtungen der Hauptaxen angeben, für solche Punkte unabhängig von α, β, γ erfüllt werden. Dies liefert aber die drei Fälle: $x = 0$ und $a^2 + r^2 - \varrho^2 = 0$, oder $y = 0$ und $b^2 + r^2 - \varrho^2 = 0$, oder $z = 0$ und $c^2 + r^2 - \varrho^2 = 0$. Die Curve, auf welcher der Punkt x, y, z in diesen Fällen liegt, ist demnach:

$$\left\{x = 0, \quad \frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} = 1\right\},$$

oder:

$$\left\{y = 0, \quad \frac{z^2}{c^2 - b^2} + \frac{x^2}{a^2 - b^2} = 1\right\},$$

oder:

$$\left\{z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1\right\}.$$

Von diesen Curven ist eine imaginär; für $a > b > c$ ist es die erste, in der yz-Ebene liegende; von den beiden anderen, welche in den beiden anderen Coordinatenebenen liegen, ist die eine eine Ellipse,

die andere eine Hyperbel. Sie sind identisch mit den Focalcurven des Centralellipsoids.

Man erkennt hieraus weiter, dass, wenn für einen Punkt x, y, z alle drei Hauptträgheitsmomente einander gleich werden und alle Axen Hauptaxen sind, also das Trägheitsellipsoid eine Kugel werden soll, er auf der Focalellipse und Focalhyperbel zugleich liegen muss. Die Ebenen dieser Curven schneiden sich in der grössten Axe des Centralellipsoids; sollen dieselben einen Punkt gemein haben, so muss die kleinste Axe gleich der mittleren werden. Für $a = b < c$ ist die Entfernung solcher Punkte vom Schwerpunkte $z = \pm \sqrt{c^2 - a^2}$. Man gelangt hierzu auch durch folgende Schlüsse.

Ist O ein solcher Kugelpunkt, so ziehe man SO und lege durch S und O Ebenen senkrecht zu SO. Da alle Axen h' in der durch O gehenden Ebene gleiche Trägheitsmomente besitzen, so können irgend zwei beliebige zu einander senkrechte derselben als Hauptaxen des Punktes O angesehen werden und da die drei Hauptaxen eines Punktes alle drei unter einander senkrecht sein müssen, so folgt, dass SO gleichfalls eine Hauptaxe für O sein muss. Vermöge der Gleichung

$$H' = H + M \cdot \overline{SO}^2$$

folgt aber weiter, dass auch alle Axen h in der durch S gehenden Parallelebene gleiche Trägheitsmomente H besitzen müssen. Der Punkt O muss daher nothwendig auf dem Perpendikel liegen, welches im Schwerpunkte auf einer der Kreisschnittsebenen des Centralellipsoids errichtet werden kann. Soll aber eine Hauptaxe eines Ellipsoids auf einer Ebene eines Kreisschnitts senkrecht stehen, so muss das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid sein. Daher ist die Ebene senkrecht zu SO durch S die Ebene der gleichen Hauptaxen des Rotationscentralellipsoids des Schwerpunktes und liegt O auf der dritten, ungleichen Axe. Der Abstand SO findet sich durch die Bemerkung, dass der gemeinschaftliche Werth H' aller Trägheitsmomente für O gleich dem dritten Hauptträgheitsmomente der Massenmittelpunktsaxe SO sein muss. Heisst dies C und sind $A = B$ die beiden anderen, so folgt $C = A + M \cdot \overline{SO}^2$ und hieraus

$$\overline{SO} = \pm \sqrt{\frac{C - A}{M}}.$$

Damit dieser Werth für SO reell sei, muss $C > A$ sein. Man erhält daher den Satz:

D a m i t P u n k t e e x i s t i r e n, f ü r w e l c h e d a s C e n t r a l e l l i p s o i d e i n e K u g e l w i r d, i s t e r f o r d e r l i c h, d a s s z w e i H a u p t t r ä g h e i t s m o m e n t e d e s M a s s e n m i t t e l p u n k t e s e i n a n d e r g l e i c h w e r d e n u n d i h r g e m e i n s a m e r W e r t h k l e i n e r a l s d a s d r i t t e H a u p t t r ä g h e i t s m o m e n t s e i (das Centralellipsoid ist ein abgeplattetes Rotationsellipsoid); i s t d i e s e B e d i n g u n g e r f ü l l t, s o g i b t e s a u f d e r A x e d e s d r i t t e n H a u p t m o m e n t e s z w e i d e r-

artige Punkte diesseits und jenseits vom Massenmittelpunkte in gleichem Abstande.

Beim Uebergange vom Massenmittelpunkte S zu einem anderen Punkte O ändern sich im Allgemeinen die Richtungen der Hauptaxen; jedoch bleiben sie sich parallel, wenn der Punkt O auf einer Schwerpunktshauptaxe selbst liegt. Denn eine solche Axe ist Hauptaxe aller mit dem Centralellipsoid confocaler Flächen. Uebrigens ergibt sich dieser Satz auch auf folgende Weise sehr einfach. Vor Allem sieht man nämlich ein, dass, wenn SO eine Hauptaxe für den Massenmittelpunkt ist, sie zugleich für alle ihre Punkte O Hauptaxe ist. Denn zwei von den Integralen $\int yz\,dm$, $\int zx\,dm$, $\int xy\,dm$ behalten bei dem Fortschreiten zum Punkte O constanten Werth und sind also fortwährend Null, wenn sie es für S waren. Da die Axe SO eine Hauptaxe für O ist, so liegen die beiden anderen Hauptaxen des Punktes O in einer zu SO senkrechten Ebene. Nun ziehe man die Hauptaxen in S und lasse zwei Parallellinien h und h' sich um S und O und zwar senkrecht zu SO drehen; die Trägheitsmomente in Bezug auf sie seien H, H' und besteht zwischen ihnen die Relation $H' = H + M \cdot SO^2$, d. h. die Differenz $H' - H$ derselben ist fortwährend constant. Erreicht daher während der Drehung H sein Maximum oder Minimum, so findet dies zugleich auch bei H' statt; hieraus folgt, dass die Axen der kleinsten und grössten Trägheitsmomente, d. h. die Hauptaxen parallel sind.

§. 14. Die Punkte, für welche ein Hauptträgheitsradius ϱ constant gleich $\varkappa$ ist, liegen auf der Fläche vierten Grades:

$$\frac{x^2}{a^2 - \varkappa^2 + x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{b^2 - \varkappa^2 + x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z^2}{c^2 - \varkappa^2 + x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

Indem man $\varkappa$ variiren lässt, erhält man die ganze Schaar derartiger Flächen, welche in gewissem Sinne confocal genannt werden können. Sie zerfällt in drei Partialschaaren; für die eine ist $\varkappa^2$ zwischen c^2 und b^2, für die andere zwischen b^2 und a^2, für die dritte zwischen a^2 und ∞ enthalten. Zu der letzteren Gattung gehört die Fresnel'sche Wellenfläche der doppelbrechenden Medien.

§. 15. Die Theorie der Deviationsmomente Σmxy, Σmyz, Σmzx ist in neuerer Zeit Gegenstand einer interessanten Schrift geworden von Hâton de la Goupillière: *Mémoire sur une théorie nouvelle de la géometrie des masses* (*Journ. de l'école polyt.* 37ième cah. p. 35). Auf einer neuen Grundlage mit Hülfe des „imaginären Bildes des Systems" behandelt die Theorie der Hauptaxen Hesse in seinen „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung" (25. und 26. Vorlesung).

XII. Capitel.

Aequivalenz und Reduction der Momentankräfte am unveränderlichen System.

§. 1. Die Momentankraft, welche einem Punkte von der Masse m die Geschwindigkeit v augenblicklich zu ertheilen vermag, hat die Intensität mv, fällt in die Richtung der Tangente der Bahn des Punktes und stimmt dem Sinne nach mit v überein. Im Folgenden werden wir die sämmtlichen Momentankräfte eines in Bewegung begriffenen unveränderlichen Systems, welche dessen Punkten zur Zeit t ihre Geschwindigkeiten zu ertheilen vermögen, auf ihre Resultante und ihr resultirendes Paar reduciren. Auf die Benennung der Grössen mv als Momentankräfte ist dabei kein Werth zu legen und kann die fragliche Reduction auch als eine Reduction der Geschwindigkeiten angesehen werden, wenn man einen Punkt von der Masse m als $m$fach im Sinne von Cap. I. §. 1. auffasst und sich denkt, dass jeder in dem Gesammtpunkte von der Masse m enthaltene Partialpunkt die Geschwindigkeit v besitzt, in Folge dessen die Geschwindigkeit v bei der Reduction am Reductionspunkte $m$fach in gleichem und entgegengesetztem Sinne anzutragen ist.

§. 2. Wir beginnen mit dem einfachsten Falle und nehmen an, das System besitze zur Zeit t eine Translationsgeschwindigkeit v. Die Momentankräfte mv, welche Richtung und Sinn gemein haben, liefern für irgend einen Reductionspunkt O eine Resultante

$$R = \Sigma mv = v\,\Sigma m = Mv$$

derselben Richtung und desselben Sinnes, wobei M die Gesammtmasse des Systems bezeichnet und ein Paar, dessen Axenmoment N senkrecht zu R ist und mit Hülfe des Polygons der Axenmomente aus den Axenmomenten mvp, $m'vp'$, $m''vp''$, ... hervorgeht, wo die Grössen p die Abstände der Momentankräfte mv, $m'v$, $m''v$, ... vom Punkte O darstellen. Nach Cap. V, §. 3. ist daher das Kräftesystem der Einzelresultanten $R = Mv$ äquivalent, welche längs der Centralaxe wirkt. Dasselbe besitzt einen Kräftemittelpunkt und dieser ist, da die Kräfte mv den Massen der Angriffspunkte proportional sind, der Mittelpunkt der Massen. Daher der Satz:

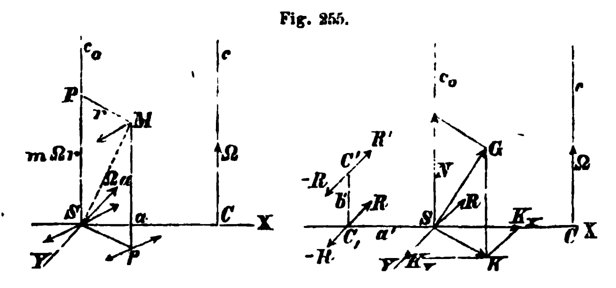
Die Momentankräfte eines unveränderlichen Systems, welches zur Zeit t eine Translationsgeschwindigkeit v besitzt, sind äquivalent einer Einzelresultanten $R = Mv$, gleich dem Produkte aus der Translationsgeschwindigkeit v und der Gesammtmasse M des Systems, deren Richtung durch den Massenmittelpunkt geht und welche mit der Translationsgeschwindigkeit parallel und gleichen Sinnes ist.

Diese Momentankraft R vermag einem Punkte von der Masse M die Geschwindigkeit v zu ertheilen; indem man zu diesem Punkte den Massenmittelpunkt wählt, folgt weiter:

Die Resultante R besitzt eine Intensität, vermöge welcher sie dem Massenmittelpunkte, wenn in ihm die Gesammtmasse des Systems vereinigt wäre, die Geschwindigkeit v zu ertheilen vermöchte.

§. 3. Das System besitze eine Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe c (Fig. 255.); wir ersetzen dieselbe durch die nämliche Winkelgeschwindigkeit um die zu c parallele Axe c_0 des Massenmittelpunktes S und die Translationsgeschwindigkeit Ωa, wo a den Abstand beider Axen bedeutet, welche beide zusammen jener äquivalent sind. Die Geschwindigkeit Ωa ist senkrecht zu der Ebene (cc_0) und

Fig. 255.



gleich der Geschwindigkeit, welche der Massenmittelpunkt in Folge der Winkelgeschwindigkeit um c besitzt. Die Momentankräfte, welche aus Ω um c entspringen, sind äquivalent den Momentankräften, welche Ω um c_0 und der Translationsgeschwindigkeit Ωa zusammen entsprechen. Die letzteren sind äquivalent (§. 2.) der Resultanten $R = M\Omega a$, welche durch den Massenmittelpunkt S hindurchgeht und mit der Translationsgeschwindigkeit Ωa nach Richtung und Sinn übereinstimmt. Vermöge der Winkelgeschwindigkeit Ω um c_0 besitzt ein Punkt M des Systems im Abstande $MP = r$ von der Axe c_0 die Geschwindigkeit Ωr senkrecht zur Ebene $(c_0 r)$ und wenn m seine Masse bezeichnet, so ist $m\Omega r$ die Momentankraft, welche ihm dieselbe zu ertheilen vermag. Indem wir alle solche Momentankräfte parallel mit ihrer Richtung in beiderlei Sinn durch den Punkt S hindurchlegen, erhalten wir für S als Reductionspunkt ein Aggregat von Kräften $m\Omega r$, deren Richtungen sämmtlich in eine durch S gehende, zu c_0 senkrechte Ebene fallen und ein Aggregat von Kräftepaaren $m\Omega r \cdot \overline{SM}$, deren Axenmomente den Ebenen $(c_0 r)$ parallel sind. Das erstere Aggregat liefert eine Resultante

$$R' = Res. (m\Omega r, m'\Omega r', \ldots),$$

welche, da sämmtliche Kräfte Ω proportional sind, dieser Grösse selbst proportional ist, sodass sie

$$R' = \Omega \cdot Res. (mr, m'r', \ldots)$$

wird. Ziehen wir durch S senkrecht zu c_0 irgend eine Gerade l und projiciren das Polygon, welches R' liefert, auf sie, so erhalten wir, wenn $\lambda, \lambda', \ldots$ die Winkel $(r\,l)$, $(r'\,l)$, ... bezeichnen, für die Projection von R' auf l die Summe $\Sigma m r \cos\lambda$, oder, wenn wir $r \cos\lambda = x$, $r' \cos\lambda' = x'$, ... setzen, $\Sigma m x$. Diese Grösse ist aber die Summe der Momente des Massensystems für eine durch S gehende, zu l senkrechte Ebene und als solche vermöge der Eigenschaften des Massenmittelpunktes für jede solche Ebene, also für jede Gerade l Null. Daher verschwindet R' und ist das Aggregat der Kräfte $m\Omega r$ an S im Gleichgewicht. Das Aggregat der Kräftepaare $m\Omega r \cdot \overline{SM}$ spalten wir aber zunächst in zwei andere. Indem wir durch die Projection p des Punktes M auf die zu c_0 senkrechte, durch S geführte Ebene gleichfalls zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $m\Omega r$ legen, erhalten wir an Stelle des Paares $m\Omega r \cdot \overline{SM}$ die beiden ihm äquivalenten Paare $m\Omega r^2$, dessen Axenmoment parallel c_0 und $m\Omega r \cdot \overline{Mp}$, dessen Axenmoment senkrecht zu c_0 ist. Die sämmtlichen Paare der ersten Art summiren sich und liefern ein Paar, dessen Axenmoment $N = \Omega \Sigma m r^2$ parallel c_0 und gleichen Sinnes mit Ω ist und die Form $N = \Omega M \varkappa_0^2$ annimmt, wenn man das Trägheitsmoment $\Sigma m r^2$ des Systems für die Axe c_0 als das Produkt der Gesammtmasse M und des Trägheitsradius $\varkappa_0$ für diese Axe darstellt. Die Paare der zweiten Art, deren Axenmomente den Ebenen $(c_0 r)$ parallel sind, liefern mit Hülfe eines ebenen Axenpolygons ein Paar, dessen Axenmoment K wir in zwei andere Axenmomente K_x und K_y auflösen, beide senkrecht zu c_0, von denen aber das erste der Ebene $(c c_0)$ parallel, das andere senkrecht zu ihr ist. Indem wir c_0 im Sinne von Ω als positive z-Axe, die Richtung SC des Abstandes a des Massenmittelpunktes von c als positive x-Axe und das Perpendikel SF auf die Ebene $(c c_0)$ als y-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z ansehen, wobei wir den positiven Drehungssinn der xy-Ebene mit dem Sinne von Ω übereinstimmend wählen, erhalten wir, da $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$ die Richtungscosinusse der Axe pS des Paares $m\Omega r \cdot \overline{Mp} = m\Omega r z$ gegen die Axen der x und y sind:

$$K_x = -\Omega \Sigma m x z, \qquad K_y = -\Omega \Sigma m y z$$

und mithin

$$K = \Omega \left[(\Sigma m x z)^2 + (\Sigma m y z)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

sowie für die Neigung ε von K gegen die x-Axe: $tg\,\varepsilon = \frac{\Sigma m y z}{\Sigma m x z}$.

Setzen wir grösserer Uebereinstimmung mit der Bezeichnung der Trägheitsmomente wegen:

$$\frac{\Sigma m x z}{M} = \lambda^2, \qquad \frac{\Sigma m y z}{M} = \mu^2,$$

oder also $\Sigma mxz = M\lambda^2$, $\Sigma myz = M\mu^2$, wobei aber λ^2 und μ^2 auch negativ, also λ, μ imaginär ausfallen können, je nachdem die Deviationsmomente Σmxz, Σmyz positiv oder negativ sind, so stellen sich K_x, K_y, K_z und $tg\,\varepsilon$ unter der Form dar:

$$K_x = -\Omega M\lambda^2, \quad K_y = -\Omega M\mu^2, \quad K = \Omega M\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad tg\,\varepsilon = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Wir erhalten daher schliesslich für das resultirende Paar G der Momentankräfte für die Reduction des Massenmittelpunktes und für die Richtung $(\alpha\beta\gamma)$ seines Axenmomentes:

$$G = \sqrt{N^2 + K_x^2 + K_y^2} = \Omega M\sqrt{\varkappa_0^2 + \lambda^2 + \mu^2},$$

$$\frac{\cos\alpha}{K_x} = \frac{\cos\beta}{K_y} = \frac{\cos\nu}{N} = \frac{1}{G}.$$

Die Resultante R und das Paar G sind demnach dem System der Momentankräfte äquivalent und wir erhalten den Satz:

Die Momentankräfte eines unveränderlichen Systems, welches eine Winkelgeschwindigkeit Ω um eine Momentanaxe c im Abstande a vom Massenmittelpunkte S besitzt, sind äquivalent einer Resultanten R, welche durch den Massenmittelpunkt hindurchgeht, in Verbindung mit einem resultirenden Paare, dessen Axenmoment G im Allgemeinen gegen die Momentanaxe geneigt ist. Die Resultante ist senkrecht zu der Ebene, welche den Massenmittelpunkt und die Momentanaxe enthält, sie besitzt eine Intensität $R = M\Omega a$, vermöge welcher sie diesem Punkte, wenn in ihm die Gesammtmasse des Systems vereinigt gedacht wird, die Geschwindigkeit Ωa zu ertheilen vermag, welche derselbe der Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe verdankt und stimmt in Richtung und Sinn mit dieser überein. Das Axenmoment G des resultirenden Paares ist der Winkelgeschwindigkeit Ω proportional, seine Componente $N = \Omega M\varkappa_0^2$, parallel der Momentanaxe, ist das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit und dem Trägheitsmomente des Systems für die zur Momentanaxe parallele Axe des Massenmittelpunktes; seine zur Momentanaxe senkrechte Componente K zerfällt in zwei andere, gleichfalls zu dieser Axe senkrechte Componenten, von denen die eine $K_x = -\Omega\Sigma mxz$ der Ebene des Massenmittelpunktes und der Momentanaxe parallel läuft, während die andere $K_y = -\Omega\Sigma myz$ zu ihr senkrecht ist. Die Componenten K_x, K_y sind die Produkte aus der negativ genommenen Winkelgeschwindigkeit und den Deviationsmomenten Σmxz, Σmyz des Systems für die beiden zu einander rechtwinkligen Ebenen des Massen-

mittelpunktes, deren Schnittlinie der Momentanaxe parallel läuft und von denen die erste durch die Momentanaxe hindurchgeht, wenn von den Axen der x, y, z, auf welche sich die Deviationsmomente beziehen, die x-Axe das Perpendikel, von S auf die Momentanaxe gefällt, die y-Axe senkrecht zu der die Momentanaxe enthaltenden Ebene, die Axe der z aber die Schnittlinie der beiden Ebenen ist und der Drehungssinn der xy-Ebene und der Sinn der z-Axe mit dem Sinne von Ω übereinstimmend genommen werden.

Als Specialfälle sind zu erwähnen:

1. Die Momentanaxe ist eine Hauptaxe irgend eines ihrer Punkte. Die Parallelverschiebung der z-Axe in die Momentanaxe gibt dann: $x = a + x'$, also $\Sigma mxz = a\Sigma mz + \Sigma mx'z = 0$ und $\Sigma myz = 0$, folglich $K_x = K_y = K_z = 0$, d. h.:

Die Momentankräfte eines Systems, welches eine Winkelgeschwindigkeit um irgend eine seiner Hauptaxen besitzt, sind äquivalent einer Resultanten $R = M\Omega a$, welche durch den Massenmittelpunkt geht und einem Paare, dessen Axenmoment $N = \Omega M \varkappa_0^2$ zur Momentanaxe parallel ist.

2. Die Momentanaxe geht durch den Massenmittelpunkt; dann ist $a = 0$, also $R = 0$, d. h.:

Die Momentankräfte eines Systems, welches um irgend eine Axe des Massenmittelpunktes eine Winkelgeschwindigkeit besitzt, sind äquivalent einem Paare G.

3. Ist die Momentanaxe einer Hauptaxe des Massenmittelpunktes parallel, so wird $K = 0$ und sind die Momentankräfte äquivalent einer Resultanten $R = M\Omega a$ und einem Paare, dessen Axenmoment $N = \Omega M \varkappa_0^2$ der Momentanaxe parallel läuft.

4. Ist die Momentanaxe eine Hauptaxe des Massenmittelpunktes, so ist $R = 0$ und $K = 0$ und sind die Momentankräfte einem Paare äquivalent, dessen Axenmoment der Momentanaxe parallel läuft.

§. 4. Wir suchen jetzt die Reduction der Momentankräfte, welche aus einer Winkelgeschwindigkeit entspringen, für die Centralaxe derselben. Das resultirende Axenmoment G_0 dieser Reduction ist nach Cap. V, §. 2. die Projection des Axenmomentes G irgend einer Reduction auf die Richtung der Resultanten R. Da die Resultante $R = M\Omega a$ der Momentankräfte senkrecht ist zur Ebene, welche durch S und die Momentanaxe c geht, so wird $G_0 = K_y = -\Omega M\mu^2$ und bestimmen die Componenten $N = \Omega M \varkappa_0^2$ und $K_x = -\Omega M\lambda^2$ blos die Lage der Centralaxe. Zunächst ergibt sich nämlich auf der Axe der x und zwar auf derjenigen Seite von S, auf welcher der Schnittpunkt C mit der M

mentanaxe nicht liegt, der Punkt C_1 so, dass zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte R eine Verlegung der Resultanten parallel mit sich von S um die Strecke $SC_1 = a'$ und ein Paar Ra' liefern, welches das Paar N tilgt. Aus der Bedingung hierfür, nämlich $Ra' = N$, folgt der Abstand $a' = \frac{\varkappa_0^2}{a}$ und ist derselbe blos von der Lage der Momentanaxe, nicht aber von der Winkelgeschwindigkeit abhängig. Sodann ergibt sich ebenso auf einer durch C_1 gehenden, zur Momentanaxe parallelen Geraden ein weiterer Punkt C' im Abstande $C_1C' = b'$ je nach der positiven oder negativen Beschaffenheit von K_x diesseits oder jenseits der Richtung SC, sodass zwei dortselbst eingeführte entgegengesetzte Kräfte R eine Verlegung der Resultanten nach C' und ein Paar Rb' liefern, welches K_x tilgt. Der Abstand b' genügt der Bedingung $Rb' = -\Omega M\lambda^2$ und wird daher $b' = -\frac{\lambda^2}{a}$, also gleichfalls von Ω unabhängig. Die Gerade durch C' senkrecht zur Ebene, welche den Massenmittelpunkt und die Momentanaxe enthält, ist demnach die Centralaxe der Momentankräfte und bilden $R = M\Omega a$ und $G_0 = -\Omega M\mu^2$ die Elemente der Kräftereduction für sie. Daher ergibt sich der Satz:

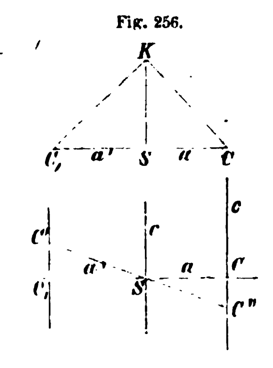
Die Centralaxe der Momentankräfte eines unveränderlichen Systems, welches eine Winkelgeschwindigkeit Ω um eine Momentanaxe c besitzt, ist rechtwinklig zur Ebene, welche durch diese Axe und den Massenmittelpunkt S geführt werden kann und trifft diese Ebene in einem Punkte, dessen Lage von der Lage der Momentanaxe, nicht aber von der Winkelgeschwindigkeit abhängt. Zieht man in dieser Ebene durch S zwei Gerade, die eine parallel, die andere senkrecht zu c, so fällt jener Punkt mit der Momentanaxe auf entgegengesetzte Seiten der ersteren dieser beiden Geraden und ist sein Abstand a' von ihr so beschaffen, dass er mit dem Abstande a der Momentanaxe von ihr ein Rechteck aa' gleich dem Quadrate $\varkappa_0^2$ des Trägheitsradius für die zur Momentanaxe parallele Gerade des Massenmittelpunktes bildet, in Bezug auf die zur Momentanaxe senkrechte Gerade liegt er diesseits oder jenseits, je nach der besonderen Art der Massenvertheilung des Systems.

Ist die Momentanaxe c eine Hauptaxe, so wird $K_y = K_x = 0$, also $G_0 = 0$, $b' = 0$, daher sind in diesem Falle die Momentankräfte einer Einzelkraft $R = M\Omega a$ äquivalent, welche in die zur Momentanaxe senkrechte Ebene des Massenmittelpunktes fällt und von diesem um die Strecke a' absteht, wofür $aa' = \varkappa_0^2$. Dasselbe findet statt, wenn c einer Hauptaxe des Massenmittelpunktes parallel ist.

Die Gleichung $aa' = \varkappa_0^2$ zeigt, dass die Punkte C, C_1 reciproke

Eigenschaften besitzen, sodass, wenn die Momentanaxe ohne Aenderung ihrer Richtung durch C_1 hindurchgelegt wird, die Centralaxe durch C gehen muss. Die Punkte C, C_1 bilden auf der Geraden SC zwei involutorische Punktreihen gleichartiger Lage und das rechtwinklige Dreieck CKC_1 (Fig. 256.), worin die Höhe $SK = x$, liefert zu C den Punkt C_1 und umgekehrt.

Fig. 256.



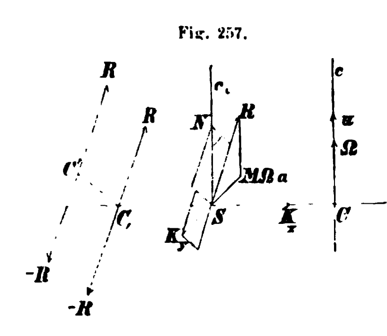
Sobald die Punkte C_1 und C ihre Rollen vertauschen, wenn also die Momentanaxe c durch C' geht, so wechselt das Paar Rb', welches K tilgt, seinen Sinn; es rückt mithin der Schnittpunkt C' der Centralaxe auf die entgegengesetzte Seite von SC und hat den Abstand $-\frac{\lambda^2}{a'}$ von dieser Geraden. Eine durch C' und S gelegte Gerade trifft nun die erste Lage der Momentanaxe in C'' so, dass $CC'' : C_1C' = a : a'$, also

$$CC'' = \frac{ab'}{a'} = -\frac{\lambda^2}{a'}$$

wird. Daher ist C'' der Punkt, durch welchen die Centralaxe hindurch geht, wenn die Momentanaxe durch C' gelegt wird. Wir werden später von dieser Reciprocität ausführlicher handeln.

§. 5. Das System besitze jetzt eine Schraubengeschwindigkeit (Ω, u) (Fig. 257.) um eine Momentanaxe c. Die von der Winkelgeschwindigkeit Ω herrührenden Momentankräfte reduciren wir für den Massenmittelpunkt S wie im vorigen §. und erhalten eine Momentankraft $R' = M\Omega a$, durch S gehend und senkrecht zur Ebene, welche S und c enthält und ein Paar G mit den Componenten N, K_x, K_y. Die von der Translationsgeschwindigkeit u veranlassten Momentankräfte mu, welche nach Richtung und Sinn mit u übereinstimmen, liefern nach §. 1. eine Momentankraft $R'' = Mu$ von derselben Richtung und demselben Sinne, welche gleichfalls durch S hindurch geht.

Fig. 257.



R' und R'' liefern daher die Resultante R der Momentankräfte $R = M\sqrt{\Omega^2 a^2 + u^2}$. Sie fällt in die zu SC senkrechte Ebene des Massenmittelpunktes und ist gegen die Axe c unter einem Winkel σ geneigt, wofür $tg\,\sigma = \frac{\Omega a}{u}$. Daher:

Die Momentankräfte eines unveränderlichen Systems, welches eine Schraubengeschwindigkeit (Ω, u) um eine Momentanaxe c im Abstande a vom Massenmittelpunkte besitzt, sind äquivalent einer durch den Massenmittelpunkt gehenden Resultanten R und einem resultirenden Paare G. Erstere hat die Richtung und den Sinn der Geschwindigkeit, welche dieser Punkt in Folge der Schraubengeschwindigkeit besitzt und eine Intensität, vermöge welcher sie diesem Punkte dieselbe Geschwindigkeit ertheilen könnte, wenn in ihm die Gesammtmasse des Systems vereinigt wäre. Das resultirende Paar befolgt dieselben Bildungsgesetze, wie wenn das System blos die Winkelgeschwindigkeit Ω ohne die Translationsgeschwindigkeit u besässe.

Behufs der Reduction für die Centralaxe spalten wir die Axenmomente N und K_y jedes in zwei Componenten, parallel und senkrecht zur Richtung der Resultanten R; die beiden ersteren Componenten $N \cos \sigma$ und $K_y \cos (\frac{1}{2}\pi + \sigma)$ bilden das resultirende Paar G_0 der Centralaxe, die beiden anderen $N \sin \sigma$ und $K_y \cos \sigma$ bilden ein Paar S, welches mit K_x zusammen die Lage der Centralaxe bestimmt. Man erhält hiernach:

$$G_0 = N \cos \sigma - K_y \sin \sigma = \frac{M\Omega}{\sqrt{\Omega^2 a^2 + u^2}} (\varkappa_0^2 u + \mu^2 \Omega a)$$

und

$$S = \frac{M\Omega}{\sqrt{\Omega^2 a^2 + u^2}} (\varkappa_0^2 \Omega a - \mu^2 u),$$

womit $K_x = - M\Omega\lambda^2$ zu verbinden ist. Zunächst findet man auf der Richtung SC wieder einen Punkt C_1 in solchem Abstande a' von S, dass zwei entgegengesetzte Kräfte R eine Verlegung von R dorthin und ein Paar Ra' liefern, welches S tilgt. Die Bedingung hierfür ist:

$$a' = \frac{S}{R} = \frac{\Omega}{\Omega^2 a^2 + u^2} (\varkappa_0^2 \Omega a - \mu^2 u).$$

Sodann findet man in der zu R senkrechten Ebene des Massenmittelpunktes leicht einen Punkt C' in solchem Abstande $C'C_1 = b'$ von SC, dass zwei entgegengesetzte Kräfte R eine Verlegung von R dorthin und ein Paar veranlassen, welches K_x tilgt. Hierzu ist erforderlich:

$$b' = \frac{K_x}{R} = - \frac{\Omega\lambda^2}{\sqrt{\Omega^2 a^2 + u^2}}.$$

Durch C' geht alsdann die Centralaxe. Daher der Satz:

Die Centralaxe der Momentankräfte eines unveränderlichen Systems, welches eine Schraubengeschwindigkeit (Ω, u) besitzt, ist parallel der Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes S und trifft die zu deren Richtung senkrechte Ebene dieses Punktes in einem Punkte C', dessen Abstände

a', b' von der durch die Richtung der Geschwindigkeit von S zur Momentanaxe parallel geführten Ebene und dem von S auf diese Axe gefällten Perpendikel durch die Formeln bestimmt werden:

$$a' = \frac{\Omega(\varkappa_0^2 \Omega a - \mu^2 u)}{\Omega^2 a^2 + u^2}, \quad b' = -\frac{\Omega \lambda^2}{\sqrt{\Omega^2 a^2 + u^2}},$$

während die Resultante R und das resultirende Axenmoment G_0 die Werthe haben:

$$R = M\sqrt{\Omega^2 a^2 + u^2}, \quad G_0 = \frac{M\Omega(\varkappa_0^2 u + \mu^2 \Omega a)}{\sqrt{\Omega^2 a^2 + u^2}},$$

wo a den Abstand der Momentanaxe von S, $-M\mu^2$, $-M\nu^2$ aber die Deviationsmomente K_x, K_y bedeuten.

§. 6. Als Specialfälle ergeben sich folgende:

1. Die Momentankräfte können sich nur dann auf ein Paar reduciren, wenn $u = 0$ und $a = 0$ ist, d. h. wenn das System blos Winkelgeschwindigkeit besitzt und die Momentanaxe durch den Massenmittelpunkt geht.

2. Sie sind einer Einzelkraft äquivalent in allen Fällen, in welchen $\Omega(\varkappa_0^2 u + \mu^2 \Omega a) = 0$ ist. Dies tritt ein a) wenn $\Omega = 0$, d. h. wenn das System blos Translationsgeschwindigkeit besitzt, b) wenn $u = 0$ und $\mu = 0$, d. h. wenn das System blos Winkelgeschwindigkeit besitzt und für die Momentanaxe $K_y = -\Omega \Sigma myz = 0$ ist; c) wenn überhaupt $G_0 = N \cos\sigma - K_y \sin\sigma = 0$, d. h. $tg\,\sigma = \frac{N}{K_y}$, also die Resultante von N und K_y senkrecht zu R ist. Da nämlich K_x in allen Fällen senkrecht zu R ist, so wird alsdann bei der Reduction für den Massenmittelpunkt G senkrecht zu R und liefert nur eine Verlegung von R in die Centralaxe ohne resultirendes Paar.

§. 7. Die Beziehungen zwischen den Richtungen der Momentanaxe und des resultirenden Axenmomentes, sowie auch zwischen der Grösse des letzteren und der Winkelgeschwindigkeit können in ausgezeichneter Weise mit Hülfe des Centralellipsoids Poinsot's dargestellt werden. Reduciren wir zu diesem Zwecke die Momentankräfte für den Massenmittelpunkt S und seien p, q, r die Componenten der Winkelgeschwindigkeit Ω, sowie G_x, G_y, G_z die des resultirenden Axenmomentes G parallel den Hauptaxen dieses Punktes. Nach §. 2. sind die Momentankräfte, welche durch die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r eingeführt werden, äquivalent $R = M\Omega a$ und den Paaren G_x, G_y, G_z und bestehen, wenn A, B, C die Trägheitsmomente für die drei Hauptaxen sind, die Gleichungen:

$$G_x = Ap, \quad G_y = Bq, \quad G_z = Cr.$$

Vermöge der Bedeutung des Centralellipsoids aber, dessen Halbaxen α, β, γ seien, ist

$$A = \frac{1}{\alpha^2}, \quad B = \frac{1}{\beta^2}, \quad C = \frac{1}{\gamma^2},$$

wodurch

$$G_x = \frac{p}{\alpha^2}, \quad G_y = \frac{q}{\beta^2}, \quad G_z = \frac{r}{\gamma^2}$$

wird. Bezeichnen ferner x, y, z die Coordinaten eines der beiden Punkte J, in welchem die zur Momentanaxe c parallele Axe c_0 des Punktes S das Centralellipsoid durchdringt, sowie l den Semidiameter SJ, so ist weiter:

$$\frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{r}{z} = \frac{\Omega}{l}.$$

Entnimmt man hieraus die Werthe von p, q, r, so ergeben sich mit ihrer Hülfe G_x, G_y, G_z unter der Form:

$$G_x = \frac{\Omega}{l} \cdot \frac{x}{\alpha^2}, \quad G_y = \frac{\Omega}{l} \cdot \frac{y}{\beta^2}, \quad G_z = \frac{\Omega}{l} \cdot \frac{z}{\gamma^2}.$$

Daher sind die Richtungscosinusse des Axenmomentes G gleich

$$\frac{\Omega}{Gl} \cdot \frac{x}{\alpha^2}, \quad \frac{\Omega}{Gl} \cdot \frac{y}{\beta^2}, \quad \frac{\Omega}{Gl} \cdot \frac{z}{\gamma^2}$$

und wird $G = \frac{\Omega}{l\delta}$, wenn $\frac{1}{\delta^2} = \frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} + \frac{z^2}{\gamma^4}$ gesetzt wird. Die Richtungscosinusse gehen daher mit Hülfe dieses Ausdrucks von G über in $\frac{\delta x}{\alpha^2}, \frac{\delta y}{\beta^2}, \frac{\delta z}{\gamma^2}$. Legt man nun im Punkte J die Tangentenebene an das Centralellipsoid, so schneidet sie auf den Hauptaxen drei Stücke

$$SA = \frac{\alpha^2}{x}, \quad SB = \frac{\beta^2}{y}, \quad SC = \frac{\gamma^2}{z}$$

ab (wie man sieht, wenn man durch J und die Hauptaxen ebene Schnitte legt und ihre Tangenten zieht). Die Normale h, von S auf die Tangentenebene gefällt, ist die gemeinsame Projection dieser Linien und sind $\frac{h}{SA}, \frac{h}{SB}, \frac{h}{SC}$ oder $\frac{hx}{\alpha^2}, \frac{hy}{\beta^2}, \frac{hz}{\gamma^2}$ deren Richtungscosinusse gegen die Hauptaxen. Setzt man ihre Quadratsumme gleich 1, so erhält man h gleich obigem δ und für ihre Richtungscosinusse die obigen Richtungscosinusse von G. Hieraus fliesst der Satz:

Das resultirende Axenmoment G der Reduction der Momentankräfte für den Massenmittelpunkt des Systems ist der Normalen des Centralellipsoids in dem Punkte J parallel, in welchem eine zur Momentanaxe parallele Axe des Massenmittelpunktes dasselbe durchdringt. Die Grösse des Axenmomentes selbst $G = \frac{\Omega}{l\delta}$ ist der Winkelgeschwindigkeit direct und dem Produkte des Semidiameters l des Centralellipsoids, welcher die Richtung der Momentanaxe hat

und dem Abstande δ der Tangentenebene in J vom Mittelpunkte S umgekehrt proportional.

Die Ebene des resultirenden Paares der Momentankräfte ist der Tangentenebene in J parallel, also ihre Richtung conjugirt zu l oder:

Die Ebene des resultirenden Paares der Momentankräfte hat die Richtung der Diametralebene des Centralellipsoids, welche zur Richtung der Momentanaxe conjugirt ist.

Auch das zweite Centralellipsoid von Clebsch steht mit den vorliegenden Untersuchungen in innigem Zusammenhange, so zwar, dass zwischen beiden Centralellipsoiden in dieser Hinsicht eine gewisse Reciprocität stattfindet. Man hat nämlich:

$$p = \frac{G_x}{A}, \quad q = \frac{G_y}{B}, \quad r = \frac{G_z}{C}$$

und wenn a, b, c die Halbaxen des zweiten Centralellipsoids sind:

$$A = Ma^2, \quad B = Mb^2, \quad C = Mc^2,$$

wodurch
$$p = \frac{G_x}{Ma^2}, \quad q = \frac{G_y}{Mb^2}, \quad r = \frac{G_z}{Mc^2}$$

werden. Bezeichnet man nun mit x, y, z die Coordinaten eines der beiden Punkte Γ, in welchem der zum resultirenden Axenmomente G parallele Semidiameter $S\Gamma = l'$ dies Centralellipsoid schneidet, so wird

$$\frac{G_x}{x} = \frac{G_y}{y} = \frac{G_z}{z} = \frac{G}{l'}$$

und hierdurch nehmen p, q, r die Form

$$p = \frac{G}{Ml'} \cdot \frac{x}{a^2}, \quad q = \frac{G}{Ml'} \cdot \frac{y}{b^2}, \quad r = \frac{G}{Ml'} \cdot \frac{z}{c^2}$$

an. Daher sind die Richtungscosinusse der Momentanaxe

$$\frac{G}{Ml'\Omega} \cdot \frac{x}{a^2}, \quad \frac{G}{Ml'\Omega} \cdot \frac{y}{b^2}, \quad \frac{G}{Ml'\Omega} \cdot \frac{z}{c^2}$$

und wird $\Omega = \frac{G}{Ml'\delta'}$, wenn

$$\frac{1}{\delta'^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$$

gesetzt wird. Die Richtungscosinusse gehen aber nach Einführung von δ' über in $\frac{\delta' x}{a^2}$, $\frac{\delta' y}{b^2}$, $\frac{\delta' z}{c^2}$ und sind die der Normalen des Ellipsoids im Punkte Γ, während δ' den Abstand des Punktes S von der Tangentenebene in Γ bedeutet. Man erhält daher ähnlich wie oben die Sätze:

Die Momentanaxe ist der Normalen des zweiten Centralellipsoids in dem Punkte Γ parallel, in welchem dasselbe von dem zum resultirenden Axenmomente parallelen Dia

meter getroffen wird. Die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \frac{G}{Ml'\delta'}$ ist diesem Axenmomente direct und dem Produkte des zu ihm parallelen Semidiameters l' und des Abstandes δ' der Tangentenebene in Γ vom Mittelpunkte S umgekehrt proportional. Die zur Momentanaxe senkrechte Ebene des Massenmittelpunktes ist conjugirte Diametralebene des zweiten Centralellipsoids zur Richtung des resultirenden Axenmomentes.

Die beiden Centralellipsoide haben die Richtungen der Hauptaxen gemein; die halben Längen derselben, α, β, γ für das erste, a, b, c für das zweite sind so beschaffen, dass

$$A = \frac{1}{\alpha^2} = Ma^2, \quad B = \frac{1}{\beta^2} = Mb^2, \quad C = \frac{1}{\gamma^2} = Mc^2,$$

also

$$\alpha a = \beta b = \gamma c = \sqrt{\frac{1}{M}}.$$

Auf jeder Axe des Massenmittelpunktes stellt der Semidiameter des ersten den reciproken Werth der Wurzel aus dem Trägheitsmomente für diese Axe dar, während die Tangentenebene des zweiten Ellipsoids, welche auf ihr senkrecht steht, auf ihr den Trägheitsradius für sie abschneidet.

§. 8. Es ist nun leicht, anzugeben, welchen Geschwindigkeitszustand ein gegebenes System von Momentankräften in einem unveränderlichen Punktsystem hervorruft. Derselbe ist eine Translationsgeschwindigkeit, eine Winkelgeschwindigkeit oder eine Schraubengeschwindigkeit und letzterer Fall enthält als der allgemeinste die beiden ersten in sich. Man reducire die Schraubengeschwindigkeit auf eine Translationsgeschwindigkeit u und eine Winkelgeschwindigkeit Ω um eine durch den Massenmittelpunkt gehende Axe. Dann müssen die Momentankraft Mu und das Paar, welche sie zu geben vermögen, der Momentankraft R und dem Paare G äquivalent sein, die man erhält, wenn man das gegebene System der Momentankräfte für den Massenmittelpunkt S reducirt. Besitzt daher das System nur Translationsgeschwindigkeit u, ist also $\Omega = 0$, so ist $G = 0$ und muss also auch das resultirende Paar der gegebenen Momentankräfte bei der Reduction für S verschwinden. Da das Paar für die Centralaxe absolut genommen das kleinste ist unter allen Reductionen, so muss $G_0 = 0$ sein und die Centralaxe durch S gehen.

Ein System von Momentankräften, welches sich auf eine durch den Massenmittelpunkt gehende Einzelkraft reducirt, kann also allein dem Punktsystem eine Translationsgeschwindigkeit ertheilen; sie wird erhalten, wenn man die

Intensität dieser Kraft durch die Masse des Systems dividirt und stimmt in Richtung und Sinn mit ihr überein.

Ist $u = 0$, also $R = 0$, hat also das System blos Winkelgeschwindigkeit um eine Momentanaxe, welche durch S geht, so müssen die gegebenen Momentankräfte sich auf ein Paar reduciren.

Ein Momentankräftepaar ertheilt daher dem System eine Winkelgeschwindigkeit um eine Axe des Massenmittelpunktes. Die Neigung dieser Momentanaxe ergibt sich nach §. 7.; ist das Axenmoment des Paares insbesondere parallel einer Hauptaxe des Punktes S, so fällt die Momentanaxe mit dieser Hauptaxe zusammen.

Hiernach erhält man zu dem Paare G der Momentankräfte, indem man es nach den Hauptaxen von S in G_x, G_y, G_z zerlegt, die Winkelgeschwindigkeiten

$$p = \frac{G_x}{A}, \quad q = \frac{G_y}{B}, \quad r = \frac{G_z}{C}$$

um diese Hauptaxen und aus ihnen

$$\Omega^2 = \frac{G_x^2}{A^2} + \frac{G_y^2}{B^2} + \frac{G_z^2}{C^2}$$

und für die Richtung $(\alpha\beta\gamma)$ der Momentanaxe

$$\frac{\cos\alpha}{p} = \frac{\cos\beta}{q} = \frac{\cos\gamma}{r} = \frac{1}{\Omega},$$

d. h.:

$$\frac{A\cos\alpha}{G_x} = \frac{B\cos\beta}{G_y} = \frac{C\cos\gamma}{G_z} = \frac{1}{\Omega}.$$

Ein System von Momentankräften, welches sich auf eine Einzelkraft reducirt, kann je nach Umständen eine blose Winkelgeschwindigkeit oder eine Schraubengeschwindigkeit erzeugen. Ebenso ein Kräftesystem, welches bei der Reduction auf seine Centralaxe sowohl eine Resultante als ein resultirendes Paar liefert. Um diese Frage zu erörtern, bedienen wir uns des Satzes §. 7. Es seien wieder R und G Resultante und Axenmoment der gegebenen Momentankräfte bei der Reduction für den Punkt S; R gibt eine Translationsgeschwindigkeit $u = \frac{R}{M}$ und G eine Winkelgeschwindigkeit Ω um eine durch S gehende Axe c_0. Damit beide einer blosen Winkelgeschwindigkeit äquivalent seien, muss u und folglich auch R zu c_0 senkrecht sein. Denn dann veranlasst u blos eine Verlegung der Axe c_0 in eine gewisse parallele Axe c und tritt zu Ω keine Translationsgeschwindigkeit parallel dieser Axe hinzu. Legen wir also durch S senkrecht zu R eine Ebene E, so enthält sie alle Richtungen, welche c_0 möglicherweise haben kann. Nun ist G normal zur Tangentenebene des Centralellipsoids Poinsot's in dem Punkte J, in welchen c_0 einschneidet. Daher kann G senkrecht

sein zu irgend einer Tangentenebene des dem Centralellipsoid umschriebenen Cylinders, welcher längs des Schnittes der Ebene E mit ihm dasselbe berührt. Die Richtungen von G erfüllen mithin eine zu den Erzeugungslinien dieses Cylinders senkrechte Ebene E'. Alle Kräftesysteme, für welche G in diese Ebene fällt, liefern blos eine Winkelgeschwindigkeit, alle anderen eine Schraubengeschwindigkeit. Fällt G in eine Hauptebene des Centralellipsoids, so fällt die Ebene E mit ihr zusammen und liegt c_0 in derselben Hauptebene; fällt G mit einer Hauptaxe von S zusammen, so ist diese zugleich die Axe c_0. Ganz ähnlich kann auch das zweite Centralellipsoid zur Entscheidung derartiger Fragen verwandt werden.

§. 9. Wir wollen jetzt die Reduction der Momentankräfte für den Massenmittelpunkt S analytisch einkleiden. In Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Ursprung S ist, sei $O\,(x_0 y_0 z_0)$ irgend ein Punkt der Momentanaxe c; die Winkelgeschwindigkeit Ω um sie zerlegen wir in drei Componenten Ω_x, Ω_y, Ω_z um drei zu den Axen der x, y, z parallele, sich in O schneidende Axen; ebenso zerfällen wir die Translationsgeschwindigkeit u des Systems in die drei Componenten u_x, u_y, u_z. Die Translationsgeschwindigkeit veranlasst die Momentankraft Mu, welche durch S hindurchgeht und die drei Componenten Mu_x, Mu_y, Mu_z hat. Um die x-Axe ertheilen wir dem System ferner zwei entgegengesetzt gleiche Winkelgeschwindigkeiten Ω_x, d. h. wir substituiren für Ω_x um die durch O gehende Axe ein Ω_x um die x-Axe und das Rotationspaar $(\Omega_x, -\Omega_x)$, welches einer Translationsgeschwindigkeit senkrecht zu seiner Ebene äquivalent ist. Indem wir Aehnliches in Bezug auf Ω_y, Ω_z ausführen, erhalten wir die Componenten Ω_x, Ω_y, Ω_z um die Coordinatenaxen und drei Rotationspaare $(\Omega_x, -\Omega_x)$, $(\Omega_y, -\Omega_y)$, $(\Omega_z, -\Omega_z)$. Diese Paare liefern uns nach der Methode von Thl. II, Cap. III, §. 6. die drei Translationsgeschwindigkeiten

$$y_0\Omega_z - z_0\Omega_y, \quad z_0\Omega_x - x_0\Omega_z, \quad x_0\Omega_y - y_0\Omega_x$$

parallel den Axen der x, y, z, welche die Momentankräfte

$$M(y_0\Omega_z - z_0\Omega_y), \quad M(z_0\Omega_x - x_0\Omega_z), \quad M(x_0\Omega_y - y_0\Omega_x)$$

herbeiführen. Sie bilden mit den obigen Componenten Mu_x, Mu_y, Mu_z die Resultante R der Reduction für den Punkt S und wenn wir setzen:

$$X = M[u_x + (y_0\Omega_z - z_0\Omega_y)],$$
$$Y = M[u_y + (z_0\Omega_x - x_0\Omega_z)],$$
$$Z = M[u_z + (x_0\Omega_y - y_0\Omega_x)],$$

so wird sie und ihre Richtung (a, b, c) bestimmt durch die Gleichungen:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad \frac{\cos a}{X} = \frac{\cos b}{Y} = \frac{\cos c}{Z} = \frac{1}{R}.$$

Die Resultante R bildet sich ersichtlich aus den beiden Bestandtheilen Mu und $M\Omega d$, wenn d den Abstand der Momentanaxe c vom Massen-

mittelpunkte bezeichnet. Ersterer besitzt das System vermöge der Translationscomponente u der Schraubengeschwindigkeit (Ω, u), letzterer wird durch die beabsichtigte Uebertragung der Winkelgeschwindigkeit Ω auf eine zu c parallele Axe c_0 von S eingeführt.

Die Winkelgeschwindigkeit Ω um c_0 oder ihre Componenten Ω_x, Ω_y, Ω_z um die Axen der x, y, z ertheilen nun nach Thl. II, Cap. IV §. 8. einem Systempunkte $(x\,y\,z)$ die Geschwindigkeitscomponenten

$$v_x = \Omega_y z - \Omega_z y, \quad v_y = \Omega_z x - \Omega_x z, \quad v_z = \Omega_x y - \Omega_y x,$$

welchen die Componenten der Momentankraft $m v_x$, $m v_y$, $m v_z$ entsprechen. Man gelangt zu denselben auch sehr einfach, indem man durch den Systempunkt parallel der auf der Momentanaxe S aufzutragenden, die Winkelgeschwindigkeit darstellenden Strecke Ω die entgegengesetzt gleiche Strecke $-\Omega$ zieht; sie bildet mit jener ein Rotationspaar $(\Omega, -\Omega)$, dessen Axenmoment Ωr, wenn r den Abstand des Systempunktes von c_0, die Geschwindigkeit v dieses Punktes nach Richtung, Sinn und Grösse darstellt. Die Componenten dieses Axenmomentes, parallel den Coordinatenaxen, sind aber die obigen Ausdrücke für v_x, v_y, v_z. Die Reduction der Momentankräfte $m v_x$, $m v_y$, $m v_z$ liefert nun zunächst eine Einzelkraft, deren Componenten

$$\begin{aligned} \Sigma m v_x &= \Sigma m (\Omega_y z - \Omega_z y) = \Omega_y \Sigma m z - \Omega_z \Sigma m y, \\ \Sigma m v_y &= \Omega_z \Sigma m x - \Omega_x \Sigma m z, \\ \Sigma m v_z &= \Omega_x \Sigma m y - \Omega_y \Sigma m x \end{aligned}$$

aber vermöge der Eigenschaften $\Sigma m x = \Sigma m y = \Sigma m z = 0$ des Massenmittelpunktes verschwinden, sowie die Paare:

$$\begin{aligned} G_x &= \Sigma m (y v_z - z v_y) = \Sigma m [y (\Omega_x y - \Omega_y x) - z (\Omega_z x - \Omega_x z)] \\ &= \quad \Omega_x \Sigma m (y^2 + z^2) - \Omega_y \Sigma m x y - \Omega_z \Sigma m x z, \\ G_y &= \Sigma m (z v_x - x v_z) = \Sigma m [z (\Omega_y z - \Omega_z y) - x (\Omega_x y - \Omega_y x)] \\ &= - \Omega_x \Sigma m x y + \Omega_y \Sigma m (z^2 + x^2) - \Omega_z \Sigma m y z, \\ G_z &= \Sigma m (x v_y - y v_x) = \Sigma m [x (\Omega_z x - \Omega_x z) - y (\Omega_y z - \Omega_z y)] \\ &= - \Omega_x \Sigma m x z - \Omega_y \Sigma m y z + \Omega_z \Sigma m (x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit Rücksicht auf Cap. XI, §. 2. die Trägheitsmomente und Deviationsmomente des Systems für die Coordinatenaxen so, dass man setzt

$$\begin{aligned} \Sigma m (y^2 + z^2) &= a_{11} \qquad & \Sigma m x y &= a_{12} \\ \Sigma m (z^2 + x^2) &= a_{22} \qquad & \Sigma m y z &= a_{23} \\ \Sigma m (x^2 + y^2) &= a_{33} \qquad & \Sigma m z x &= a_{31}, \end{aligned}$$

so nehmen diese Paare die Gestalt an:

$$\begin{aligned} G_x &= \quad a_{11} \Omega_x - a_{12} \Omega_y - a_{13} \Omega_z \\ G_y &= - a_{21} \Omega_x + a_{22} \Omega_y - a_{23} \Omega_z \\ G_z &= - a_{31} \Omega_x - a_{32} \Omega_y + a_{33} \Omega_z. \end{aligned}$$

Ihr resultirendes Paar G und seine Richtung $(\alpha \beta \gamma)$ sind daher durch die Gleichungen bestimmt:

$$G^2 = G_x^2 + G_y^2 + G_z^2, \qquad \frac{\cos\lambda}{G_x} = \frac{\cos\mu}{G_y} = \frac{\cos\nu}{G_z} = \frac{1}{G}.$$

Würde die Reduction der Momentankräfte für einen anderen Punkt als S verlangt, so änderte sich in den vorstehenden Betrachtungen nichts, als dass die Grössen $\Sigma m v_x$, $\Sigma m v_y$, $\Sigma m v_z$ nicht verschwinden, sondern in den Componenten X, Y, Z als weitere Glieder zu den übrigen hinzutreten.

§. 10. Die Summe $2T = \Sigma m v^2$ der lebendigen Kräfte mv^2 der Systempunkte heisst die lebendige Kraft des Systems. Wir wollen diese Grösse bilden und ihre Beziehungen zu der Reduction der Momentankräfte aufsuchen. Ist r der Abstand des Systempunktes von der Momentanaxe c, so wird das Quadrat seiner Geschwindigkeit

$$v^2 = u^2 + \Omega^2 r^2$$

und mithin die lebendige Kraft

$$2T = \Sigma m(u^2 + \Omega^2 r^2) = Mu^2 + \Omega^2 \Sigma m r^2,$$

oder wenn wir das Trägheitsmoment um die Axe c durch

$$M\varkappa^2 = Md^2 + M\varkappa_0^2$$

ausdrücken, wo $\varkappa$, $\varkappa_0$ die Trägheitsradien für die Axen c, c_0 und d den Abstand der Axen bezeichnen:

$$2T = M(u^2 + \Omega^2 d^2) + \Omega^2 M \varkappa_0^2.$$

In diesem Ausdrucke stellt $u^2 + \Omega^2 d^2$ das Quadrat der Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes S dar und ist daher $M(u^2 + \Omega^2 d^2)$ die lebendige Kraft, welche dieser Punkt besitzen würde, wenn in ihm die ganze Masse des Systems vereinigt wäre. Bezeichnen wir sie mit $2T_0$, $\Omega^2 M\varkappa_0^2$ aber mit $2T_1$, sodass $T = T_0 + T_1$ wird, so erhalten wir den Satz:

Die lebendige Kraft $2T$ eines in Bewegung begriffenen unveränderlichen Systems zerfällt in zwei Theile, $2T_0$ und $2T_1$, von denen der erste $2T_0 = M(u^2 + \Omega^2 d^2)$ die lebendige Kraft des Massenmittelpunktes darstellt, wenn in ihm die Gesammtmasse vereinigt gedacht wird, während der andere Theil $2T_1 = \Omega^2 M\varkappa_0^2$ die lebendige Kraft ist, welche das System besitzen würde, wenn es die Winkelgeschwindigkeit Ω nicht um die Momentanaxe, sondern um eine zu ihr parallele Axe des Massenmittelpunktes besässe.

Mit dem Bestandtheile $2T_1$ hängen die Componenten G_x, G_y, G_z des resultirenden Paares der Momentankräfte sehr einfach zusammen. Nach Cap. XI, §. 2. ist nämlich das Trägheitsmoment für die Axe c von der Richtung $(\alpha\beta\gamma)$:

$$M\varkappa_0^2 = a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\cos^2\beta + a_{33}\cos^2\gamma$$
$$- 2a_{12}\cos\alpha\cos\beta - 2a_{23}\cos\beta\cos\gamma - 2a_{31}\cos\gamma\cos\alpha.$$

Mit Hülfe von $\Omega_x = \Omega\cos\alpha$, $\Omega_y = \Omega\cos\beta$, $\Omega_z = \Omega\cos\gamma$ erhält man hiermit:

$$2\,T_1 = \Omega^2 M\varkappa_0^2 = a_{11}\Omega_x^2 + a_{22}\Omega_y^2 + a_{33}\Omega_z^2 - 2\,a_{12}\Omega_x\Omega_y - 2\,a_{23}\Omega_y\Omega_z - 2\,a_{31}\Omega_z\Omega_x.$$

Differentiiren wir diese Gleichung nach Ω_x, Ω_y, Ω_z, so folgt:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \Omega_x} = \quad a_{11}\Omega_x - a_{12}\Omega_y - a_{13}\Omega_z = G_x$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \Omega_y} = - a_{21}\Omega_x + a_{22}\Omega_y - a_{23}\Omega_z = G_y$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \Omega_z} = - a_{31}\Omega_x - a_{32}\Omega_y + a_{33}\Omega_z = G_z,$$

d. h. **die partiellen Differentialquotienten der Hälfte des zweiten Bestandtheils der lebendigen Kraft, welcher der Winkelgeschwindigkeit um die Axe des Massenmittelpunktes entspricht, sind die Componenten des resultirenden Paares der Momentankräfte.**

Die Grösse T_1 ist eine homogene Function von Ω_x, Ω_y, Ω_z daher ist

$$\Omega^2 M\varkappa_0^2 = 2\,T_1 = (a_{11}\Omega_x - a_{12}\Omega_y - a_{13}\Omega_z)\,\Omega_x + (- a_{21}\Omega_x + a_{22}\Omega_y - a_{23}\Omega_z)\,\Omega_y + (- a_{31}\Omega_x - a_{32}\Omega_y + a_{33}\Omega_z)\,\Omega_z$$

$$= \frac{\partial T_1}{\partial \Omega_x}\cdot\Omega_x + \frac{\partial T_1}{\partial \Omega_y}\cdot\Omega_y + \frac{\partial T_1}{\partial \Omega_z}\cdot\Omega_z = G_x\Omega_x + G_y\Omega_y + G_z\Omega_z$$

und wenn man einmal für Ω_x, Ω_y, Ω_z die gleichbedeutenden Ausdrücke $\Omega\cos\alpha$, $\Omega\cos\beta$, $\Omega\cos\gamma$, das anderemal für G_x, G_y, G_z die Werthe $G\cos\lambda$, $G\cos\mu$, $G\cos\nu$ setzt, so wird

$$\Omega^2 M\varkappa_0^2 = 2\,T_1 = \Omega\,(G_x\cos\alpha + G_y\cos\beta + G_z\cos\gamma) = G\,(\Omega_x\cos\lambda + \Omega_y\cos\mu + \Omega_z\cos\nu),$$

d. h. **die Componente $G_x\cos\alpha + G_y\cos\beta + G_z\cos\gamma$ des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte parallel der Momentanaxe ist das Produkt $\Omega M\varkappa_0^2$ der Winkelgeschwindigkeit und des Trägheitsmomentes für die der Momentanaxe parallele Axe des Massenmittelpunktes. Die Componente der Winkelgeschwindigkeit um die Axe des resultirenden Paares ist $\frac{\Omega^2}{G}M\varkappa_0^2$.**

Nach Cap. XI, §. 3. ist, wenn ϱ den Semidiameter des Centralellipsoids darstellt, welcher die Richtung der Momentanaxe hat, $\varrho^2\cdot M\varkappa_0^2 = 1$ daher wird

$$2\,T_1 = \frac{\Omega^2}{\varrho^2} \quad \text{oder} \quad \Omega = \varrho\sqrt{2\,T_1},$$

d. h. **die Winkelgeschwindigkeit ist proportional dem Diameter des Centralellipsoids von ihrer Richtung und der Quadratwurzel aus der lebendigen Kraft, welche der Winkelgeschwindigkeit um diesen Diameter entspricht.**

Den Satz des §. 7., dass das resultirende Axenmoment die Richtung der Normalen des Centralellipsoids im Punkte J hat, in welchem es von der Axe c_0 durchbohrt wird, beweist man leicht analytisch so. Die Gleichung des Centralellipsoids ist

$$U \equiv a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 - 2\, a_{12}\, xy - 2\, a_{23}\, yz - 2\, a_{31}\, zx = 0$$

und sind die Richtungscosinusse der Normalen im Punkte $(x y z)$ proportional den Grössen

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} = a_{11} x - a_{12} y - a_{13} z = (a_{11} \cos \alpha - a_{12} \cos \beta - a_{13} \cos \gamma)\, \varrho$$

$$= (a_{11} \Omega_x - a_{12} \Omega_y - a_{13} \Omega_z) \frac{\varrho}{\Omega} = \frac{G_x \varrho}{\Omega}$$

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{G_y \varrho}{\Omega}, \quad \tfrac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{G_z \varrho}{\Omega},$$

woraus die Behauptung folgt.

Der Cosinus der Neigung ψ der Momentanaxe gegen das Axenmoment G ist

$$\cos \psi = \frac{G_x \Omega_x + G_y \Omega_y + G_z \Omega_z}{G \Omega},$$

woraus

$$G \Omega \cos \psi = G_x \Omega_x + G_y \Omega_y + G_z \Omega_z = 2\, T_1,$$

d. h. das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit und der Projection des resultirenden Axenmomentes auf deren Axe ist gleich der lebendigen Kraft, welche der Winkelgeschwindigkeit entspricht.

§. 11. Wählt man die Hauptaxen des Massenmittelpunktes zu Coordinatenaxen, so werden $a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0$ und vereinfachen sich die Gleichungen wesentlich. Setzt man, wie üblich, hierfür

$$\Omega_x = p, \quad \Omega_y = q, \quad \Omega_z = r, \quad a_{11} = A, \quad a_{22} = B, \quad a_{33} = C,$$

so wird

$$G_x = Ap, \quad G_y = Bq, \quad G_z = Cr, \qquad G^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2$$

$$2\, T_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

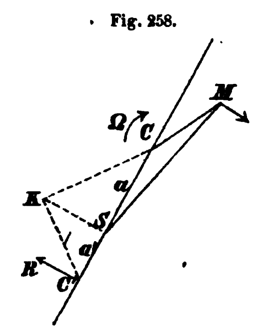
Die in den vorstehenden §§. entwickelten Theorien sind so wichtig, dass wir sie in einigen Einzelfällen weiter verfolgen und Beispiele und Anwendungen dazu geben müssen.

§. 12. **Reduction der Momentankräfte eines ebenen Systems.**

1. Die Winkelgeschwindigkeit Ω um das Momentancentrum C (oder die zur Ebene senkrechte Momentanaxe c) (Fig. 258.) ist äquivalent derselben Winkelgeschwindigkeit Ω um den Massenmittelpunkt S in Verbindung mit der Translationsgeschwindigkeit $u = \Omega a$, wenn $SC = a$ gesetzt wird, welche die Geschwindigkeit des Punktes S ist, die derselbe vermöge der Winkelgeschwindigkeit um C besitzt. Die parallelen Momentankräfte mu der Systempunkte liefern eine durch S gehende Resultante $R = Mu = M \Omega a$ gleichen Sinnes mit u; die Momentankräfte $m \Omega r$, wo die Entfernung SM des Punktes S vom beliebigen Systempunkte M mit r bezeichnet ist, geben bei der Reduction für den Punkt S eine Resultante,

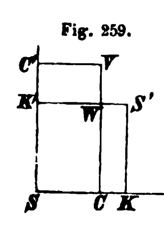
welche aber vermöge der Eigenschaften des Massenmittelpunktes verschwindet und ein resultirendes Paar, dessen Axenmoment $N = \Sigma m \Omega r^2 = \Omega \Sigma m r^2 = M \varkappa_0^2$ zur Ebene senkrecht ist, wobei $\varkappa$ den Trägheitsradius des Systems für die zur Ebene senkrechte Axe des Punktes S bedeutet. — Fällt das Momentancentrum C in den Massenmittelpunkt S, so wird $a = 0$, verschwindet R und sind mithin die Momentankräfte dem Paare $N = \Omega M \varkappa^2$ äquivalent. In allen anderen Fällen sind dieselben wegen der Rechtwinkligkeit von R und N einer Einzelkraft R äquivalent, welche längs der Centralaxe wirkt. Diese Axe ergibt sich, indem man auf der Geraden SC, welche den Massenmittelpunkt mit dem Momentancentrum verbindet, einen Punkt C' so bestimmt, dass zwei durch ihn hindurchgeführte entgegengesetzt gleiche Kräfte R eine Verlegung von R dorthin und ein Kräftepaar $R \cdot \overline{SC'} = Ra'$ herbeiführen, welches das Paar N tilgt. Der Sinn von N stimmt mit dem Sinne von Ω überein, daher muss C' auf die Seite von S fallen, auf welcher C nicht liegt. Die Gleichungen $Ra' = N$, $R = M\Omega a$, $N = \Omega M \varkappa^2$ führen zu der Relation $aa' = \varkappa_0^2$, welche die Lage von C' bestimmt, durch welchen Punkt die Centralaxe senkrecht zu $C'C$ hindurchgeht. Errichtet man daher $SK = \varkappa_0$ senkrecht zu SC und zieht KC' senkrecht zu CK, so bestimmt KC' den Punkt C'. Ist umgekehrt C' bekannt, so liefert KC, senkrecht zu $C'K$ gezogen, das Momentancentrum C.

Fig. 258.



2. Vermöge der Construction mit Hülfe des rechtwinkligen Dreiecks CKC' sind die Punkte C, C' reciprok, sodass, wenn C' Momentancentrum wird, die Centralaxe durch C geht. Lässt man daher das Momentancentrum auf einer durch S gehenden Geraden alle möglichen Lagen annehmen, so erhält man zu der so gebildeten Reihe der Punkte C eine Reihe homologer Punkte C' und in beiden Punktreihen entsprechen sich je zwei homologe Punkte doppelt, sodass, wenn ein Punkt der einen Reihe nach C rückt, der der anderen in den Punkt C' eintritt und umgekehrt, wenn er nach C' kommt, jener nach C rückt. Die Punktreihen verlaufen in gleichem Sinne, dem unendlich fernen Punkte entspricht S und nirgends können homologe Punkte zusammentreffen. Der Abstand CC' homologer Punkte kann jede beliebige Grösse erreichen, aber unter ein gewisses Minimum nicht heruntergehen. Der Werth desselben ist $CC' = 2\varkappa_0$. Die Aufgabe nämlich, die Punkte C, C' so zu finden, dass $C'S + SC$ ein Minimum werde und $C'S$, SC die Bedingung $C'S \cdot SC = \varkappa_0^2$ erfüllen, ist identisch mit der Aufgabe, unter allen Rechtecken von constantem Inhalte $\varkappa_0^2$ dasjenige zu bestimmen, dessen Umfang $2(C'S + SC)$ ein Minimum werde (Fig. 259.). Dieser Aufgabe genügt bloss das Quadrat $SKS'K'$, dessen Seite $SK = \varkappa_0$; denn soll das Rechteck $SCVC'$ ihm an Fläche gleich sein, so müssen die Rechtecke $CKS'W$ und $K'WVC'$ gleich sein und da die Seite KS' des einen gleich $\varkappa$, während die eine $K'W$ des anderen kleiner als $\varkappa$ ist, so muss $CK < K'C'$ sein. Daher ist

Fig. 259.

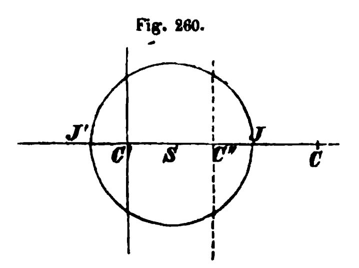


$$C'S + SC = \varkappa_0 + K'C' + \varkappa_0 - CK = 2\varkappa_0 + (K'C' - CK) > 2\varkappa_0,$$

während der halbe Umfang des Quadrates gleich $2\varkappa$ ist. Die Punkte, deren Abstand ein Minimum ist, seien J, J' (Fig. 260.) und C, C' irgend ein anderes Paar homologer Punkte. Indem man in die Gleichung $C'S \cdot SC = \varkappa_0^2$, für $C'S$, SC die gleichbedeutenden Grössen $\varkappa_0 - J'C'$ und $\varkappa_0 + JC$ einführt, gelangt man zu der Relation $\frac{JC}{CJ'} \cdot \frac{JC'}{C'J} = -1$, in welcher die Stellung der Buchstaben den Sinn der Linien

angeben. Dieselbe drückt so gut, wie die ursprüngliche die beiden Punktreihen aus. Construirt man zu C' den in Bezug auf S symmetrisch gelegenen Punkt C'', so gilt die Relation $SC \cdot SC'' = \varkappa_0^2$, welche in $\frac{JC}{CJ'} : \frac{JC''}{C''J'} = -1$ übergeführt werden kann. Die Punkte J, J'; C, C'' sind harmonische Punkte; analog hiermit hat man Punktgruppen, wie J, J'; C, C', harmonicale genannt. Beide Arten von Punktreihen heissen **involutorische Punktreihen**; die Reihen (C, C') bilden eine gleichliegende Involution, weil, wenn C sich bewegt, C' ihm in demselben Sinne folgt; die Reihen (C, C'') bilden eine entgegengesetzte Involution, weil sie im entgegengesetzten Sinne verlaufen. Die letzteren Reihen haben J, J' zu Doppelpunkten, d. h. Punkte, in welchen homologe Punkte zusammentreffen. In Bezug auf den Kreis um S mit dem Radius $\varkappa_0$ sind C, C'' conjugirte Pole und ist die zur Centralaxe symmetrisch gegen S gelegene, durch C'' gehende Axe die Polare von C. Die sämmtlichen Pole und Polaren der Ebene bilden zwei in einer Ebene vereinigte reciproke Systeme, d. h. zwei Systeme der Art, dass jedem Punkte des einen eine Gerade des anderen entspricht und allen Punkten einer Geraden homolog sind, welche durch einen Punkt gehen, nämlich durch den Punkt, welcher jener Geraden homolog ist. Für Pole und Polaren eines Kreises oder überhaupt eines Kegelschnittes ist diese Curve der Ort aller Pole, welche in ihren Polaren liegen. Die sämmtlichen Momentancentra und die zugehörigen Centralaxen bilden ebenfalls zwei in einer Ebene vereinigte reciproke Systeme. Man sieht leicht, dass allen Momentancentris C, welche in einer Geraden g liegen, Centralaxen entsprechen, welche durch einen Punkt gehen, nämlich durch den zum Pole G'' von g in Bezug auf S symmetrischen Punkt G'. Der Kreis hat aber für diese reciproken Systeme nur eine ideelle Bedeutung. Daher:

Fig. 260.



Die dem Momentancentrum entsprechende Centralaxe fällt in die Ebene des Systems, ist der Polaren desselben in Bezug auf den mit dem Trägheitsradius $\varkappa_0$ um den Massenmittelpunkt S beschriebenen Kreis parallel und liegt mit ihr symmetrisch gegen S. Sämmtliche Momentancentra und Centralaxen der Ebene bilden zwei in der Ebene vereinigte reciproke Systeme, der Art jedoch, dass nie eine Centralaxe durch ihr Momentancentrum hindurchgeht. Das System der Centralaxen ist dem System der Polaren der Momentancentra symmetrisch gleich und symmetrisch liegend in Bezug auf S.

3. Die Trägheitsradien $\varkappa$ und $\varkappa'$ für das Momentancentrum C (die Momentanaxe) und den Punkt C', durch welchen die Centralaxe geht, sind durch die Gleichungen $\varkappa^2 = \varkappa_0^2 + a^2$, $\varkappa'^2 = \varkappa_0^2 + a'^2$ bestimmt. Setzt man $C'C = a + a' = l$, so geht mit Hülfe hiervon die Gleichung $aa' = \varkappa_0^2$ nach Elimination von a' oder a über in $al = \varkappa^2$, $a'l = \varkappa'^2$. Ein Kreis um C, mit $\varkappa$ beschrieben, liefert daher auf CC' zwei Schnittpunkte, welche durch S und C harmonisch getrennt sind. Aehnliches gilt von einem Kreise um C' mit $\varkappa'$ als Radius.

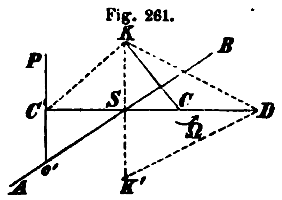
4. Nach dem Vorstehenden ist es leicht, den Geschwindigkeitszustand zu bestimmen, in welchen ein ebenes Punktsystem durch ein in seiner Ebene wirkendes System von Momentankräften versetzt wird. Sind nämlich R und G die Resultante und das resultirende Paar des gegebenen Kräftesystems, für den Massenmittelpunkt S reducirt, so müssen diese einzeln der Kraft Mu und dem Paare

$\Omega M\varkappa_0^2$ äquivalent sein (da eine Kraft nur einer Kraft, ein Paar nur einem Paare äquivalent sein kann), wenn diese Grössen die aus dem unbekannten Geschwindigkeitszustande entspringenden Kraftreductionselemente für S sind. Aus diesen Aequivalenzen $R = Mu$, $G = \Omega M\varkappa_0^2$ ergibt sich die Translationsgeschwindigkeit $u = \frac{R}{M}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \frac{G}{M\varkappa_0^2}$, erstere parallel und gleichen Sinnes mit R, letztere gleichen Sinnes mit G. Die Grössen u und Ω bestimmen die Lage des Momentancentrums. Fällt man nämlich von S ein Perpendikel auf die Richtung von R, so erlangen die Punkte derselben, welche auf die eine Seite von S fallen, durch u und Ω Geschwindigkeiten gleichen Sinnes, die der anderen Seite aber entgegengesetzte. Auf die letztere Seite fällt das Momentancentrum, weil dessen Geschwindigkeit Null ist. Sein Abstand $SC = a$ geht aus der Gleichung $a\Omega = u$ hervor. So lange R nicht Null, ist auch u nicht Null und folglich C von S verschieden. Für $R = 0$ wird $a = 0$; ein Paar erzeugt mithin eine Winkelgeschwindigkeit um den Massenmittelpunkt S.

§. 13. Beispiele zu §. 11.

1. Eine homogene materielle Linie AB (Fig. 261.) wird im Punkte c' von einer Momentankraft P unter dem Winkel α getroffen, wo liegt das Momentancentrum und mit welcher Winkelgeschwindigkeit beginnt die Linie sich in der durch ihre und die Richtung der Kraft bestimmten Ebene zu drehen? Es sei $2l$ die Länge, ϱ die specifische Masse und $M\varkappa_0^2 = \frac{2}{3}\varrho l^3$ das Trägheitsmoment der Linie AB für den Massenmittelpunkt S. Mit Hülfe der Masse $M = 2\varrho l$ wird $\varkappa_0 = l\sqrt{\frac{1}{3}}$; fällt man also von S das Perpendikel SC' auf P, so gilt die Gleichung $aa' = \frac{1}{3}l^2$, wo $SC' = a'$, $SC = a$. Setzt man noch $Sc' = e$, so wird $a' = e \sin\alpha$. Nimmt man $SD = l$ zur Höhe eines gleichseitigen Dreiecks KDK', dessen Basis mithin senkrecht zu $C'S$, so wird $SK = l\sqrt{\frac{1}{3}} = \varkappa_0$ und wird das Momentancentrum C durch das Perpendikel KC, auf $C'K$ errichtet, erhalten.

Fig. 261.



Die Winkelgeschwindigkeit ist

$$\Omega = \frac{3}{2}\frac{Pe\sin\alpha}{\varrho l^3} = \frac{3\,Pe\sin\alpha}{Ml^2}.$$

Für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ fällt C in AB selbst und wird Ω ein Maximum bei constantem e.

2. In welchem Punkte muss die Momentankraft P die Gerade AB rechtwinklig treffen, wenn diese um den Endpunkt B sich drehen soll? Aus der Gleichung $aa' = \varkappa_0^2$ folgt wegen $a = l$ der Abstand $SC' = a' = \frac{1}{3}l$. Hiermit wird $\Omega = \frac{P}{Ml}$.

3. Eine homogene Kreisscheibe wird von der Kraft P getroffen das Momentancentrum C und die Winkelgeschwindigkeit Ω zu finden.

4. Ein ebenes System erleidet drei Momentanstösse in seiner Ebene zugleich, C und Ω zu finden.

5. Wo und mit welcher Intensität muss ein ebenes System durch eine Momentankraft in seiner Ebene gestossen werden, damit das Momentancentrum eine vorausbezeichnete Lage und die Winkelgeschwindigkeit eine gegebene Grösse und einen gegebenen Sinn besitze?

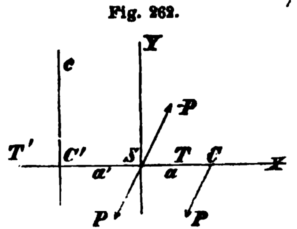
6. Man soll das Momentancentrum und die Winkelgeschwindigkeit eines ebenen Systems bestimmen, wenn dasselbe durch zwei

Momentankräfte in seiner Ebene gestossen wird und zwar 1. indem man beide Kräfte zusammensetzt, 2. indem man für jede einzeln die Aufgabe löst und die erhaltenen Resultate combinirt.

§. 14. **Wirkung eines Momentankräftesystems, welches einer Einzelkraft P äquivalent ist, deren Richtung eine Hauptebene XY des Massenmittelpunktes S eines räumlichen Punktsystems in einem Punkte C der Hauptaxe SX im Abstande $SC = a$ normal trifft** (Fig. 262.).

1. Die Kräftereduction, für den Punkt S ausgeführt, gibt die Kraft P an S und das Paar Pa, dessen Axe parallel SY. Von ersterer erlangt das System die Translationsgeschwindigkeit $u = \frac{P}{M}$, letzteres gibt ihm die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \frac{Pa}{M\varkappa^2}$ um die Hauptaxe SY, wo $\varkappa$ den Trägheitsradius für diese Axe bedeutet. u und Ω sind zusammen der Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe c äquivalent, welche in der Hauptebene XY der Axe SY im Abstande $SC' = a'$ parallel läuft und zwar auf die Seite von SY fällt, auf welcher C nicht liegt. Wie §. 11. ergibt sich $aa' = \varkappa^2$ und liefert die dortige Construction mit Hülfe eines rechtwinkligen Dreiecks die reciproken Punkte C, C'. Die Geschwindigkeit v eines Systempunktes in der Entfernung x von SY ist

Fig. 262.



$$v = u + \Omega x = \frac{P}{M} + \frac{Pa}{M\varkappa^2}x = \frac{P}{M\varkappa^2}(\varkappa^2 + ax).$$

2. Es treffe das System mit einem Punkte T der Hauptaxe SX, im Abstande $ST = x$ von S gelegen, auf einen festen Punkt des Raumes. Der momentene Widerstand, den dieser Punkt leistet, vernichtet plötzlich die Geschwindigkeit von T und nöthigt die Systempunkte, die Geschwindigkeiten zu ändern. Um die Intensität $-Q$ dieses Widerstandes zu bestimmen, fügen wir denselben der Kraft P hinzu und stellen die Bedingung auf, dass die Geschwindigkeit des Punktes T gleich Null werde. Da die Geschwindigkeit des Punktes T im Momente, wo sie vernichtet wird, senkrecht zur Ebene XY ist, so ist auch $-Q$ senkrecht zu dieser Ebene. Die Reduction für S ergibt daher die Kraft $-Q$, welche mit P an S zu $P - Q$ sich verbindet, und das Paar $-Qx$, welches mit Pa zusammen ein neues Paar $Pa - Qx$ bildet. Die Kraft $P - Q$ ertheilt nun die Translationsgeschwindigkeit $u = \frac{P-Q}{M}$ und das Paar $Pa - Qx$ die Winkelgeschwindigkeit $\frac{Pa - Qx}{M}$ um die Hauptaxe SY und beide zusammen sind äquivalent der Winkelgeschwindigkeit Ω um eine neue Momentanaxe c', deren Abstand $-x'$ von S der Bedingung $-xx' = \varkappa^2$ genügen muss. Ein Systempunkt im Abstande ξ von SY erlangt dadurch die Geschwindigkeit $v = \frac{P-Q}{M} + \frac{Pa - Qx}{M\varkappa^2}\cdot\xi$. Für $\xi = x$ erhält man die Geschwindigkeit des Punktes T, welche verschwinden muss. Aus der Gleichung $\frac{P-Q}{M} + \frac{Pa - Qx}{M\varkappa^2}x = 0$ ergibt sich demnach die Stärke Q des Momentanstosses, welchen das System in T erleidet, nämlich $Q = P\frac{\varkappa^2 + ax}{\varkappa^2 + x^2}$, oder mit Rücksicht auf $aa' = \varkappa^2$ in der Form $Q = Pa\frac{a' + x}{\varkappa^2 + x^2}$.

3. Die Intensität des Momentanstosses Q in T variirt mit dem Abstande x; sie verschwindet für $x = -a'$, d. h. wenn der feste Punkt in C', d. h. in der

Momentanaxe c liegt, wie selbstverständlich. Für alle $x > -a'$ ist Q positiv, für $x < -a'$ negativ. Der Stoss erfolgt daher in verschiedenem Sinne, je nachdem der feste Punkt diesseits oder jenseits C' liegt. Im einen Falle fällt der feste Punkt auf die vordere Seite der Ebene XY, im anderen auf die Hinterseite. Um die Punkte T des Maximalstosses zu finden, ist ihr Abstand x aus der Gleichung $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, d. h. aus $x^2 + 2a'x - \varkappa^2 = 0$ zu suchen. Man erhält hieraus

$$x = -a' \pm \sqrt{\varkappa^2 + a'^2},$$

welche Gleichung die Formen

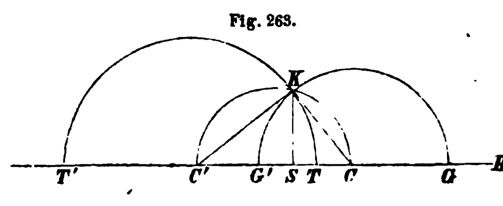
$$x + a' = \pm\sqrt{\varkappa^2 + a'^2} = \sqrt{a'(a' + a)}$$

annehmen kann. Es ist aber $\sqrt{\varkappa^2 + a'^2}$ der Trägheitsradius für die Momentanaxe durch C':

$$\sqrt{a'(a' + a)} = \sqrt{C'S \cdot C'C}$$

und $x + a'$ der Abstand $C'T$ der Punkte T von der Momentanaxe. **Daher gibt es zwei Punkte T, T' des Maximalstosses auf der Axe SX, welche diesseits und jenseits in gleichem Abstande von der Momentanaxe c abliegen. Sie sind die Schnittpunkte von SX mit einem um C beschriebenen Kreise, dessen Radius $C'K$ (Fig. 263.) das geometrische Mittel ist aus den Abständen $C'S$ und $C'C$ der Momentanaxe vom Massenmittelpunkte S und der Momentankraft P, oder was dasselbe ist, dessen Radius den Trägheitsradius der Momentanaxe darstellt.**

Fig. 263.



Beide Punkte unterscheiden sich von einander durch den Sinn, mit welchem sie stossen, indem sie auf entgegengesetzten Seiten der Momentanaxe liegen. Da die beiden Werthe von x, welche ihre Abstände TS, $T'S$ vom Massenmittelpunkte angeben, das Produkt $-\varkappa^2$ liefern, so sind T, T' homologe Punkte der involutorischen Reihen C, C'. Der eine von ihnen liegt immer zwischen S und C.

Die Intensität des Maximalstosses ist

$$(Q) = \tfrac{1}{2} P\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{a}{a'}}\right).$$

Für $x = 0$ und $x = a$ wird die Stossintensität Q beidemal dieselbe, nämlich $Q = P$. Es stossen demnach der Angriffspunkt C der Kraft P und der Massenmittelpunkt gleich stark, aber nicht mit dem Maximum der Intensität; der Punkt des Maximalstosses

$$(Q) = \tfrac{1}{2} P\left(1 + \sqrt{1 + \frac{a}{a'}}\right)$$

fällt zwischen beide Punkte, ein anderer Maximalstoss

$$(Q) = \tfrac{1}{2} P\left(1 - \sqrt{1 + \frac{a}{a'}}\right)$$

entspricht einem jenseits C' gelegenen Stosspunkte.

4. Fällt der Angriffspunkt C der Kraft P in den Massenmittelpunkt S, so ist $a = 0$ und stösst das System in dem Abstande x von S mit der Intensität $Q = P\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + x^2}$. Von den Punkten des Maximalstosses fällt der eine in S, der

andere ins Unendliche. **Ein in Translation begriffenes System stösst also mit dem Massenmittelpunkte am heftigsten.**

5. Geht die Momentanaxe durch S, ist also $a' = 0$ und folglich $a = \infty$, welcher Fall einer verschwindend kleinen, unendlich fernen Kraft P, oder also einem Paare $\lim. Pa = N$ entspricht, so wird $Q = N \frac{x}{\varkappa^2 + x^2}$ und das Maximum des Stosses findet im Abstande $x = \pm \varkappa$ statt. Da aber das Paar beliebig in seiner Ebene gedreht werden kann, so kann jeder Punkt in der Ebene senkrecht zur Momentanaxe SY auf dem Umfange eines Kreises vom Radius $\varkappa$ als Punkt des Maximalstosses angesehen werden. **Ein System, welches eine Winkelgeschwindigkeit um eine Hauptaxe des Massenmittelpunktes besitzt, stösst also in allen Punkten, deren Abstand von der Rotationsaxe gleich dem Trägheitsradius derselben ist mit dem Maximum der Heftigkeit.** Bei einer homogenen parallelepipedischen Stange, welche sich um die zur Länge l senkrechte Hauptaxe des Massenmittelpunktes dreht, wird der Abstand des Maximalstosses $x = \varkappa = l\sqrt{\tfrac{1}{3}}$; bei einer homogenen Kugel vom Radius r, welche um einen Durchmesser rotirt, ist $x = \varkappa = r\sqrt{\tfrac{2}{5}}$.

Man kann den vorliegenden Fall direct behandeln. Es sei N das Paar der Momentankräfte des Systems, T der Stosspunkt in der Entfernung x von der Hauptaxe SY und Q der Momentanwiderstand des festen Punktes oder die Intensität, mit welcher das System anstösst. Die Reduction der Kräfte für S gibt $-Q$ und das Paar $N - Qx$, welche in T die Geschwindigkeit

$$-\frac{Q}{M} + \frac{N - Qx}{M\varkappa^2}\, x = 0$$

hervorrufen, woraus $Q = N \frac{x}{\varkappa^2 + x^2}$ folgt.

6. Der Widerstand $-Q$, welchen der feste Punkt zu leisten hat, auf welchen das System mit dem Punkte T der Hauptaxe SX in der Entfernung $ST = x$ trifft, hat die Intensität $Q = P \cdot \frac{\varkappa^2 + ax}{\varkappa^2 + x^2}$. Wir zerlegen nun die Kraft P, welche in C angreift (Fig. 262 und 264.) nach der Theorie der Parallelkräfte in zwei parallele Componenten, von denen die eine die Intensität Q besitzt, gleichen Sinnes mit P ist und in T angreift, während die andere Q' und ihr Angriffspunkt T' gesucht werden soll.

Fig. 264.

Man hat dann nach der genannten Theorie $Q' + Q = P$ und wenn x' der Abstand des Punktes T' von S ist, $Q(x - a) = Q'(a - x')$, woraus

$$Q' = P \cdot \frac{x^2 - ax}{\varkappa^2 + x^2} \quad \text{und} \quad -xx' = \varkappa^2$$

folgt. Demnach ist T' der zu T reciproke Punkt der Kräftereduction. Die Componente Q an T wird nun durch den Widerstand $-Q$ des festen Punktes vernichtet und bleibt daher von P nur Q' übrig, welche den Geschwindigkeitszustand des Systems bestimmt, welchen dasselbe nach dem Anprallen an den festen Punkt besitzt. Bei der Reduction von Q' für S ergibt sich nun die Translationsgeschwindigkeit

$$u' = \frac{Q'}{M} = \frac{P}{M} \frac{x^2 - ax}{\varkappa^2 + x^2}$$

und die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega' = \frac{Q'x'}{M\varkappa^2} = \frac{P}{M} \frac{a - x}{\varkappa^2 + x^2}\cdot$$

um die Hauptaxe SY und beide zusammen sind derselben Winkelgeschwindigkeit Ω' um eine zu SY parallele Momentanaxe äquivalent, deren Abstand von S ist $-\xi = \frac{u'}{\Omega'} = \frac{\varkappa^2}{x'}$, sodass also $-\xi x' = \varkappa^2$ und folglich $\xi = x$ wird. Die Momentanaxe des Geschwindigkeitszustandes nach dem Stosse geht daher durch den Stosspunkt T, wie selbstverständlich, da dessen Geschwindigkeit durch den Stoss auf Null reducirt wird und ist parallel zur ursprünglichen Momentanaxe. Die Grösse und der Sinn der Winkelgeschwindigkeit Ω' nach dem Stosse hängt von der Lage des Stosspunktes ab. Für $x = a$ ist $\Omega' = 0$, d. h. wenn der Stosspunkt mit dem Angriffspunkte C der Kraft P zusammenfällt, so kommt das System zum Stillstand. Für $x < a$ ist Ω' gleichen Sinnes mit der ursprünglichen Winkelgeschwindigkeit Ω, für $x > a$ hat sie entgegengesetzten Sinn. Das Maximum von Ω' tritt ein für die Werthe von x, welche der Gleichung $x^2 - 2ax - \varkappa^2 = 0$ genügen. Für sie wird

$$x - a = \pm\sqrt{a^2 + \varkappa^2}.$$

Da die Grösse $\sqrt{a^2 + \varkappa^2}$ den Trägheitsradius CK der mit SY parallelen, durch C gehenden Axe darstellt (Fig. 263.), so folgt, dass ein um C mit dem Trägheitsradius CK beschriebener Kreis auf SX die Punkte G, G' bezeichnet, mit welchen das System auf einen festen Punkt auftreffen muss, wenn seine Winkelgeschwindigkeit Ω' nach dem Stosse so gross als möglich sein soll. Beide Punkte unterscheiden sich durch den verschiedenen Sinn von Ω'. Soll $\Omega = \Omega'$ werden, so muss $\frac{Pa}{M\varkappa^2} = \frac{P}{M}\frac{(a-x)}{\varkappa^2 + x^2}$, d. h. $x(ax - \varkappa^2) = 0$, also $x = 0$ oder $x = \frac{\varkappa^2}{a} = a'$ sein. Die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten Ω und Ω' vor und nach dem Stosse ist

$$\frac{P}{M}\left(\frac{a}{\varkappa^2} - \frac{a-x}{\varkappa^2 + x^2}\right) = \frac{P}{M\varkappa^2}\,\frac{x(ax - \varkappa^2)}{\varkappa^2 + x^2}.$$

7. Die Geschwindigkeiten v, v' der Punkte T, T', an welchen Q, Q' angreifen vor dem Stosse, sind:

$$v' = \Omega \cdot C'T = \Omega(a' + x), \qquad v'' = \Omega \cdot C'T' = \Omega(a' + x') = \Omega\left(a' - \frac{\varkappa^2}{x}\right).$$

Setzt man nun in die Ausdrücke

$$Q = P\frac{\varkappa^2 + ax}{\varkappa^2 + x^2}, \qquad Q' = P\frac{x^2 - ax}{\varkappa^2 + x^2}$$

die Werthe $a = \frac{\varkappa^2}{a'}$ und $P = M\Omega a'$ ein, so nehmen sie die Form

$$Q = M\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + x^2}\,\Omega(a' + x) = M \cdot \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + x^2} \cdot v,$$

$$Q' = M\frac{x^2}{\varkappa^2 + x^2}\,\Omega\left(a' - \frac{\varkappa^2}{x}\right) = M \cdot \frac{x^2}{\varkappa^2 + x^2} \cdot v'$$

an, sodass, wenn man die Masse M des Systems in zwei Theile m, m' theilt, welche sich wie $\varkappa^2 : x^2$, d. h. wie $\frac{\varkappa^2}{x} : x = (-x') : x$ verhalten, nämlich $m = \frac{M\varkappa^2}{\varkappa^2 + x^2}$, $m' = \frac{Mx^2}{\varkappa^2 + x^2}$ setzt, $Q = mv$, $Q' = m'v'$ wird. Denkt man also an die Stelle des stossenden Systems blos die beiden Punkte T, T', resp. mit den Massen m, m' behaftet, die im umgekehrten Verhältniss der Abstände $T'S : TS$ dieser Punkte von S stehen und beide durch eine unveränderliche Linie verbunden, so kann das gegebene System durch dies einfachere ersetzt werden, wenn es sich darum handelt, in T denselben Stoss Q auszuüben. Diese Gerade mit den beiden Massen

punkten hat mit dem System die Masse, den Massenmittelpunkt und das Trägheitsmoment für die Axe SY gemein. Denn die letztere Grösse ist:

$$mx^2 + m'\frac{\varkappa^4}{x^2} = m'\frac{\varkappa^2}{x^2}\cdot x^2 + m'\varkappa^2\cdot\frac{\varkappa^2}{x^2} = m'\varkappa^2 + m\varkappa^2 = (m+m')\,\varkappa^2 = M\varkappa^2,$$

da $m : m' = \varkappa^2 : x^2$. Dieselbe Momentankraft P auf diese Linie, wie auf das System wirkend, besitzt demnach dieselbe Momentanaxe, dieselbe Winkelgeschwindigkeit und vermag in allen ihren Punkten zu stossen, wie die entsprechenden Punkte des Systems. Die Punkte des Maximalstosses für den Fall, dass P ins Unendliche verschwindet, aber das Paar $lim.\, Pa$ bleibt, z. B. stossen, da für sie $x = \pm \varkappa$ ist, als ob in ihnen die Massen $\frac{1}{2} M$ vereinigt wären.

§. 15. **Wirkung eines Momentankräftesystems, welches einer Einzelkraft P äquivalent ist, deren Richtung eine Hauptebene XY des Massenmittelpunktes S in irgend einem Punkte C normal trifft** (Fig. 265.).

1. Die Kräftereduction für den Punkt S liefert dortselbst die Kraft P und das Paar $G = P\cdot \overline{SC}$, dessen Ebene senkrecht zur Hauptebene XY und dessen Axe mithin dieser Ebene parallel ist. Nach §. 6. hat diese Axe die Richtung der Normalen des Poinsot'schen Centralellipsoids in dem Punkte J, in welchem die der Momentanaxe c parallele Axe SJ des Massenmittelpunktes diese Fläche durchdringt. Da die Richtung SH der Axe des Paares in den Hauptschnitt fällt, so steht die Tangentenebene in J senkrecht auf dem Hauptschnitt und fällt daher die Momentanaxe selbst in ihn hinein und ist conjugirt zu SC. Die Kraft P an S gibt die Translationsgeschwindigkeit $u = \frac{P}{M}$, das Paar G aber die Winkelgeschwindigkeit Ω um die Axe CJ, deren Sinn mit G harmonirt und deren Grösse (§. 6.) $\Omega = Gl\delta = Pdl\delta$, wenn $SJ = l$, $SH = \delta$, $SC = d$ gesetzt wird. u und Ω zusammen liefern, da sie senkrecht zu einander sind, eine Winkelgeschwindigkeit Ω um die mit SJ parallele Momentanaxe c, welche auf die Seite von SJ fällt, auf welcher C nicht liegt. Wir ziehen durch den Angriffspunkt C der Kraft P ebenfalls eine Parallele zu CJ und bezeichnen den Durchschnitt von SC und der Momentanaxe c mit C', sowie den Abstand $C'S$ mit d'. Die Schnittpunkte dieser Parallelen und der Axe c mit einer durch S gelegten Senkrechten seien C_0 und C_1 und $SC_0 = a$, $C_1S = a'$. Der Abstand a' der Momentanaxe vom Massenmittelpunkte ist nun $a' = \frac{u}{\Omega} = \frac{1}{Mul\delta}$, oder weil der Definition des Centralellipsoids zufolge das Trägheitsmoment der Axe CJ den Werth $M\varkappa^2 = \frac{1}{l^2}$ hat, $a' = \varkappa^2\cdot\frac{l}{d\delta}$, oder vermöge der Proportion $\frac{a}{d} = \frac{\delta}{l}$, welche in Folge der Rechtwinkligkeit von $C'C$ und δ, sowie von C_1C_0 und l besteht, $a' = \frac{\varkappa^2}{a}$, sodass also $aa' = \varkappa^2$ wird. Dies gibt uns den Satz:

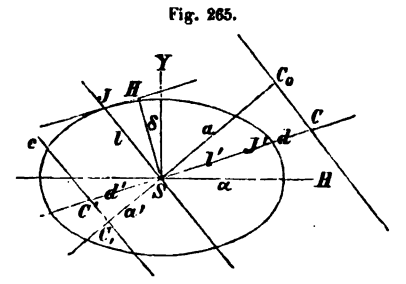


Fig. 265.

Die Momentanaxe und eine ihr parallele, durch den Angriffspunkt der Kraft P gelegte Gerade stehen vom Massenmittelpunkte um Strecken ab, deren Produkt gleich dem Quadrate des Trägheitsradius für die ihnen gleichfalls parallele Axe des Massenmittelpunktes ist.

Die Punkte C_0, C_1 sind reciprok. Es sei l' der zu l conjugirte Semidiameter SJ', welcher in die Richtung SC fällt, ferner seien α, β die Halbaxen des vorliegenden Hauptschnitts des Centralellipsoids und ϑ der Winkel zwischen l und l'. Dann ist nach einem bekannten Satze über die Ellipse $ll' \sin\vartheta = \alpha\beta$. Zugleich ist $\frac{\delta}{l} = \sin\vartheta$. Bedenkt man nun, dass $d \sin\vartheta = a$, $d' \sin\vartheta = a'$ ist, so geht die Gleichung $aa' = \varkappa^2$ über in $dd' \sin^2\vartheta = \varkappa^2$, oder $dd' = \left(\frac{\varkappa}{\sin\vartheta}\right)^2 = \varkappa^2\left(\frac{ll'}{\alpha\beta}\right)^2$, oder, weil $M\varkappa^2 = \frac{1}{l^2}$ ist, in $dd' = \left(\frac{l'}{\alpha\beta\sqrt{M}}\right)^2$. Setzt man daher $\frac{l'}{\alpha\beta\sqrt{M}} = \lambda$, so erhält man $dd' = \lambda^2 = \left(\frac{\varkappa}{\sin\vartheta}\right)^2$, d. h. die Punkte C, C', nämlich die Angriffspunkte C der Kraft P auf einer durch den Massenmittelpunkt gehenden Geraden SC und die Schnittpunkte C' derselben mit der zugehörigen Momentanaxe bilden eine Involution gleichartiger Lage (C und C' liegen auf verschiedenen Seiten von S) für den Massenmittelpunkt als Mittelpunkt derselben. Das Produkt der Abstände $C'S$ und SC ist das Quadrat $\left(\frac{\varkappa}{\sin\vartheta}\right)^2$ des Trägheitsradius $\varkappa$ für die der Momentanaxe parallele Axe von S, dividirt durch den Sinus des Winkels, welchen die Momentanaxe mit der ihr conjugirten Richtung bildet.

Denkt man sich den Angriffspunkt C der Kraft P nach und nach alle Lagen des Hauptschnitts einnehmend, so erhält man für jede Lage der Geraden SC eine Strecke $\lambda = \frac{l'}{\alpha\beta\sqrt{M}}$, welche den Abstand zweier Punkte auf SC diesseits und jenseits von S bezeichnet, welche homologe Punkte C, C' der Involution auf SC (ideelle Doppelpunkte) sind. Da jedes λ dem Semidiameter l' der Centralellipse $(\alpha\beta)$ proportional ist, welche mit ihm in dieselbe Richtung fällt, so bilden die ideellen Doppelpunkte der Involutionen eine der Centralellipse ähnliche und ähnlich liegende concentrische Ellipse. Das Aehnlichkeitsverhältniss ist $\lambda : l' = 1 : \alpha\beta\sqrt{M}$ und die Axen der neuen Ellipse sind $\frac{1}{\beta\sqrt{M}}$ und $\frac{1}{\alpha\sqrt{M}}$, resp. in den Richtungen der Axen α und β der Centralellipse. Construirt man für jeden Punkt C zur Momentanaxe c die symmetrisch gegen S gelegene Gerade c'', so ist letztere die Polare von C in Bezug auf diese neue Ellipse und ergibt sich der Satz:

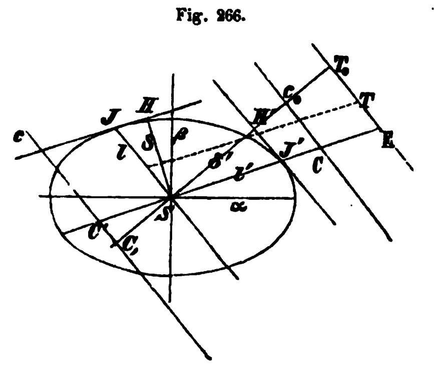
Auf jedem Diameter der Centralellipse bilden die Angriffspunkte C der Kraft P und die Schnittpunkte C' mit der zugehörigen Momentanaxe c eine Involution gleichartiger Lage. Der Ort der ideellen Doppelpunkte aller dieser Involutionen ist eine der Centralellipse concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Ellipse. Die mit den Momentanaxen c symmetrisch gegen den Massenmittelpunkt S gelegenen Geraden c'' sind die Polaren der Angriffspunkte c in Bezug auf diese Ellipse. Die Punkte C und die Momentanaxen sind daher reciproke Systeme, sodass allen Punkten C einer Geraden Momentanaxen entsprechen, welche sich in einem Punkte schneiden und umgekehrt.

Beschreibt C einen Kegelschnitt, so umhüllt c ebenfalls einen Kegelschnitt.

Die Gleichung $\lambda = \frac{\varkappa}{\sin\vartheta}$ oder $\varkappa = \lambda \sin\vartheta$ lässt eine einfache Interpretation zu. $\lambda \sin\vartheta$ ist der Abstand des Endpunktes von λ von der Richtung des ihm con-

jugirten Diameters. Dieser Abstand ist demnach der Trägheitsradius für diesen conjugirten Diameter.

2. Es treffe das System mit einem Punkte T der Hauptebene XY auf einen festen Punkt, welcher durch seinen Widerstand $-Q$ den Geschwindigkeitszustand modificirt. Um die Intensität desselben zu bestimmen, führen wir $-Q$ ein und setzen die aus P und $-Q$ entspringende Geschwindigkeit des Punktes T gleich Null, welche Bedingung zur Bestimmung von Q für die verschiedenen Lagen von T in der Ebene XY führt. Zu dem Ende ziehen wir (Fig. 266.) TE parallel SJ und bringen an E zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $-Q$ und Q an. Die Kraft $-Q$ an E, welche mit P entgegengesetzten Sinnes ist, behandeln wir mit P zusammen, das Paar $-Q \cdot \overline{TE}$ appart. Die Reduction von P und Q für den Punkt S liefert nun zunächst dortselbst eine Kraft $P - Q$ und ein Paar $Pd - Qe$, wenn $SE = e$ gesetzt wird. Erstere gibt die Translationsgeschwindigkeit $u = \frac{P - Q}{M}$ und letzterer die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = (Pd - Qe)\, l\delta$ um SJ. Von beiden zusammen erlangt der Punkt T die Geschwindigkeit $\frac{P-Q}{M} + (Pd - Qe)\, l\delta b$, wenn $b = T_0 S$ der Abstand des Punktes T von SJ ist. Vermöge der Relationen $M\varkappa^2 = \frac{1}{l^2}$, $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{\delta}{l}$ geht dieser Ausdruck über in $\frac{P-Q}{M} + \frac{Pa - Qb}{M\varkappa^2}$, wobei also Ω unter der Form $\Omega = \frac{Pa - Qb}{M\varkappa^2}$ erscheint. Das Paar $-Q \cdot \overline{TE}$, dessen Ebene der durch SJ gehenden, zur Ebene XY senkrechten Diametralebene des Centralellipsoids parallel ist, erzeugt eine Winkelgeschwindigkeit Ω' um den zu SJ conjugirten Diameter SC und wenn wir $TE = f$, den Abstand des Punktes T von SC mit h, SH' aber mit δ' bezeichnen, so wird $\Omega' = -Qf \cdot l'\delta'$, oder wegen $M\varkappa'^2 = \frac{1}{l'^2}$, $\frac{h}{f} = \frac{\delta'}{l'}$, auch $\Omega' = \frac{-Qh}{M\varkappa'^2}$. Durch Ω' erlangt T die Geschwindigkeit $-\frac{Q'h}{M\varkappa'^2} \cdot h$; dieselbe ist wie die von u und Ω herrührende, senkrecht zur Ebene XY, aber jener entgegengesetzt. Setzen wir demnach die Gesammtgeschwindigkeit von T der Null gleich, so erhalten wir zur Bestimmung von Q die Gleichung



$$\frac{P - Q}{M} + \frac{Pa - Qb}{M\varkappa^2} \cdot b - \frac{Q'h^2}{M\varkappa'^2} = 0,$$

woraus

$$Q = P \cdot \frac{1 + \frac{ab}{\varkappa^2}}{1 + \frac{b^2}{\varkappa^2} + \frac{h^2}{\varkappa'^2}}$$

folgt. Q erscheint hier als eine Function von h und b, den Abständen des Punktes T von dem durch den Angriffspunkt C der Kraft P gehenden und dem diesem conjugirten Diameter SJ' und SJ. Für dasselbe P, denselben Punkt C und dasselbe b wird daher Q ein Maximum, wenn $h = 0$, d. h. wenn T in den durch C gehenden Diameter fällt. Ist diese erste Bedingung des Maximums von Q erfüllt,

so bleibt nur noch der Ausdruck $Q = P\frac{\varkappa^2 + ab}{\varkappa^2 + b^2}$ in Bezug auf den Abstand b zu einem Maximum zu machen. Dies führt zu der weiteren Bedingung

$$b^2 + \frac{2\varkappa^2}{a}b - \varkappa^2 = 0,$$

welche mit Hülfe von

$$\varkappa^2 = aa', \quad \frac{b}{-e} = \frac{d'}{a'} = \frac{l}{\delta}, \quad \frac{\varkappa^2 l^2}{\delta^2} = dd'$$

in $e^2 + 2d'e - dd' = 0$ umgesetzt werden kann. Diese Gleichung liefert

$$e + d' = \pm\sqrt{d'(d' + d)},$$

wodurch man den Satz erhält:

Die Maximalpunkte des Stosses liegen auf dem durch den Angriffspunkt C der Kraft P gehenden Diameter des Centralellipsoids und sind die Schnittpunkte desselben mit einem um C' beschriebenen Kreise, dessen Radius das geometrische Mittel aus den Abständen der Punkte S und C von C' ist.

Die Grösse

$$\sqrt{d'(d' + d)} = \sqrt{dd' + d'^2} = \sqrt{\frac{\varkappa^2}{\sin^2\vartheta} + d'^2} = \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{\varkappa^2 + (d'\sin\vartheta)^2} = \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{\varkappa^2 + \varepsilon^2}$$

zeigt, dass der Abstand der Punkte des Maximalstosses von der Momentanaxe, nämlich die Grösse $(e + d)\sin\vartheta$ gleich dem Trägheitsradius für die Momentanaxe ist. Man kann daher den Satz auch so ausdrücken:

Wenn ein System eine Winkelgeschwindigkeit um eine in einer Hauptebene des Massenmittelpunktes gelegene Momentanaxe besitzt, so liegen die beiden Punkte dieser Ebene, mit welchen dasselbe gegen einen festen Punkt am heftigsten anstösst, auf dem zur Richtung der Momentanaxe conjugirten Diameter in gleichem Abstande von dieser Axe und zwar ist dieser Abstand der Trägheitsradius des Systems um diese Axe.

Beide Maximalpunkte sind homologe Punkte der Involution des Strales SC, da das Produkt ihrer Abstände e, e' von S gleich

$$-dd' = -\frac{\varkappa^2 l^2}{\delta^2} = -\lambda^2.$$

Für die Intensität des Maximalstosses ergibt sich:

$$Q = \tfrac{1}{2}P\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{d}{d'}}\right),$$

der positive dieser beiden Werthe entspricht dem zwischen C und S gelegenen Punkte T, der negative dem jenseits C' gelegenen; für ersteren hat Q gleichen Sinn mit P, für letzteren entgegengesetzten.

Geht P durch S, so wird $d = 0$, also $Q = \frac{1}{2}P(1 \pm 1)$, die Punkte des Maximalstosses sind der Massenmittelpunkt S, welcher mit der Kraft $Q = P$ stösst, und ein unendlich ferner Punkt, in welchem die Kraft Q verschwindet.

Verschwindet P im Unendlichen, sodass aber $\lim. Pd$ sich einer bestimmten Grenze nähert, so geht die Momentanaxe durch S und liegen die Punkte des Maximalstosses um $\varkappa$ von ihr und mithin um $\varkappa\sin\vartheta = \lambda$ von S ab. Daher:

Die Punkte des Maximalstosses eines um einen Durchmesser des Centralellipsoids rotirenden Systems, welches in eine Hauptebene fällt, sind die Endpunkte des ihm in dieser Ebene conjugirten

Durchmessers der Ellipse, welche der Ort der ideellen Doppelpunkte der reciproken Systeme (C, c) ist.

3. Für den Ort aller Punkte des Hauptschnittes XY, in welchen das System mit gleicher Intensität $Q = nP$ stösst, erhält man zwischen h und b als Coordinaten die Gleichung:

$$n\left(1 + \frac{b^2}{\varkappa^2} + \frac{h^2}{\varkappa^2}\right) = 1 + \frac{ab}{\varkappa^2},$$

oder wenn man statt h und b die Längen $SE = e$ und $ET = f$ einführt und sie übersichtlicher mit ξ, η bezeichnet, so erhält man mit Hülfe der Relationen $a = d \sin\vartheta$, $b = \xi \sin\vartheta$ und $h = \eta \sin\vartheta$ die folgende:

$$n\left(1 + \frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\lambda'^2}\right) = 1 + \frac{d\xi}{\lambda^2},$$

wo für $\varkappa : \sin\vartheta$ und $\varkappa' : \sin\vartheta$ nach Nr. 1. (Schluss) λ und λ' gesetzt ist, sodass λ' den $\varkappa'$ entsprechenden Semidiameter der Ellipse der Doppelpunkte bedeutet. Verschiebt man nun den Ursprung der ξ, η aus S in den Punkt $\xi = \frac{1}{2}\frac{d}{n}$, $\eta = 0$, so kommt vermöge $dd' = \lambda$:

$$4n^2\left(\frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\lambda'^2}\right) = \frac{d}{d'} - 4n(n-1).$$

Der Ort der Punkte heftigsten Stosses ist also eine Ellipse, ähnlich der Centralellipse, deren Mittelpunkt auf CS im Abstande $\frac{1}{2}\frac{d}{n}$ von S liegt. Für $\frac{d}{d'} - 4n(n-1) = 0$, d. h. für $n = \frac{Q}{P} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{d}{d'} - 1}\right)$, d. h. für das Maximum (Q) der Stossintensität reducirt sich dieselbe auf einen oder den anderen der Mittelpunkte des stärksten Stosses und für $4n(n-1) > \frac{d}{d'}$, d. h. für n grösser als der eben angegebene Werth, wird sie imaginär, weil Q nicht grösser als das Maximum der Stossintensität werden kann.

§. 16. **Stoss eines unveränderlichen, in Bewegung begriffenen Systems auf irgend einen festen Punkt.** In Bezug auf die Hauptaxen des Systems als Coordinatenaxen seien x, y, z die Coordinaten des Systempunktes T, welcher auf den festen Punkt trifft und $-Q$ der Momentanwiderstand, den dieser Punkt leistet. Wir reduciren denselben für den Massenmittelpunkt S und erhalten als Componenten $-X$, $-Y$, $-Z$ und als Componenten des durch seine Verlegung an S eingeführten Paares $-Q \cdot \overline{ST}$ die Axenmomente $-(yZ - zY)$, $-(zX - xZ)$, $-(xY - yX)$. Sind also X_0, Y_0, Z_0; L_0, M_0, N_0 die entsprechenden Reductionselemente der gegebenen Momentankräfte des Systems, so bestimmen die Kräfte $X_0 + X$, $Y_0 + Y$, $Z_0 + Z$ und die Paare $L_0 - (yZ - zY)$, $M_0 - (zX - xZ)$, $N_0 - (xY - yX)$ die Geschwindigkeiten der Systempunkte. Die ersteren ertheilen nun dem Punkte x, y, z die Translationsgeschwindigkeiten $\frac{X_0 + X}{M}$, $\frac{Y_0 + Y}{M}$, $\frac{Z_0 + Z}{M}$, wenn M die Masse des Systems ist, die drei letzten aber liefern zunächst die Winkelgeschwindigkeitscomponenten

$$p = \frac{L_0 - yZ + zY}{Ma^2}, \quad q = \frac{M_0 - zX + xZ}{Mb^2}, \quad r = \frac{N_0 - xY + yX}{Mc^2},$$

wenn a, b, c die Trägheitsradien für die Hauptaxen x, y, z sind. Durch sie erlangt daher der Punkt (xyz) die Geschwindigkeiten $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$ und sind demnach die Componenten seiner Geschwindigkeit überhaupt

$$v_x = \frac{X_0 + X}{M} + qz - ry,$$
$$v_y = \frac{Y_0 + Y}{M} + rx - pz,$$
$$v_z = \frac{Z_0 + Z}{M} + py - qx,$$

oder also mit Hülfe der Werthe für p, q, r:

$$v_x = \frac{X_0 + X}{M} - \frac{y}{Mc^2}(N_0 - xY + yX) + \frac{z}{Mb^2}(M_0 - zX + xZ)$$
$$v_y = \frac{Y_0 + Y}{M} - \frac{z}{Ma^2}(L_0 - zY + yZ) + \frac{x}{Mc^2}(N_0 - yX + xY)$$
$$v_z = \frac{Z_0 + Z}{M} - \frac{x}{Mb^2}(M_0 - xZ + zX) + \frac{y}{Ma^2}(L_0 - zY + yZ).$$

Diese Componenten müssen nun in Folge der Wirkung des Widerstandes $-Q$ verschwinden; daher folgen dessen Componenten $-X$, $-Y$, $-Z$ aus den Gleichungen:

$$(b^2y^2 + c^2z^2 + b^2c^2)X - b^2xyY - c^2xzZ = b^2yN_0 - c^2zM_0 - b^2c^2X_0$$
$$-a^2xyX + (c^2z^2 + a^2x^2 + c^2a^2)Y - c^2yzZ = c^2zL_0 - a^2xN_0 - c^2a^2Y_0$$
$$-a^2xzX - b^2yzY + (a^2x^2 + b^2y^2 + a^2b^2)Z = a^2xM_0 - b^2yL_0 - a^2b^2Z_0,$$

wozu noch hinzukommen für Q und seine Richtung $(\alpha\beta\gamma)$:

$$Q^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad \frac{\cos\alpha}{-X} = \frac{\cos\beta}{-Y} = \frac{\cos\gamma}{-Z} = \frac{1}{Q}.$$

Für den speciellen Fall, welcher sich an die Betrachtungen des §. 15 unmittelbar hätte anschliessen lassen, dass nämlich der Punkt T in der Hauptebene der xy liege und $Z = 0$, $X_0 = Y_0 = 0$, also auch $N_0 = 0$ sei, gestaltet sich die Rechnung einfach. Man erhält $X = 0$, $Y = 0$, $Z = Q$ und

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + a^2b^2)Q = a^2xM_0 - b^2yL_0 - a^2b^2Z_0.$$

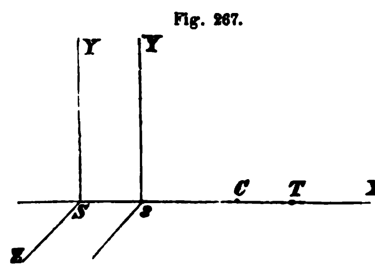
Hierin ist weiter, um die Bezeichnungsweise mit §. 15. in Einklang zu bringen

$$Z_0 = P, \quad L_0 = y_0Z_0 - z_0Y_0 = y_0P, \quad M_0 = z_0X_0 - x_0Z_0 = -x_0P,$$

wenn x_0, y_0 die Coordinaten von C sind.

§. 17. **Stoss eines Punktes von der Masse m normal zu einer Hauptebene XY des Massenmittelpunktes S in einem Punkte C einer Hauptaxe SX (Fig. 267.).** Wir nahmen in den §§. 12—16. an, dass die Momentankräfte des Systems einer einzelnen Kraft P äquivalent seien, ohne dass wir über den Ursprung dieser Kraft eine Voraussetzung machten. Jetzt wollen wir annehmen, dass P dadurch gegeben sei, dass ein Punkt von der Masse m mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu SX in C das System trifft. Es ist dann aber nicht etwa die Momentankraft mv, welche der Masse m ihre Geschwindigkeit v zu geben vermag, die Kraft P selbst, sondern nur ein Theil derselben. Im Momente des Anprallens bildet nämlich m mit dem System ein neues System, auf dessen Punkt C die Momentankraft mv wirkt; man hat zu bestimmen, welche Geschwindigkeit u dieser Punkt C annimmt; dieselbe Geschwindigkeit nimmt der

Fig. 267.



mit ihm zusammentreffende Punkt m an und da dieser vorher die Geschwindigkeit v besass, so hat er $v - u$ verloren. Demnach ist mu die Momentankraft, welche der neuen Geschwindigkeit von m entspricht und $m(v - u)$ ist folglich die Momentankraft P, welche im Stosse auf das System wirkt.

1. Es sei nun s der Massenmittelpunkt des Gesammtsystems der Massen M und m. Man hat dann $\frac{Ss}{m} = \frac{sC}{M} = \frac{SC}{M+m}$, also, wenn $SC = x$ gesetzt wird: $Ss = \frac{mx}{M+m}$, $sC = \frac{Mx}{M+m}$. Von den Hauptaxen des Massenmittelpunktes s für das Gesammtsystem der Massen M und m fällt die eine mit SX zusammen, die anderen sind parallel SY und SZ. Denn betrachtet man s als den Ursprung von Coordinaten ξ, η, ζ von denselben Richtungen, wie die früheren x, y, z, so ist

$$\Sigma m\xi\eta = \Sigma m(x - \overline{Ss})\, y = \Sigma mxy - \overline{Ss}\,\Sigma my = \Sigma mxy = 0$$

und liefert der einzelne Massenpunkt m in C keinen Beitrag zu dieser Summe, da sein η Null ist; ferner ist $\Sigma m\eta\zeta = \Sigma myz = 0$, da alle $\zeta = z$ und $\eta = y$ und für C sowohl ζ als η Null sind; endlich ist

$$\Sigma m\zeta\xi = \Sigma mz(x - \overline{Ss}) = \Sigma mzx - \overline{Ss}\,\Sigma mz = 0$$

aus ähnlichem Grunde. Die Kraft mv ertheilt nun dem Gesammtsystem eine Translationsgeschwindigkeit $\frac{mv}{M+m}$ senkrecht zur Hauptebene XY und eine Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \frac{mv \cdot \overline{sC}}{(M+m)\varkappa'^2}$ um die Hauptaxe sY, wo $\varkappa'$ den Trägheitsradius des Gesammtsystems für diese Axe darstellt. Daher erlangt der Punkt C die Geschwindigkeit

$$u = \frac{mv}{M+m} + \frac{M^2 mvx^2}{(M+m)^3\varkappa'^2}$$

und wird, weil

$$(M+m)\varkappa'^2 = M\varkappa^2 + M\cdot\overline{Ss}^2 + m\cdot\overline{sC}^2 = M\varkappa^2 + M\left(\frac{mx}{M+m}\right)^2 + m\cdot\left(\frac{Mx}{M+m}\right)^2,$$

also

$$\varkappa'^2 = M\cdot\frac{(M+m)\varkappa^2 + mx^2}{(M+m)^2}$$

ist, diese Grösse

$$u = mv\cdot\frac{\varkappa^2 + x^2}{(M+m)\varkappa^2 + mx^2} \quad \text{und} \quad v - u = \frac{Mv\varkappa^2}{(M+m)\varkappa^2 + mx^2},$$

sowie endlich

$$P = mv\cdot\frac{M\varkappa^2}{(M+m)\varkappa^2 + mx^2}.$$

2. Die Kraft P oder der Theil von mv, welche die Bewegung des Systems bestimmt, ist mit der Lage des Punktes veränderlich, sie ist ein Maximum für $x = 0$, wenn also C in den Punkt S fällt, sie nimmt mit wachsendem x ab und verschwindet für $x = \infty$. Der Werth des Maximums ist $P = mv\cdot\frac{M}{M+m}$. Man kann nun m und v aber so als Functionen von x bestimmen, dass mv constant bleibt und P für alle Punkte C der Geraden SX denselben Werth hat, wie in S. Hierzu ist vermöge des Ausdrucks für diese Grösse erforderlich, dass

$$m(\varkappa^2 + x^2) = Const. = MB^2,$$

wodurch

$$m = \frac{MB^2}{\varkappa^2 + x^2} \quad \text{und} \quad v = \frac{mv}{m} = mv\,\frac{\varkappa^2 + x^2}{MB^2}$$

wird. Die Constanten B und mv bequemer auszudrücken, seien m_0 und v_0 die Werthe von m und v für $x = 0$, nämlich $m_0 = \frac{MB^2}{\varkappa^2}$, $v_0 = mv\frac{\varkappa^2}{MB^2}$, woraus

$\varkappa^2 = \frac{m_1 \epsilon^2}{M}$ und $mv = m_1 v_1$ folgt. Man erhält hierdurch für m, v und P die Formen:

$$m = m_1 \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}, \quad v = v_1 \frac{\epsilon^2 - x^2}{\epsilon^2}, \quad P = m_1 v_1 \frac{M}{M + m_1}.$$

Diese Kraft ertheilt dem System eine Translationsgeschwindigkeit $\frac{P}{M} = \frac{m_1 v_1}{M + m_1}$, unabhängig von x und eine Winkelgeschwindigkeit um sF, welche Function von x ist, nämlich:

$$\Omega = \frac{mvx}{M\varkappa'^2} = \frac{mvx}{(M + m)\varkappa^2 + mx^2},$$

deren Ausdruck mit Hülfe der Werthe für m und v die Form annimmt:

$$\Omega = m_1 v_1 \frac{x}{(M + m_1)\varkappa^2}.$$

3. Der Theil P von mv, welcher die Bewegung des Systems bestimmt, wird in dem extremen Falle, dass m verschwindet und v unendlich gross wird, jedoch so, dass mv constant bleibt, gleich mv selbst und $mx = 0$. Den früheren Betrachtungen der Wirkung einer Momentankraft, welche unabhängig von der Stelle angenommen wurde, wo die Kraft angreift, liegt daher dieser extreme Fall eigentlich zu Grunde.

4. Wir nehmen jetzt an, das System, welches von der Masse m mit der Geschwindigkeit v getroffen wird, stosse zugleich auf einen festen Punkt T in der Linie SX und wollen den Stoss Q auf T bestimmen. Wir fanden nun §. 12, dass die Kraft P, welche in der Entfernung $SC = a$ angreift, auf T in dem Abstande ST den Stoss $Q = P \frac{\varkappa^2 + ax}{\varkappa^2 + x^2}$ hervorruft. In dem vorliegenden Falle tritt s an die Stelle von S; $\varkappa'^2$, $sC = \xi$ und $sT = ST - Ss = h - Ss$, wo $ST = h$, sind für $\varkappa$, a und x zu setzen, sodass wir zunächst erhalten:

$$Q = P \frac{\varkappa'^2 + \xi(h - Ss)}{\varkappa'^2 + (h - Ss)^2},$$

worin aber P den betreffenden Theil von mv bedeutet. Nun hat man aber:

$$P = mv \frac{M\varkappa^2}{(M + m)\varkappa^2 + mx^2}, \quad \varkappa'^2 = M \frac{(M + m)\varkappa^2 + mx^2}{(M + m)^2}, \quad Ss = \frac{mx}{M + m},$$

mit Hülfe welcher Werthe erhalten wird:

$$P = mv \frac{\varkappa^2 + h\xi}{\varkappa^2 + h^2 + \frac{m}{M}(\xi - h)^2}.$$

Für $\xi = h$, d. h. wenn C mit T zusammenfällt, wird $P = mv$; für $\xi = 0$ ist

$$P = \frac{mv\varkappa^2}{\varkappa^2 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)h^2}$$

und wächst P von $\xi = 0$ bis $\xi = h$; für $\xi = -\frac{\varkappa^2}{h}$ ist $P = 0$ und für $\xi = \infty$, $P = 0$. Es gibt daher ein Maximum von P. Dasselbe entspricht einem Werthe ξ, welcher der Gleichung

$$\xi^2 + 2h'\xi - \left(hl\left(1 + \frac{M}{m}\right) + h'l\right) = 0$$

genügt, wo $\frac{\varkappa^2}{h} = h'$ und $h + h' = l$ gesetzt ist. Diese Gleichung gibt zwei Punkte des Maximalstosses in gleichem Abstande von dem Punkte $x = -h'$.

Beispiel. Es sei $\frac{m}{M} = 1$, $h = \varkappa$, also T ein Punkt des Maximalstosses des gegebenen Systems (abgesehen von m) bei der Drehung um SY. Aus der Gleichung $\xi^2 + 2\varkappa\xi - 5\varkappa^2 = 0$ folgen die Abscissen der Maximalstosspunkte $\xi = -\varkappa \pm \varkappa\sqrt{6}$, wofür $Q = mv \frac{\pm\sqrt{6}}{12 \mp 4\sqrt{6}}$.

§. 18. Wenn das System nicht frei, sondern an Bedingungen gebunden ist, z. B. einen festen Punkt zu besitzen, um eine feste Axe sich zu drehen, mit gewissen Theilen feste Flächen zu berühren u. s. w., so leistet dasselbe vermöge dieser Bedingungen im Momente der Einwirkung momentaner Kräfte gewisse momentane Widerstände. Führt man dieselben als Momentankräfte ein und fügt sie den gegebenen Momentankräften hinzu, so kann alsdann das System als ein freies behandelt werden. In manchen Fällen kann man jedoch die Bedingungen durch Einführung unendlich grosser Massen in das System ersetzen. Diese Idee wurde zuerst von Poinsot ausgesprochen [*Sur la manière de ramener à la dynamique des corps libres, celle des corps qu'on suppose gênés par des obstacles fixes.* Liouville, Journ. de Mathém. 2ième Série, T. IV, p. 171 (1859)]; ihrer Wichtigkeit wegen wollen wir auf dieselbe hier in einem Falle etwas näher eingehen.

Das System besitze einen festen Punkt A, d. h. einen solchen, welcher durch kein System von Momentankräften eine Geschwindigkeit erlangt. Reduciren wir ein beliebiges gegebenes System von Momentankräften für den Massenmittelpunkt S und untersuchen wir, welche Masse der Punkt A besitzen muss, wenn er die Rolle eines festen Punktes spielen soll, während das System als ein freies angesehen wird. Die Kräftereduction liefert eine Resultante R und ein resultirendes Paar G; erstere ertheilt dem System eine Translationsgeschwindigkeit $u = \frac{R}{M}$, letzteres eine Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \frac{G}{M\varkappa_0^2}$ um eine durch S gehende Axe c und wenn δ den Abstand des Punktes A von der Axe c bezeichnet, so sind u und $\Omega\delta$ die Componenten der Geschwindigkeit desselben. Bildet nun R mit der Richtung von $\Omega\delta$ den Winkel α, so ist das Quadrat der Geschwindigkeit von A gleich $u^2 + \Omega^2\delta^2 - 2u\Omega\delta\cos\alpha$; damit dasselbe unabhängig von α, welcher Winkel mit der Wahl des Kräftesystems variirt, verschwinde, muss $u = 0$ und $\delta = 0$ sein. Die erstere Bedingung liefert $M = \infty$, die zweite $\delta = 0$. Der Punkt A muss mithin auf der Momentanaxe liegen und die Masse des Systems muss unendlich gross sein. Da die Axe c durch S geht und je nach Beschaffenheit des Kräftesystems verschiedene Richtungen haben kann, A aber stets auf ihr liegt, so fällt A mit S zusammen. Der feste Punkt muss also der Massenmittelpunkt sein. Legt man daher dem Punkte A eine unendlich grosse Masse bei, so sind alle Bedingungen erfüllt und kann das System als ein freies behandelt werden.

Es sei nun μ die dem Punkte A zuertheilte unendlich grosse Masse, während M die Masse des Systems an sich bedeute; es ist A der Massenmittelpunkt von $\mu + M$ und S der Massenmittelpunkt von M; die Entfernung AS wird unendlich klein sein. Das System kann nur rotiren um Axen, welche durch A gehen. Auf das Trägheitsmoment und die Winkelgeschwindigkeit des Systems um solche Axen hat die Einführung von μ keinen Einfluss, da A auf der Axe liegt. Indessen ist es räthlich, den jetzt vorliegenden Fall als einen Grenzfall anzusehen von dem Falle eines Systems $\mu + M$, in welchem ein Punkt A eine sehr grosse Masse μ besitzt. Der Massenmittelpunkt s dieses Systems fällt dann zwischen A und S und theilt AS im umgekehrten Verhältniss der Massen M und μ, sodass, wenn $As = i$, $AS = d$, also $sS = d - i$ gesetzt wird:

$$i = \frac{Md}{\mu + M}, \quad d - i = \frac{\mu d}{\mu + M}$$

ist. Das Trägheitsmoment von μ um eine Axe des Punktes s senkrecht zu AS ist μi^2, das von M ist $M\varkappa_0^2 + M(d-i)^2$, wenn $\varkappa_0$ der Trägheitsradius für die Parallelaxe des Punktes S ist. Daher wird das Trägheitsmoment von $\mu + M$ für die Axe des Punktes s:

$$(\mu + M)\varkappa^2 = \mu i^2 + M\varkappa_0^2 + M(d-i)^2 = M\left(\varkappa_0^2 + \frac{d^2}{1 + \frac{M}{\mu}}\right).$$

Wird nun $\mu = \infty$, so ergibt sich $\lim (\mu + M)\varkappa^2 = M(\varkappa_0^2 + d^2)$, welches genau das Trägheitsmoment des Systems M um die Axe des Punktes A ist. Der Trägheitsradius $\varkappa$ nähert sich der Null; indessen ist i unendlich klein gegen $\varkappa$, wie man aus der Gleichung

$$\frac{\varkappa^2}{i^2} = \frac{\mu}{Md^2}\left[d^2 + \varkappa^2\left(1 + \frac{M}{\mu}\right)\right]$$

ersieht, welche $\lim \frac{\varkappa^2}{i^2} = \infty$ liefert. Dagegen ist

$$\frac{\varkappa^2}{i} = \frac{d^2 + \varkappa_0^2\left(1 + \frac{M}{\mu}\right)}{d\left(1 + \frac{M}{\mu}\right)} = d + \frac{\varkappa_0^2}{d} = l$$

eine endliche Länge und bedeutet den Abstand des zu A reciproken Punktes.

An massgebender Literatur für den Inhalt des vorstehenden Capitels führen wir noch an:

Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation des corps* (Liouville, Journ. de Mathém T. XVI, p. 9 u. 289 (1851); ist auch separat in zwei Ausgaben 1852 erschienen Bereits 1834 hatte Poinsot der Pariser Akademie die Lösung des Rotationsproblems eines unveränderlichen Systems ohne Einwirkung continuirlicher Kräfte in einer weniger ausführlichen Bearbeitung vorgelegt. Dieselbe wurde auch als Anhang seinen *Elemens de statique* beigefügt.

Poinsot, *Questions dynamiques. Sur la percussion des corps.* (Liouville, Journ. 2ième Série, T. II (1857), p. 281 und T. IV (1859), p. 421).
Poinsot, *Sur la quantité de mouvement qui est transmise à un corps par le choc d'un point massif qui vient le frapper dans une direction donnée.* (Liouville Journ. 2ième Série, T. IV, p. 161).
Folie, *Théorie nouvelle du mouvement d'un corps libre* (*Bulletins de l'Acad. des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique*, 2ième Série, T. XX (1865), p. 435).
Diese Schriften sind zugleich für die nächstfolgenden Capitel von Bedeutung.

XIII. Capitel.

Aequivalenz und Reduction der continuirlichen Kräfte (erster Ordnung) am unveränderlichen System.

§. 1. Der Geschwindigkeitszustand eines unveränderlichen Systems zur Zeit t wird durch den dieser Zeit entsprechenden Beschleunigungszustand desselben unendlich wenig geändert, indem zu den Geschwindigkeiten v der Systempunkte die Elementarbeschleunigungen $du = \varphi\, dt$ hinzutreten, um die der Zeit $t + dt$ entsprechenden Geschwindigkeiten v' zu bilden. Die Momentankräfte mv, welche die Geschwindigkeiten v zu geben vermögen, gehen ebenso in die Momentankräfte mv', welche den Geschwindigkeiten v' entsprechen, über, indem sich mit ihnen die unendlich kleinen Kräfte $m\,du = m\varphi\, dt$ nach dem Parallelogramm der Kräfte verbinden.. Diese Elementarkräfte, durch das Zeitelement dividirt, stellen die continuirlichen Kräfte $m\varphi$ dar, durch welche der Beschleunigungszustand des Systems bestimmt wird. Wir werden dieselben im Folgenden reduciren, den Beschleunigungszustand bestimmen, welchen ein gegebenes Kräftesystem hervorruft und zusehen, wie die Bewegung des Systems unter Einfluss gegebener Kräfte sich von Zeitelement zu Zeitelement ändert. Aehnlich, wie bei der Reduction der Momentankräfte in Cap. XII. verdient auch hier bemerkt zu werden, dass die Bezeichnung der Grössen $m\varphi$ als Kräfte (erster Ordnung) unwesentlich und mit Rücksicht auf die Bedeutung von m als eines blossen Coefficienten der Werthigkeit die Kräftereduction im Grunde eine Reduction der Beschleunigungen ist.

§. 2. Wir beginnen mit einem einfachen Falle, nämlich mit der Reduction der Kräfte eines ebenen, in seiner Ebene beweglichen Systems. Es seien C und G (Fig. 268.) das Momentancentrum und das Beschleunigungscentrum desselben (Thl. III, Cap. VI, §. 4.) zur Zeit t und Ω die Winkelgeschwindigkeit um C. Die Beschleunigung φ eines Systempunktes M im Abstande $MG = p$ von G hat zwei Componenten, eine centripetale, nach G gerichtete $\Omega^2 p$ und eine zu dieser senkrechte tangentiale $\frac{d\Omega}{dt} \cdot p$, deren Sinn je nach der positiven oder negativen Be-

schaffenheit von $\frac{d\Omega}{dt}$ mit Ω harmonirt oder disharmonirt; φ selbst hat den Werth $\varphi = p\sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2} = \vartheta\varphi$, wenn $\vartheta = \sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}$ die Beschleunigung eines Systempunktes in der Einheit der Entfernung vom Beschleunigungscentrum bezeichnet. Die Kraft $m\varphi$, welche dem Systempunkte die Beschleunigung φ zu ertheilen vermag, zerfällt demnach gleichfalls in eine centripetale und eine tangentiale Componente, deren Grössen $m\Omega^2 p$ und $m\frac{d\Omega}{dt}p$ sind und welche nach Richtung und Sinn mit den entsprechenden Beschleunigungscomponenten übereinstimmen.

Fig. 268.

Behufs der Reduction der Kräfte für das Beschleunigungscentrum G legen wir durch diesen Punkt ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y, dessen Drehungssinn mit dem Sinne von Ω übereinstimmt. Die Componenten $m\Omega^2 p$ und $m\frac{d\Omega}{dt}p$ haben in Bezug auf dasselbe die Richtungscosinusse $-\frac{x}{p}$, $-\frac{y}{p}$ und $-\frac{y}{p}$, $\frac{x}{p}$; sie selbst zerfallen daher in die Componenten $-m\Omega^2 x$, $-m\Omega^2 y$ und $-m\frac{d\Omega}{dt}y$, $m\frac{d\Omega}{dt}x$. Demnach hat die Resultante $R^{(1)}$ der Kräftereduction die Componenten

$$X^{(1)} = -\Omega^2 \Sigma mx - \frac{d\Omega}{dt}\Sigma my, \qquad Y^{(1)} = -\Omega^2 \Sigma my + \frac{d\Omega}{dt}\Sigma mx,$$

welche aber mit Hülfe der Coordinaten x_0, y_0 des Massenmittelpunktes S, welche den Gleichungen $Mx_0 = \Sigma mx$, $My_0 = \Sigma my$ genügen, die Form

$$X^{(1)} = -M\Omega^2 x_0 - M\frac{d\Omega}{dt}y_0, \qquad Y^{(1)} = -M\Omega^2 y_0 + M\frac{d\Omega}{dt}x_0$$

annehmen. Nun sind aber, wenn man die Entfernung des Massenmittelpunktes S vom Beschleunigungscentrum G, nämlich $SG = f$ setzt:

$$-\Omega^2 x_0 = \Omega^2 f\left(-\frac{x_0}{f}\right), \qquad -\Omega^2 y_0 = \Omega^2 f\left(-\frac{y_0}{f}\right)$$

die Componenten der centripetalen Beschleunigung $\Omega^2 f$ des Massenmittelpunktes und

$$-\frac{d\Omega}{dt}y_0 = \frac{d\Omega}{dt}f\left(-\frac{y_0}{f}\right), \qquad \frac{d\Omega}{dt}x_0 = \frac{d\Omega}{dt}f\left(\frac{x_0}{f}\right)$$

die der tangentialen Beschleunigung desselben und stellen daher $-M\Omega^2 x_0$, $-M\Omega^2 y_0$ die Componenten der centripetalen Kraft $\Omega^2 f$ sowie $-M\frac{d\Omega}{dt}y_0$, $M\frac{d\Omega}{dt}x_0$ die Componenten der tangentialen Kraft

$M \frac{d\Omega}{dt} f$ dar. Da beide Componenten zu einander rechtwinklig sind, so erhalten wir für die Resultante der Kräftereduction:

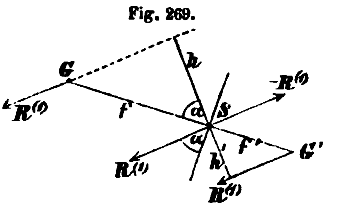
$$R^{(1)} = Mf \sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2} = Mf\vartheta.$$

Diese Kraft würde dem Massenmittelpunkte, wenn in ihm die Gesammtmasse des Systems vereinigt würde, die Beschleunigung $f\vartheta$ zu ertheilen vermögen. Die centripetalen Kräfte $m\Omega^2 p$ liefern bei der Reduction keine Paare, da sie durch den Reductionspunkt G hindurchgehen; die tangentialen Kräfte $m \frac{d\Omega}{dt} p$ dagegen liefern Paare $m \frac{d\Omega}{dt} p^2$ von gemeinschaftlicher Axenrichtung senkrecht zur Ebene des Systems und entspringt aus ihnen als resultirendes Paar $G^{(1)}$ der Reduction $G^{(1)} = \frac{d\Omega}{dt} \Sigma m p^2$. Wir erhalten daher den Satz:

Die continuirlichen Kräfte, welche ein ebenes System in seiner Ebene beschleunigen, sind äquivalent einer Resultanten $R^{(1)}$, welche durch das Beschleunigungscentrum hindurchgeht, und einem resultirenden Paare $G^{(1)}$, dessen Axe senkrecht zur Ebene ist. Die Resultante hat die Richtung und den Sinn der Beschleunigung des Massenmittelpunktes und ist gleich dem Produkte aus ihr und der Gesammtmasse des Systems. Das Paar ist gleich dem Produkte aus der Winkelbeschleunigung $\frac{d\Omega}{dt}$ des Systems und dem Trägheitsmomente desselben in Bezug auf die zur Ebene des Systems senkrechte Axe des Beschleunigungscentrums.

Wir können leicht diese Reduction der Kräfte auf den Massenmittelpunkt S übertragen, indem wir $R^{(1)}$ an diesen Punkt verlegen und das aus dieser Verlegung entspringende Paar $(R^{(1)}, -R^{(1)})$ mit dem Paare $G^{(1)}$ verbinden (Fig. 269.). Ist α der Winkel, welchen $R^{(1)}$ mit der Richtung der tangentialen Componente der Beschleunigung des Massenmittelpunktes bildet, so ist $h = f \cos\alpha$ der Arm des zuzufügenden Paares $R^{(1)}h$ und da dasselbe, wie leicht zu sehen, in allen Fällen entgegengesetzten Sinn von $G^{(1)}$ hat, so wird $G_1^{(1)} = G^{(1)} - R^{(1)} f \cos\alpha$ das neue Paar der Reduction sein. Diese Gleichung gibt aber mit Hülfe der Werthe $G^{(1)} = \frac{d\Omega}{dt} \Sigma m p^2$, $R^{(1)} = Mf\vartheta$ und mit Rücksicht darauf, dass die tangentiale Componente der Beschleunigung $\vartheta \cos\alpha = \frac{d\Omega}{dt}$ ist, $G_1^{(1)} = \frac{d\Omega}{dt} (\Sigma m p^2 - M f^2)$. Nun ist aber nach einem

Fig. 269.



bekannten Satze das Trägheitsmoment Σmp^2 für das Beschleunigungscentrum G gleich dem Trägheitsmomente $M\varkappa_0^2$ für S in Verbindung mit Mf^2, sodass $G_1^{(1)} = \frac{d\Omega}{dt} M\varkappa_0^2$ wird. Daher:

Die Kräfte des Systems sind äquivalent der Resultanten $R^{(1)} = Mf\vartheta$, welche nach Richtung und Sinn mit der Beschleunigung $f\vartheta$ des Massenmittelpunktes übereinstimmt, durch ihn hindurchgeht und ihm, wenn in ihm die Gesammtmasse des Systems vereinigt wäre, die Beschleunigung zu ertheilen vermöchte, die er in der That besitzt, in Verbindung mit dem Paare $G_1^{(1)} = \frac{d\Omega}{dt} M\varkappa_0^2$, gleich dem Produkte der Winkelbeschleunigung und dem Trägheitsmomente des Systems in Bezug auf den Massenmittelpunkt.

Die Kräfte eines ebenen Systems sind, wenn ihre Resultante nicht Null ist, einer Einzelkraft, gleich dieser Resultanten äquivalent, welche längs der Centralaxe des Systems wirkt. Um dieselbe in dem vorliegenden Falle zu finden, haben wir $R^{(1)}$ in einen solchen Abstand h' von S zu verlegen, dass das aus dieser Verlegung entspringende Paar $R^{(1)}h'$ das Paar $G_1^{(1)}$ tilgt. Damit dies Paar mit $G_1^{(1)}$ entgegengesetzten Sinn erlangt, muss diese Verlegung nach der Seite der an S angreifenden Kraft $R^{(1)}$ hin erfolgen, auf welcher das Beschleunigungscentrum G nicht liegt. Den Abstand h' erhalten wir aus der Bedingung $R^{(1)}h' = G_1^{(1)}$, welche nach Einsetzung der Werthe von

$$G_1^{(1)} = \frac{d\Omega}{dt} M\varkappa_0^2, \quad R^{(1)} = Mf\vartheta = \frac{M}{\cos^2\alpha} \cdot f\cos\alpha \cdot \vartheta\cos\alpha = \frac{M}{\cos^2\alpha} h \cdot \frac{d\Omega}{dt}$$

in $hh' = \varkappa_0^2 \cos^2\alpha$ übergeht. Mit Rücksicht auf $h = f\cos\alpha$ und, wenn die Entfernung SG' des Punktes S von dem Schnittpunkte von GS mit der Richtung der zu suchenden Centralaxe gleich f' gesetzt wird, also $f' = h'\cos\alpha$, kann diese Gleichung in der Form $ff' = \varkappa_0^2$ dargestellt werden.

Ist $R^{(1)} = 0$, so ist das System dem Paare $G_1^{(1)}$ äquivalent, welches eine beliebige Verlegung in der Ebene erleiden kann. Es wird $R^{(1)}$ nur Null, wenn $f = 0$, d. h. wenn das Beschleunigungscentrum mit dem Massenmittelpunkte zusammenfällt; in diesem Falle wird $f' = \infty$ und rückt die Centralaxe ins Unendliche. Diese Betrachtung liefert den Satz:

Wenn das Beschleunigungscentrum G nicht mit dem Massenmittelpunkte S zusammenfällt, so sind die Kräfte des ebenen Systems einer Einzelkraft $R^{(1)} = Mf\vartheta$ äquivalent, welche der Beschleunigung des Massenmittelpunktes parallel und mit ihr gleichen Sinnes ist und die Linie GS auf der Seite von S, auf welcher G nicht liegt, in einem Punkte G'

so schneidet, dass das Produkt $GS \cdot SG'$ gleich dem Quadrate des Trägheitsradius für den Massenmittelpunkt wird. Fällt aber G mit S zusammen, so sind die Kräfte dem Paare $G_l^{(1)} = \frac{d\Omega}{dt} M\varkappa_0^2$ äquivalent.

§. 3. Das Momentancentrum C, der Schnittpunkt C' der Einzelresultanten R der Momentankräfte mit der Linie CS und die beiden Punkte G, G', nämlich das Beschleunigungscentrum und der Schnittpunkt der Einzelresultanten $R^{(1)}$ der continuirlichen Kräfte mit GS liegen auf ein und demselben Kreise (Fig. 270.). Nach Cap. XII, §. 12. besteht nämlich zwischen den Abständen $CS = a$, $SC' = a'$ die Relation $aa' = \varkappa_0^2$, aus welcher in Verbindung mit der obigen Gleichung $ff' = \varkappa_0^2$ folgt: $aa' = ff'$. Drei der vier Punkte C, C'; G, G' bestimmen daher den vierten. Fällt das Momentancentrum C in S, also C' ins Unendliche, d. h. sind die Momentankräfte einem Paare äquivalent, so wird der Kreis unendlich gross und geht in die Gerade GG' über; ebenso wenn C' in S fällt, d. h. wenn das System eine Translationsgeschwindigkeit besitzt. Dasselbe tritt ein, wenn einer der Punkte G, G' in den Massenmittelpunkt S fällt; der Kreis geht dann in die Gerade CC' über. Tritt G in S ein, so rückt G' ins Unendliche; die continuirlichen Kräfte sind einem Paare äquivalent. Ist es mit G' der Fall, so entfernt sich das Beschleunigungscentrum ins Unendliche und werden die Beschleunigungen aller Systempunkte parallel, gleichen Sinnes und gleich $\frac{R^{(1)}}{M}$. Fallen C' und G' in S, so besitzt das System eine Translationsgeschwindigkeit und haben alle Punkte parallele und gleiche Beschleunigungen desselben Sinnes. Fallen C und G in S, so wird das System von einem Momentankräftepaare ergriffen und von einem Paare continuirlicher Kräfte beschleunigt.

Fig. 270.

Man kann leicht übersehen, wie die Bewegung des Systems sich von Moment zu Moment ändert. Zu der Momentankraft R zur Zeit t, welche durch C' geht und zu SC senkrecht ist, tritt die Elementarkraft $R^{(1)}dt$ und bildet mit Hülfe des Parallelogramms der Kräfte die Momentankraft R' für die Zeit $t + dt$. Indem man von S auf sie ein Perpendikel fällt, erhält man den Punkt C' für diese Zeit, zu welchem die Gleichung $aa' = \varkappa_0^2$ jenseits S das neue Momentancentrum liefert. Die Kraft R' bestimmt die Winkelgeschwindigkeit um dasselbe u. s. w. Um deutlich zu sehen, welche unendlich kleine Componente $d\Omega$ die Kraft $R^{(1)}dt$ der Winkelgeschwindigkeit und um welches Centrum sie ihr dieselbe ertheilt, ziehen wir CC' und suchen auf dieser Geraden den Punkt Γ, um welchen

$d\Omega$ erfolgen muss, damit $\Omega + d\Omega$ um C' zu Stande komme (Fig. 271.). Zufolge Thl. II, Cap. III, §. 4. ist hierzu die Bedingung

$$\frac{CC'}{d\Omega} = \frac{C'\Gamma}{\Omega} = \frac{C\Gamma}{\Omega + d\Omega}$$

zu erfüllen, aus welcher der Abstand $C\Gamma = \Omega \cdot \frac{CC'}{d\Omega} = \frac{\Omega U}{\frac{d\Omega}{dt}}$ (s. S. 381) sich ergibt. Der Punkt Γ fällt also in den Punkt H (Fig. 133.), in welchem die Tangente der Curve der Momentancentra den Bresse'schen Kreis der Punkte ohne Tangentialbeschleunigung zum zweiten Male schneidet.

Fig. 271.

Errichtet man daher im Beschleunigungscentrum G auf dessen Verbindungslinie mit dem Momentancentrum C eine Senkrechte, so trifft diese die Tangente der Curve (C) der Momentancentra oder die Richtung der Wechselgeschwindigkeit des Momentancentrums in dem Punkte H, um welchen die Kraft $R^{(1)}$ dem System die unendlich kleine Winkelgeschwindigkeit $d\Omega$ ertheilt, welche die Winkelgeschwindigkeit Ω nach Grösse und Centrum abändert.

§. 4. Mit Hülfe der vorstehenden Erörterungen ist es jetzt leicht, den Beschleunigungszustand zu ermitteln, in welchen ein gegebenes Kräftesystem das ebene Punktsystem versetzt. Wir reduciren dasselbe für den Massenmittelpunkt auf die Resultante $R^{(1)}$ und das resultirende Paar $G^{(1)}$. Da das Kräftesystem dem im Vorigen reducirten System der Kräfte $m\varphi$ äquivalent sein muss und eine Einzelkraft nur einer Einzelkraft, ein Paar nur einem Paare äquivalent sein kann, so folgt, dass mit Rücksicht auf Grösse, Richtung und Sinn die Gleichungen bestehen:

$$R^{(1)} = Mf\vartheta, \quad G^{(1)} = \frac{d\Omega}{dt} M\varkappa_0^2, \quad \vartheta^2 = \Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2.$$

Diese Gleichungen liefern ϑ und f, sobald Ω bekannt ist; zugleich bestimmt sich der Winkel α, welchen die Richtung der Beschleunigung mit ihrer tangentialen Componente bildet, durch die Formel $tg\,\alpha = \Omega^2 : \frac{d\Omega}{dt}$ und unter demselben Winkel ist auch ein Perpendikel auf GS gegen R geneigt. Die Lage des Beschleunigungscentrums ist vollständig bestimmt, sobald man noch, um über die Seite von S zu entscheiden, auf welche dasselbe fällt, vorher die Centralaxe der gegebenen Kräfte oder also den Punkt G' aufsucht. Der Kreis, auf welchem C, C', G, G' liegen und die Gleichungen $ff' = \varkappa_0^2$, $hh' = \varkappa_0^2 \cos^2\alpha$ sind zweckmässig zur Construction zu verwerthen.

Ist nun die Resultante $R^{(1)}$ nicht Null, so ergibt sich ein bestimmtes Beschleunigungscentrum in endlichem Abstande von S; ist aber $R^{(1)}$ gleich Null, so wird $f = 0$ und fällt das Beschleunigungscentrum mit S zusammen. Der Massenmittelpunkt besitzt in diesem Falle keine Beschleunigung und ändert sich mithin seine Geschwindigkeit im folgenden Momente weder nach Grösse, noch nach Richtung und Sinn. Die Beschleunigung aller übrigen Punkte ist durch das Paar $G^{(1)}$ bestimmt und auf concentrischen Kreisen um S constant. Ist $G^{(1)} = 0$, nicht aber $R^{(1)}$, so geht die Centralaxe der Kräfte durch S und fällt das Beschleunigungscentrum ins Unendliche. Die Beschleunigungen aller Systempunkte sind parallel der Richtung von R und gleich $\frac{R}{M}$. Ist $R^{(1)} = 0$ und $G^{(1)} = 0$, so findet im System gar keine Beschleunigung statt; es wird $\frac{d\Omega}{dt} = 0$, also Ω constant. Diese Resultate liefern uns den Satz:

Ein Kräftesystem, welches an einem ebenen unveränderlichen Punktsystem in dessen Ebene wirkt, ertheilt demselben einen Beschleunigungszustand um ein bestimmtes Beschleunigungscentrum. Ist das Kräftesystem einer Einzelkraft äquivalent, so liegt dies Centrum in endlichem Abstande vom Massenmittelpunkte, so lange dieselbe nicht durch diesen Punkt selbst hindurchgeht; es fällt aber ins Unendliche und werden alle Beschleunigungen parallel und gleich, sobald dieser Fall eintritt. Ist das Kräftesystem einem Paare äquivalent, so erzeugt dies Beschleunigung um den Massenmittelpunkt als Centrum.

Die Beschleunigung des Massenmittelpunktes S wird in allen Fällen durch die Resultante $R^{(1)}$ der Reduction für S allein bestimmt. Denn das Paar $G^{(1)}$ erzeugt Beschleunigung um S als Beschleunigungscentrum und erlangt in Folge dessen dieser Punkt von $G^{(1)}$ keine Beschleunigung. Die Resultante ertheilt aber dem System Beschleunigung um ein unendlich fernes Centrum und sind die Beschleunigungen aller Punkte, welche von ihr herrühren, gleich $\frac{R^{(1)}}{M}$ und parallel $R^{(1)}$. Die Beschleunigung eines beliebigen Systempunktes setzt sich aus beiden Beschleunigungen zusammen. Man folgert hieraus insbesondere:

Reduciren sich während der Bewegung des Systems die Kräfte fortwährend auf ein Paar, welches sich nach irgendwelchem Gesetze verändern mag, so bleibt die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes nach Grösse und Richtung constant und beschreibt dieser Punkt eine gerade Linie gleichförmig.

Reduciren sich die Kräfte fortwährend auf eine durch den Massenmittelpunkt gehende Einzelkraft, so haben alle Systempunkte zugleich parallele und gleiche Beschleunigungen von der Richtung der Kraft; die Richtung und Intensität dieser Beschleunigungen ist im Laufe der Bewegung mit der Einzelkraft zugleich constant oder veränderlich.

§. 5. Denkt man sich zur Zeit t die Reduction der Momentankräfte und die der continuirlichen Kräfte beide für den Massenmittelpunkt ausgeführt, sodass R, G; $R^{(1)}$, $G^{(1)}$ die Reductionselemente sind, so bildet sich aus R und der Elementarkraft $R^{(1)}dt$ die Momentankraft R' für die Zeit $t + dt$, indem beide an dem Schnittpunkte der Richtungen von R und $R^{(1)}$ nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammentreten; ebenso liefern G und $G^{(1)}dt$ das resultirende Paar G' der Momentankräfte für die Zeit $t + dt$. Da das Axenmoment von G stets senkrecht zur Ebene des Systems ist, so ist $G^{(1)}dt$ das Differential von G im gewönlichen Sinne, während $R^{(1)}dt$ das geometrische Differential von R ist, da letztere Grösse auch der Richtung nach sich ändert. Denkt man sich die beiderlei Kräftereductionen für die Centralaxen ausgeführt, so gestaltet sich diese Betrachtung noch etwas einfacher.

Sind z. B. $R^{(1)}$ und $G^{(1)}$ fortwährend Null, so ändert die Momentanresultante weder Grösse noch Richtung und bleibt G, mithin auch Ω constant. Der Massenmittelpunkt beschreibt eine Gerade mit constanter Geschwindigkeit. Nach Cap. XII, §. 12. ist $R = M\Omega a$ und behält mithin das Momentancentrum C von S constanten Abstand a. Der Ort der Momentancentra im System ist daher ein Kreis, um den Massenmittelpunkt beschrieben. Aus der Gleichung $aa' = \varkappa_0^2$ folgt, dass auch R von S constanten Abstand a' behält und da R weder Richtung noch Grösse ändert und seine Richtung die der Geschwindigkeit von S ist, so folgt, dass der Ort des Momentancentrums im absoluten Raume eine Gerade ist, welche im Abstande a mit der geradlinigen Bahn von S parallel läuft. Demnach besteht die Bewegung des Systems in dem gleichförmigen Rollen des Kreises der Momentancentra auf einer Geraden und ist also die Cycloidenbewegung. In diese Bewegung wird das System durch einen momentanen Stoss versetzt.

§. 6. Wir reduciren jetzt die Kräfte für den allgemeinsten Fall der Bewegung eines unveränderlichen Systems. Nach Thl. III, Cap. VIII, §. 3. hat die Beschleunigung eines Systempunktes M zu Componenten: 1. die centripetale Beschleunigung $\Omega^2 p$, senkrecht zu der durch das Beschleunigungscentrum zur Momentanaxe c parallelen Axe c_1, von welcher M den Abstand p besitzt und dem Sinne nach dieser Axe zugewandt; 2. die von der Winkelbeschleunigung α herrührende Beschleunigung $\alpha\delta$, wenn δ den Abstand des Punktes M von der durch G parallel mit der Axe der Winkelbeschleunigung gelegten Axe α_1 bedeutet, senkrecht

zur Ebene durch diese Axe und den Punkt M und dem Sinne nach mit dem Drehungssinne von α harmonirend. Die Componente $\alpha\delta$ kann in zwei andere zerlegt werden: a) eine tangentiale Beschleunigung $\frac{d\Omega}{dt}p$ senkrecht zur Ebene (c_1, M), mit Ω dem Sinne nach harmonirend oder ihm entgegengesetzt, je nachdem $\frac{d\Omega}{dt}$ positiv oder negativ ist, welche Componente von der Tangentialcomponente $\frac{d\Omega}{dt}$ der Winkelbeschleunigung herrührt, sowie b) eine Componente $\Omega\Psi r_1$, herrührend von der Normalwinkelbeschleunigung $\Omega\Psi$ und senkrecht zur Ebene durch M und die mit der Axe der Normalwinkelbeschleunigung durch G parallel gezogene Gerade, welche Gerade die Projection von α_1 auf eine zu c_1 senkrechte Ebene des Punktes G ist, wobei r_1 den Abstand des Punktes M von dieser Geraden bedeutet und $\Psi = \frac{d\sigma}{dt}$ ist, wenn $d\sigma$ den unendlich kleinen Winkel zweier Momentanaxen bezeichnet, die den Zeiten t und $t + dt$ entsprechen. Die Kräfte, welche diesen Beschleunigungscomponenten zukommen und mit diesen nach Richtung und Sinn übereinstimmen, sind: 1. die Centripetalkraft $m\Omega^2 p$ und 2. die Kraft $m\alpha\delta$, welche letztere in die beiden anderen a) die tangentiale Kraft $m\frac{d\Omega}{dt}p$ und b) die Kraft $m\Omega\Psi r_1$ zerfällt werden kann.

§. 7. Wir reduciren diese Kräfte zunächst für das Beschleunigungscentrum G als Reductionspunkt und legen zu diesem Behufe durch dasselbe ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen positive z-Axe nach Sinn und Richtung mit der Momentanaxe c_1 übereinstimmt, während die x- und y-Axe beliebig in der zu c_1 senkrechten Ebene wählbar sein sollen. Die Centripetalkraft $m\Omega^2 p$ hat alsdann die Richtungscosinusse $-\frac{x}{p}$, $-\frac{y}{p}$, 0 und folglich die Componenten $-m\Omega^2 x$, $-m\Omega^2 y$, 0. Die Richtungscosinusse der tangentialen Componente $m\frac{d\Omega}{dt}p$ sind $-\frac{y}{p}$, $\frac{x}{p}$, 0 und sie zerfällt daher in $-m\frac{d\Omega}{dt}y$, $m\frac{d\Omega}{dt}x$, 0. Die Kraft $m\Omega\Psi r_1$ zerfällen wir aber auf folgende Weise. Es sei λ der Winkel, welchen die Axe der Normalwinkelbeschleunigung, welche in der Ebene der xy liegt, mit der x-Axe bildet. Dann hat $\Omega\Psi$ die Componenten $\Omega\Psi\cos\lambda$, $\Omega\Psi\sin\lambda$, 0 und ertheilt dem Systempunkte parallel den Coordinatenaxen die Beschleunigungen (s. Thl. III, Cap. VII, §. 4.) $\Omega\Psi\sin\lambda\cdot z$, $-\Omega\Psi\cos\lambda\cdot z$, $\Omega\Psi\cos\lambda\cdot y - \Omega\Psi\sin\lambda\cdot x$. Sie sind äquivalent der Beschleunigung $\Omega\Psi r_1$ desselben; daher liefert die Kraft $m\Omega\Psi r_1$ die Componenten $m\Omega\Psi\sin\lambda\cdot z$, $-m\Omega\Psi\cos\lambda\cdot z$, $m\Omega\Psi\cos\lambda\cdot y - m\Omega\Psi\sin\lambda\cdot x$. Demnach hat die Kraft überhaupt, welche dem Punkte M seine Beschleunigung ertheilt, zu Componenten:

$$- m\Omega^2 x - m\frac{d\Omega}{dt}y + m\Omega\Psi z \sin\lambda$$

$$- m\Omega^2 y + m\frac{d\Omega}{dt}x - m\Omega\Psi z \cos\lambda$$

$$m\Omega\Psi y\cos\lambda - m\Omega\Psi x\sin\lambda.$$

Indem wir diese Ausdrücke durch das ganze System hindurch summiren, erhalten wir die Componenten $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$, $Z^{(1)}$ der Reductionsresultanten $R^{(1)}$, welche für alle Reductionspunkte dieselbe ist nach Grösse, Richtung und Sinn:

$$X^{(1)} = -\Omega^2\Sigma mx - \frac{d\Omega}{dt}\Sigma my + \Omega\Psi\sin\lambda\,\Sigma mz$$

$$Y^{(1)} = -\Omega^2\Sigma my + \frac{d\Omega}{dt}\Sigma mx - \Omega\Psi\cos\lambda\,\Sigma mz$$

$$Z^{(1)} = \Omega\Psi\cos\lambda\,\Sigma my - \Omega\Psi\sin\lambda\,\Sigma mx.$$

Bezeichnen nun x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Massenmittelpunktes S, sodass also $\Sigma mx = Mx_0$, $\Sigma my = My_0$, $\Sigma mz = Mz_0$ werden, so nehmen $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$, $Z^{(1)}$ die Form an:

$$X^{(1)} = -M\Omega^2 x_0 - M\frac{d\Omega}{dt}y_0 + M\Omega\Psi z_0\sin\lambda$$

$$Y^{(1)} = -M\Omega^2 y_0 + M\frac{d\Omega}{dt}x_0 - M\Omega\Psi z_0\cos\lambda$$

$$Z^{(1)} = M\Omega\Psi y_0\cos\lambda - M\Omega\Psi x_0\sin\lambda.$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den vorhin gebildeten Kraftcomponenten des Systempunktes zeigt, dass sie die Produkte der Gesammtmasse des Systems mit den Beschleunigungscomponenten des Massenmittelpunktes sind. Hieraus folgt:

Die Resultante $R^{(1)}$ der Kräftereduction ist das Produkt aus der Gesammtmasse des Systems und der Beschleunigung des Massenmittelpunktes; sie stimmt nach Richtung und Sinn mit dieser Beschleunigung überein und würde dem Reductionspunkte die Beschleunigung des Massenmittelpunktes zu ertheilen vermögen, wenn in ihm die Gesammtmasse des Systems vereinigt würde.

Bilden wir jetzt die Componenten des Paares, welches sich bei der Reduction der Kraft des Punktes M für den Punkt G ergibt und summiren gleichfalls durch das System hindurch, so erhalten wir als Componenten $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ des resultirenden Axenmomentes $G^{(1)}$ der Reduction für das Beschleunigungscentrum:

$$G_x^{(1)} = \Omega^2\Sigma myz - \frac{d\Omega}{dt}\Sigma mxz + \Omega\Psi\cos\lambda\,\Sigma m(y^2+z^2) - \Omega\Psi\sin\lambda\,\Sigma mxy$$

$$G_y^{(1)} = -\Omega^2\Sigma mxz - \frac{d\Omega}{dt}\Sigma myz + \Omega\Psi\sin\lambda\,\Sigma m(z^2+x^2) - \Omega\Psi\cos\lambda\,\Sigma mxy$$

$$G_z^{(1)} = \frac{d\Omega}{dt}\Sigma m(x^2+y^2) - \Omega\Psi\cos\lambda\,\Sigma mxz - \Omega\Psi\sin\lambda\,\Sigma myz.$$

Man erkennt in diesen Ausdrücken drei Kräftepaare, nämlich 1. das resultirende Paar der Centripetalkräfte, dessen Componenten $\Omega^2 \Sigma myz$ und $-\Omega^2 \Sigma mxz$ sind, dessen Axenmoment mithin den Werth

$$\Omega^2 \sqrt{(\Sigma mxz)^2 + (\Sigma myz)^2}$$

hat; 2. das resultirende Paar der tangentialen Kräfte, dessen Componenten

$$-\frac{d\Omega}{dt}\Sigma mxz, \quad -\frac{d\Omega}{dt}\Sigma myz, \quad \frac{d\Omega}{dt}\Sigma m(x^2+y^2)$$

sind, von denen die letztere auch in der Form $\frac{d\Omega}{dt} M\varkappa_1{}^2$ geschrieben werden kann, wenn $\varkappa_1$ den Trägheitsradius des Systems für die Axe c_1 bedeutet; das Paar selbst ist

$$\frac{d\Omega}{dt}\sqrt{(\Sigma mxz)^2 + (\Sigma myz)^2 + M\varkappa_1{}^2};$$

3. das resultirende Paar, welches von den Kräften herbeigeführt wird, welche durch die Normalwinkelbeschleunigung veranlasst werden; alle noch übrigen Glieder bilden seine Bestandtheile.

Das resultirende Paar der Centripetalkräfte bildet sich aus den Paaren $\Omega^2 pz$, deren Axen senkrecht sind zu den Ebenen (c_1, M); das resultirende Paar der tangentialen Kräfte geht aus den Paaren $m\frac{d\Omega}{dt}p\cdot\overline{GM}$ hervor, deren Axen in die Ebenen (c_1, M) fallen. Je zwei solche Elemente beider resultirender Paare, welche demselben Punkte M entsprechen, haben daher zu einander senkrechte Axenmomente. Hieraus folgt, dass auch beide resultirende Paare zu einander senkrechte Axenmomente besitzen. Man liest dies auch in obigen Formeln, denn die Richtungscosinusse dieser Paare sind proportional Σmyz, $-\Sigma mxz$, 0 und $-\Sigma mxz$, $-\Sigma myz$, $\Sigma m(x^2+y^2)$ und der Cosinus ihres Winkels ist mithin proportional

$$-\Sigma myz\cdot\Sigma mxz + \Sigma mxz\cdot\Sigma myz + 0\cdot\Sigma m(x^2+y^2),$$

also Null. Das resultirende Paar der tangentialen Kräfte spaltet sich in zwei andere. Denn die Paare $m\frac{d\Omega}{dt}p\cdot\overline{GM}$, aus denen es hervorgeht, sind äquivalent den Paaren $m\frac{d\Omega}{dt}pz$ und $m\frac{d\Omega}{dt}p^2$. Die Axenmomente der ersteren schneiden die Axe c_1 rechtwinklig und liefern das Paar

$$\frac{d\Omega}{dt}\sqrt{(\Sigma mxz)^2 + (\Sigma myz)^2};$$

die Axenmomente der anderen sind c_1 parallel und liefern $\frac{d\Omega}{dt}M\varkappa_1{}^2$. Ebenso zerfällt das resultirende Paar der Normalwinkelbeschleunigungs-

kräfte in zwei Paare. Denn die Paare $m\Omega\Psi r_1 \cdot \overline{GM}$, aus denen es sich bildet, lassen sich spalten in $m\Omega\Psi r_1 p$ und $m\Omega\Psi r_1^2$. Die Axen der ersteren sind zur Axe der Winkelbeschleunigung rechtwinklig, die der anderen sind ihr parallel und geben $\Omega\Psi\Sigma m r_1^2 = \Omega\Psi M\varkappa'^2$, wenn $\varkappa'$ den Trägheitsradius für die Axe der Normalwinkelbeschleunigung darstellt. Wir heben aus diesen Betrachtungen den Satz hervor:

Das resultirende Paar der Kräftereduction für das Beschleunigungscentrum entspringt aus drei anderen, dem resultirenden Paare der Centripetalkräfte, dem der tangentialen und dem der Kräfte, welche durch die Normalwinkelbeschleunigung eingeführt werden. Die Axenmomente der beiden ersteren sind zu einander senkrecht.

Denkt man sich die Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe zerlegt in die Winkelgeschwindigkeit Ω um c_1 und die Translationsgeschwindigkeit gleich der von der Winkelgeschwindigkeit herrührenden Geschwindigkeit des Centrums G und reducirt die Momentankräfte $m\Omega p$ der Winkelgeschwindigkeit um c_1, so entstehen Paare $m\Omega p \cdot \overline{GM}$, deren resultirendes Paar ein Axenmoment parallel dem Axenmomente der tangentialen Kräfte und senkrecht zu dem Axenmomente der Centripetalkräfte ist. Auch ist die Resultante der Momentankräfte senkrecht zur Resultanten der Centripetalkräfte und geht letztere aus ersterer durch Multiplication mit Ω hervor. Die Paare von Momentankräften $m\Omega p \cdot \overline{GM}$ zerfallen endlich auch in $m\Omega pz$ und $m\Omega p^2$, von denen die letzteren Axenmomente senkrecht zu c_1 haben. Sie liefern daher das Paar $\Omega\Sigma mp^2$, aus welchem das resultirende Paar der Centripetalkräfte durch Multiplication mit Ω abgeleitet werden kann.

§. 8. Fallen Beschleunigungscentrum und Massenmittelpunkt zusammen, so sind x_0, y_0, z_0 Null und also $R^{(1)} = 0$, d. h. die Kräfte eines unveränderlichen Systems, dessen Beschleunigungscentrum in den Massenmittelpunkt fällt, sind einem Paare äquivalent und umgekehrt.

Geht die Axe c_1 durch den Massenmittelpunkt hindurch, so werden $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, also $X^{(1)} = M\Omega\Psi z_0 \sin\lambda$, $Y^{(1)} = -M\Omega\Psi z_0 \cos\lambda$, $Z^{(1)} = 0$, $R^{(1)} = M\Omega\Psi z_0$ und sind $\sin\lambda$, $-\cos\lambda$ die Richtungscosinusse von $R^{(1)}$, d. h. es bildet $R^{(1)}$ mit der y-Axe den Winkel λ oder steht $R^{(1)}$ senkrecht auf der Axe der Normalwinkelbeschleunigung und fällt demnach in die Richtung der Orthogonalgeschwindigkeit.

Ist $\Psi = 0$, so wechselt die Momentanaxe nicht; das resultirende Paar $G^{(1)}$ bildet sich blos aus den beiden zu einander senkrechten Axenmomenten der Centripetal- und der tangentialen Kräfte. Ist zugleich die der Momentanaxe parallele Axe eine Hauptaxe, so sind $\Sigma mxz = 0$ und $\Sigma myz = 0$ und reducirt sich $G^{(1)}$ auf $G_z^{(1)} = \frac{d\Omega}{dt} M\varkappa_1^2$.

§. 9. Die für das Beschleunigungscentrum gefundene Kräftereduction können wir nun leicht auf den Massenmittelpunkt S übertragen, dessen Coordinaten in Bezug auf das bisherige Coordinatensystem x_0, y_0, z_0 sind. Die Resultante $R^{(1)}$ der Reduction erleidet dabei keine Aenderung, zu dem resultirenden Paare tritt aber das Paar, welches durch die Verlegung von $R^{(1)}$ an den Punkt S entsteht, hinzu. Dies Paar erhalten wir also durch Reduction der Kraft $(-X^{(1)}, -Y^{(1)}, -Z^{(1)})$ an S in Bezug auf G; dasselbe hat demnach zu Componenten:

$$-(y_0 Z^{(1)} - z_0 Y^{(1)}) = -M\Omega^2 y_0 z_0 + M\frac{d\Omega}{dt} x_0 y_0$$
$$+ M\Omega\Psi x_0 y_0 \sin\lambda - M\Omega\Psi\cos\lambda\,(y_0^2 + z_0^2)$$
$$-(z_0 X^{(1)} - x_0 Z^{(1)}) = \quad M\Omega^2 z_0 x_0 + M\frac{d\Omega}{dt} z_0 x_0$$
$$+ M\Omega\Psi\sin\lambda\cdot(x_0^2 + z_0^2) - M\Omega\Psi x_0 y_0 \cos\lambda$$
$$-(x_0 Y^{(1)} - y_0 X^{(1)}) = -M\frac{d\Omega}{dt}(x_0^2 + y_0^2)$$
$$+ M\Omega\Psi x_0 z_0 \cos\lambda + M\Omega\Psi y_0 z_0 \sin\lambda.$$

Um diese Componenten mit den Componenten $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ der Reduction für G besser vereinigen zu können, nehmen wir S zum Ursprung eines dem vorigen parallelen Coordinatensystems der x, y, z. Dann sind x, y, z zu ersetzen durch $x + x_0$, $y + y_0$, $z + z_0$. Demnach werden die Componenten des resultirenden Paares der Reduction für den Massenmittelpunkt:

$$G_{x_0}^{(1)} = \Omega^2 \Sigma m\,(y + y_0)(z + z_0) - \frac{d\Omega}{dt}\Sigma m\,(x + x_0)(z + z_0)$$
$$+ \Omega\Psi\cos\lambda\,\Sigma m\,[(y + y_0)^2 + (z + z_0)^2] - \Omega\Psi\sin\lambda\,\Sigma m\,(x + x_0)(y + y_0)$$
$$- \Omega^2 M y_0 z_0 + \frac{d\Omega}{dt} M x_0 y_0 - \Omega\Psi\cos\lambda\cdot M(y_0^2 + z_0^2) + \Omega\Psi M x_0 y_0 \sin\lambda$$

$$G_{y_0}^{(1)} = -\Omega^2\Sigma m\,(x + x_0)(z + z_0) - \frac{d\Omega}{dt}\Sigma m\,(y + y_0)(z + z_0)$$
$$+ \Omega\Psi\sin\lambda\,\Sigma m\,[(z + z_0)^2 + (x + x_0)^2] - \Omega\Psi\cos\lambda\,\Sigma m\,(x + x_0)(y + y_0)$$
$$+ \Omega^2 M x_0 z_0 + \frac{d\Omega}{dt} M y_0 z_0 - \Omega\Psi\sin\lambda\cdot M(z_0^2 + x_0^2) + \Omega\Psi\cos\lambda\cdot M x_0 y_0$$

$$G_{z_0}^{(1)} = \frac{d\Omega}{dt}\Sigma m\,[(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2]$$
$$- \Omega\Psi\cos\lambda\,\Sigma m\,(x + x_0)(z + z_0) - \Omega\Psi\sin\lambda\,\Sigma m\,(y + y_0)(z + z_0)$$
$$- \frac{d\Omega}{dt} M(x_0^2 + y_0^2) - \Omega\Psi\cos\lambda\cdot M x_0 z_0 - \Omega\Psi\sin\lambda\cdot M y_0 z_0,$$

oder kürzer vermöge der Eigenschaften des Massenmittelpunktes $\Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz = 0$:

$$G^{(1)}_{x_0} = \Omega^2 \Sigma myz - \frac{d\Omega}{dt} \Sigma mxz + \Omega\Psi \cos\lambda\, \Sigma m(y^2+z^2) - \Omega\Psi \sin\lambda\, \Sigma mxy$$

$$G^{(1)}_{y_0} = -\Omega^2 \Sigma mxz - \frac{d\Omega}{dt} \Sigma myz + \Omega\Psi \sin\lambda\, \Sigma m(z^2+x^2) - \Omega\Psi \cos\lambda\, \Sigma mxy$$

$$G^{(1)}_{z_0} = \frac{d\Omega}{dt} \Sigma m(x^2+y^2) - \Omega\Psi \cos\lambda\, \Sigma mxz - \Omega\Psi \sin\lambda\, \Sigma myz.$$

Die Form dieser Ausdrücke ist ganz dieselbe, wie die der Grössen $G^{(1)}_x$, $G^{(1)}_y$, $G^{(1)}_z$ für das Beschleunigungscentrum. Auch gelten die oben bemerkten Beziehungen zu der Reduction der Momentankräfte für den Massenmittelpunkt in gleicher Weise, wie für das Beschleunigungscentrum.

Bei der Reduction der Kräfte für den Massenmittelpunkt erhält man eine Resultante $R^{(1)}$, gleich dem Produkte aus der Gesammtmasse des Systems und der Beschleunigung des Massenmittelpunktes und nach Richtung und Sinn mit dieser Beschleunigung übereinstimmend. Sie würde dem Massenmittelpunkte die Beschleunigung, die er besitzt, zu ertheilen vermögen, wenn in ihm die Gesammtmasse des Systems vereinigt wäre. Man erhält ferner ein resultirendes Paar, welches sich aus den Paaren der Centripetalkräfte, der tangentialen und der Winkelbeschleunigungskräfte bildet, als ob das Beschleunigungscentrum im Massenmittelpunkte sich befände.

§. 10. Um den Beschleunigungszustand zu bestimmen, in welchen das Punktsystem durch ein gegebenes Kräftesystem versetzt wird, kann man das Kräftesystem für den Massenmittelpunkt S reduciren. Man erhält eine Resultante $R^{(1)}$ und ein resultirendes Paar $G_0{}^{(1)}$, deren Componenten mit den im vorigen §. gefundenen äquivalent sind. Zerlegt man also $R^{(1)}$ und $G_0{}^{(1)}$ nach drei zu einander rechtwinkligen Richtungen der x, y, z, von denen die z-Axe die Richtung der Momentanaxe hat, während die beiden anderen sich in S schneidenden Axen eine beliebige Lage haben können, so dienen die drei Gleichungen des §. 7. für $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$, $Z^{(1)}$ und die drei letzten des §. 10. für $G^{(1)}_{x_0}$, $G^{(1)}_{y_0}$, $G^{(1)}_{z_0}$ dazu, die Coordinaten der x_0, y_0, z_0 des Massenmittelpunktes in Bezug auf das Beschleunigungscentrum und mithin auch die Coordinaten $-x_0$, $-y_0$, $-z_0$ des Beschleunigungscentrums in Bezug auf S zu finden. Die drei letzten Gleichungen aber liefern die Tangential- und Normalwinkelbeschleunigung $\frac{d\Omega}{dt}$ und $\Omega\Psi$, sowie den Winkel λ und mithin auch die Richtung der Orthogonalgeschwindigkeit.

Ist $R^{(1)} = 0$, also $X^{(1)} = Y^{(1)} = Z^{(1)} = 0$, so verschwinden x_0, y_0, z_0, d. h. verschwindet die Resultante der Kräftereduction

so fällt das Beschleunigungscentrum mit dem Massenmittelpunkte zusammen oder ein Paar $G^{(1)}$ ertheilt dem System Beschleunigung um den Massenmittelpunkt.

Ist $G_0^{(1)} = 0$, so erlangen alle Systempunkte gleiche und parallele Beschleunigungen $\frac{R^{(1)}}{M}$ von der Richtung und dem Sinne der Resultanten $R^{(1)}$.

Der Massenmittelpunkt erhält seine Beschleunigung blos durch die Reductionsresultante, indem das resultirende Paar nur um den Massenmittelpunkt selbst Beschleunigung ertheilt. Die Kraft $R^{(1)}$ fügt nämlich zur Resultanten R der Momentankräfte die Elementarkraft $R^{(1)}dt$ hinzu und bildet dadurch die Momentankraft R' für die Zeit $t + dt$. Das Axenmoment $G_0^{(1)}$ fügt ebenso zu dem Axenmomente G_0 der Momentankräftereduction für den Punkt S das unendlich kleine Axenmoment $G_0^{(1)}dt$ hinzu, um das Axenmoment G_0' der Momentankräfte für $t + dt$ zu erzeugen. Es sind demnach $R^{(1)}dt$ und $G_0^{(1)}dt$ die geometrischen Differentiale und $R^{(1)}$ und $G_0^{(1)}$ die geometrischen Derivirten von R und G_0. Ist also $G_0^{(1)} = 0$, so ändert sich G_0 nicht, wohl aber $R^{(1)}$ um $R^{(1)}dt$ und diese Elementarkraft, welche durch den Massenmittelpunkt geht, ertheilt dem System die unendlich kleine Translationsgeschwindigkeit $\frac{R^{(1)}}{M}dt$, welcher als Elementarbeschleunigung die allen Punkten gemeinsame Beschleunigung $\frac{R^{(1)}}{M}$ entspricht.

Ist $R^{(1)} = 0$ und $G_0^{(1)} = 0$, so bleiben R und G_0 ungeändert nach Grösse und Richtung. Also:

Reducirt sich das Kräftesystem auf eine durch den Massenmittelpunkt gehende Kraft $R^{(1)}$, so erlangen alle Punkte gleiche Beschleunigung von demselben Sinne und derselben Richtung, wie $R^{(1)}$. Sind die Kräfte des Systems im Gleichgewichte, so bleiben die Resultante und das resultirende Axenmoment der Momentankräfte ungeändert nach Grösse und Richtung.

Indem man sich den Geschwindigkeitszustand jeden Augenblick während der Bewegung in die Translationsgeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes und die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe dieses Punktes aufgelöst denkt, die Momentankräfte R und G_0 bestimmt, welche diesen Geschwindigkeitszustand zu erzeugen vermögen, erkennt man deutlich, wie durch Hinzutreten von $R^{(1)}dt$ und $G_0^{(1)}dt$ diese Grössen R und G_0 sich von Moment zu Moment ändern und dadurch zugleich der Geschwindigkeitszustand des Systems variirt. Indem man das Axenmoment $G_0^{(1)}dt$ mit dem Axenmomente G_0 der Momentankräfte in S nach dem Parallelogramm verbindet, ergibt sich

das Axenmoment G_0' der Momentankräfte für den folgenden Zeitmoment; indem man senkrecht zu ihm eine Ebene führt und im Centralellipsoid den zu ihr conjugirten Diameter sucht, erhält man die neue Momentanaxe nebst der neuen Winkelgeschwindigkeit. Die Ebene beider Momentanaxen enthält die Axe der Winkelbeschleunigung. Man kann die Axe der Winkelbeschleunigung aber auch dadurch finden, dass man zu der Richtung des Axenmomentes $G_0^{(1)}$ eine Ebene senkrecht führt und im Centralellipsoid zu ihr den conjugirten Diameter bestimmt; denn um ihn erzeugt $G_0^{(1)}dt$ die unendlich kleine Winkelgeschwindigkeit $d\Omega$, welche mit Ω zusammen die Winkelgeschwindigkeit des nächsten Momentes bildet. Auf diesem Wege erhält man die Winkelbeschleunigung α und ihre Componenten $\frac{d\Omega}{dt}$, $\Omega\Psi$ und die Richtung der Orthogonalgeschwindigkeit u. s. w.

§. 11. Die vorhergehenden Reductionen der Kräfte geben uns eine deutliche Einsicht in den Vorgang der Bewegung des Systems, aber vermöge der speciellen Wahl der Coordinatenaxen unsymmetrische Formeln. Um die Darstellungsweise symmetrisch zu gestalten und insbesondere die Componenten des resultirenden Paares in einer für die Rechnung zweckmässigeren Gestalt zu erhalten, wählen wir drei beliebige rechtwinklige Coordinatenaxen des Massenmittelpunktes S, welche im System fest und mit ihm beweglich sind und bestimmen in Bezug auf die Momentanaxe dieses Punktes, wie in Thl. III, Cap. VII, §. 4. die Componenten der centripetalen Beschleunigung des Systempunktes (xyz) nämlich:

$$\Omega_x(x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) - \Omega^2 x,$$
$$\Omega_y(x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) - \Omega^2 y,$$
$$\Omega_z(x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) - \Omega^2 z$$

nebst den Componenten der Winkelbeschleunigung:

$$\frac{d\Omega_y}{dt}z - \frac{d\Omega_z}{dt}y, \quad \frac{d\Omega_z}{dt}x - \frac{d\Omega_x}{dt}z, \quad \frac{d\Omega_x}{dt}y - \frac{d\Omega_y}{dt}x.$$

Die Componenten der Kraft, welche dem Punkte diese Beschleunigungscomponenten ertheilt, sind

$$X = m\left[\Omega_x(x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) - \Omega^2 x + \left(\frac{d\Omega_y}{dt}z - \frac{d\Omega_z}{dt}y\right)\right]$$
$$Y = m\left[\Omega_y(x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) - \Omega^2 y + \left(\frac{d\Omega_z}{dt}x - \frac{d\Omega_x}{dt}z\right)\right]$$
$$Z = m\left[\Omega_z(x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) - \Omega^2 z + \left(\frac{d\Omega_x}{dt}y - \frac{d\Omega_y}{dt}x\right)\right]$$

und sie liefern die Paare $yZ - zY$, $zX - xZ$, $xY - yX$, welche durch das ganze System hindurch zu summiren sind. Bilden wir die Bestandtheile, welche von der Winkelbeschleunigung herrühren. Sie liefern in die Summe $\Sigma(yZ - zY)$ die Glieder

$$\frac{d\Omega_x}{dt}\,\Sigma m(y^2+z^2)-\frac{d\Omega_y}{dt}\,\Sigma mxy-\frac{d\Omega_z}{dt}\,\Sigma mxz,$$

welche mit Rücksicht auf die Bezeichnungsweise

$$\Sigma m(y^2+z^2)=a_{11},\quad \Sigma m(z^2+x^2)=a_{22},\quad \Sigma m(x^2+y^2)=a_{33},$$
$$\Sigma mxy=a_{12}=a_{21},\quad \Sigma myz=a_{23}=a_{32},\quad \Sigma mzx=a_{31}=a_{13}$$

in der Form

$$a_{11}\frac{d\Omega_x}{dt}-a_{12}\frac{d\Omega_y}{dt}-a_{13}\frac{d\Omega_z}{dt}$$

geschrieben werden kann. Ebenso enthalten die Summen $\Sigma(zX-xZ)$ und $\Sigma(xY-yX)$ von Seiten der Winkelbeschleunigung die Bestandtheile

$$-a_{21}\frac{d\Omega_x}{dt}+a_{22}\frac{d\Omega_y}{dt}-a_{23}\frac{d\Omega_z}{dt}\quad\text{und}\quad -a_{31}\frac{d\Omega_x}{dt}-a_{32}\frac{d\Omega_y}{dt}-a_{33}\frac{d\Omega_z}{dt}.$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit Cap. XII, §. 9. (S. 766) zeigt aber, dass die drei so gewonnenen Grössen die partiellen Differentialquotienten der Componenten des resultirenden Paares G der Momentankräfte nach t, nämlich $\frac{dG_x}{dt}$, $\frac{dG_y}{dt}$, $\frac{dG_z}{dt}$ sind. Für die Bestandtheile, welche die Centripetalkräfte in die obigen Summen liefern, erhalten wir, wenn wir resp. $m\Omega_y\cdot x^2$, $m\Omega_z\cdot y^2$, $m\Omega_x\cdot z^2$ unter den Summenzeichen addiren und subtrahiren, z. B. für die erste Summe:

$$\begin{aligned}&\Omega_y\,[-\Omega_x\cdot\Sigma mxz-\Omega_y\Sigma myz+\Omega_z\Sigma m(x^2+y^2)]\\&-\Omega_z\,[-\Omega_x\cdot\Sigma mxy+\Omega_y\Sigma m(z^2+x^2)-\Omega_z\Sigma myz]\\&=\Omega_y\,[-a_{31}\Omega_x-a_{32}\Omega_y+a_{33}\Omega_z]\\&-\Omega_z\,[-a_{21}\Omega_x+a_{22}\Omega_y-a_{23}\Omega_z]=\Omega_yG_z-\Omega_zG_y.\end{aligned}$$

Ebenso für die beiden anderen Summen $\Omega_zG_x-\Omega_xG_z$, $\Omega_xG_y-\Omega_yG_x$. Fügen wir alle Theile zusammen, so ergeben sich die Componenten $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ des resultirenden Paares $G^{(1)}$ für den Massenmittelpunkt und in derselben Form für das Beschleunigungscentrum, nämlich:

$$G_x^{(1)}=\frac{dG_x}{dt}+\Omega_yG_z-\Omega_zG_y.$$

$$G_y^{(1)}=\frac{dG_y}{dt}+\Omega_zG_x-\Omega_xG_z.$$

$$G_z^{(1)}=\frac{dG_z}{dt}+\Omega_xG_y-\Omega_yG_x.$$

Wählt man die Hauptaxen des Massenmittelpunktes (oder auch des Beschleunigungscentrums) zu den beweglichen Coordinatenaxen der x, y, z, so werden die Componenten des Paares G der Momentankräfte $G_x=a_{11}\Omega_x$, $G_y=a_{22}\Omega_y$, $G_z=a_{33}\Omega_z$ (Cap. XII, §. 11.), oder, indem wir nach der üblichen Bezeichnungsweise $\Omega_x=p$, $\Omega_y=q$, $\Omega_z=r$; $a_{11}=A$, $a_{22}=B$, $a_{33}=C$ setzen, $G_x=Ap$, $G_y=Bq$, $G_z=Cr$ und nehmen die Componenten des resultirenden Paares der continuirlichen Kräfte die Form an:

$$G_x^{(1)} = A\frac{dp}{dt} + qr(C-B)$$

$$G_y^{(1)} = B\frac{dq}{dt} + rp(A-C)$$

$$G_z^{(1)} = C\frac{dr}{dt} + pq(B-A),$$

welche Form zuerst von **Euler** gegeben wurde. Wir werden im folgenden Capitel von diesen Gleichungen Gebrauch machen.

Es ist von Wichtigkeit, den Inhalt und die Bildungsweise der Ausdrücke für $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ genau zu kennen. Die Bedeutung der drei ersten Glieder $\frac{dG_x}{dt}$, $\frac{dG_y}{dt}$, $\frac{dG_z}{dt}$, welche von der Winkelbeschleunigung herrühren, ist sehr einfach. Construirt man im Reductionspunkte das resultirende Axenmoment der Momentankräfte, so sind G_x, G_y, G_z die Coordinaten vom Endpunkte R der Strecke SR, welche dies Moment darstellt in Bezug auf die beweglichen Axen. SR ändert aber mit t seine Grösse und Lage im System und es stellen die drei Differentialquotienten die relativen Geschwindigkeitscomponenten des Endpunktes R dieser Strecke dar. Nicht viel complicirter ist die Bedeutung der drei Glieder $\Omega_y G_z - \Omega_z G_y$, $\Omega_z G_x - \Omega_x G_z$, $\Omega_x G_y - \Omega_y G_x$. Trägt man nämlich Ω als Länge auf der Momentanaxe des Reductionspunktes auf und legt durch den Endpunkt des Axenmomentes der Momentankräfte hiermit parallel eine Strecke Ω von entgegengesetztem Sinne, so erhält man ein Paar $(-\Omega, \Omega)$, dessen Axenmoment das Produkt ΩK aus der Winkelgeschwindigkeit Ω und der Projection K des Axenmomentes G auf die zur Momentanaxe senkrechte Ebene ist. Nach §. 7. stellt ΩK das Axenmoment der Centripetalkräfte dar und zwar nicht nur nach Grösse, sondern auch nach Richtung und Sinn, da dasselbe senkrecht zu K und um $\frac{1}{2}\pi$ im Sinne von Ω von ihm abweicht. Nun hat aber $-\Omega$ an dem Endpunkte R die Componenten $-\Omega_x$, $-\Omega_y$, $-\Omega_z$ und dieser Punkt selbst die Coordinaten G_x, G_y, G_z, daher sind die Componenten von ΩK gleich $-(\Omega_z G_y - \Omega_y G_z)$, $-(\Omega_x G_z - \Omega_z G_x)$, $-(\Omega_y G_x - \Omega_x G_y)$, welche mit den in Frage stehenden Grössen in der That identisch sind. Das Rotationspaar von Winkelgeschwindigkeiten $(-\Omega, \Omega)$ stellt eine Translationsgeschwindigkeit ΩK dar, welche gleich der Geschwindigkeit des Endpunktes R ist, welche dieser der Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe verdankt, indem K sein Abstand von dieser Axe ist, wenn dieselbe in S construirt wird. Demnach drücken die obigen Gleichungen Folgendes aus:

Das resultirende Paar der continuirlichen Kräfte, entsprechend der Kräftereduction für den Massenmittelpunkt oder das Beschleunigungscentrum, stellt die Geschwindigkeit des Endpunktes vom resultirenden Paare der Momentan-

kräfte dar, wenn dasselbe im Reductionspunkte construirt wird und zwar stellt die Componente, welche von der Winkelgeschwindigkeit veranlasst wird, die relative Geschwindigkeit dieses Punktes im System, die Componente, welche von den Centripetalkräften herrührt, aber die Geschwindigkeit des mit diesem Punkte zusammenfallenden Systempunktes dar.

Auch kann man, wenn man will, bei der Bildung der drei obigen Gleichungen von dem eben verfolgten Gesichtspunkte ausgehen, gleich einfach für die allgemeine, wie für die Euler'sche Form. Da nämlich $G^{(1)}dt$ das geometrische Differential von G ist, so ist $G^{(1)}$ die absolute Geschwindigkeit des Endpunktes des Axenmomentes G. Die relativen Coordinaten desselben sind nun z. B. für die Hauptaxen Ap, Bq, Cr, mithin $A\frac{dp}{dt}$, $B\frac{dq}{dt}$, $C\frac{dr}{dt}$ die Componenten seiner relativen Geschwindigkeit. Das System besitzt aber die Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe und p, q, r sind deren Componenten. Sie ertheilen mithin nach Thl. II, Cap. IV, §. 8. dem Systempunkte, der mit jenem Endpunkte zusammenfällt, die Geschwindigkeitscomponenten

$$q \cdot Cr - r \cdot Bq = qr(C - B),$$
$$r \cdot Ap - p \cdot Cr = pr(A - C),$$
$$p \cdot Bq - q \cdot Ap = pq(B - A).$$

Demnach sind

$$A\frac{dp}{dt} + qr(C - B), \quad B\frac{dq}{dt} + rp(A - C), \quad C\frac{dr}{dt} + pq(B - A)$$

die Componenten $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ der absoluten Geschwindigkeit des Endpunktes von G.

Saint-Guilhem, dessen Abhandlungen [*Nouvelle étude sur la théorie des forces* in Liouville, Journ. de Mathém. T. XVI, p. 347 (1851) und *Nouvelle détermination synthétique du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe*, Liouville, Journ. T. XIX, p. 356 (1854)] diese Betrachtungen zu Grunde liegen, gibt noch folgende Methode an, um zu demselben Resultate zu gelangen. Man denkt sich durch den Reductionspunkt drei Coordinatenaxen der x', y', z' von fester Richtung. Durch die Rotation des Systems um die Momentanaxe erlangt nun dasselbe gegen diese Axen zur Zeit $t + dt$ dieselbe Lage, die es gegen sie einnehmen würde, wenn es nicht rotirte, dagegen jene Axen sich um die Momentanaxe in entgegengesetztem Sinne um denselben unendlich kleinen Winkel gedreht hätten. Nimmt man nun auf einer der drei angenommenen Axen, z. B. auf der Axe der x', einen Punkt m an und bezeichnet mit ξ, η, ζ seine Coordinaten bezüglich der Axen der x, y, z, so sind $-(\Omega_y\zeta - \Omega_z\eta)$, $-(\Omega_z\xi - \Omega_x\zeta)$, $-(\Omega_x\eta - \Omega_y\xi)$ seine Geschwindigkeitscomponenten und da dieselben auch durch $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ dargestellt werden, so bestehen die Gleichungen:

$$\frac{d\xi}{dt} = \Omega_z\eta - \Omega_y\zeta, \quad \frac{d\eta}{dt} = \Omega_x\zeta - \Omega_z\xi, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \Omega_y\xi - \Omega_x\eta.$$

Nun seien a, a', a'' die Richtungscosinusse der Axe der x' gegen die Axen der

x, y, z und $G_{x'}, G_{y'}, G_{z'}$ die Componenten von G bezüglich der Axen der x', y', z', sodass z. B.

$$G_{x'} = a G_x + a' G_y + a'' G_z$$

und folglich

$$\frac{dG_{x'}}{dt} = a\frac{dG_x}{dt} + a'\frac{dG_y}{dt} + a''\frac{dG_z}{dt} + G_x\frac{da}{dt} + G_y\frac{da'}{dt} + G_z\frac{da''}{dt}$$

wird. Nimmt man nun m in der Entfernung gleich der Einheit vom Reductionspunkte an, so werden $\xi = a$, $\eta = a'$, $\zeta = a''$, also nach den obigen Formeln:

$$\frac{da}{dt} = \Omega_z a' - \Omega_y a'', \quad \frac{da'}{dt} = \Omega_x a'' - \Omega_z a, \quad \frac{da''}{dt} = \Omega_y a - \Omega_x a'.$$

Da man aber über die Wahl der Axen x', y', z' beliebig verfügen kann, so lassen wir die Axe der x' mit der Axe der x zusammenfallen, wodurch $a = 1$, $a' = a'' = 0$ und folglich $\frac{da}{dt} = 0$, $\frac{da'}{dt} = -\Omega_z$, $\frac{da''}{dt} = \Omega_y$ wird. Hiermit erhält man

$$\frac{dG_{x'}}{dt} = \frac{dG_x}{dt} + \Omega_y G_z - \Omega_z G_y.$$

Es ist aber $\frac{dG_{x'}}{dt}$ die Geschwindigkeitscomponente des Punktes $G_{x'}, G_{y'}, G_{z'}$ parallel den festen Axen, d. h. die absolute Geschwindigkeitscomponente des Punktes, welcher im System die Coordinaten G_x, G_y, G_z besitzt, d. h. des Endpunktes von G und diese ist zugleich $G_x^{(1)}$. Daher folgt $G_x^{(1)} = \frac{dG_x}{dt} + \Omega_y G_z - \Omega_z G_y$. Aehnlich für die anderen Componenten.

§. 12. An die Reduction der continuirlichen Kräfte schliessen wir einige Sätze an über den Zusammenhang dieser Kräfte mit den Momentankräften.

1. Das System der Kräfte $m\varphi$, welche den Systempunkten M ihre Beschleunigungen φ zu verleihen vermögen, ist äquivalent dem System der Kräfte P, welche am Punktsystem angreifen. Reduciren wir daher beide Kräftesysteme für denselben Punkt O, so stimmen die Reductionsresultanten und die resultirenden Axenmomente nach Grösse, Richtung und Sinn überein und haben mithin auch gleiche Componenten oder Projectionen in Bezug auf irgend welche Axen. Projiciren wir zunächst die Reductionsresultanten auf irgend eine Axe x, so erhalten wir, da ihre Projectionen die Projectionssummen ihrer Componenten sind, die Gleichung $\Sigma m\varphi_x = \Sigma P_x$, wo der Index x die Projection bezeichnet Es ist aber $\varphi_x = \frac{dv_x}{dt}$, mithin erhält man weiter:

$$d \cdot \Sigma(m v_x) = \Sigma P_x dt$$

und indem man diese Gleichung über ein beliebiges Zeitintervall $t - t_0$ integrirt:

$$\Sigma m v_x - \Sigma(m v_x)_0 = \Sigma \int_{t_0}^{t} P_x dt.$$

Es stellt hierin aber $\Sigma m v_x$ die Projection der Reductionsresultanten der Momentankräfte auf die Axe x zur Zeit t und $\Sigma(m v_x)_0$ dieselbe Grösse

zur Zeit t_0 dar und ist $P_x dt$ der Elementarantrieb der Projection der Kraft P. Daher:

Die Aenderung, welche die Projection der Resultanten der Momentankräfte auf irgend eine Axe im Laufe der Bewegung während irgend eines Zeitintervalles erleidet, ist gleich dem Totalantrieb aller auf diese Axe projicirten Kräfte während derselben Zeit.

Man kann das System selbst auf die Axe projicirt denken, jedem Projectionspunkte die Masse des Hauptpunktes beilegen und den Satz als einen Satz für das lineäre veränderliche System, welches die Projection des gegebenen ist, auffassen. — Die Gleichung $d \cdot \Sigma m v_x = \Sigma P_x dt$ sagt im Grunde nichts weiter aus, als dass $\frac{dR_x}{dt} = R_x^{(1)}$, wenn R, $R^{(1)}$ die Resultanten der Momentankräfte und der continuirlichen Kräfte sind.

Ist $\Sigma P_x = 0$, so ist $\Sigma m v_x$ constant.

2. Projiciren wir das resultirende Axenmoment der Kräfte $m\varphi$ und das der Kräfte P auf die Axe x. Wir erhalten die Projectionen dieser Grössen, indem wir $m\varphi$ und P auf die Ebene senkrecht zu x projiciren und die Momente ihrer Projectionen für den Schnittpunkt dieser Ebene mit der Axe x nehmen. Sind φ_1, Q; ϖ, q die Projectionen von φ und P und ihre Abstände von der Axe x, so besteht demnach die Gleichung $\Sigma m \varphi_1 \varpi = \Sigma Q q$. Nun ist aber nach Thl. III, Cap. I, §. 21., wenn $v_1 p_1$ das Moment der Geschwindigkeit ist, $\frac{d \cdot v_1 p_1}{dt} = \varphi_1 \varpi$. Daher erhält man:

$$d \cdot \Sigma m v_1 p_1 = \Sigma Q q dt$$

und folglich durch Integration:

$$\Sigma m v_1 p_1 - \Sigma (m v_1 p_1)_0 = \Sigma \int_{t_0}^{t} Q q \, dt.$$

Hierin stellt $m v_1 p_1$ das Moment der Momentankraft $m v_1$ und folglich $\Sigma m v_1 p_1$ die Projection des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte auf die Axe x dar. Daher:

Die Aenderung, welche die Projection des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte auf irgend eine Axe im Laufe der Bewegung des Systems während irgend eines Zeitintervalles erleidet, ist gleich der Summe der Momente aller Kraftantriebe in Bezug auf dieselbe Axe während derselben Zeit.

Man kann diesen Satz als einen Satz über die Projection des Systems auf die zur Axe x senkrechte Ebene auffassen, wenn man den Projectionspunkten die Masse der Hauptpunkte beilegt. Das Projectionssystem ist während der Bewegung veränderlich. — Die zu Grunde liegende

Gleichung sagt nichts weiter aus, als dass $\frac{dG_x}{dt} = G_x^{(1)}$, wenn G und $G^{(1)}$ die resultirenden Axenmomente der Momentankräfte und der continuirlichen Kräfte für den Punkt O bedeuten. Ist $\Sigma Q q = G_x^{(1)} = 0$, so bleibt $\Sigma m v_1 p_1 = G_x$ constant.

3. Man kann den vorigen Satz etwas anders formuliren. Zu dem Ende ziehen wir vom Reductionspunkte O aus nach allen Systempunkten M die Radienvectoren OM und betrachten die Elementarsectoren $OMM' = dS$, welche sie im Zeitelemente dt durchstreifen. Da die Projection des Bogenelementes MM' gleich $v_1 dt$ ist, so stellt $\frac{1}{2} v_1 dt \cdot p_1$ den Inhalt der Projection dS_x von dS auf die zu x senkrechte Ebene dar und ist mithin $v_1 p_1 = \frac{2\, dS_x}{dt}$. Hiermit erhält man die Ausdrücke in 2. unter der Form:

$$\Sigma m \frac{d^2 S_x}{dt^2} = \frac{1}{2} \Sigma Q q = \frac{1}{2} G_x^{(1)},$$

$$\Sigma m \frac{dS_x}{dt} - \Sigma \left(m \frac{dS_x}{dt}\right)_0 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} G_x^{(1)} dt = \frac{1}{2} (G_x - G_{x_0}),$$

d. h.: Zieht man von irgend einem Punkte O nach allen Punkten des in Bewegung begriffenen Systems Radienvectoren und projicirt das System sammt ihnen auf eine Ebene, so ist die Summe der Produkte aus den Sectorenbeschleunigungen der projicirten Radienvectoren und den Massen der Systempunkte, auf welche sich letztere beziehen, gleich dem halben resultirenden Axenmomente aller Kräfte für den Punkt O als Reductionspunkt, projicirt auf die zur Ebene senkrechte Axe. Die Aenderung, welche die Summe der Produkte aus den Massen und den Sectorengeschwindigkeiten der projicirten Radienvectoren im Laufe irgend einer Zeit erleidet, ist die halbe Aenderung der Projection des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte auf dieselbe Axe, über denselben Zeitraum erstreckt.

Ist insbesondere $G_x^{(1)} = 0$, so bleibt die Grösse $\Sigma m \frac{dS_x}{dt}$ constant und wird $\Sigma m S_x$ der Zeit proportional. Also:

Ist die Projection des resultirenden Axenmomentes für einen Reductionspunkt O auf eine Axe während der Bewegung Null, so ist die Summe der Produkte gebildet aus den Massen der Systempunkte und den Sectoren, welche die Projectionen der von O nach ihnen gezogenen Radienvectoren auf eine zur Axe senkrechte Ebene während irgend einer Zeit beschreiben, dieser Zeit proportional. (Princip der Flächen für die zur Axe senkrechte Ebene.)

4. Ist $G^{(1)} = 0$, also $G^{(1)}_x$ für jede Axe Null, d. h. reduciren sich die Kräfte des Systems auf eine blose Resultante $R^{(1)}$, so gilt der vorstehende Satz für alle Ebenen. Ist aber $G^{(1)} = 0$, so bleibt das resultirende Paar G der Momentankräfte nach Grösse, Richtung und Sinn unveränderlich und gilt dasselbe für seine Projection G_x auf irgend eine Axe. Da nun $\Sigma m \frac{dS_x}{dt} = \frac{1}{2} \Sigma m v_1 p_1 = \frac{1}{2} G_x$, also in diesem Falle $\Sigma m S_x - \underset{0}{\Sigma (m S_x)} = \Sigma m (S_x - S_{x_0}) = \frac{1}{2} G_x (t - t_0)$, so wird die Summe der mit den Massen multiplicirten Sectoren mit G_x gleichzeitig ein Maximum. Der grösste Werth, den G_x annehmen kann, ist aber G selbst. Daher:

Wenn die Kräfte des Systems sich auf eine blose Resultante $R^{(1)}$ reduciren, so gilt das Princip der Flächen für alle Ebenen des Raumes. Für die zur Axe des resultirenden Paares der Momentankräfte senkrechte Ebene ist die Summe der mit den Massen multiplicirten Sectoren ein Maximum. Diese Ebene, welche sich während der Bewegung des Systems fortwährend parallel bleibt, heisst die invariabele Ebene des Systems.

5. Die Gleichung $\Sigma m \varphi_x = \Sigma P_x$ in Nr. 1. wollen wir durch $\varphi_x = \frac{dv_x}{dt}$ und $v_x = \frac{dx}{dt}$, wenn dx die Projection des Bogenelementes auf die Axe x ist, welches der Systempunkt M im Zeitelemente beschreibt, umgestalten. Es wird $\varphi_x = \frac{v_x dv_x}{dx}$, mithin $\Sigma m \varphi_x = \frac{d \cdot \Sigma \frac{1}{2} m v_x^2}{dx}$ und weiter also:

$$d \cdot \Sigma \tfrac{1}{2} m v_x^2 = \Sigma P_x \cdot dx.$$

Wenden wir das Projiciren noch auf zwei andere Axen y, z in gleicher Weise an, so kommt:

$$d \cdot \Sigma \tfrac{1}{2} m v_y^2 = \Sigma P_y dy, \qquad d \cdot \Sigma \tfrac{1}{2} m v_z^2 = \Sigma P_z dz$$

und durch Addition aller drei Gleichungen mit Rücksicht auf $\Sigma \frac{1}{2} m v_x^2 + \Sigma \frac{1}{2} m v_y^2 + \Sigma \frac{1}{2} m v_z^2 = \frac{1}{2} \Sigma m v^2$:

$$d \cdot \tfrac{1}{2} \Sigma m v^2 = \Sigma (P_x dx + P_y dy + P_z dz).$$

Die rechte Seite stellt nun die Summe der Elementararbeiten der Kraftcomponenten P_x, P_y, P_z von P dar. Diese Grösse ist die Elementararbeit von P, welche mit Pdp bezeichnet werden möge längs des Weges ds, den der Angriffspunkt von P im Zeitelemente beschreibt. Integriren wir die vorstehende Gleichung und bezeichnen die den Werthen v_0 entsprechenden Werthe oder Bogenabstände s mit s_0, so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma m v_0^2 = \Sigma \int_{s_0}^{s} P dp,$$

d. h. **die Aenderung, welche die halbe lebendige Kraft beim Uebergange des Systems aus einer ersten in eine zweite Lage erleidet, ist gleich der Totalarbeit aller Kräfte längs der Wege ihrer Angriffspunkte. (Princip der lebendigen Kraft.)**

6. In ähnlicher Weise kann man die Gleichung $\Sigma m \frac{d^2 S_x}{dt^2} = \frac{1}{2} G_x^{(1)}$ umgestalten. Setzt man nämlich, wie S. 214. die Sectorengeschwindigkeit $\frac{dS_x}{dt} = \eta_x$, die Sectorenbeschleunigung $\frac{d^2 S_x}{dt^2} = \frac{d\eta_x}{dt} = \psi_x$, so wird $\frac{d^2 S_x}{dt^2} = \frac{d\eta_x}{dt} = \frac{\eta_x d\eta_x}{dS_x} = \frac{d \cdot \frac{1}{2}\eta_x^2}{dS_x}$ und indem man noch zwei andere Axen y, z hinzunimmt, sodass Qq durch $yP_z - zP_y$ dargestellt werden kann, geht die obige Gleichung über in

$$d \cdot \Sigma m \eta_x^2 = \Sigma (yP_z - zP_y)\, dS_x$$

und ebenso erhält man

$$d \cdot \Sigma m \eta_y^2 = \Sigma (zP_x - xP_z)\, dS_y, \quad d \cdot \Sigma m \eta_z^2 = \Sigma (xP_y - yP_x)\, dS_z.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen folgt dann, wegen

$$\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 = \eta^2,$$

wo η die Sectorengeschwindigkeit des Radiusvectors OM darstellt:

$$d \cdot \Sigma m \eta^2 = \Sigma [(yP_z - zP_y)\, dS_x + (zP_x - xP_z)\, dS_y + (xP_y - yP_x) dS_z].$$

Es sei nun dS der Elementarsector, den der Radiusvector von O nach dem Angriffspunkte M von P im Zeitelemente beschreibt, dann ist, wenn die Normale seiner Ebene die Richtungswinkel α, β, γ besitzt:

$$dS_x = dS \cdot \cos\alpha, \quad dS_y = dS \cdot \cos\beta, \quad dS_z = dS \cdot \cos\gamma;$$

ferner wenn das Axenmoment Γ des Paares $(P, -P)$ die Richtungswinkel a, b, c hat:

$$yP_z - zP_y = \Gamma \cdot \cos a, \quad zP_x - xP_z = \Gamma \cdot \cos b, \quad xP_y - yP_x = \Gamma \cdot \cos c$$

Hiermit wird, wenn λ den Winkel zwischen jener Normale und Γ bezeichnet, der Inhalt der Klammer unter dem Summenzeichen rechts gleich $\Gamma dS \cdot \cos\lambda$ und folglich

$$d \cdot \Sigma m \eta^2 = \Sigma \Gamma \cos\lambda \cdot dS,$$

sowie

$$\Sigma m \eta^2 - \Sigma m \eta_0^2 = \Sigma \int_{S_0}^{S} \Gamma \cos\lambda \cdot dS.$$

Die Grösse $\Gamma \cos\lambda \cdot dS$ kann der Analogie mit der Arbeit von P wegen die Elementararbeit des Paares Γ längs des Sectors dS genannt werden. Denkt man dS auf der Normalen wie ein Axenmoment aufgetragen, so kann die Elementararbeit $\Gamma \cos\lambda \cdot dS$ definirt werden als das Produkt aus dem Elementarsector dS und der Projection des Axenmomentes Γ auf seine Ebene oder als das Produkt von Γ und der Projection von dS

auf die Ebene dieses Paares. Die Grösse $m\eta^2$ spielt die Rolle einer „lebendigen Sectorenkraft", doch dürfte der Gebrauch dieses Ausdrucks nicht zu empfehlen sein.

§. 13. Ist das System nicht frei, sondern gewissen Bedingungen unterworfen, so wird man dieselben durch Kräfte ausdrücken und dem gegebenen Kräftesystem hinzufügen. Die Darstellung der Aequivalenz der Kräfte $m\varphi$ und der gegebenen Kräfte einschliesslich der zuzufügenden Bedingungskräfte führt zur Ermittelung der Bewegung des Systems und der Intensität und Richtung der Bedingungskräfte. Besitzt das System einen festen Punkt oder eine feste Axe, so können diese Bedingungen auch durch unendlich grosse Massen eingeführt werden, wie Cap. XII, §. 18.

XIV. Capitel.

Probleme der Bewegung eines unveränderlichen Systems.

§. 1. Wenn der Geschwindigkeitszustand eines unveränderlichen Systems zu irgend einer Zeit t_0 bekannt ist, sei es dadurch, dass die Geschwindigkeiten dreier Systempunkte oder dadurch, dass ein System von Momentankräften gegeben sind, welche denselben hervorzurufen vermögen, wenn ferner der Beschleunigungszustand für alle Zeiten bekannt ist, sei es durch die Beschleunigungen dreier Punkte oder durch ein Kräftesystem, welches ihn erzeugt, so ist der Vorgang der Bewegung des Systems bestimmt und kann im Allgemeinen ermittelt werden. Es treten nämlich zu den Grössen R_0, G_0, nämlich der Resultanten und dem resultirenden Paare der Momentankräfte zur Zeit t_0 die Elementarkräfte $R_0^{(1)}dt$, $G_0^{(1)}dt$ hinzu, um die Resultante R_1 und das resultirende Paar G_1 für den nächstfolgenden Zeitmoment $t_1 = t_0 + dt_0$ zu bilden; durch Zutritt der Elementarkräfte $R_1^{(1)}dt$, $G_1^{(1)}dt$, welche der Zeit t_1 entsprechen, bilden sich ebenso R_2, G_2 für den folgenden Moment t_2 u. s. w. Sind also $R^{(1)}$ und $G^{(1)}$ und mithin $R^{(1)}dt$, $G^{(1)}dt$ zu allen Zeiten bekannt, so kennt man auch R und G zu allen Zeiten. Durch die Momentankräfte ist aber nach Cap. XII. der Geschwindigkeitszustand des Systems für alle Zeiten bestimmt. Ist aber der Geschwindigkeitszustand für alle Zeiten bekannt, so sieht man leicht, wie die Lage des Systems zu jeder Zeit bestimmt ist, falls sie für irgend eine Zeit als gegeben angenommen wird.

Je nachdem die continuirlichen Kräfte, oder, was dasselbe ist, $R^{(1)}$ und $G^{(1)}$ als Functionen des Ortes, der Zeit, des Geschwindigkeitszustandes u. s. w. bestimmt sind, modificirt sich das Problem der Bewegung.

§. 2. Um ein Problem der Bewegung eines unveränderlichen Systems behandeln zu können, drücken wir die Aequivalenz der Kräfte $m\varphi$, welche den Systempunkten zur Zeit t ihre Beschleunigungen φ zu ertheilen vermögen, mit dem gegebenen Kräftesystem aus. Dies ist auf verschiedene Art möglich und führt zu sechs Gleichungen, welche man die Gleichungen der Bewegung des Systems nennt. Da die Componenten der Beschleunigung φ_i des Punktes m_i (x_i, y_i, z_i) parallel dreien rechtwinkligen Coordinatenaxen, die wir im Raume fest annehmen wollen, die Werthe $\frac{d^2x_i}{dt^2}$, $\frac{d^2y_i}{dt^2}$, $\frac{d^2z_i}{dt^2}$ sind, so stellen $m\frac{d^2x_i}{dt^2}$, $m\frac{d^2y_i}{dt^2}$, $m\frac{d^2z_i}{dt^2}$ die Componenten der Kraft $m\varphi_i$ dar und liefern, indem wir sie für den Coordinatenursprung reduciren, eine Resultante von den Componenten $\Sigma m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}$, $\Sigma m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}$, $\Sigma m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}$ und ein resultirendes Paar von den Componenten

$$\Sigma m_i\left(y_i\frac{d^2z_i}{dt^2}-z_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right),\quad \Sigma m_i\left(z_i\frac{d^2x_i}{dt^2}-x_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right),\quad \Sigma m_i\left(x_i\frac{d^2y_i}{dt^2}-y_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right),$$

wobei die Summationen über alle Punkte des Systems zu erstrecken sind. Sind andererseits X_i, Y_i, Z_i die Componenten der gegebenen am Punkte $(x_i\,y_i\,z_i)$ angreifenden Kraft P_i, so liefert die Reduction dieser Kräfte, die sich an irgend welchen Punkten auch auf Null reduciren können, ebenso die Resultante von den Componenten ΣX_i, ΣY_i, ΣZ_i und das resultirende Paar, dessen Componenten

$$\Sigma\,(y_iZ_i-z_iY_i),\quad \Sigma\,(z_iX_i-x_iZ_i),\quad \Sigma\,(x_iY_i-y_iX_i)$$

sind. Die Aequivalenz beiderlei Kräfte, oder, was dasselbe ist, das Gleichgewicht, welches zwischen den ersteren und den im entgegengesetzten Sinne genommenen Kräften der zweiten Art bestehen muss, ergibt daher die folgenden sechs Bewegungsgleichungen:

$$\Sigma m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\Sigma X_i,\qquad \Sigma m_i\left(y_i\frac{d^2z_i}{dt^2}-z_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)=\Sigma\,(y_iZ_i-z_iY_i)$$

$$\Sigma m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\Sigma Y_i,\qquad \Sigma m_i\left(z_i\frac{d^2x_i}{dt^2}-x_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)=\Sigma\,(z_iX_i-x_iZ_i)$$

$$\Sigma m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\Sigma Z_i,\qquad \Sigma m_i\left(x_i\frac{d^2y_i}{dt^2}-y_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)=\Sigma\,(x_iY_i-y_iX_i).$$

In dieser Form sind die Bewegungsgleichungen zur Lösung eines Problems nicht unmittelbar zu verwenden, denn sie enthalten die Coordinaten aller Systempunkte, während die Kenntniss der Bewegung dreier Systempunkte hinreicht, um die aller übrigen zu bestimmen. Sie müssen demnach so transformirt werden, dass blos Bestimmungsstücke der Bewegung dreier Punkte darin vorkommen. Als solche Bestimmungselemente können die Coordinaten dreier Punkte gelten. Deren sind neun. Da aber die drei Punkte unveränderliche Abstände behalten, welche

durch drei Bedingungsgleichungen ausgedrückt wird, so bleiben blos sechs jener Coordinaten als erforderlich übrig und zu ihrer Bestimmung reichen die sechs Bewegungsgleichungen hin. Die drei Punkte sind beliebig wählbar. Vermöge seiner ausgezeichneten Eigenschaften empfiehlt sich für den einen vor allen der Massenmittelpunkt S. In der That lassen sich mit Hülfe derselben die drei ersten Gleichungen sofort so umschreiben, dass in ihnen seine Coordinaten x_0, y_0, z_0 allein vorkommen. Setzen wir nämlich $x_i = x_0 + \xi_i$, $y_i = y_0 + \eta_i$, $z_i = z_0 + \zeta_i$, sodass ξ_i, η_i, ζ_i die Coordinaten des Systempunktes $x_i\, y_i\, z_i$ in Bezug auf ein dem festen Coordinatensystem paralleles bewegliches Coordinatensystem sind, dessen Ursprung im Massenmittelpunkte (x_0, y_0, z_0) liegt, so wird

$$\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma m_i \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \frac{d^2}{dt^2} \Sigma m_i \xi_i = M \frac{d^2 x_0}{dt^2},$$

da $\Sigma m_i \xi_i = 0$ und ebenso

$$\Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = M \frac{d^2 y_0}{dt^2}, \quad \Sigma m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = M \frac{d^2 z_0}{dt^2},$$

da $\Sigma m_i \eta_i = 0$ und $\Sigma m_i \zeta_i = 0$ ist. Man erhält demnach an die Stelle der drei ersten Bewegungsgleichungen die folgenden:

$$M \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \Sigma X_i, \quad M \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \Sigma Y_i, \quad M \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \Sigma Z_i,$$

welche die Beschleunigungscomponenten des Massenmittelpunktes gleich $\frac{1}{M} \Sigma X_i$, $\frac{1}{M} \Sigma Y_i$, $\frac{1}{M} \Sigma Z_i$ geben und durch ihre Integration die Bewegung dieses Punktes bestimmen. Diese Gleichungen sind die eines Punktes, an welchem die Kräfte ΣX_i, ΣY_i, ΣZ_i angreifen. Daher kann man sagen:

Der Massenmittelpunkt des Systems bewegt sich so, als ob alle Kräfte des gegebenen Kräftesystems mit denselben Intensitäten und nach denselben Richtungen an ihm angriffen.

Legen wir durch den Massenmittelpunkt S zwei zu einander senkrechte Axen, welche dem beweglichen Systeme angehören und wählen wir auf diesen in der Einheit der Entfernung von S jene beiden noch übrigen Punkte. Sind a, b, c; a', b', c' die Richtungscosinusse dieser beiden Axen gegen die Axen der ξ, η, ζ oder der x, y, z, so stellen diese Grössen zugleich die Coordinaten ξ, η, ζ der beiden Punkte dar. Grösserer Symmetrie der Formeln wegen nimmt man noch die dritte, zu jenen senkrechte Axe hinzu und bezeichnet ihre Richtungscosinusse mit a'', b'', c''. Zur Wahl dieser drei, dem System angehörigen Axen empfehlen sich ihrer ausgezeichneten Eigenschaften hinsichtlich der Kräftereduction wegen die Hauptaxen des Massenmittelpunktes, deren wir uns daher im Folgenden fortwährend bedienen werden.

Führen wir zunächst die Substitution $x_i = x_0 + \xi_i$, $y_i = y_0 + \eta_i$, $z_i = z_0 + \zeta_i$ in den drei letzten Gleichungen aus, so wird z. B. die linke Seite der ersten von ihnen:

$$\Sigma m_i \left(y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}\right) = \Sigma m_i \left(\eta_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} - \zeta_i \frac{d^2\eta_i}{dt^2}\right) + M\left(y_0 \frac{d^2 z_0}{dt^2} - z_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2}\right)$$

und die rechte Seite:

$$\Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i) = \Sigma (\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i) + y_0 \Sigma Z_i - z_0 \Sigma Y_i.$$

Wenn man daher die bereits transformirten drei ersten Gleichungen benutzt und die Rechnung vollständig durchführt, so nehmen die drei letzten Bewegungsgleichungen die Form an:

$$\Sigma m_i \left(\eta_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} - \zeta_i \frac{d^2\eta_i}{dt^2}\right) = \Sigma (\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i),$$

$$\Sigma m_i \left(\zeta_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} - \xi_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2}\right) = \Sigma (\zeta_i X_i - \xi_i Z_i),$$

$$\Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d^2\eta_i}{dt^2} - \eta_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2}\right) = \Sigma (\xi_i Y_i - \eta_i X_i).$$

Um nun die Grössen $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ in diese Gleichungen einzuführen, nehmen wir die Hauptaxen des Massenmittelpunktes als Coordinatenaxen der x', y', z', sodass die Coordinaten ξ_i, η_i, ζ_i durch x_i', y_i', z_i' mit Hülfe der Formeln (S. 145) ausgedrückt werden, nämlich:

$$\xi_i = a x_i' + a' y_i' + a'' z_i'$$
$$\eta_i = b x_i' + b' y_i' + b'' z_i'$$
$$\zeta_i = c x_i' + c' y_i' + c'' z_i',$$

worin x_i', y_i', z_i' die Lage des Punktes im System gegen die Hauptaxen festsetzen und von der Zeit unabhängig sind. Die linken Seiten der zu transformirenden Gleichungen sind nun die Derivirten der Componenten des resultirenden Paares der Momentankräfte, nämlich von

$$\Sigma m_i \left(\eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt}\right), \quad \Sigma m_i \left(\zeta_i \frac{d\xi_i}{dt} - \xi_i \frac{d\zeta_i}{dt}\right), \quad \Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt}\right).$$

sodass zunächst diese Ausdrücke umzugestalten sind. Nun liefert die Differentiation der vorstehenden Formeln:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = x_i' \frac{da}{dt} + y_i' \frac{da'}{dt} + z_i' \frac{da''}{dt}$$
$$\frac{d\eta_i}{dt} = x_i' \frac{db}{dt} + y_i' \frac{db'}{dt} + z_i' \frac{db''}{dt}$$
$$\frac{d\zeta_i}{dt} = x_i' \frac{dc}{dt} + y_i' \frac{dc'}{dt} + z_i' \frac{dc''}{dt},$$

worin aber die Differentialquotienten der Richtungscosinusse durch die Componenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit nach den Hauptaxen auszudrücken sind mit Hülfe der Formeln (S. 152):

$$\frac{da}{dt} = a'r - a''q, \quad \frac{da'}{dt} = a''p - ar, \quad \frac{da''}{dt} = aq - a'p$$
$$\frac{db}{dt} = b'r - b''q, \quad \frac{db'}{dt} = b''p - br, \quad \frac{db''}{dt} = bq - b'p$$
$$\frac{dc}{dt} = c'r - c''q, \quad \frac{dc'}{dt} = c''p - cr, \quad \frac{dc''}{dt} = cq - c'p,$$

welche aus den Gleichungssystemen, wie

$$a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt} = 0$$
$$a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt} = r$$
$$a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt} = -q$$

u. s. w. entspringen. Substituirt man diese Ausdrücke in die Derivirten von ξ_i, η_i, ζ_i, bildet hierauf die Grössen, wie $\Sigma m_i\left(\eta_i\frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i\frac{d\eta_i}{dt}\right)$ u. s. w. und berücksichtigt die Eigenschaften

$$\Sigma m_i x_i' y_i' = 0, \quad \Sigma m_i y_i' z_i' = 0, \quad \Sigma m_i z_i' x_i' = 0$$

der Hauptaxen, so kommt z. B.

$$\Sigma m_i\left(\eta_i\frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i\frac{d\eta_i}{dt}\right) = [(bc' - b'c)\,r - (bc'' - b''c)\,q]\,\Sigma m_i x_i'^2$$
$$+ [(b'c'' - b''c')\,p - (b'c - bc')\,r]\,\Sigma m_i y_i'^2$$
$$+ [(b''c - bc'')\,q - (b''c' - b'c'')\,p]\,\Sigma m_i z_i'^2,$$

welcher Ausdruck aber mit Hülfe der Relationen (S. 146)

$$b'c'' - b''c' = a \quad c'a'' - c''a' = b \quad a'b'' - a''b' = c$$
$$b''c - bc'' = a' \quad c''a - ca'' = b' \quad a''b - ab'' = c'$$
$$bc' - b'c = a'' \quad ca' - c'a = b'' \quad ab' - a'b = c''$$

übergeht in

$$\Sigma m_i\left(\eta_i\frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i\frac{d\eta_i}{dt}\right) = (a'q + a''r)\,\Sigma m_i x_i'^2 + (a''r + ap)\,\Sigma m_i y_i'^2$$
$$+ (ap + a'q)\,\Sigma m_i z_i'^2$$

und mit Hülfe der üblichen Bezeichnung der Hauptträgheitsmomente, nämlich

$$\Sigma m_i(y_i'^2 + z_i'^2) = A, \quad \Sigma m_i(z_i'^2 + x_i'^2) = B, \quad \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2) = C,$$

woraus

$$2\Sigma m_i x_i'^2 = B + C - A, \quad 2\Sigma m_i y_i'^2 = C + A - B, \quad 2\Sigma m_i z_i'^2 = A + B - C$$

folgen, nebst den beiden analogen Ausdrücken die Form annimmt:

$$\Sigma m_i\left(\eta_i\frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i\frac{d\eta_i}{dt}\right) = Apa + Bqa' + Cra''$$
$$\Sigma m_i\left(\zeta_i\frac{d\xi_i}{dt} - \xi_i\frac{d\zeta_i}{dt}\right) = Apb + Bqb' + Crb''$$
$$\Sigma m_i\left(\xi_i\frac{d\eta_i}{dt} + \eta_i\frac{d\xi_i}{dt}\right) = Apc + Bqc' + Crc''.$$

Man erkennt auf den rechten Seiten dieser Gleichungen die Projectionen der Componenten Ap, Bq, Cr der Componenten des resultirenden Paares G der Momentankräfte auf die Axen der x', y', z'. Demnach nehmen jetzt die drei letzten Bewegungsgleichungen die Form an:

$$\frac{d}{dt}(Apa + Bqa' + Cra'') = \Sigma(\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i)$$

$$\frac{d}{dt}(Apb + Bqb' + Crb'') = \Sigma(\zeta_i X_i - \xi_i Z_i)$$

$$\frac{d}{dt}(Apc + Bqc' + Crc'') = \Sigma(\xi_i Y_i - \eta_i X_i).$$

Hierin sind nun noch die Differentiationen auszuführen. Vollzieht man diese Operation und combinirt die sich so ergebenden Gleichungen, indem man sie der Reihe nach mit a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' multiplicirt und addirt, dabei aber die Relationen $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $aa' + bb' + cc' = 0, \ldots$ $a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt} = -r$, $a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt} = q, \ldots$ (S. 148) berücksichtigt, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass die entstehenden rechten Seiten der neuen Gleichungsformen die Componenten des resultirenden Paares der continuirlichen Kräfte bezüglich der Hauptaxen sind, die wir früher $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ nannten:

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = G_x^{(1)}$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = G_y^{(1)}$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = G_z^{(1)}.$$

Dies sind die Euler'schen Gleichungen, welche sich bereits Cap. XIII. §. 11., S. 804 ergaben.

§. 3. Der Sinn der im vorigen §. ausgeführten Transformation der Bewegungsgleichungen ist nun der, dass die jetzigen drei ersten Gleichungen die Bewegung des Massenmittelpunktes, die drei letzten (Euler'schen) Gleichungen die Bewegung der Hauptaxen dieses Punktes charakterisiren. Nun kann die Bewegung eines unveränderlichen Systems immer in eine Translationsbewegung gleich der Bewegung irgend eines Systempunktes und eine Rotationsbewegung um eine durch diesen Punkt gehende, gleichfalls in Translationsbewegung begriffene Momentanaxe aufgelöst werden. Der hier ausgeführten Transformation liegt die Spaltung in eine Translationsbewegung gleich der Bewegung des Massenmittelpunktes und eine Rotationsbewegung um eine Momentanaxe dieses Punktes zu Grunde (vgl. Thl. I, Cap. V, §. 7., S. 74). Mit besonderem Vortheil wird man sich nun behufs der Behandlung der Bewegungsgleichungen der Euler'schen Transformationsformeln (S. 153) bedienen.

welche mit Hülfe dreier Winkel φ, ψ, ϑ die Lage der beweglichen Hauptaxen gegen ein festes oder in Translation begriffenes Coordinatensystem (der x, y, z oder der x', y', z') charakterisiren. Zugleich sind dann die Componenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit Ω durch die S. 154 angegebenen Formeln, worin $\Omega_{x'}$, $\Omega_{y'}$, $\Omega_{z'}$ mit p, q, r übereinstimmen, auszudrücken, nämlich durch

$$p = \frac{d\vartheta}{dt} \cos\varphi + \frac{d\psi}{dt} \sin\varphi \sin\vartheta$$

$$q = -\frac{d\vartheta}{dt} \sin\varphi + \frac{d\psi}{dt} \cos\varphi \sin\vartheta$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos\vartheta .$$

Endlich sind $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ gleichfalls durch φ, ψ, ϑ darzustellen. Sobald dies geschehen, liefern die Euler'schen Gleichungen in Verbindung mit den Ausdrücken für p, q, r durch eine zweimalige Integration φ, ψ, ϑ und p, q, r als Functionen der Zeit und ebenso geben die drei ersten Gleichungen x_0, y_0, z_0 und die Componenten der Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes. Die zwölf Constanten, welche die Integration der sechs Bewegungsgleichungen einführt, sind durch die Werthe von φ, ψ, ϑ; x_0, y_0, z_0; $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\vartheta}{dt}$; $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ für irgend eine Zeit t_0, d. h. durch die Stellung des Systems und die Componenten seiner Translations- und seiner Winkelgeschwindigkeit zu dieser Zeit zu bestimmen.

§. 4. Ist das System Bedingungen unterworfen, so wird man nach Umständen Modificationen in der obigen Transformation der Bewegungsgleichungen eintreten lassen. So z. B. wird man, wenn das System einen festen Punkt besitzt, diesen an die Stelle des Massenmittelpunktes treten lassen.

§. 5. Ein unveränderliches ebenes System bewegt sich in seiner Ebene unter Einfluss von Kräften, welche in dieselbe Ebene fallen; man soll die Bewegung desselben bestimmen.

Nimmt man die Ebene des Systems zur xy-Ebene, so sind die Gleichungen der Bewegung:

$$M\frac{d^2x_0}{dt^2} = \Sigma X, \quad M\frac{d^2y_0}{dt^2} = \Sigma Y, \quad M\varkappa_0^2 \cdot \frac{d\Omega}{dt} = G^{(1)},$$

indem $z_0 = 0$, alle Componenten $Z = 0$, $p = q = 0$, $r = \Omega$ werden. $M\varkappa_0^2$ bedeutet das Trägheitsmoment C für die zur Ebene senkrechte Hauptaxe des Massenmittelpunktes und $G^{(1)}$ das auf diesen Punkt bezogene resultirende Kräftepaar. Die beiden ersten Gleichungen bestimmen die Bewegung des Massenmittelpunktes und führen vier Integrationsconstanten ein, welche durch die Lage dieses Punktes zu irgend einer Zeit t_0 und die Componenten der Geschwindigkeit zu derselben Zeit specielle Werthe erhalten; die dritte Gleichung liefert die Winkelgeschwindigkeit und den Winkel ϑ, welchen eine Hauptaxe oder auch eine beliebige Gerade des Massenmittelpunktes mit der x-Axe bildet. Die beiden durch die Inte-

gration dieser Gleichung eingeführten Constanten werden durch die Lage und Winkelgeschwindigkeit des Systems zur Zeit t_0 bestimmt. Mit Hülfe der Gleichungen

$$x_i = x_0 + \xi_i, \quad \xi_i = x_i' \cos\vartheta - y_i' \sin\vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \Omega$$
$$y_i = y_0 + \eta_i, \quad \eta_i = x_i' \sin\vartheta + y_i' \cos\vartheta,$$

erhält man die Componenten der Geschwindigkeit der Systempunkte, nämlich:

$$v_x = \frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dx_0}{dt} - (x_i' \sin\vartheta + y_i' \cos\vartheta)\,\Omega$$
$$v_y = \frac{dy_i}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \frac{d\eta_i}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + (x_i' \cos\vartheta - y_i' \sin\vartheta)\,\Omega.$$

Um die Lage des Momentancentrums im System zu ermitteln, sind v_x und v_y gleich Null zu setzen. Dies gibt zur Bestimmung der Coordinaten x_1', y_1' desselben die Gleichungen

$$x_1' \sin\vartheta + y_1' \cos\vartheta = \frac{v_x^{(0)}}{\Omega}, \quad \text{wo} \quad v_x^{(0)} = \frac{dx_0}{dt}$$
$$x_1' \cos\vartheta - y_1' \sin\vartheta = -\frac{v_y^{(0)}}{\Omega}, \quad v_y^{(0)} = \frac{dy_0}{dt},$$

woraus $\Omega x_1' = v_x^{(0)} \sin\vartheta - v_y^{(0)} \cos\vartheta$, $\Omega y_1' = v_x^{(0)} \cos\vartheta + v_y^{(0)} \sin\vartheta$. Die Elimination der Zeit aus diesen Gleichungen führt zur Kenntniss des Ortes der Momentancentra im System. Setzt man die Werthe für x_1', y_1' in die Ausdrücke für ξ_i, η_i an die Stelle von x_i', y_i' ein, so ergeben sich die Coordinaten ξ_1, η_1 des Momentancentrums und hiermit dessen absolute Coordinaten $x_1 = x_0 + \xi_1$, $y_1 = y_0 + \eta_1$ und liefert die Elimination von t den Ort der Momentancentra in der absoluten Ebene.

Die Componenten φ_x, φ_y der Beschleunigung φ eines Systempunktes zur Zeit t sind:

$$\varphi_x = \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d^2x_0}{dt^2} + \frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \frac{d^2x_0}{dt^2} - (x_i' \sin\vartheta + y_i' \cos\vartheta)\frac{d\Omega}{dt} - (x_i' \cos\vartheta - y_i' \sin\vartheta)\,\Omega^2$$
$$\varphi_y = \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{d^2y_0}{dt^2} + \frac{d^2\eta_i}{dt^2} = \frac{d^2y_0}{dt^2} + (x_i' \cos\vartheta + y_i' \sin\vartheta)\frac{d\Omega}{dt} - (x_i' \sin\vartheta + y_i' \cos\vartheta)\,\Omega^2,$$

wo für $\frac{d^2x_0}{dt^2}$, $\frac{d^2y_0}{dt^2}$; $\frac{d\Omega}{dt}$ die Werthe $\frac{\Sigma X_i}{M}$, $\frac{\Sigma Y_i}{M}$; $\frac{G^{(1)}}{M\varkappa_0^2}$ zu setzen sind. Für das Beschleunigungscentrum sind φ_x und φ_y gleich Null. Man erhält daher die Coordinaten dieses Punktes und die Orte aller Beschleunigungscentra im System und in der absoluten Ebene ähnlich, wie vorher die des Momentancentrums gefunden wurden.

a. Es sei insbesondere die Bewegung des ebenen Systems zu untersuchen für den Fall, dass auf dasselbe keine continuirlichen Kräfte oder nur solche wirken, welche sich fortwährend Gleichgewicht halten.

Hierfür ist $\Sigma X_i = \Sigma Y_i = 0$, $G^{(1)} = 0$ und mithin $\frac{d^2x_0}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2y_0}{dt^2} = 0$, $\frac{d\Omega}{dt} = 0$, woraus $x_0 = at + \alpha$, $y_0 = bt + \beta$, $\Omega = \Omega_0$, $\vartheta = \Omega_0 t + \vartheta_0$ folgt. Der Massenmittelpunkt beschreibt eine gerade Linie mit constanter Geschwindigkeit und das System dreht sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit um den Massenmittelpunkt zugleich um. Der Einfachheit wegen nehmen wir die Anfangslage des Massenmittelpunktes und einer durch ihn hindurchgehenden Geraden zum Coordinatenursprung und der x-Axe, sodass $\alpha = \beta = \vartheta_0 = 0$, also $x_0 = at$, $y_0 = bt$, $\vartheta = \Omega_0 t$ wird. Man hat alsdann:

$$x_i = at + x_i' \cos \Omega_0 t - y_i' \sin \Omega_0 t, \quad v_x = a - (x_i' \sin \Omega_0 t + y_i' \cos \Omega_0 t)\, \Omega_0$$
$$y_i = bt + x_i' \sin \Omega_0 t + y_i' \cos \Omega_0 t, \quad v_y = b + (x_i' \cos \Omega_0 t - y_i' \sin \Omega_0 t)\, \Omega_0$$

und für die Coordinaten des Momentancentrums:

$$\Omega x_1' = a \sin \Omega_0 t - b \cos \Omega_0 t, \quad x_1 = at + \frac{1}{\Omega_0}(x_1' \cos \Omega_0 t - y_1' \sin \Omega_0 t) = at - \frac{b}{\Omega_0}$$
$$\Omega y_1' = a \cos \Omega_0 t + b \sin \Omega_0 t, \quad y_1 = bt + \frac{1}{\Omega_0}(x_1' \sin \Omega_0 t + y_1' \cos \Omega_0 t) = bt + \frac{a}{\Omega_0}.$$

Hieraus folgt $x_1'^2 + y_1'^2 = \frac{a^2 + b^2}{\Omega_0^2}$, d. h. der Ort der Momentancentra im System ist ein Kreis, um den Massenmittelpunkt beschrieben mit einem Radius $\frac{v_0}{\Omega_0}$, wenn v_0 die Geschwindigkeit $\sqrt{a^2 + b^2}$ dieses Punktes bedeutet und weiter $bx_1 - ay_1 + \frac{a^2 + b^2}{\Omega} = 0$, d. h. der Ort der Momentancentra in der absoluten Ebene ist eine Gerade, welche im Abstande $\frac{a^2 + b^2}{\Omega} = \frac{v^2}{\Omega}$ mit der Bahn des Massenmittelpunktes parallel läuft. Demnach ist die Bewegung des Systems die Cycloidenbewegung (s. S. 50, §. 13.).

Für das Beschleunigungscentrum erhält man, wenn x_2', y_2' seine Coordinaten sind:

$$x_2' \cos \Omega_0 t - y_2' \sin \Omega_0 t = 0, \quad x_2' \sin \Omega_0 t - y_2' \cos \Omega_0 t = 0,$$

woraus $x_2' = y_0' = 0$ folgt. Das Beschleunigungscentrum fällt fortwährend mit dem Massenmittelpunkte zusammen.

b. Es sei ferner das System der Einwirkung eines constanten Paares $G^{(1)} = N$ unterworfen. Die Gleichungen

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 0, \quad M\varkappa_0^2 \frac{d\Omega}{dt} = N$$

liefern, wenn wir die Anfangslage des Massenmittelpunktes zum Coordinatenursprung und die Richtung seiner constanten Geschwindigkeit zur Axe der x annehmen:

$$x_0 = v_0 t, \quad y_0 = 0, \quad \Omega = \frac{N}{M\varkappa_0^2} t + \Omega_0, \quad \vartheta = \tfrac{1}{2} \frac{N}{M\varkappa_0^2} t^2 + \Omega_0 t = \tfrac{1}{2} \mu t^2 + \Omega_0 t.$$

Hiermit werden die Coordinaten eines Systempunktes (x_i', y_i'):

$$x_i = v_0 t + \xi_i, \quad \xi_i = x_i' \cos(\tfrac{1}{2}\mu t^2 + \Omega_0 t) - y_i' \sin(\tfrac{1}{2}\mu t^2 + \Omega_0 t)$$
$$y_i = \eta_i, \quad \eta_i = x_i' \sin(\tfrac{1}{2}\mu t^2 + \Omega_0 t) + y_i' \cos(\tfrac{1}{2}\mu t^2 + \Omega_0 t)$$

und die Componenten seiner Geschwindigkeit

$$v_x = v_0 - [x_i' \sin(\tfrac{1}{2}\mu t^2 + \Omega_0 t) + y_i' \cos(\tfrac{1}{2}\mu t^2 + \Omega_0 t)]\,(\mu t + \Omega_0)$$
$$v_y = [x_i \cos(\tfrac{1}{2}\mu t^2 + \Omega_0 t) - y_i' \sin(\tfrac{1}{2}\mu t^2 + \Omega_0 t)]\,(\mu t + \Omega_0).$$

Die Lage des Momentancentrums im System und der absoluten Ebene bestimmen die Coordinaten x_1', y_1'; x_1, y_1, wofür

$$(\mu t + \Omega)\, x_1' = v_0 \sin(\tfrac{1}{2}\mu t^2 + \Omega_0 t), \quad x_1 = v_0 t$$
$$(\mu t + \Omega)\, y_1' = v_0 \cos(\tfrac{1}{2}\mu t^2 + \Omega_0 t), \quad y_1 = \frac{v_0^2}{\mu t + \Omega_0}.$$

Hieraus ergibt sich $x_i'^2 + y_i'^2 = \left(\frac{v_0}{\mu t + \Omega_0}\right)^2$; es nähert sich daher mit wachsendem t das Momentancentrum dem Massenmittelpunkte bis zum Abstande $\frac{v_0}{\Omega}$ asymptotisch an. Der Ort der Momentancentra in der absoluten Ebene ist die gleichseitige Hyperbel $\mu x_1 y_1 + \Omega_0 v_0 y_1 = v_0^3$, deren Mittelpunkt im Abstande

$x_1 = -\frac{\Omega_0 v_0}{\mu}$ vom Ursprung auf der geradlinigen Bahn des Massenmittelpunktes liegt.

§. 6. **Ein körperliches, unveränderliches System bewegt sich ohne Einwirkung von continuirlichen Kräften, man soll die Art der Bewegung desselben ermitteln.**

1. Da keine Reductionsresultante $R^{(1)}$ vorhanden ist, so beschreibt der Massenmittelpunkt S eine Gerade mit constanter Geschwindigkeit und bleibt die Resultante der Momentankräfte nach Grösse und Richtung constant. Weil das resultirende Paar $G^{(1)}$ der continuirlichen Kräfte Null ist, so ist auch das Axenmoment G des resultirenden Paares der Momentankräfte nach Grösse und Richtung constant und besitzt das System eine invariabele Ebene, die Ebene des Paares G, die wir uns durch den Massenmittelpunkt gelegt denken wollen. Der Diameter des Centralellipsoids, welcher zu der mit der invariabelen Ebene zusammenfallenden Diametralebene desselben conjugirt ist, ist die Momentanaxe. Da dieselbe im Allgemeinen schief geneigt ist gegen die Diametralebene, so tritt diese in Folge der Elementarrotation um die Momentanaxe aus der invariabelen Ebene heraus und gelangt eine andere, ihr unendlich nahe Diametralebene in dieselbe, deren conjugirter Diameter dadurch zur Momentanaxe für den folgenden Zeitmoment wird u. s. f. Obgleich also G nach Grösse und Richtung unveränderlich bleibt, so wechselt die Momentanaxe doch von Moment zu Moment. Blos im Falle, dass sie eine Hauptaxe und mithin zu der ihr conjugirten Diametralebene senkrecht ist, bleibt sie fortwährend dieselbe. Sollte also einmal im Laufe der Bewegung eine Hauptaxe senkrecht zur invariabelen Ebene werden, so müsste das System sich alsdann fortwährend um diese umdrehen und würde die Rotationsaxe im Systeme, wie im absoluten Raume constante Richtung behalten, während im Allgemeinen die Momentanaxe sowohl im System als im absoluten Raume fortwährend wechselt.

Nach Cap. XIII, §. 12., S. 810 ist die lebendige Kraft $2\,T$ constant und zwar mit Rücksicht auf Cap. XII, §. 10. sowohl der Bestandtheil $2\,T_0$, welcher der Bewegung des Massenmittelpunktes entspricht, als auch der $2\,T_1 = \Omega^2 \Sigma m r^2$, welcher von der Rotation um die Momentanaxe des Massenmittelpunktes herrührt, jeder für sich. Ist l der Semidiameter SJ des Centralellipsoids, welcher in die Momentanaxe fällt, so wird nach Cap. XII, §. 10. (S. 768) $2\,T_1 = \frac{\Omega^2}{l^2}$ und bleibt folglich während der Bewegung die Grösse $\frac{\Omega}{l}$ constant und Ω proportional dem Semidiameter l, nämlich $\Omega = l\sqrt{2\,T_1}$.

Aus Cap. XII, §. 10. (S. 769) folgt weiter, dass $\Omega \cos\psi = \frac{2\,T_1}{G}$, d. h. die Componente der Winkelgeschwindigkeit um die Axe des resultirenden Paares der Momentankräfte constant bleibt. Endlich ergab sich bereits Cap. XII, §. 7. (S. 761) die Gleichung $G = \frac{\Omega}{l\delta}$, wo δ den Abstand der Tangentenebene des Centralellipsoids im Schnittpunkte J desselben mit der Momentanaxe vom Massenmittelpunkte bedeutet. Da nun $\frac{\Omega}{l}$ und G constant sind, so folgt, dass auch δ constant ist. Daher behält die Tangentenebene des Centralellipsoids im Punkte J, welche mit der zu l conjugirten Diametralebene, also auch mit der invariabelen Ebene parallel und senkrecht zu G ist, während der Bewegung constanten Abstand vom Massenmittelpunkte. Legt man also im Abstande $\delta = \frac{\Omega}{lG} = \frac{\sqrt{2\,T_1}}{G}$ von S eine Ebene

senkrecht zur Axe des resultirenden Paares der Momentankräfte, so wird dieselbe während der Bewegung vom Centralellipsoid in immer anderen und anderen Punkten berührt.

Hierdurch ist die Bewegung des Centralellipsoids und damit die Bewegung des Systems selbst vollständig klar und hat man den Satz:

Ein unveränderliches System, welches nicht von continuirlichen Kräften afficirt wird, bewegt sich so, dass sein Massenmittelpunkt eine Gerade gleichförmig beschreibt und das Centralellipsoid auf einer Ebene, welche in constantem Abstande δ vom Massenmittelpunkte parallel mit sich fortrückt, hinrollt. Die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes wird durch die unveränderliche Resultante R der Momentankräfte bestimmt und jene invariabele Ebene ist senkrecht zur Axe des nach Grösse und Axenrichtung constanten resultirenden Paares G der Momentankräfte. Das Centralellipsoid dreht sich jeden Augenblick um einen anderen Diameter $2l$, nämlich um denjenigen, welcher durch seinen Berührungspunt J mit der invariabelen Ebene geht, auf welcher es rollt, seine Winkelgeschwindigkeit Ω ist l proportional, sodass $\frac{\Omega}{l} = \frac{\Omega_0}{l_0}$ constant bleibt. Diese Constante, durch die Grösse des resultirenden Axenmomentes dividirt, gibt den Abstand δ des Massenmittelpunktes von der invariabelen Ebene; das Quadrat derselben Constanten bedeutet den unveränderlichen Bestandtheil der lebendigen Kraft des Systems, welcher von der Rotation um die Momentanaxe herrührt. Die Componente der Winkelgeschwindigkeit um die Axe des resultirenden Paares G bleibt constant gleich $\frac{\Omega^2}{l^2 G}$.

In dem besonderen Falle, dass zu irgend einer Zeit das System um eine Hauptaxe des Centralellipsoids rotirt, bleibt diese Axe fortwährend Rotationsaxe und die Winkelgeschwindigkeit constant. Die Hauptaxen des Centralellipsoids heissen daher auch permanente Rotationsaxen des Systems.

Nach Cap. XII bestimmt man leicht den anfänglichen Geschwindigkeitszustand des Systems aus den Momentankräften, welche dasselbe in Bewegung setzen.

2. Aus Thl. I, Cap. V, §. 9. ist bekannt, dass die Bewegung eines unveränderlichen Systems äquivalent ist dem Rollen eines gewissen, dem beweglichen System angehörigen Kegels, zu dessen Mittelpunkt ein beliebiger Systempunkt gewählt werden kann, auf einen anderen Kegel mit demselben Mittelpunkte, welcher eine Translationsbewegung besitzt, wie sie durch die Bewegung des Systempunktes, welcher gemeinschaftlicher Mittelpunkt beider Kegel ist, bestimmt wird. Der erste Kegel ist der Ort (Γ) aller Momentanaxen des Mittelpunktes im System, der zweite der Ort (C) aller mit den Momentanaxen paralleler, sich in jenem Mittelpunkte schneidender Geraden. In unserem Falle ist der Mittelpunkt beider Kegel der Massenmittelpunkt. Der Kegel (Γ) schneidet das Centralellipsoid in einer Curve, welche die Berührungspunkte J desselben mit der invariabelen Tangentenebene enthält, der zweite schneidet diese Ebene in der Curve aller Punkte I, in welchen dieselbe im Laufe der Bewegung von dem Centralellipsoid berührt wird. Die erste Curve auf dem Ellipsoid nennt Poinsot die Polodie (von πόλος und ὁδός, Weg des Poles J der Momentanaxe, nicht „Poloide", wie man zuweilen findet), die zweite ebene Curve, auf welcher während der Bewegung die erste berührend hinrollt, ihrer schlangenartigen Windungen wegen die Herpolodie (von ἕρπειν, kriechen, schleichen). Durch beide Curven wird die Bewegung des Systems in ausgezeichneter Weise charakterisirt. Sie hängen von den Hauptaxen des Central-

ellipsoids und von dem Abstande des Massenmittelpunktes von der invariabelen Tangentenebene ab.

Um die Polodie zu bestimmen, hat man auf dem Centralellipsoid den Ort aller Punkte zu suchen, deren Tangentenebene vom Mittelpunkte denselben Abstand δ besitzt. Sind α, β, γ die Halbaxen dieses Ellipsoids, so bestehen mithin für diese Curve die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}-1=0,\quad \frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}+\frac{z^2}{\gamma^4}-\frac{1}{\delta^2}=0.$$

Sie ist daher die Schnittcurve des Centralellipsoids mit einem anderen concentrischen und coaxialen Ellipsoide, dessen Halbaxen $\frac{\alpha^2}{\delta}$, $\frac{\beta^2}{\delta}$, $\frac{\gamma^2}{\delta}$ sind. Multiplicirt man die zweite Gleichung mit δ^2 und subtrahirt sie hierauf von der ersten, so ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}\left(1-\frac{\delta^2}{\alpha^2}\right)+\frac{y^2}{\beta^2}\left(1-\frac{\delta^2}{\beta^2}\right)+\frac{z^2}{\gamma^2}\left(1-\frac{\delta^2}{\gamma^2}\right)=0,$$

welche die Kegelfläche (Γ) darstellt, welche die Momentanaxen enthält. Die Polodie ist demnach der Schnitt eines Ellipsoids mit einer concentrischen Kegelfläche zweiter Ordnung. Diese Raumcurve vierter Ordnung zerfällt in zwei getrennte Theile, von denen jeder für sich auf einer invariabelen Ebene rollend angenommen werden kann, um die Bewegung vollkommen zu charakterisiren. Jeder dieser Theile hat zwei Paar Scheitel, welche durch die Hauptebenen des Ellipsoids bestimmt werden. Der Abstand δ der Tangentenebene ist nun nicht kleiner als die kleinste und nicht grösser als die grösste Halbaxe des Ellipsoids. Es sei $\alpha<\beta<\gamma$. Für $\delta=\alpha$ reducirt sich der Kegel auf die Gerade, welche die Axe α enthält und die Polodie auf zwei Punkte. Dasselbe findet für $\delta=\gamma$ statt. In diesen Fällen rotirt das System fortwährend um die kürzeste oder längste Axe des Centralellipsoids. Ist $\alpha<\delta<\beta$, so enthält die yz-Ebene keine reellen Geraden des Kegels (Γ) und umgibt derselbe also die x-Axe, d. h. die kleinste Axe α des Ellipsoids. Für $\beta<\delta<\gamma$ schneidet die xy-Ebene der Kegel nicht in reellen Geraden, also umgibt derselbe die längste Axe γ. Für $\delta=\beta$ zerfällt der Kegel in zwei Ebenen $\frac{x^2}{\alpha^2}\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)+\frac{z^2}{\gamma^2}\left(1-\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)=0$, welche durch die mittlere Axe β hindurchgehen und gleich geneigt gegen die Ebene $(\alpha\beta)$ sind. Sie schneiden das Centralellipsoid in zwei Ellipsen, von denen jede als Polodie gelten kann und welche beide sich selbst in den Scheiteln der mittleren Axe treffen.

In allen Fällen ist die Polodie eine geschlossene Curve, welcher Umstand sich in einer gewissen Periodicität der Bewegung des Systems ausspricht.

Die Polodie kann nach Obigem als der Ort der Berührungspunkte einer Ebene mit dem Centralellipsoid definirt werden, welche zugleich die Kugel $x^2+y^2+z^2=\delta^2$ berührt. Der Ort der Berührungspunkte mit der Kugel ist der Schnitt dieser mit dem Kegel $x^2\left(1-\frac{\alpha^2}{\delta^2}\right)+y^2\left(1-\frac{\beta^2}{\delta^2}\right)+z^2\left(1-\frac{\gamma^2}{\delta^2}\right)=0$, eine sphärische Ellipse.

Fällt man vom Massenmittelpunkte S auf die invariabele Ebene das Perpendikel SP, so ist PJ die Projection des Semidiameters SJ, welcher nach dem Berührungspunkte der Polodie mit der Herpolodie hinführt. Nun hat SJ ein Maximum und ein Minimum, entsprechend den Scheiteln der Polodie, daher hat auch der Radiusvector der Herpolodie ein Maximum und Minimum und sieht man leicht, dass diese Curve sich wellenförmig zwischen zwei um P in der invariabelen Ebene mit dem Maximum und dem Minimum von PJ beschriebenen Kreisen hinwindet. Der Kegel (C), auf welchem der Kegel (Γ) rollt, zeigt daher Cannelirungen und

ist zwischen zwei concentrischen Kreiskegeln enthalten. Derselbe ist im Allgemeinen transcendent und kehrt nicht in sich selbst zurück.

In dem Falle $\delta = \beta$ ist die Herpolodie eine Doppelspirale, welche in unendlich vielen Windungen von beiden Seiten sich dem Punkte P asymptotisch nähert.

Ist das Centralellipsoid ein Rotationsellipsoid, so werden beide Curven Kreise; ist es eine Kugel, so fällt die Momentanaxe mit der Axe des resultirenden Paares der Momentankräfte zusammen, beide Curven sind Punkte, welche fortwährend vereinigt bleiben.

Die beiden Ellipsen, welche dem Falle $\delta = \beta$ als Polodie entsprechen, zerlegen die Oberfläche des Ellipsoids in zwei Paar Scheitelräume, welche in den beiden Scheiteln der mittleren Axe zusammenstossen und von denen das eine die Scheitel der kleinsten, das andere die der grössten Axe enthält. Die Ellipsen trennen die Schaar Polodien, welche um die Scheitel der kleinsten Axe herumlaufen, von denen, welche die Scheitel der grössten Axe umschliessen. Wird eine der beiden Axen, die grösste oder die kleinste, der mittleren nahezu gleich, so wird der Scheitelraum, der ihr zugehört, sehr eng, der andere sehr weit. Fällt der Pol J in einen der Räume, so bleibt er in demselben und beschreibt die Polodie, welche durch ihn hindurchgeht. Hiernach kann beurtheilt werden, welche Aenderungen in der Lage der Momentanaxe vor sich gehen, wenn die Bewegung durch ein kleines Momentankräftepaar gestört wird.

Die vorstehenden Betrachtungen und Sätze verdankt man Poinsot (*Théorie nouvelle de la rotation des corps*, *présentée à l'Institut le* 19. *mai* 1834, auch als Anhang in den *Eléments de Statique* des Verfassers; in erweiterter Form erschienen 1851 in Liouville *Journal de Mathém.* T. XVI, sowie separat in 4° und 8°).

3. Behufs der rein analytischen Behandlungsweise unseres Problems gehen wir von den Euler'schen Gleichungen §. 2. aus, in welchen $G_x^{(1)} = G_y^{(1)} = G_z^{(1)} = 0$ ist, sodass sie lauten:

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = 0$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = 0$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = 0.$$

Man erhält sofort zwei Integrale derselben, indem man sie das eine mal mit Ap, Bq, Cr, das andere mal mit p, q, r multiplicirt und addirt, nämlich:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2$$
$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$

wo G^2, h die Integrationsconstanten bezeichnen. Die Bedeutung derselben ist klar. Da Ap, Bq, Cr die Componenten des resultirenden Paares der Momentankräfte sind, so ist G dies Paar selbst. h stellt nach Cap. XII, §. 11. die lebendige Kraft $2\,T_1$ dar, welche nach Nr. 1. constant ist.

Für die Punkte der Momentanaxe im System ist $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$. Setzt man den gemeinschaftlichen Werth dieser Quotienten gleich $\frac{1}{\lambda}$, sodass $p = \lambda x$, $q = \lambda y$, $r = \lambda z$ wird und eliminirt nach der Substitution dieser Grössen in die beiden Integrale den Factor λ, so erhält man als Ort der Momentanaxen im System den Kegel zweiten Grades:

$$A(G^2 - Ah)\,x^2 + B(G^2 - Bh)\,y^2 + C(G^2 - Ch)\,z^2 = 0.$$

Mit Rücksicht auf $A = \frac{1}{\alpha^2}$, $B = \frac{1}{\beta^2}$, $C = \frac{1}{\gamma^2}$ und $\frac{h}{G^2} = \delta^2$ (s. Nr. 1.) nimmt diese Gleichung die Form unter Nr. 2. an.

Für die Systempunkte, welche auf der Axe des Paares G liegen, ist $\frac{x}{Ap} = \frac{y}{Bq} = \frac{z}{Cr}$ und folglich, wenn man $Ap = \lambda x$, $Bq = \lambda y$, $Cr = \lambda z$ in die obigen Integrale einführt, so erhält man als Ort der Axen des resultirenden Paares im System der Kegel zweiten Grades:

$$\frac{1}{A}(G^2 - Ah)x^2 + \frac{1}{B}(G^2 - Bh)y^2 + \frac{1}{C}(G^2 - Ch)z^2 = 0,$$

dessen Gleichung in die Form

$$\left(1 - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right)x^2 + \left(1 - \frac{\delta^2}{\beta^2}\right)y^2 + \left(1 - \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right)z^2 = 0$$

gebracht werden kann und welche sich bereits in Nr. 2. ergab. Setzt man $A = Ma^2$, $B = Mb^2$, $C = Mc^2$, sodass $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ das zweite Centralellipsoid von Clebsch darstellt, so wird die Gleichung des Kegels

$$(1 - \delta^2 a^2)\frac{x^2}{a^2} + (1 - \delta^2 b^2)\frac{y^2}{b^2} + (1 - \delta^2 c^2)\frac{z^2}{c^2} = 0$$

und ersieht man, dass der Kegel das zweite Ellipsoid in der sphärischen Ellipse $x^2 + y^2 + z^2 = \delta^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ schneidet.

4. Die Winkelgeschwindigkeit als Function der Zeit darzustellen, multipliciren wir zunächst die Euler'schen Gleichungen der Reihe nach mit BCp, CAq, ABr und addiren sie. Dies gibt mit Rücksicht auf $p^2 + q^2 + r^2 = \Omega^2$, $pdp + qdq + rdr = \Omega d\Omega$:

$$ABC \cdot \Omega \frac{d\Omega}{dt} + [(BC(C - B) + CA(A - C) + AB(B - A)] \cdot pqr = 0,$$

oder, wie leicht zu sehen:

$$ABC \cdot \Omega \frac{d\Omega}{dt} + (A - B)(B - C)(C - A) \cdot pqr = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Winkelgeschwindigkeit constant ist, sobald zwei Hauptträgheitsmomente gleich sind; ebenso wenn eine der Componenten p, q, r Null ist. Soll dies aber der Fall sein, ist also z. B. $r = 0$, so folgt aus den Euler'schen Gleichungen $\frac{dp}{dt} = 0$, $\frac{dq}{dt} = 0$, $(B - A)pq = 0$. Mithin müssen dann die beiden anderen Componenten p und q einzeln constant und eine von ihnen Null sein, wenn nicht $B = A$. Abgesehen von diesen Specialfällen ist Ω im Allgemeinen von Moment zu Moment variabel.

Wir haben in der vorstehenden Gleichung noch p, q, r durch Ω auszudrücken. Zu dem Ende multipliciren wir von den Gleichungen

$$\begin{aligned} A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= G^2 \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= h \\ p^2 + q^2 + r^2 &= \Omega^2 \end{aligned}$$

die zweite mit $-(B + C)$, die dritte mit BC und addiren alle drei. Dies gibt uns, wenn wir zugleich die entsprechenden Umtauschungen der Buchstaben vornehmen, die weiteren Gleichungen:

$$\begin{aligned} (A - B)(A - C)p^2 &= G^2 - (B + C)h + BC \cdot \Omega^2 \\ (B - C)(B - A)q^2 &= G^2 - (C + A)h + CA \cdot \Omega^2 \\ (C - A)(C - B)r^2 &= G^2 - (A + B)h + AB \cdot \Omega^2. \end{aligned}$$

Indem wir

$$(B+C)h-G^2=BC\cdot\lambda^2,\quad (C+A)h-G^2=CA\cdot\mu^2,\quad (A+B)h-G^2=AB\cdot\nu^2$$

setzen, gehen dieselben über in

$$\begin{aligned}(A-B)(A-C)p^2&=BC(\Omega^2-\lambda^2)\\(B-C)(B-A)q^2&=CA(\Omega^2-\mu^2)\\(C-A)(C-B)r^2&=AB(\Omega^2-\nu^2).\end{aligned}$$

Es sei nun $A>B>C$, also α die kleinste, β die mittlere und γ die grösste Halbaxe des Centralellipsoids. Dann folgt, weil die linken Seiten der ersten und dritten Gleichung positiv sind, dass $\Omega^2-\lambda^2$, $\Omega^2-\nu^2$ positiv sind und dass, weil die linke Seite der zweiten negativ ist, $\Omega^2-\mu^2$ negativ sein muss. Indem wir nun die drei Gleichungen mit einander multipliciren und den Werth des Produktes pqr benutzen, ergibt sich aus der zu Anfang dieser Nummer aufgestellten Gleichung

$$dt=\pm\frac{\Omega\,d\Omega}{\sqrt{(\Omega^2-\lambda^2)(\mu^2-\Omega^2)(\Omega^2-\nu^2)}},$$

woraus Ω als Function von t zu finden ist. Das Integral dieses Ausdruckes ist ein elliptisches und kann also Ω im vorliegenden allgemeinen Falle nur durch elliptische Functionen dargestellt werden. Man kann aber auch, ohne diese Darstellung selbst auszuführen, einige Eigenthümlichkeiten von Ω, insbesondere dessen Periodicität aus dieser Differentialformel entwickeln. Zunächst aber müssen wir zeigen, dass λ^2, μ^2, ν^2 positiv, also λ, μ, ν reell sind. Aus den Gleichungen

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=G^2\quad\text{und}\quad Ap^2+Bq^2+Cr^2=h$$

folgt nun

$$Ah-G^2=Bq^2(A-B)+Cr^2(A-C)$$

und da $A>B>C$, so ist $Ah-G^2$ positiv. Daher sind auch $(C+A)h-G^2$ und $(A+B)h-G^2$ positiv. Ferner ist

$$(B+C)h-G^2=[(B+C)A-A^2]p^2+Cq^2+Br^2,$$

also da

$$B+C-A=\Sigma m(z^2+x^2)+\Sigma m(x^2+y^2)-\Sigma m(y^2+z^2)=2\Sigma mx^2$$

positiv ist, gleichfalls positiv. Demnach sind λ^2, μ^2, ν^2 alle drei positiv und also λ, μ, ν reell. Die Bedeutung der hier auftretenden Grössen ist klar. Es ist

$$Ah-G^2=G^2\left(A\frac{h}{G^2}-1\right)=G^2\left(\frac{\delta^2}{\alpha^2}-1\right),$$

$$Bh-G^2=G^2\left(\frac{\delta^2}{\beta^2}-1\right),\qquad Ch-G^2=G^2\left(\frac{\delta^2}{\gamma^2}-1\right)$$

und da δ nicht kleiner als α sein kann, so ist die erste Grösse positiv, da es aber nicht grösser als γ ist, so ist die dritte negativ, die zweite kann positiv oder negativ sein, je nachdem $\delta \gtrless \beta$. Man kann daher auch λ^2, μ^2, ν^2 die Form geben:

$$\begin{aligned}\lambda^2&=G^2[(\beta^2+\gamma^2)\delta^2-\beta^2\gamma^2]\\\mu^2&=G^2[(\gamma^2+\alpha^2)\delta^2-\gamma^2\alpha^2]\\\nu^2&=G^2[(\alpha^2+\beta^2)\delta^2-\alpha^2\beta^2].\end{aligned}$$

Was ferner die relative Grösse von λ^2, μ^2, ν^2 anlangt, so folgt aus $Ah-G^2>0$ durch Multiplication mit $B-C$ und beiderseitige Addition von BCh die Relation

$$A(B-C)h+BCh>(B-C)G^2+BCh$$

oder

$$(C+A)Bh-BG^2>(A+B)Ch-CG^2,$$

d. h. $\mu^2>\nu^2$. Ebenso aus $G^2>Ch$

$$(A-B)G^2+ABh>(A-B)Ch+ABh$$

oder

$$(A+C)Bh-BG^2>(B+C)Ah-AG^2,$$

d. h. $\mu^2 > \lambda^2$. Es ist mithin μ^2 sowohl grösser als ν^2, als auch grösser als λ^2. Die Grössen ν^2 und λ^2 können aber je nach Beschaffenheit von $G^2 - Bh$ verschiedenes Verhältniss zu einander haben. Denn es ist

$$\nu^2 - \lambda^2 = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \frac{(G^2 - Bh)}{B},$$

also $\nu^2 > \lambda^2$, wenn $G^2 - Bh > 0$, d. h. $\delta < \beta$, $\nu^2 = \lambda^2$ für $G^2 - Bh$ oder $\delta = \beta$ und $\nu^2 < \lambda^2$, wenn $G^2 - Bh < 0$, d. h. $\delta > \beta$ ist. Da nun die Differenzen $\Omega^2 - \lambda^2$, $\mu^2 - \Omega^2$, $\Omega^2 - \nu^2$ dem Obigen zufolge alle drei positiv sind, also $\lambda^2 < \Omega^2 < \mu^2$ und $\Omega^2 < \nu^2$ ist, so erhalten wir hinsichtlich der Grenzen, innerhalb welcher Ω sich bewegt, folgende Uebersicht:

$$\begin{array}{lll} \delta < \beta, & \lambda^2 < \nu^2 < \mu^2, & \lambda^2 < \nu^2 < \Omega^2 < \mu^2 \\ \delta = \beta, & \lambda^2 = \nu^2 < \mu^2, & \lambda^2 = \nu^2 < \Omega^2 < \mu^2 \\ \delta > \beta, & \nu^2 < \lambda^2 < \mu^2, & \nu^2 < \lambda^2 < \Omega^2 < \mu^2. \end{array}$$

Es sei nun zunächst $\delta < \beta$ und liege in Folge dessen Ω^2 fortwährend zwischen ν^2 und μ^2. Der kleinste Werth, dessen Ω fähig ist, ist ν, da $\Omega^2 - \nu^2$ nicht negativ werden kann, weil sonst die Wurzel in dem Ausdrucke für dt imaginär würde; hat also Ω zur Zeit $t = 0$ einen Werth Ω_0 zwischen ν und μ und ist es z. B. im Wachsen begriffen, so kann es nur fortwachsen bis $\Omega = \mu$ und nimmt dann wieder ab bis $\Omega = \nu$, wächst hierauf wieder bis $\Omega = \mu$ u. s. f. Ob aber Ω zur Zeit $t = 0$ im Wachsen begriffen ist, entscheidet sich durch das Zeichen des Produktes pqr zur Zeit $t = 0$, wie aus der Gleichung

$$ABC \frac{d\Omega}{dt} + (A - B)(B - C)(C - A) pqr = 0$$

zu ersehen ist, welche zeigt, dass $\frac{d\Omega}{dt}$ und pqr immer gleiche Zeichen besitzen. Hiervon hängt das Zeichen der Wurzel in dem Ausdrucke für dt ab. Die Zeit, welche verfliesst, während Ω von ν bis μ wächst oder abnimmt, ist demnach:

$$T = \int_\nu^\mu \frac{\Omega\, d\Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - \nu^2)}}$$

und die Zeit, während welcher Ω von Ω_0 bis μ wachsend zum erstenmale geht:

$$T_1 = \int_{\Omega_0}^\mu \frac{\Omega\, d\Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - \nu^2)}}$$

Man hat dann $\Omega = \nu$ zu den Zeiten $T_1 + T$, $T_1 + 3T, \ldots T_1 + (2n + 1)T$ und $\Omega = \mu$ zu den Zeiten T_1, $T_1 + 2T$, $T_1 + 4T, \ldots T_1 + 2nT$. Um für irgend eine Zeit t die Winkelgeschwindigkeit Ω zu finden, hat man $t - T_1$ durch T zu dividiren. Der Quotient sei m, der Rest t', sodass $t - T_1 = mT + t'$ Ist nun m gerade, so entspricht der Zeit $t - t'$ der Werth $\Omega = \mu$, ist m ungerade, der Werth $\Omega = \nu$. Im ersten Falle ist dann Ω aus der Gleichung

$$t' = \int_\Omega^\mu \frac{\Omega\, d\Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - \nu^2)}}$$

zu suchen; im zweiten aus einer ähnlichen, in welcher nur ν und Ω die Grenzen des Integrales sind. Zu jedem t', also auch zu jedem t gehört nur ein Werth Ω, umgekehrt aber gehören zu demselben Ω unendlich viele Werthe von t und kehrt derselbe Werth Ω periodisch wieder.

In ganz gleicher Weise ist die Betrachtung für den Fall $\delta > \beta$ durchzu-

führen. Der Fall $\delta = \beta$ gestaltet sich einfach, indem $\nu = \lambda$ wird. Man hat für ihn

$$dt = \frac{\Omega\, d\Omega}{(\Omega^2 - \nu^2)\sqrt{\mu^2 - \Omega^2}},$$

oder

$$dt = \frac{-d\vartheta}{(\mu^2 - \nu^2) - \vartheta^2},$$

wenn man $\mu^2 - \Omega^2 = \vartheta^2$ setzt. Wird $\Omega = \Omega_0$ für $t = 0$ und wächst Ω von Ω_0 nach μ zu, so ist die Zeit t, wofür Ω von Ω_0 bis Ω zunimmt:

$$t = \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}\, l\left[\frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2} - \sqrt{\mu^2 - \Omega_0^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2} + \sqrt{\mu^2 - \Omega_0^2}} \cdot \frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2} + \sqrt{\mu^2 - \Omega^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2} - \sqrt{\mu^2 - \Omega^2}}\right]$$

und die Zeit T_1, während welcher Ω von Ω_0 bis μ zunimmt:

$$T_1 = \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}\, l\, \frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2} - \sqrt{\mu^2 - \Omega_0^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2} + \sqrt{\mu^2 - \Omega_0^2}}.$$

Von nun an nimmt Ω wieder ab und die Zeit, während welcher es von μ bis zu Ω abnimmt, ist:

$$t' = \int_\mu^\Omega \frac{\Omega\, d\Omega}{(\Omega^2 - \nu^2)\sqrt{\mu^2 - \Omega^2}} = \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}\, l \cdot \frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2} + \sqrt{\mu^2 - \Omega^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2} - \sqrt{\mu^2 - \Omega^2}}.$$

Für $\Omega = \nu$ wird dieser Ausdruck unendlich gross. Es nähert sich mithin Ω, wenn es einmal im Abnehmen begriffen ist, dem Werthe ν asymptotisch. Für $\Omega = \nu$ wird aber, wie aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}(A - B)(A - C)\,p^2 &= BC(\Omega^2 - \nu^2)\\ (B - C)(A - B)\,q^2 &= CA(\mu^2 - \Omega^2)\\ (B - C)(A - C)\,r^2 &= AB(\Omega^2 - \nu^2)\end{aligned}$$

folgt, $p = r = 0$, während $\Omega = q = \nu$ wird, d. h. es nähert sich die Bewegung fortwährend der Rotation um die mittlere Hauptaxe.

Sobald Ω gefunden ist, hat man für seine Componenten:

$$p = \sqrt{\frac{BC}{(A - B)(A - C)}} \cdot \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2},$$

$$q = \sqrt{\frac{CA}{(B - C)(A - B)}} \cdot \sqrt{\mu^2 - \Omega^2},$$

$$r = \sqrt{\frac{AB}{(A - C)(B - C)}} \cdot \sqrt{\Omega^2 - \nu^2},$$

Es bleibt nun noch der letzte Theil unserer Aufgabe übrig, die Bestimmung der Lage des beweglichen Systems gegen das feste Coordinatensystem der x, y, z zur Zeit t. Dies kann geschehen, indem wir die Cosinusse a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' der Richtungswinkel der Hauptaxen des Centralellipsoids oder indem wir die Euler'schen Winkel φ, ψ, ϑ (s. S. 153) als Functionen der Zeit darstellen. Wir wählen die constante Richtung der Axe des Paares G zur z-Axe, also die xy-Ebene parallel der invariabelen Ebene. Dann erhalten wir, da die Richtungscosinusse c, c', c'' dieser Axe gegen die beweglichen Hauptaxen die Werthe haben:

$$c = \sin\varphi \sin\vartheta, \quad c' = \cos\varphi \sin\vartheta, \quad c'' = \cos\vartheta$$

und Ap, Bq, Cr die Componenten von G sind:

$$Ap = G \sin\varphi \sin\vartheta, \quad Bq = G\cos\varphi \sin\vartheta, \quad Cr = G\cos\vartheta,$$

sodass also sogleich angegeben werden kann:

$$\cos\vartheta = \frac{Cr}{G}, \quad tg\,\varphi = \frac{Ap}{Bq}.$$

Um ψ zu finden, geben die beiden ersten der drei Gleichungen am Schlusse des §. 3., S. 817:

$$p \sin\varphi + q\cos\varphi = \sin\vartheta \frac{d\psi}{dt}$$

und folglich mit Rücksicht auf die vorstehenden Gleichungen, wenn man mit $\sin\vartheta$ beiderseits multiplicirt:

$$G(Ap^2 + Bq^2) = (G^2 - C^2r^2)\frac{d\psi}{dt},$$

oder mit Hülfe der Gleichung $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h$:

$$d\psi = \frac{G(h - Cr^2)}{G^2 - C^2r^2}\,dt,$$

Es ist $h - Cr^2 = Ap^2 + Bq^2$ stets positiv, ebenso $G^2 - C^2r^2 = A^2p^2 + B^2q^2$, mithin wächst ψ mit t gleichzeitig. Dies heisst soviel, als die Knotenlinie der beweglichen Hauptebene $(\alpha\beta)$ des Centralellipsoids mit der invariabelen Ebene dreht sich fortwährend in demselben Sinne um die Axe des Paares G. Nach Substitution des Werthes von r^2 aus $(A - C)(B - C)r^2 = AB(\Omega^2 - \nu^2)$, wodurch

$$\frac{h - Cr^2}{G^2 - C^2r^2} = \frac{(A - C)(B - C)h - ABC(\Omega^2 - \nu^2)}{(A - C)(B - C)G^2 - ABC^2(\Omega^2 - \nu^2)} = \frac{H - \Omega^2}{C(J - \Omega^2)},$$

wenn abkürzend

$$(A - C)(B - C)h - ABC\cdot\nu^2 = ABC\cdot H$$
$$(A - C)(B - C)G^2 - ABC^2\cdot\nu^2 = ABC\cdot J$$

gesetzt wird, kommt:

$$d\psi = \frac{G}{C}\cdot\frac{H - \Omega^2}{J - \Omega^2}\,dt = \frac{G}{C}\cdot\frac{H - \Omega^2}{J - \Omega^2}\cdot\frac{\Omega\,d\Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - \nu^2)}}$$

Durch die Integration dieses Ausdrucks wird noch eine Constante ψ_0 eingeführt. Die Zahl der Constanten ist an sich gleich zwölf, nämlich die drei Componenten von G parallel den festen Axen, von denen aber zwei auf Null reducirt sind, während die dritte G selbst darstellt, weil wir die z-Axe in die Richtung der Axe von G legten; sodann h, Ω_0 und ψ_0 und sechs andere Constanten, betreffend die Bewegung des Massenmittelpunktes.

Die vorstehende Gleichung liefert Ω als Function von ψ. Dieselbe ist periodisch. Z. B. für den Fall $\delta < \beta$ nimmt während der Zeit T, in welcher Ω von ν bis zu μ, oder von μ zu ν geht, ψ stets um dieselbe Grösse

$$\Psi = \frac{G}{C}\int_\nu^\mu \frac{(H - \Omega^2)\,\Omega\,d\Omega}{(J - \Omega^2)\sqrt{(\Omega^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - \nu^2)}}$$

zu. Den Kegel, welchen die Momentanaxe um die Axe α des Centralellipsoids beschreibt, durchläuft sie in der Zeit $4T$, nach welcher sie eine der ursprünglichen parallele Lage erreicht hat. Für diese sind p, q, r, ϑ, φ dieselben wie zu Anfang dieser Zeit, während ψ auf $\psi + 4\Psi$ angewachsen ist. Ist also 4Ψ nicht commensurabel mit 2π, so hat das System nicht eine Lage erreicht, in welcher es der ursprünglichen Lage parallel ist. Vollständige Periodicität findet blos statt, wenn Ψ und π commensurabel sind.

Die oben erwähnte Darstellung der neun Cosinusse $a, b, c;\ a', b', c';\ a'', b'', c''$ wurde zuerst von Jacobi gegeben (*Sur la rotation d'un corps, lettre adressée à l'Acad. des sciences de Paris*, Crelle's Journal Bd. 39, S. 293 und mathem. Werke Bd. II, S. 139—196), später in anderer Form von Weierstrass in den Abhandlungen der Berliner Akademie (im Auszuge mitgetheilt im Artikel „Rotation" in Hoffmann's mathem. Wörterbuch von Natani). Vgl. hierüber auch die neuere

dings erschienene Arbeit von Brill (*Sul problema della rotazione dei corpi.* Cremona, *Annali di matematica pura ed appl.* Seria II, T. III, p. 33 (1869).

4. Wir wollen den speciellen Fall, dass $B = A$ ist, etwas weiter verfolgen. Die Euler'schen Gleichungen werden hierfür, wenn man $(A - C) : A = (A - C) : B = \mu$ setzt:

$$\frac{dp}{dt} - \mu qr = 0, \quad \frac{dq}{dt} + \mu rp = 0, \quad \frac{dr}{dt} = 0.$$

Es bleibt also die Componente r der Winkelgeschwindigkeit in Bezug auf die Rotationsaxe γ des Centralellipsoids constant: $r = n$. Aus den ersten beiden Gleichungen erhält man $p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} = 0$ und mithin $p^2 + q^2 = m^2$, wo m eine weitere Constante bezeichnet, nämlich die Winkelgeschwindigkeit um die Projection der Momentanaxe auf die Ebene des Aequators des Centralellipsoids. Demnach ist die Winkelgeschwindigkeit Ω selbst constant und $\Omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = m^2 + n^2$. Mit den Axen α, β bildet die Momentanaxe veränderliche Winkel, ihr Winkel mit γ aber ist constant und sein Cosinus $n : \Omega$. Demnach ist der Kegel der Momentanaxen im System ein gerader Kegel um die Axe γ und die Polodie ein Kreis; in Folge dessen behält der Semidiameter l des Centralellipsoids, welcher in die Momentanaxe fällt, constante Länge und ist die Herpolodie gleichfalls ein Kreis in der invariabelen Ebene um den Fusspunkt der Axe des Paares G mit einem Radius gleich der Projection von l auf diese Ebene; der Kegel der Momentanaxen im Raume ist mithin ebenfalls ein gerader Kreiskegel um die Axe von G. Da beide Kegel sich berühren, so folgt, dass die Momentanaxe fortwährend in die Ebene der Axe γ und der Axe des Paares G fällt.

Differentiirt man die erste Euler'sche Gleichung und eliminirt $\frac{dq}{dt}$ mit Hülfe der zweiten, so kommt:

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \mu^2 n^2 p = 0, \quad \text{wozu} \quad q = \frac{1}{\mu n}\frac{dp}{dt}.$$

Demnach werden

$$p = a \cos \mu nt + b \sin \mu nt, \quad q = -a \sin \mu nt + b \cos \mu nt.$$

Die Constanten werden durch die Anfangswerthe p_0, q_0 von p, q bestimmt und wenn ε den Winkel bezeichnet, den die Axe m für $t = 0$ mit der Axe β bildet, so ist $p_0 = m \sin \varepsilon$, $q_0 = m \cos \varepsilon$. Daher wird $a = p_0 = m \sin \varepsilon$, $b = q_0 = m \cos \varepsilon$ und folglich:

$$p = m \sin(\mu nt + \varepsilon), \quad q = m \cos(\mu nt + \varepsilon).$$

Weiter hat man:

$$\cos \vartheta = \frac{Cn}{G}, \quad tg\,\varphi = \frac{p}{q} = tg(\mu nt + \varepsilon), \quad d\psi = \frac{G(h - Cn^2)}{G^2 - C^2n^2}dt.$$

Hieraus ergibt sich $\varphi = \mu nt + \varepsilon + \sigma\pi$, oder wenn man den Anfangswerth von φ mit φ_0 bezeichnet, $\varphi = \varphi_0 + \mu nt$, sowie $\psi = \frac{G(h - Cn^2)}{G^2 - C^2n^2}t + \psi_0$. Es bewegt sich mithin die Knotenlinie des Aequators und der invariabelen Ebene in letzterer mit constanter Winkelgeschwindigkeit und entfernt sich ein beliebiger Radius des Aequators von dieser Knotenlinie gleichförmig. Die Neigung der Aequatorebene gegen die invariabele Ebene bleibt constant.

§. 7. **Freie Bewegung eines unveränderlichen schweren Systems.** Wenn Kräfte das System afficiren, welche einer Einzelkraft fortwährend äquivalent sind, die durch den Massenmittelpunkt hindurchgeht, so bestimmt diese die Bewegung des Massenmittelpunktes und damit die Translationsbewegung des Systems, hat aber keinen Einfluss auf die Rotation desselben um eine durch diesen

Punkt gehende Axe. Das Centralellipsoid rollt zugleich auf der invariabelen Ebene. wie bei dem Falle, dass gar keine continuirlichen Kräfte wirken. Ist das System. z. B. schwer und wird demselben ein Anfangsgeschwindigkeitszustand ertheilt, indem es z. B. einen Stoss erhält, so beschreibt der Massenmittelpunkt eine Parabel, welche die Richtnng des Stosses zur Tangente hat und dreht sich nach den Sätzen des §. 6. um diesen Massenmittelpunkt. Erfolgt der Stoss z. B. in einer Hauptebene des Massenmittelpunktes, so ist das Paar G der Momentankräfte senkrecht zu der dritten, zu dieser Hauptebene senkrechten Hauptaxe und dreht sich das System fortwährend um diese. Ist es eine homogene Kugel, so ist jede Ebene des Massenmittelpunktes Hauptebene und dreht sich die Kugel fortwährend um den Durchmesser senkrecht zu der Ebene des Massenmittelpunktes, welche die Stossrichtung enthält. Anziehungen der Kugel durch andere Massen ändern nichts an dieser Bewegung, da sie immer einer Einzelkraft äquivalent sind, welche durch den Massenmittelpunkt geht. Ist das System eine schwere Linie (dünner Stab), so dreht sie sich um ihren Massenmittelpunkt und bleibt dabei stets in einer durch diesen Punkt gehenden Ebene. Wird das schwere System von einem momentanen Stosspaare afficirt, so sinkt der Massenmittelpunkt in einer Vertikalen und dreht sich das System um ihn um, wie in §. 6.

§. 8. Rotation eines unveränderlichen Systems um einen festen Punkt. Sind X_0, Y_0, Z_0 die Componenten des Widerstandes, welchen der feste Punkt im Laufe der Bewegung zu leisten hat, parallel dreien rechtwinkligen Coordinatenaxen dieses Punktes, so sind die Gleichungen der Bewegung in der ursprünglichen Form:

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X + X_0, \quad \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y + Y_0, \quad \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z + Z_0,$$

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma (yZ - zY)$$

$$\Sigma m \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma (zX - xZ)$$

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma (xY - yX).$$

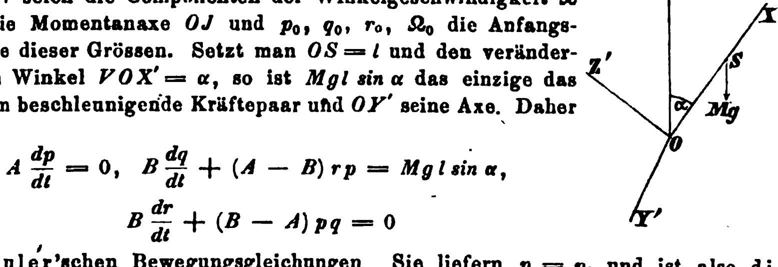
Von diesen sechs Gleichungen sagen die drei ersten aus, dass die Resultante der gegebenen Kräfte P in Verbindung mit dem Widerstande äquivalent ist der Resultante aller Kräfte $m\varphi$. Nach Cap. XIII, §§. 2. u. 6. ist letztere gleich dem Produkte aus der Gesammtmasse M und der Beschleunigung des Massenmittelpunktes und kann leicht mit Hülfe der dortigen Ausdrücke dargestellt werden. Die drei letzten Gleichungen gestatten ganz dieselbe Transformation auf die Euler'sche Form, wie bei der freien Bewegung, mit dem Unterschiede, dass A, B, C jetzt die Trägheitsmomente für die Hauptaxen des festen Punktes bedeuten, die Momentanaxe fortwährend durch diesen Punkt geht und $G_x^{(1)}$, $G_y^{(1)}$, $G_z^{(1)}$ sich auf jene Hauptaxen beziehen.

Ist das System continuirlichen Kräften nicht unterworfen, so rollt das Trägheitsellipsoid des festen Punktes auf der invariabelen Ebene, wie bei der freien Bewegung das Centralellipsoid. Der Widerstand ist ein continuirlicher und am Anfang der Bewegung eine Momentankraft, welche die Resultante der anfänglichen Momentankräfte vernichtet. Das anfängliche Paar G der Momentankräfte bestimmt die Bewegung.

§. 9. Rotation eines unveränderlichen schweren Systems, für welches das Centralellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, um einen festen Punkt auf dessen Rotationsaxe. Es sei S (Fig. 272.) der Massen-

mittelpunkt, O der feste Punkt, OSX' also die Rotationsaxe des Centralellipsoids, OV die Vertikale, OZ' senkrecht zu OX' in der Vertikalebene VOX' und OY' senkrecht zu dieser Vertikalebene. Das Trägheitsmoment um die Hauptaxe SX' sei A, das um die Axen des Aequators B; p, q, r seien die Componenten der Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe OJ und p_0, q_0, r_0, Ω_0 die Anfangswerthe dieser Grössen. Setzt man $OS = l$ und den veränderlichen Winkel $VOX' = \alpha$, so ist $Mgl \sin\alpha$ das einzige das System beschleunigende Kräftepaar und OY' seine Axe. Daher sind

Fig. 272.



$$A\frac{dp}{dt} = 0, \quad B\frac{dq}{dt} + (A - B)rp = Mgl\sin\alpha,$$

$$B\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0$$

die Euler'schen Bewegungsgleichungen. Sie liefern $p = p_0$ und ist also die Componente von Ω um die Rotationsaxe des Centralellipsoids constant und $B(q^2 + r^2 - q_0^2 - r_0^2) = 2Mgl(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)$, wenn α_0 den Anfangswerth von α bezeichnet. Hierzu erhält man ein weiteres Integral durch die Bemerkung, dass die Projection des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte auf die Vertikale OV constant sein muss. Denn das Axenmoment $Mgl\sin\alpha$ fällt in die Axe OY' und fügt blos dem Axenmomente Bq die Elementaränderung $Mgl\sin\alpha\cdot dt$ hinzu, ändert aber nicht die Axenmomente Ap und Br, welche in OX' und OY' fallen. Daher besteht die Projectionssumme von Ap, Bq, Br auf OV aus $Ap\cos\alpha + Br\sin\alpha$ und bleibt constant, sodass also $Ap\cos\alpha + Br\sin\alpha = Ap_0\cos\alpha_0 + Br_0\sin\alpha_0$ ist.

Wir wollen die Art und Weise untersuchen, wie der Winkel α sich mit der Zeit ändert. Es ist offenbar $q = \frac{d\alpha}{dt}$ und ergibt sich aus den beiden zuletzt gegebenen Integralen durch Elimination von r für q der Ausdruck:

$$q = \pm\frac{1}{\sqrt{B}}\sqrt{2Mgl(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + B(q_0^2 + r_0^2) - \frac{(Ap_0(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + Br_0\sin\alpha_0)^2}{B\sin^2\alpha}},$$

mit Hülfe dessen also t als Function von α und umgekehrt α als Function von t darstellbar ist. Es sei nun

1. q_0 von Null verschieden und positiv; dann wird $d\alpha = q\,dt$ positiv und mithin α von α_0 an wachsen und q mit dem Zeichen $(+)$ zu nehmen sein. Nach einiger Zeit wird aber α einen Werth α_1 erreichen, für welchen die Grösse unter dem Wurzelzeichen in q verschwindet und da q nicht imaginär werden kann, so kann α nicht weiter wachsen, sondern wird wieder abnehmen. Von diesem Momente ist $d\alpha = q\,dt$ negativ und folglich die Wurzelgrösse mit dem Zeichen $(-)$ zu nehmen. α kann aber nur so lange abnehmen, als es einen zweiten Werth α_2 nicht erreicht, für welchen die Wurzelgrösse abermals verschwindet. Sobald dieser erreicht ist, muss α wieder wachsen, weil q nicht imaginär werden darf; es wächst wieder zu α an, nimmt hierauf wieder ab bis α_2 u. s. f. Die Werthe α_1 und α_2 des Maximums und Minimums von α sind also Wurzeln der Gleichung, welche man erhält, indem man die Grösse unter dem Wurzelzeichen in dem Ausdrucke für q gleich Null setzt. Dies gibt eine cubische Gleichung in $\cos\alpha$, welche $\cos\alpha_1$ und $\cos\alpha_2$ als reelle Wurzeln besitzt. Daher muss auch ihre dritte Wurzel reell sein. Nun wird für $\cos\alpha = +1$ jener Ausdruck $-\infty$, für $\cos\alpha = \cos\alpha_2$ verschwindet er und geht mithin für diesen Werth ins Positive über. Für $\cos\alpha = -1$ wird er gleichfalls $-\infty$ und da er für $\cos\alpha = \cos\alpha_1$ verschwindet, so geht er auch für letzteren Werth ins Positive über. Es kann daher der dritte Wurzel-

werth für $\cos\alpha$ nicht zwischen -1 und $+1$ liegen, weil in diesem Falle jedenfalls ein Uebergang ins Negative stattfinden müsste und der Ausdruck dann auch nochmals wieder ins Positive gehen müsste, um bei $\cos\alpha = -1$ ins Negative übergehen zu können, vier Wurzeln aber nicht möglich sind. Dem dritten Wurzelwerthe, der ausserhalb der Grenzen -1 und $+1$ liegt, entspricht kein reeller Winkel α, obgleich er selbst reell ist. — Ein Fall erfordert eine Separatuntersuchung, die wir später ausführen werden, nämlich der, dass

$$A p_0 \cos\alpha_0 + B r_0 \sin\alpha_0 = A p_0$$

ist, in welchem Falle

$$A p_0 (\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + B r_0 \sin\alpha_0 = A p_0 (1 - \cos\alpha) = 2 A p_0 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

wird und mithin der Nenner $B \sin^2\alpha = 4 B \sin^2 \frac{1}{2}\alpha \cos^2 \frac{1}{2}\alpha$ unter dem dritten Gliede im Wurzelausdrucke sich theilweise weghebt und der Ausdruck für $\cos\alpha = \pm 1$ nicht mehr $-\infty$ wird.

2. Es sei $q_0 = 0$. In diesem Falle hat die Grösse unter dem Wurzelzeichen den Factor $\cos\alpha_0 - \cos\alpha$ und ist also $\cos\alpha = \cos\alpha_0$ eine Wurzel der cubischen Gleichung. Der Anfangswerth des anderen Factors ist

$$2 M g B l \sin^2\alpha_0 + 2 B^2 r_0^2 \cos\alpha_0 - 2 A B p_0 r_0 \sin\alpha_0$$

und wenn dieser positiv ist, so muss $\cos\alpha_0 - \cos\alpha$ von Null ins Positive übergehen, also α wachsen, ist er negativ, so nimmt α ab. Im ersten Falle ist α_0 das Minimum, im zweiten das Maximum der Werthe von α. Ist aber der Anfangswerth dieses zweiten Factors selbst Null, so ist q fortwährend Null und folgt aus dem Ausdrucke für diese Grösse, dass α constant, also gleich α_0 bleiben muss. Dann ist aber auch vermöge der Gleichung

$$B (q^2 + r^2 - q_0^2 - r_0^2) = 2 M g l (\cos\alpha_0 - \cos\alpha)$$

die Componente r constant und wenn man sie in zwei weitere Componenten zerlegt, eine um die Vertikale, die andere um OX', so ist erstere insbesondere $\frac{r}{\sin\alpha}$, welche die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Vertikalebene VOX' um OV dreht, misst, gleichfalls constant.

Der Fall, dass q_0 negativ ist, erledigt sich in ähnlicher Weise, wie der unter 1. behandelte Fall, dass q_0 positiv sei.

3. Es sei $q_0 = 0$, $r_0 = 0$, sodass also anfangs blos Rotation um die Axe OS stattfindet. Man hat hierfür:

$$q = \pm \frac{1}{\sqrt{B}} \sqrt{(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)\left[2 M g l - \frac{A^2 p_0^2}{B \sin^2\alpha} (\cos\alpha_0 - \cos\alpha)\right]}$$

und $\alpha = \alpha_0$ ist der eine Grenzwerth für α. Für $\alpha = \alpha_0$ wird der zweite Factor unter der Wurzel $2 M g l$ positiv oder negativ, je nachdem l positiv oder negativ ist, also nimmt α von α_0 an ab oder wächst an zu einem Grenzwerthe α_1, der sich mit Hülfe der Gleichung $\frac{2 M g B l}{A^2 p_0^2}(1 - \cos^2\alpha_1) = \cos\alpha_0 - \cos\alpha_1$ ergibt und derjenige der beiden Werthe ist, welche dieser Gleichung genügen, wofür $\cos\alpha_1$ reell ist. Zwischen diesen Werthen α_0 und α_1 oscillirt α.

Wir wollen den besonders wichtigen Fall näher betrachten, dass p_0 sehr gross sei. Dann ist $\frac{2 M g B l}{A^2 p_0^2}$ sehr klein und mithin α_1 sehr nahe gleich α_0, d. h. es entfernt sich die Axe OX' nur sehr wenig von der Axe des anfänglichen Paares der Momentankräfte in der Ebene VOX'. Setzt man also $\alpha = \alpha_0 + \delta$, so wird sehr nahe $\cos\alpha_0 - \cos\alpha = \delta \sin\alpha_0$ und mithin

$$q = \pm \sqrt{\frac{2 M g l \delta \sin\alpha_0}{B} - \frac{A^2 p_0^2 \delta^2 \sin^2\alpha_0}{B \sin^2\alpha}} = \pm \frac{M g l \sin\alpha_0}{A p_0} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{A^2 p_0^2 \delta}{M g l B \sin\alpha_0}\right)^2}$$

Nun ist $q = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\delta}{dt}$. Daher findet man das Maximum δ_1 von δ, indem man die Wurzelgrösse gleich Null setzt. Es ist

$$\delta_1 = \frac{2\,MglB}{A^2 p_0^2} \sin \alpha_0$$

für die Zeit t, welche verfliesst, bis α von α_0 zu $\alpha_0 + \delta$ gegangen ist, erhält man:

$$t = \int_0^\delta \frac{d\delta}{q} = \frac{A p_0}{Mgl \sin \alpha_0} \int_0^\delta \frac{d\delta}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{A^2 p_0^2 \delta}{MglB \sin \alpha_0}\right)^2}}$$

$$= \frac{B}{A p_0} \operatorname{Arc\,cos}\left(1 - \frac{A^2 p_0^2 \delta}{MglB \sin \alpha_0}\right)$$

und hieraus

$$\delta = \frac{2\,MglB \sin \alpha_0}{A^2 p_0^2} \sin^2 \tfrac{1}{2} \frac{A p_0}{B} t, \qquad \alpha = \alpha_0 + \frac{2\,glB \sin \alpha_0}{A^2 p_0^2} \sin^2 \tfrac{1}{2} \frac{A p_0}{B} t.$$

Die Zeit T, während welcher die Axe OX' eine Oscillation vollführt, d. h. der Winkel α von α_0 zu $\alpha_0 + \delta_1$ wird und dann wieder auf α_0 zurückgeht, erhält man als das Doppelte der Zeit, welche $\delta = \delta_1$ entspricht; sie ist daher $T = 2\pi \frac{B}{A p_0}$.

Die Winkelgeschwindigkeit ω, mit welcher sich die Ebene VOX' um die Vertikale OV umdreht, ist $\omega = \frac{r}{\sin \alpha}$. Aus der oben aufgestellten Gleichung

$$A p \cos \alpha + B r \sin \alpha = A p_0 \cos \alpha_0 + B r_0 \sin \alpha_0$$

folgt aber im vorliegenden Falle

$$B r \sin \alpha = A p_0 (\cos \alpha_0 - \cos \alpha) = A p_0 \delta \sin \alpha_0,$$

mithin $\omega = \frac{A p_0}{B \sin \alpha_0} \cdot \delta$. Diese Grösse erreicht also mit δ ihr Maximum und Minimum und da δ den Factor l hat, so ist sie positiv oder negativ, je nachdem der Massenmittelpunkt höher oder tiefer als der feste Punkt liegt. Der Mittelwerth von ω ist

$$\omega_1 = \frac{A p_0}{B \sin \alpha_0} \frac{1}{\delta_1} \int_0^{\delta_1} \delta\, d\delta = \frac{Mgl}{A p_0}.$$

Der Winkel ϑ, welchen die Vertikalebene in der Zeit t beschreibt, wird

$$\vartheta = \int_0^t \omega\, dt = \frac{A p_0}{B \sin \alpha_0} \int_0^t \delta\, dt = \frac{Mgl}{A p_0}\left(t - \frac{B}{A p_0} \sin \frac{A p_0}{B} t\right).$$

Für die Zeit T einer Oscillation der Axe OX' wird der Winkel ϑ zu $\vartheta_1 = 2\pi \frac{MglB}{A^2 p_0^2}$. Die Zeit τ eines vollen Umlaufes der Axe OX' um die Vertikale folgt unter Zugrundelegung des Mittelwerthes von ω, mit Hülfe dessen $\vartheta = \int_0^t \omega_1 dt = \omega_1 t$ wird, aus der Gleichung $2\pi = \omega_1 \tau$, nämlich $\tau = 2\pi \frac{A p_0}{Mgl}$.

4. Wir haben oben den Fall, dass $A p_0 \cos \alpha_0 + B r_0 \sin \alpha_0 = A p_0$ sei, von der Betrachtung vorläufig ausgeschlossen und füllen diese Lücke jetzt nachträglich aus. In diesem Falle nimmt q die Form an:

$$q = \frac{1}{\sqrt{B}} \sqrt{2\,Mgl(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) + B(q_0^2 + r_0^2) - \frac{A^2 p_0^2}{B} tg^2 \tfrac{1}{2} \alpha}.$$

Es sei nun zunächst q_0 nicht Null, sondern positiv, so wächst α, erreicht aber ein Maximum α_1, welches kleiner als π ist, da für $\alpha = \pi$ die Grösse $q^2 = -\infty$ wird. Hierauf nimmt also α wieder ab, geht durch α_0 hindurch und da für $\alpha = 0$ die Grösse unter dem Wurzelzeichen, welche früher in diesem Falle ebenfalls $-\infty$ wurde, jetzt noch positiv sein kann, so kann α selbst negativ werden und also die Axe OX' durch die Vertikale hindurchschwingen. Für $\alpha = -\pi$ wird aber diese Grösse $-\infty$, mithin erreicht α nach jener Seite hin gleichfalls eine Grenze α_2. — Aehnliches findet statt, wenn q_0 negativ ist.

Für $q_0 = 0$ entnehmen wir aus der Gleichung

$$A p_0 \cos\alpha + B r \sin\alpha = A p_0 \cos\alpha_0 + B r_0 \sin\alpha_0$$

den Werth für r, welcher im vorliegenden Falle $r = \frac{Ap}{B} tg\,\frac{1}{2}\alpha$ wird und erhalten hiermit $r_0 = \frac{Ap}{B} tg\,\frac{1}{2}\alpha_0$ und folglich, indem wir noch

$$\cos\alpha_0 - \cos\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)$$

setzen:

$$q = \frac{1}{\sqrt{B}}\sqrt{4Mgl\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0) - \frac{A^2p_0^2}{B}(tg^2\tfrac{1}{2}\alpha - tg^2\tfrac{1}{2}\alpha_0)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{B}}\sqrt{\left(4Mgl - \frac{A^2p_0^2}{B\cos^2\frac{1}{2}\alpha\cos^2\frac{1}{2}\alpha_0}\right)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_0)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)}\,.$$

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen verschwindet für $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = -\alpha_0$ und $\cos^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{A^2p_0^2}{4MglB\cos^2\frac{1}{2}\alpha_0}$. Ist der letztere Ausdruck < 1, so geht α von α_0 bis zu dem kleinsten Werthe α_1, welcher dieser Gleichung genügt; ist er grösser als 1, so geht α von α_0 bis $\alpha_1 = -\alpha_0$.

5. Die unter Nr. 3. gewonnenen Resultate liefern die Erklärung der Phänomene des **Bohnenberger**'schen Maschinchens und der **Foucault**'schen gyroscopischen Apparate. Die Axe des Rotationskörpers beschreibt bei denselben dem Schein nach einen geraden Kreiskegel von constanter Form um die Vertikale des festen Punktes mit einer Geschwindigkeit, welche abnimmt mit wachsendem p. In Wirklichkeit ist der Kegel wellenförmig gerippt, nur bemerkt man nicht die kleinen Schwankungen der Axe OX' in der Vertikalebene, da die Periode derselben sehr kurz ist. Der Werth von Ω ist unabhängig von α_0, man kann daher die Anfangslage der Axe ändern, ohne dass dies Einfluss auf die Bewegungsart der Vertikalebene ausübt.

Ausführlich behandelt die vorliegende Aufgabe **Lottner** [Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punkt rotirenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten, **Crelle**'s Journ. Bd. 50, S. 111 (1855)]. Die hier gegebene elementare Analyse rührt von **Resal** her (*Traité de cinématique pure*, p. 349, woselbst noch zwei schwierigere Probleme dieser Art, von denen das eine aber ein veränderliches System betrifft, erörtert sind).

§. 10. **Ein unveränderliches System rotirt um einen festen Punkt O, für welchen das Trägheitsellipsoid desselben ein Rotationsellipsoid um eine Axe OA ist, man soll das continuirlich wirkende Kräftepaar $G^{(1)}$ bestimmen, welches in Verbindung mit einem anfänglichen Paare G der Momentankräfte bewirkt, dass die Bewegung des Systems dem Rollen eines geraden Kreiskegels der Momentanaxen im Systeme mit OA als Axe auf einen anderen geraden Kreiskegel mit einer gegebenen Axe OV von fester Richtung äquivalent werde.**

1. Wenn blos ein Paar Momentankräfte G vorhanden ist, dessen Axenmoment nach §. 8. und §. 6., Nr. 1. constant nach Grösse und Richtung bleibt und man legt senkrecht zu seiner Axe OG eine Tangentenebene an das Trägheitsellipsoid, so ergibt sich der Pol J der Momentanaxe als der Berührungspunkt und da die Normale des Rotationsellipsoids in J die Axe OA schneidet, so fallen OJ, OG, OA jederzeit in eine Ebene. Da die Trägheitsmomente aller Axen der zu OA senkrechten Aequatorebene gleich sind, so ist der Kegel der Momentanaxen OJ im System ein gerader Kreiskegel um OA als Axe und ebenso beschreibt OG im System einen zweiten geraden Kreiskegel um dieselbe Axe. Da OJ constante Länge behält, so ist der Ort der Momentanaxen im absoluten Raume gleichfalls ein gerader Kreiskegel um OG als Axe. Das System dreht sich um die Momentanaxe mit constanter Winkelgeschwindigkeit um und der Kegel JOA rollt gleichförmig auf dem Kegel JOG, sodass beide sich längs der Momentanaxe berühren. Wirkt nun aber ein Kräftepaar $G^{(1)}$ continuirlich, so ändert es jeden Augenblick das Paar der Momentankräfte ab, indem zu diesem das unendlich kleine Paar $G^{(1)}dt$ hinzutritt. Daher beschreibt die Momentanaxe OJ weder im System, noch im absoluten Raume denselben Kegel. Wohl aber kann das Paar $G^{(1)}$ so bestimmt werden, dass der Kegel der Axen OJ im System ein gerader Kegel um OA bleibe und der Kegel derselben Axen im Raume gleichfalls ein gerader Kegel JOV werde um eine feste gegebene Axe OV. Da OA, OG, OJ, von welchen Linien jetzt OG ebenfalls seine Lage im absoluten Raume ändert, vermöge der Beschaffenheit des Ellipsoids und OA, OJ, OV vermöge der Berührung der beiden Kegel in einer Ebene liegen, so fallen sämmtliche vier Gerade OA, OG, OJ, OV in eine Ebene, welche um OV als feste Axe rotirt. Die Axe OA des Ellipsoids beschreibt dann um OV gleichfalls einen geraden Kegel.

Um nun das Paar $G^{(1)}$ der Bedingung der Aufgabe gemäss zu bestimmen, benutzen wir die Eigenschaft der Figur, dass OV, OG, OA fortwährend in einer Ebene bleiben, sodass, wenn OG', OA' die Lagen von OG, OA nach Verfluss des Zeitelementes dt sind, die Pyramidenräume $OVAA'$ und $OVGG'$ an der Kante OV denselben unendlich kleinen Winkel besitzen und also die Geraden OA und OG gleiche Winkelgeschwindigkeit um OV haben müssen. Zerlegt man nun die Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe OJ in zwei Componenten Ω_v und Ω_a um OV und OA, so erhält man nach dem Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten, wenn λ und α die Neigungen von OA gegen OJ und OV sind:

$$\Omega_v = \Omega \frac{\sin\lambda}{\sin\alpha}, \quad \Omega_a = \Omega \frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\sin\alpha}.$$

Die letztere ertheilt OA keine Winkelgeschwindigkeit, diese Gerade dreht sich vielmehr mit Ω_v allein um OV. Um die Winkelgeschwindigkeit von OG zu bestimmen, bedenken wir, dass das Axenmoment G, welches wir auf OG aufgetragen denken, weder seine Grösse, noch seine Neigung gegen die Axe OA oder OV ändern darf, wenn die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Kegel JOA auf JOV rollt und die Winkel JOA und JOV constant bleiben sollen. Daher muss die unendlich kleine Componente $G^{(1)}dt$ vom Axenmoment, welche sich als die unendlich kleine Linie GG' am Endpunkte des Axenmomentes G mit diesem zu dem geänderten Axenmomente G verbindet, senkrecht zur Ebene VOA sein und folglich $G^{(1)}$ von O aus aufgetragen in die Schnittlinie der Tangentenebene der beiden Kegel längs OJ mit einer auf OV senkrechten Ebene, oder was dasselbe ist, in die Knotenlinie des Aequators des Trägheitsellipsoids mit dieser Ebene fallen. Dividiren wir daher $GG' = G^{(1)}dt$ durch den Abstand

$$G \sin(GOV) = G \sin(\alpha - u),$$

wo $GOA = u$ ist und dt, so erhalten wir die gesuchte Winkelgeschwindigkeit,

nämlich $\frac{G^{(1)}}{G \sin(\alpha - u)}$. Daher besteht der Bedingung der Aufgabe gemäss die Gleichung:

$$\Omega \frac{\sin \lambda}{\sin \alpha} = \frac{G^{(1)}}{G \sin(\alpha - u)},$$

woraus

$$G^{(1)} = G\Omega \frac{\sin \lambda}{\sin \alpha} \sin(\alpha - u).$$

Da in diesem Ausdrucke blos das Produkt $G\Omega$ vorkommt, und Ω mit G gleichzeitig den Sinn wechselt, so wechselt $G^{(1)}$ nicht den Sinn mit Ω.

Für $\lambda = 0$ ist $G^{(1)} = 0$. In diesem Falle fällt OJ in OA und da OA eine Hauptaxe ist, so genügt das Paar G der Momentankräfte, um das System fortwährend um OA rotiren zu lassen. Der Kegel JOA reducirt sich auf die Gerade OA, welche auf dem Kegel AOV nicht fortrücken kann.

Für $\alpha = u$ ist ebenfalls $G^{(1)} = 0$. Hier fällt G in OV und JOA rollt von selbst auf JOG ohne ein Paar $G^{(1)}$.

Für $\alpha = \lambda$ fällt OJ in OV und wird $G^{(1)} = G\Omega \sin(\lambda - u)$; es fällt OJ in OV und wird $G^{(1)}$ gleich dem Paare der Centripetalkräfte um OJ, der Kegel JOA rollt fortwährend auf dem festen Kegel JOV, der sich auf eine Linie zusammenzieht, ohne dass OJ sich bewegt.

Für $\alpha - \lambda = \frac{1}{2}\pi$ wird JOV eine Ebene; für $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ findet dies mit JOA statt; für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ werden die Kegel supplementär.

Die beiden Kegel können sich während der Bewegung so berühren, dass sie auf entgegengesetzte Seiten der gemeinschaftlichen Tangentenebene fallen und in diesem Falle stimmt der Sinn des Rollens mit dem Sinne der Rotation des Systems um OV überein und die Knotenlinie hat, wie man sagt, eine directe Präcession; oder sie fallen auf dieselbe Seite jener Ebene. Ist in diesem letzteren Falle der bewegliche Kegel stärker gekrümmt als der feste, so wird die Präcession retrograd, ist er flacher, sodass er den festen Kegel umgibt, so wird sie direct.

Das continuirliche Paar $G^{(1)}$ drückt entweder die Kegel aneinander oder sucht sie zu trennen, wenn man sich dieselben als wirkliche Bestandtheile des Systems und des absoluten Raumes denkt. Dies hängt von der Lage der Axe OG gegen OV und OJ ab. Denn ohne Hinzutritt von $G^{(1)}$ würde der bewegliche Kegel auf einem festen Kegel mit OG als Axe (wenn er auch kein Kreiskegel ist) rollen, wendet daher dieser seine Concavität von dem Kegel JOV ab, so bedarf es eines Paares $G^{(1)}$, welches den Kegel JOA an JOV andrückt, damit JOA auf JOV rolle, im anderen Falle ist ein Paar erforderlich, welches das Eindringen des Kegels JOA in JOV hindert. Der erste Fall tritt ein, wenn OG in den Nebenwinkel von AOV fällt, der letztere, wenn OG in AOV selbst fällt. Die vorliegende Untersuchung überhaupt verdankt man Poinsot [*Théorie des cônes circulaires roulants.* Liouville, Journ. de mathém. T. XVIII (1853), p. 41]. Er behauptet aber, dass $G^{(1)}$ die Kegel stets von einander zu trennen strebe. Dies wurde von Bour (*Communication à la société philomatique de Paris sur les cônes roulants.* L'Institut, 1865, p. 404) berichtigt, indem er zwei Fälle aufführt, in welchen ein Aneinanderdrücken der Kegel stattfindet, nämlich 1. wenn VOA spitz ist und OJ in den Winkel VOA fällt, also die Kegel sich von aussen berühren, der Kegel VOJ aber sehr eng ist. Ist das Trägheitsellipsoid alsdann ein verlängertes, so kann OG ausserhalb VOA fallen, dann ist $\alpha - u$ und damit $G^{(1)}$ negativ und drückt die Kegel aneinander; 2. wenn VOA stumpf und der Kegel VOJ gleichfalls sehr eng ist. Dann bildet OJ einen stumpfen Winkel mit OA, der bewegliche Kegel umhüllt den festen; bei einem abgeplatteten Trägheits-

ellipsoid kann dann OG mit OJ gleichfalls auf entgegengesetzte Seiten von OV fallen und $G^{(1)}$ negativ sein.

2. Den Ausdruck für das gesuchte Paar $G^{(1)}$ kann man in verschiedene Formen bringen. Da das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid um die Axe OA ist und mit dieser die Momentanaxe OJ den Winkel λ bildet, so ist das Trägheitsmoment $M\varkappa^2$ um OJ gegeben durch die Gleichung

$$M\varkappa^2 = A \cos^2 \lambda + B \sin^2 \lambda,$$

wenn A und B die beiden Hauptträgheitsmomente sind, nämlich das für die Axe OA und das allen Axen der zu OA senkrechten Aequatorebene gemeinsame Trägheitsmoment. Ferner besteht zwischen λ und dem Winkel $GOA = u$ die Gleichung

$$\frac{tg\, \lambda}{tg\, u} = \frac{A}{B}.$$

Denn die Componenten des Paares G der Momentankräfte längs OA und senkrecht dazu sind einerseits $G \cos u$ und $G \sin u$, andererseits ist aber auch

$$G \cos u = A\Omega \cos \lambda, \qquad G \sin u = B\Omega \sin \lambda,$$

weil die Componenten dieses Paares nach den Hauptaxen die Produkte aus den Trägheitsmomenten um diese Hauptaxen und den Componenten der Winkelgeschwindigkeit um sie sind. Dividirt man beide Gleichungen ineinander, so folgt die genannte Relation. Endlich hängen die Winkel u und λ mit der Neigung i der Axen OJ und OG durch die Gleichung $\lambda = u \pm i$ zusammen, je nachdem OG zwischen OJ und OA oder zwischen OJ und OV fällt. Ist $A > B$, so ist das Trägheitsellipsoid abgeplattet und zeigt die Betrachtung der Meridianellipse, dass OG zwischen OJ und OA fällt, also $\lambda = i + u$ ist; für $A < B$ findet die Gleichung $\lambda = u - i$ statt. Mit Hülfe der eben entwickelten Relationen, nämlich

$$M\varkappa^2 = A \cos^2 \lambda + B \sin \lambda^2, \quad tg\, \lambda : tg\, u = A : B, \quad \lambda = u \pm i,$$

wozu man noch $G \cos i = M\varkappa^2 \Omega$ fügen kann (Cap. XII, §. 3.), kann man aus

$$G^{(1)} = G\Omega \frac{\sin \lambda}{\sin \alpha} \sin (\alpha - u)$$

den Winkel λ eliminiren und erhält

$$G^{(1)} = \frac{G^2}{B} \cdot \frac{\sin u}{\sin \alpha} \sin (\alpha - u).$$

Es hängt demnach $G^{(1)}$ nicht von A, sondern nur von dem Aequatorträgheitsmomente B ab. Welche Systeme man daher auch rotiren lassen mag, wenn sie dasselbe B besitzen, so bleibt die Präcession dieselbe; der Winkel λ aber und $\alpha - \lambda$, sowie die davon abhängige Beschaffenheit des rollenden Kegels ändert sich.

Eliminirt man aus der eben gewonnenen Form u, so kommt:

$$G^{(1)} = G^2 \, tg\, \lambda \frac{A - B\, tg\, \lambda \, cotg\, \alpha}{A^2 + B^2 tg^2 \lambda},$$

oder wenn man die halbe Oeffnung ω des festen Kegels, nämlich $\omega = \alpha - \lambda$ einführt, indem man $\alpha = \omega + \lambda$ setzt:

$$G^{(1)} = G^2 \, tg\, \lambda \frac{A - B\, tg\, \lambda \, cotg\, (\omega + \lambda)}{A^2 + B^2 tg^2 \lambda},$$

oder endlich, indem man

$$G^2 = \Omega^2 (A \cos^2 \lambda + B \sin^2 \lambda) = \Omega^2 \cos^2 \lambda (A + B \sin^2 \lambda)$$

aus den Gleichungen

$$G \cos u = A\Omega \cos \lambda \quad \text{und} \quad G \sin u = B\Omega \sin \lambda$$

bildet und einsetzt:

$$G^{(1)} = \Omega^2 \sin\lambda \cos\lambda \,[A - B\,tg\,\lambda\,cotg\,(\omega + \lambda)].$$

3. Man kann zu dem Ausdrucke für das Paar $G^{(1)}$ auch auf folgendem Wege gelangen. Es seien wieder λ und ω die halben Oeffnungen der Kegel JOA und JOV und Ω die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe OJ. Beschreibt man nun um O mit dem Radius 1 eine Kugel, so erhält man auf dieser durch die beiden Kegel zwei Kreise s und σ, von denen der erstere auf dem letzteren rollt. Der Schnittpunkt J der Momentanaxe mit der Kugel rückt im System auf s und im absoluten Raume auf σ fort, indem s auf σ hinrollt. In dem Zeitelemente dt dreht sich nun der Kegel JOA um die Summe der Contingenzwinkel $de + d\varepsilon$ beider Kegelflächen um, wenn diese auf verschiedenen Seiten der gemeinschaftlichen Tangentenebene liegen (um die Differenz, wenn sie auf entgegengesetzte Seiten fallen, welcher Fall aber in dem der Summe inbegriffen gedacht werden kann, wenn die Vorzeichen der Contingenzwinkel gehörig gewahrt werden), und da dieser Winkel auch Ωdt ist, so besteht die Gleichung $\Omega dt = de + d\varepsilon$. Sind aber nun ds und $d\sigma$ die beiden sich deckenden Bogenelemente von s und σ, über welche der Pol J während dt hinrückt und sind r, ϱ die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte der Kegel senkrecht zu OJ, so werden $de = \frac{ds}{r}$, $d\varepsilon = \frac{d\sigma}{\varrho}$ und da $ds = d\sigma$ ist, erhält man $\Omega\,dt = d\sigma\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}\right)$. Hierzu kommt $r = tg\,\lambda$, $\varrho = tg\,\omega$ und hiermit wird:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \Omega\,\frac{tg\,\lambda\;tg\,\omega}{tg\,\lambda + tg\,\omega}.$$

Andererseits aber ertheilt das Paar $G^{(1)}$ dem System um die Knotenlinie L, in welche es fällt, da diese eine Hauptaxe ist, eine unendlich kleine Winkelgeschwindigkeit $\varkappa dt$, welche sich mit Ω zu der Winkelgeschwindigkeit Ω' des folgenden Momentes nach dem Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten zusammensetzt, sodass Ω' dessen Diagonale wird. Daher ist

$$\varkappa dt : \Omega = \sin \Omega' O \Omega : \sin \Omega' O L = d\sigma : 1,$$

sodass $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\varkappa}{\Omega}$ und folglich:

$$\varkappa = \Omega^2\,\frac{tg\,\lambda\;tg\,\omega}{tg\,\lambda + tg\,\omega}$$

wird. Dies ist der Ausdruck für die Winkelbeschleunigung $\varkappa$, welche um die Knotenlinie hinzutreten muss zur Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe, damit der Kegel JOA auf dem Kegel JOV mit der Winkelgeschwindigkeit Ω rolle.

Nun besteht aber das Paar, welches die Bewegung der Kegel aufeinander erhält, aus zwei Componenten, dem Paare der Centripetalkräfte und dem Paare welches von den Kräften der Winkelbeschleunigung herrührt. Ersteres ist die Geschwindigkeit des Endpunktes des Axenmomentes der Momentankräfte, hat also das Axenmoment $G\Omega \sin i$ und dieses fällt in die Knotenlinie. Wenn dasselbe nun um diese Linie die unendlich kleine Winkelgeschwindigkeit γdt erzeugt, so fügt es dem Paare der Momentankräfte das Elementaraxenmoment $B\gamma dt = G\Omega \sin i dt$ hinzu, woraus folgt, dass die Winkelbeschleunigung desselben um die Knotenlinie $\gamma = \frac{G\Omega}{B} \sin i$ ist. Da nun das gesuchte Paar mit seinen Axenmomenten in die Knotenlinie fällt und der von den Centripetalkräften herrührende Theil bereits in dieser Linie liegt, so muss auch der Theil, welcher von den Winkelbeschleunigungskräften gegeben wird, in diese Linie fallen. Ist x die Winkelbeschleunigung, welche ihm entspricht, so ist sein Axenmoment Bx. Es bilden aber γ und x zusammen das obige $\varkappa$, sodass $\varkappa = \gamma + x$ ist. Daher hat man

$$\varkappa = \Omega^2 \frac{tg\,\lambda\; tg\,\omega}{tg\,\lambda + tg\,\omega} - \frac{G\Omega\,\sin i}{B}.$$

Nun ist aber

$$G \cos i = \Omega \sqrt{A \cos^2 \lambda + B \sin^2 \lambda}$$

und hieraus folgt

$$G \sin i = (B - A) \sin \lambda \cos \lambda,$$

sodass nach einer leichten Reduction

$$\varkappa = \Omega^2 \sin \lambda \cos \lambda \left[\frac{A}{B} - tg\,\lambda\; cotg\,(\omega + \lambda)\right]$$

und also das gesuchte Paar allein, abgesehen von dem Bestandtheile der Centripetalkräfte, wird:

$$G^{(1)} = B\varkappa = \Omega^2 \sin \lambda \cos \lambda \left[\frac{A}{B} - tg\,\lambda\; cotg\,(\omega + \lambda)\right],$$

welcher Ausdruck mit der letzten Form in Nr. 2. übereinstimmt.

4. Man kann dieselbe Methode anwenden für den Fall, dass die beiden Kegel nicht Kreiskegel, sondern Kegel von beliebigen Basen s, σ sind. Man wird nämlich die beiden sie längs der Momentanaxe osculirenden Kegel, deren Radien r, ϱ seien, construiren und in der gemeinsamen Tangentenebene auf OJ ein Perpendikel $O\Pi$ errichten, um welches als Axe die Winkelbeschleunigung

$$\pi = \frac{\Omega^2}{\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}}$$

wie früher, sich ergibt. Dieselbe zerfällt wieder in zwei Componenten, von denen die eine γ von den Centripetalkräften, die andere $\varkappa$ von den Winkelbeschleunigungskräften herrührt. γ und $\varkappa$ fallen aber nicht in die Gerade $O\Pi$. Vielmehr hat man in dem Trägheitsellipsoid zur Ebene GOJ den conjugirten Diameter zu suchen; um ihn erfolgt γ. Bildet die Axe $O\gamma$ mit $O\Pi$ den Winkel φ, so folgt $\varkappa^2 = \gamma^2 + \pi^2 - 2\pi\gamma \cos \varphi$. Das Paar, welches $\varkappa$ gibt, ist so zu bestimmen, dass es mit dem Paare $G\vartheta \sin i$ der Centripetalkräfte zusammen die Beschleunigung π um $O\Pi$ hervorruft.

§. 11. Als Beispiel zu vorstehender Theorie dient die **Präcession der Nachtgleichen.** Man betrachtet die Erde als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid von homogener Beschaffenheit oder aus concentrischen Krusten verschiedener specifischer Masse gebildet. Jedenfalls muss dieselbe hiernach als ein System von zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten gelten. Die Beobachtung zeigt, dass dies Erdsphäroid täglich um seine Rotationsaxe OA sich umdreht, während diese selbst um die Axe OV der Ekliptik, wenn auch mit sehr geringer Geschwindigkeit, rotirt und in Folge dessen die Knotenlinie des Erdäquators und der Ekliptik auf dieser langsam fortrückt. Diese Knotenlinie verbindet den Frühlings- und Herbstnachtgleichepunkt mit einander und ihre Drehung um die Axe der Ekliptik heisst die **Präcession** der Nachtgleichen. Sie ist dem Sinne nach der Erdrotation entgegengesetzt. In Wirklichkeit ist also nicht OA die Momentanaxe der Erde, sondern eine Linie OJ, die Diagonale eines Parallelogramms, welches OA und OV zu Seitenrichtungen und die beiden genannten Geschwindigkeiten der Rotation um OA und OV zu Seitenlängen hat. Die Axe OA beschreibt daher um OJ einen Kegel, welcher auf einem Kegel JOV rollt und zwar liegen wegen dem entgegengesetzten Sinne der Rotation die Kegel auf derselben Seite der Tangentenebene und ist der Kegel JOA sehr schmal.

Sind wie S. 114 ω, ω' die Winkelgeschwindigkeiten um OA und OV und ist Ω die wirkliche Geschwindigkeit um die Momentanaxe, so ist

$$\omega' : \Omega : \omega = \sin \lambda : \sin \alpha : \sin (\lambda + \alpha)$$

und folgt für $tg\,\lambda$ ein sehr kleiner Werth und für $\Omega : \omega = \sin\alpha : \sin(\alpha + \lambda)$ eine sehr wenig von 1 abweichende Zahl. In Wirklichkeit tritt zu der Präcession noch eine geringe periodische Nutation der Erdaxe, welche hier ausser Acht gelassen ist. Damit die Bewegung der Erde in der angegebenen Weise zu Stande komme, muss ein Paar $G^{(1)} = \Omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\,(A + B\,tg\,\lambda\,cotg\,\alpha)$ um die Knotenlinie drehend wirken. Dies Paar rührt von den Attractionen der Sonne und des Mondes her. Würde dasselbe plötzlich aufhören, so würde sich die Bewegung der Erde ändern. Der Kegel JOA würde nicht mehr auf dem Kegel JOV, sondern auf einem Kegel JOG rollen, dessen Axe die Axe des resultirenden Paares der Momentankräfte, welche dann eine constante Richtung annähme, sein würde. Die Projection der Erdaxe auf die Ebene der Ekliptik und in Folge dessen die zu ihr senkrechte Knotenlinie würde dann nicht mehr eine retrograde Präcession, sondern nur eine kleine Oscillation zeigen. Das Paar $G^{(1)}$ kann dargestellt werden und ergeben sich aus seiner Betrachtung für die Astronomie wichtige Folgerungen.

§. 12. **Rotation eines unveränderlichen Systems um eine feste Axe.** Sind R_1, R_2 die Widerstände, welche zwei beliebige Punkte O, Q der festen Axe leisten müssen, damit dieselbe fest bleibe, $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2$ ihre Componenten bezüglich eines Coordinatensystems, dessen Ursprung und z-Axe der Punkt O und die feste Axe OQ sind, so sind die Bewegungsgleichungen des Systems, welche die Aequivalenz der gegebenen Kräfte einschliesslich der Widerstände mit den Kräften $m\varphi$ zur Zeit t darstellen:

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X + X_1 + X_2$$

$$\Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y + Y_1 + Y_2$$

$$\Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z + Z_1 + Z_2,$$

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma (yZ - zY) - Y_2 h$$

$$\Sigma m \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma (zX - xZ) + X_2 h$$

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma (xY - yX),$$

worin $OQ = h$ gesetzt ist. Da die Bewegung des Systems durch die von drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten bestimmt ist und die Bewegung von O, Q bereits bekannt ist (ihre Geschwindigkeit und Beschleunigung ist Null), so bedarf es blos noch der Kenntniss der Bewegung eines einzigen dritten, nicht in der Axe liegenden Punktes und muss es möglich sein, die Coordinaten aller Punkte $(x\,y\,z)$ durch seine Coordinaten auszudrücken. Man wählt hierzu irgend einen Punkt in der Entfernung 1 von der Axe und wenn das System sich in der Zeit t um den Winkel ϑ umgedreht hat, so sind $1, \vartheta$ seine Polarcoordinaten und ist $\frac{d\vartheta}{dt} = \Omega$ seine Geschwindigkeit, welche zugleich die Winkelgeschwindigkeit des Systems darstellt und $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dt}$ seine Tangentialbeschleunigung, welche zugleich die Tangentialcomponente der Winkelbeschleunigung und da eine Neigung der Axe ausgeschlossen ist, die ganze Winkelbeschleunigung des Systems darstellt. Für den Punkt (xyz) sind nun r, $\vartheta_0 + \vartheta$, z die Polarcoordinaten in der xy-Ebene und senkrecht dazu, wenn der Radiusvector anfangs mit der x-Axe den Winkel ϑ_0 bildet. Behufs der Reduction der Bewegungsgleichungen ist daher:

$$x = r\cos(\vartheta_0 + \vartheta), \quad \frac{dx}{dt} = -r\sin(\vartheta_0 + \vartheta)\frac{d\vartheta}{dt} = -\Omega y$$

$$y = r\sin(\vartheta_0 + \vartheta), \quad \frac{dy}{dt} = r\cos(\vartheta_0 + \vartheta)\frac{d\vartheta}{dt} = \Omega x$$

$$z = z, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -y\frac{d\Omega}{dt} - x\Omega^2, \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = (x^2 + y^2)\Omega = r^2\Omega$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = x\frac{d\Omega}{dt} - y\Omega^2, \quad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = r^2\frac{d\Omega}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Mit Hülfe dieser Relationen nehmen die Bewegungsgleichungen unter Einführung der Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Massenmittelpunktes die Form an:

$$\begin{aligned}
-My_1\frac{d\Omega}{dt} - M\Omega^2 x_1 &= \Sigma X + X_1 + X_2\\
Mx_1\frac{d\Omega}{dt} - M\Omega^2 y_1 &= \Sigma Y + Y_1 + Y_2\\
0 &= \Sigma Z + Z_1 + Z_2,\\
-\Sigma mxz\cdot\frac{d\Omega}{dt} + \Sigma myz\cdot\Omega^2 &= \Sigma(yZ - zY) - Y_2 h\\
-\Sigma myz\cdot\frac{d\Omega}{dt} - \Sigma mxz\cdot\Omega^2 &= \Sigma(zX - xZ) + X_2 h\\
\Sigma mr^2\cdot\frac{d\Omega}{dt} &= \Sigma(xY - yX).
\end{aligned}$$

Von diesen Gleichungen enthält die letzte nichts von den Widerständen R_1, R_2; die fünf übrigen enthalten deren Componenten. Wenn die sechste Gleichung Ω geliefert hat, geben die fünfte und vierte die Werthe von X_2 und Y_2, hierauf die erste und zweite die von X_1, Y_1 und dann die dritte die Summe $Z_1 + Z_2$, welche in zwei beliebige Summanden zerlegt werden kann, in Wirklichkeit aber nur als eine einzige Kraft auftritt, welche längs OQ angreift.

Die durch die Integration dieser Gleichungen eintretenden Constanten werden mit Hülfe der Anfangslage und der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit bestimmt, indess kann zu dieser Bestimmung auch ein anfängliches System von Momentankräften gegeben sein, welches den Anfangszustand herbeiführt. Ist letzteres der Fall und bezeichnen Ξ, H, Z die Componenten einer am Punkte (xyz) angreifenden Momentankraft und drücken Ξ_1, H_1, Z_1; Ξ_2, H_2, Z_2 die Componenten der Momentanwiderstände aus, welche die Punkte O, Q der Wirkung des Momentankräftesystems entgegensetzen, so hat man vermöge der Aequivalenz dieser Kräfte mit den Kräften mv die Gleichungen für den Anfangszustand:

$$\Sigma m\frac{dx}{dt} = \Sigma\Xi + \Xi_1 + \Xi_2, \quad \Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \Sigma(yZ - zH) - H_2 h$$

$$\Sigma m\frac{dy}{dt} = \Sigma H + H_1 + H_2, \quad \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \Sigma(z\Xi - xZ) + \Xi_2 h$$

$$\Sigma m\frac{dz}{dt} = \Sigma Z + Z_1 + Z_2, \quad \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma(xH - y\Xi),$$

oder, wenn man wie oben reducirt:

$$\begin{aligned}
-M\Omega_0 y_1 &= \Sigma\Xi + \Xi_1 + \Xi_2, & -\Sigma mxz\cdot\Omega_0 &= \Sigma(yZ - zH) - H_2 h\\
M\Omega_0 x_1 &= \Sigma H + H_1 + H_2, & \Sigma myz\cdot\Omega_0 &= \Sigma(z\Xi - xZ) + \Xi_2 h\\
0 &= \Sigma Z + Z_1 + Z_2, & \Sigma mr^2\cdot\Omega_0 &= \Sigma(xH - y\Xi),
\end{aligned}$$

welche Gleichungen auf den Anfang der Bewegung zu beziehen sind.

Die Bedeutung dieser Gleichungen liegt am Tage. Man denke sich die Momentankräfte mv des Systems reducirt für den Punkt O, so erhält man eine Resultante und ein resultirendes Paar. Die Resultante ist senkrecht zu der Ebene welche durch die Axe OQ und den Massenmittelpunkt geht und gleich der Winkelgeschwindigkeit, multiplicirt mit der Masse und dem Abstande des Massenmittelpunktes von der Axe. Die gegebenen Momentankräfte und die beiden Widerstände in O und Q, alle an den Punkt O verlegt, müssen der Resultanten äquivalent sein. Dies ist der Inhalt der drei ersten Gleichungen. Das Paar zerfällt in ein Paar N, dessen Axenmoment in OQ fällt und ein Paar K, dessen Axenmoment senkrecht zu dieser Axe ist. Ersteres ist gleich dem Produkte aus der Winkelgeschwindigkeit und dem Trägheitsmomente um OQ, letzteres hat den Werth $\Omega_0 \sqrt{(\Sigma mxz)^2 + (\Sigma myz)^2}$, wenn Ω_0 die Winkelgeschwindigkeit ist. Die Aequivalenz dieser Paare mit dem resultirenden Paare der gegebenen Momentankräfte und der Widerstände wird durch die drei letzten Gleichungen ausgesprochen.

In ähnlicher Weise sind die Bewegungsgleichungen für die Wirkung der continuirlichen Kräfte zu interpretiren. Der Punkt O ist, wie jeder Punkt der Axe, ein Beschleunigungscentrum. Die Kräftereduction für dasselbe liefert aber nun wieder eine Resultante und ein resultirendes Paar. Die Resultante ist das Produkt der Gesammtmasse des Systems und der Beschleunigung des Massenmittelpunktes. Die drei ersten Gleichungen drücken ihre Aequivalenz mit der Resultanten der continuirlichen Kräfte und der continuirlichen Widerstände aus Vgl. Cap. XIII, §. 6., woselbst für den vorliegenden Fall $\Psi = 0$ wird, weil die feste Axe sich nicht neigt. Das resultirende Paar besteht aus dem Paare der Centripetalkräfte und dem Paare der Winkelbeschleunigungskräfte. Die Winkelbeschleunigung reducirt sich aber hier auf ihre tangentiale Componente $\frac{d\Omega}{dt}$. Die Aequivalenz dieses resultirenden Paares mit dem resultirenden Paare der gegebenen Kräfte und der continuirlichen Widerstände ist der Inhalt der drei letzten Gleichungen.

Am Anfange der Bewegung erleidet das System einen Stoss und während der Bewegung einen continuirlichen Druck, beide Einflüsse werden durch die anfänglichen Momentanwiderstandskräfte und durch die continuirlich wirkenden Widerstände der Axe getilgt.

§. 13. **Rotation um eine feste Axe ohne Einwirkung von continuirlichen Kräften.** Ein System sei zur Zeit $t = 0$ von Momentankräften ergriffen, nachher aber sich selbst überlassen worden. Die Gleichungen seiner Bewegung zur Zeit t sind dann:

$$M \cdot y_1 \frac{d\Omega}{dt} + Mx_1 \Omega^2 + X_1 + X_2 = 0, \qquad \Sigma mxz \cdot \frac{d\Omega}{dt} - \Sigma myz \cdot \Omega^2 - Y_2 h = 0$$

$$- M \cdot x_1 \frac{d\Omega}{dt} + My_1 \Omega^2 + Y_1 + Y_2 = 0, \qquad \Sigma myz \cdot \frac{d\Omega}{dt} + \Sigma mxz \cdot \Omega^2 + X_2 h = 0$$

$$Z_1 + Z_2 = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dt} = 0$$

und für den Anfangszustand gelten die folgenden:

$$\Sigma \Xi + M \cdot y_1 \Omega_0 + \Xi_1 + \Xi_2 = 0, \qquad \Sigma (yZ - zH) + \Sigma mxz \cdot \Omega_0 - H_2 h = 0$$
$$\Sigma H - M \cdot x_1 \Omega_0 + H_1 + H_2 = 0, \qquad \Sigma (z\Xi - xZ) + \Sigma myz \cdot \Omega_0 + \Xi_2 h = 0$$
$$\Sigma Z + Z_1 + Z_2 = 0, \qquad \Sigma (xH - y\Xi) - \Sigma mr^2 \cdot \Omega_0,$$

worin Ω_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Das System der sechs ersten Gleichungen zeigt 1. dass die Winkelgeschwindigkeit constant $\Omega = \Omega_0$ ist; 2. dass die Axe in ihrer Richtung keinen Druck erleidet, sondern

blos senkrecht zu ihr ein solcher stattfindet. Die beiden Paare, welche die Axe umzustürzen drohen, sind

$$Y_2 h = \Sigma myz \cdot \Omega^2, \qquad -X_2 h = \Sigma mxz \cdot \Omega^2;$$

sie bilden ein zur Axe senkreccktes Paar $\Omega^2 \sqrt{(\Sigma mxz)^2 + (\Sigma myz)^2}$. Dasselbe ist nur Null, wenn die feste Axe eine Hauptaxe ist; in diesem Falle braucht sie, da alsdann X_2, Y_2 Null sind, nur in einem einzigen Punkte fest zu sein; 3. der Druck im Punkte (0, 0, h) ist $\frac{\Omega^2}{h}\sqrt{(\Sigma mxz)^2 + (\Sigma myz)^2}$, der im Ursprung hat zu Componenten $-X_1 = Mx_1\Omega^2 - X_2$, $-Y_1 = My_1\Omega^2 - Y_2$, er wird Null, wenn die Axe eine Hauptaxe des Massenmittelpunktes, d. h. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ ist.

Aus dem System der sechs für den Anfangszustand geltenden Gleichungen erhält man zunächst die Winkelgeschwindigkeit $\Omega_0 = \frac{\Sigma(xH - y\Xi)}{\Sigma mr^2}$; sie ist die Componente des resultirenden Paares der stossenden Momentankräfte, deren Axe parallel der Rotationsaxe ist, dividirt durch das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf die Rotationsaxe. Sodann liefern diese Gleichungen die Beantwortung aller Fragen, welche die anfängliche Erschütterung der Axe betreffen. Soll insbesondere die Axe keine Erschütterung erleiden, so müssen Ξ_1, H_1, Z_1; Ξ_2, H_2, Z_2 sämmtlich Null sein. Dies führt zu den Bedingungen:

$$\begin{aligned}
&\Sigma\Xi + My_1\Omega_0 = 0, && \Sigma(yZ - zH) + \Sigma mxz \cdot \Omega_0 = 0\\
&\Sigma H - Mx_1\Omega_0 = 0, && \Sigma(z\Xi - xZ) + \Sigma myz \cdot \Omega_0 = 0\\
&\Sigma Z = 0, && \Sigma(xH - y\Xi) - \Sigma mr^2 \cdot \Omega_0 = 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichung $\Sigma Z = 0$ zeigt, dass keine Stosscomponente parallel der Rotationsaxe vorhanden sein darf, dass also, wenn man die Stosskräfte für einen Punkt der Axe reducirt, die Resultante derselben senkrecht zur Axe sein muss; die erste und zweite Gleichung zeigen ferner, dass $\frac{\Sigma H}{\Sigma\Xi} = -\frac{x_1}{y_1}$ sein muss; hieraus folgt, dass diese Resultante senkrecht zu der durch die Axe und den Massenmittelpunkt des Systems geführte Ebene gerichtet sein muss. Die vierte und fünfte Gleichung liefern die Bedingung für die Richtung der Axe des Stosspaares, welches senkrecht zur Rotationsaxe gerichtet ist. Denn die Tangente der Neigung dieser Axe gegen die x-Axe ist $\frac{\Sigma(z\Xi - xZ)}{\Sigma(yZ - zH)} = \frac{\Sigma myz}{\Sigma mxz}$.

Wir wollen annehmen, der Stoss rühre von einer einzigen Kraft Ξ, H, Z her, welche im Punkte $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma = 0$ das System treffe. In diesem Falle reduciren sich die Gleichungen auf:

$$\begin{aligned}
&\Xi + My_1\Omega_0 = 0, && \Sigma mxz = 0\\
&H - Mx_1\Omega_0 = 0, && \Sigma myz = 0\\
&Z = 0, && \alpha Y - \beta X = \Sigma mr^2 \cdot \Omega_0.
\end{aligned}$$

Diese Kraft muss also senkrecht zur Ebene sein, welche durch die Axe und den Schwerpunkt geht. Bezeichnen wir sie mit P, so wird

$$P = \sqrt{\Xi^2 + H^2} = M\Omega_0\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = M\Omega_0 d,$$

wenn d den Abstand des Massenmittelpunktes von der Axe bedeutet und wenn f der Abstand der Kraft von der Axe ist, $\alpha Y - \beta X = P \cdot f$. Hierdurch liefert die letzte Gleichung $Pf = M\Omega_0 df = \Sigma mr^2 \cdot \Omega_0$ oder

$$f = \frac{\Sigma mr^2}{Md}.$$

Zieht man aber durch den Massenmittelpunkt eine Axe parallel der Rotationsaxe und setzt das Trägheitsmoment in Bezug auf sie gleich $M\varkappa^2$, so wird

$$\Sigma mr^2 = M(\varkappa^2 + d^2)$$

und folglich erhält man für den Abstand f, welcher eine Stosskraft haben muss, wenn sie die Axe nicht erschüttern soll:

$$f = d + \frac{\varkappa^2}{d}.$$

Der Schnittpunkt der Stossrichtung mit der Ebene durch die Axe und den Massenmittelpunkt heisst in Uebereinstimmung mit den Lehren des Cap. XII. über den Stoss der Stossmittelpunkt. Sein Abstand von der Axe ist f. Geht die Axe durch den Massenmittelpunkt, d. h. ist $d = 0$, so kann dieselbe nur dann ohne Erschütterung bleiben, wenn $f = \infty$ wird, d. h. sie erleidet in diesem Falle immer eine Erschütterung.

§. 14. **Rotation um eine feste Axe unter Einfluss eines Paares, dessen Axe der Rotationsaxe parallel ist.** Wirkt auf das System nur ein Paar, dessen Axe der Rotationsaxe parallel ist, so sind $\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0$, $\Sigma (yZ - zY) = 0$, $\Sigma (zX - xZ) = 0$ und werden demnach die Gleichungen der Bewegung:

$$\begin{aligned}
My_1 \frac{d\Omega}{dt} + Mx_1 \Omega^2 + X_1 + X_2 &= 0 \\
- Mx_1 \frac{d\Omega}{dt} + My_1 \Omega^2 + Y_1 + Y_2 &= 0 \\
Z_1 + Z_2 &= 0, \\
\Sigma mxz \cdot \frac{d\Omega}{dt} - \Sigma myz \cdot \Omega^2 - Y_2 h &= 0 \\
\Sigma myz \cdot \frac{d\Omega}{dt} + \Sigma mxz \cdot \Omega^2 + X_2 h &= 0 \\
\Sigma (xY - yX) - \Sigma mr^2 \cdot \frac{d\Omega}{dt} &= 0.
\end{aligned}$$

Soll die Axe während der Bewegung nur in einem Punkte, dem Ursprung der Coordinaten, Druck erleiden, also die Bewegung ebenso erfolgen, wie wenn die Axe in jenem Punkte allein befestigt, im Uebrigen aber frei beweglich wäre, so ist $X_2 = Y_2 = Z_2 = 0$ zu setzen. Dann liefern die vierte und fünfte Gleichung die Bedingungen

$$\Sigma mxz \cdot \frac{d\Omega}{dt} - \Sigma myz \cdot \Omega^2 = 0,$$

$$\Sigma myz \cdot \frac{d\Omega}{dt} + \Sigma mxz \cdot \Omega^2 = 0,$$

aus denen man durch Elimination von $\frac{d\Omega}{dt}$ findet: $\Omega^2 [(\Sigma mxz)^2 + (\Sigma myz)^2] = 0$, d. h. $\Sigma mxz = 0$, $\Sigma myz = 0$. Die Axe muss mithin eine Hauptaxe des Punktes sein, in welchem sie fest ist. Der Druck auf die Axe ergibt sich aus den drei ersten Gleichungen; er ist, da $Z_2 = 0$, senkrecht zur Axe.

Soll der bis jetzt noch als fest angenommene Punkt gleichfalls keinen Druck erleiden, so muss auch $X_1 = X_2 = 0$ sein. Dies gibt die Bedingungen:

$$y_1 \frac{d\Omega}{dt} + x_1 \Omega^2 = 0, \qquad - x_1 \frac{d\Omega}{dt} + y_1 \Omega^2 = 0,$$

aus welchen man durch Elimination von $\frac{d\Omega}{dt}$ findet: $\Omega^2 (x_1^2 + y_1^2) = 0$, d. h. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Demnach kann die geforderte Bedingung nur erfüllt werden, wenn die Axe durch den Massenmittelpunkt geht. **Wenn also ein unveränderliches System sich anfänglich um eine Hauptaxe des Massenmittelpunktes dreht und der continuirlichen Einwirkung eines Kräftepaares unterworfen ist, dessen Axe mit der Hauptaxe parallel läuft.**

so rotirt es fortwährend um diese Axe weiter, auch wenn dieselbe frei wird.

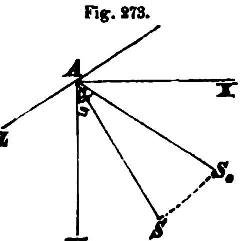
Die Winkelbeschleunigung ergibt sich in allen Fällen aus der letzten Gleichung. Bezeichnet Pp das Paar, so wird

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{Pp}{\Sigma m r^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert Ω und der Anfangswerth Ω wird wie beim vorigen Problem bestimmt.

§. 15. Bewegung eines schweren Systems um eine horizontale Axe. Zusammengesetztes Pendel. (Fig. 273.) Ein unveränderliches schweres System, welches unter alleinigem Einfluss der Schwere sich um eine feste horizontale Axe dreht, heisst ein zusammengesetztes Pendel. Die horizontale Rotationsaxe nehmen wir zur Axe der z, die Richtung der Vertikalen zur y-Axe, positiv abwärts gerechnet, die x-Axe horizontal. Es sind alsdann die Componenten der gegebenen Kräfte $X = 0$, $Y = mg$, $Z = 0$ und folglich

Fig. 273.



$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = g\Sigma m = gM, \quad \Sigma Z = 0,$$
$$\Sigma(yZ - zY) = -g\Sigma mz = -gMz_1,$$
$$\Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = g\Sigma mx = gMx_1,$$

wenn M die Masse des Systems und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Massenmittelpunktes S bedeuten. Legen wir die xy-Ebene durch den Massenmittelpunkt, so wird $x_1 = 0$; wir erhalten daher als Gleichungen der Bewegung des Pendels:

$$My_1\frac{d\Omega}{dt} + Mx_1\cdot\Omega^2 + X_1 + X_2 = 0$$
$$gM - Mx_1\frac{d\Omega}{dt} + My_1\cdot\Omega^2 + Y_1 + Y_2 = 0$$
$$Z_1 + Z_2 = 0,$$
$$\Sigma mxz\cdot\frac{d\Omega}{dt} - \Sigma myz\cdot\Omega^2 - hY_2 = 0$$
$$\Sigma myz\cdot\frac{d\Omega}{dt} + \Sigma mxz\cdot\Omega^2 + hX_2 =$$
$$gMx_1 - \Sigma mr^2\cdot\frac{d\Omega}{dt} = 0.$$

Es sei nun a der Abstand SA des Schwerpunktes von der Axe, α der Winkel, den diese Linie zur Zeit $t = 0$ mit der Vertikalen bildet, ϑ derselbe Winkel zur Zeit t, so hat man:

$$x_1 = a\sin\vartheta, \quad y_1 = a\cos\vartheta, \quad \Omega = \frac{d(\alpha - \vartheta)}{dt} = -\frac{d\vartheta}{dt}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Ferner ziehen wir durch den Massenmittelpunkt eine Parallele zur Axe und bezeichnen den Trägheitsradius des Systems in Bezug auf sie mit $\varkappa$. Dadurch wird das Trägheitsmoment für die Rotationsaxe $\Sigma mr^2 = M(a^2 + \varkappa^2)$ und wenn wir diese Werthe in das Gleichungssystem einführen, so geht zunächst die letzte Gleichung über in

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{a + \frac{\varkappa^2}{a}}\sin\vartheta = 0.$$

Sie ist die eigentliche Gleichung der Bewegung, indem sie den Winkel ϑ und

also auch die Winkelgeschwindigkeit Ω als Function der Zeit bestimmt. Sie hat aber dieselbe Form, wie die Gleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\vartheta = 0,$$

welche die Bewegung eines einfachen Pendels von der Länge l bestimmt. Für $l = a + \frac{\varkappa^2}{a}$ erhalten wir folglich ein einfaches Pendel, welches zu denselben Zeiten dieselben Winkel ϑ mit der Vertikalen bildet, wie die Linie AS in unserem zusammengesetzten Pendel, welches also mit diesem gleiche Schwingungen ausführt. Es ist daher zunächst nur nöthig, dies einfache Pendel weiter zu untersuchen.

Sämmtliche Punkte des zusammengesetzten Pendels machen Schwingungen von derselben Art, wie das einfache Pendel von der Länge $l = a + \frac{\varkappa^2}{a}$. Denkt man sich einen Augenblick die Verbindung der Punkte unter einander gelöst und jeden für sich unabhängig von den übrigen um die gemeinsame Axe schwingend, so werden alle Punkte, deren Abstand von der Axe kleiner ist, als l, schneller, alle die, welche weiter von ihr abliegen, langsamer schwingen, als das zusammengesetzte Pendel; diejenigen aber, welche den Abstand l von der Axe besitzen, werden frei dieselbe Bewegung haben, die sie im System besitzen. Alle diese Punkte liegen auf einer um die Rotationsaxe mit dem Abstande l beschriebenen Cylinderfläche. Eine Ebene durch den Massenmittelpunkt und die Rotationsaxe geführt, schneidet diese Cylinderfläche in zwei Geraden A', A'', welche von der mit der Rotationsaxe parallelen Massenmittelpunktsaxe die Abstände

$$a' = \frac{\varkappa^2}{a}, \qquad a'' = l + a = 2a + \frac{\varkappa^2}{a}$$

haben. Die erste dieser Geraden nennen wir eine zur Rotationsaxe (Aufhängungsaxe) gehörige Schwingungsaxe und ihren Schnittpunkt mit der Linie AS den Schwingungsmittelpunkt. Zwischen der einfachen Pendellänge l, dem Abstande a der Aufhängungs- und dem Abstande a' der Schwingungsaxe vom Massenmittelpunkte bestehen die Rotationen:

$$l = a + a', \quad aa' = \varkappa^2.$$

Zwischen der Aufhängungs- und Schwingungsaxe besteht Reciprocität in der Art, dass die Schwingungsaxe zur Aufhängungsaxe werden kann, ohne dass die einfache Pendellänge l sich ändert. Denn es vertauschen dadurch a' und a blos ihre Rollen und da sie in beiden vorstehenden Gleichungen symmetrisch vorkommen, so ändern sie bei dieser Vertauschung nicht ihre Grösse. Es ist

$$l = a + \frac{\varkappa^2}{a} = a' + \frac{\varkappa^2}{a'}.$$

Aufhängungs- und Schwingungsaxe liegen immer auf entgegengesetzten Seiten der Massenmittelpunktsaxe in solchen Abständen von letzterer, dass deren Produkt constant, nämlich gleich dem Quadrate des Trägheitsradius um die Massenmittelpunktsaxe ist. Die Punkte A, A' bilden daher auf AS eine gleichliegende Involution, deren Mittelpunkt S und deren Constante $\varkappa^2$ ist.

Es gibt unendlich viele Axen im Raume, um welche ein schwereres System als um horizontale Axen schwingend, dieselben Schwingungen macht. Um sie zu finden, ziehen wir durch den Massenmittelpunkt eine Axe γ, deren Trägheitsradius $\varkappa$ sei. Nehmen wir alsdann im Abstande a von γ irgend eine zu γ parallele Axe A zur Aufhängeaxe, so ist die ihr zugehörende einfache Pendellänge $l = a + \frac{\varkappa^2}{a}$ und

bleibt constant, wenn a constant bleibt. Demnach erhält man für jede Gerade auf einer um γ mit der Länge a beschriebenen Cylinderfläche dieselben Schwingungen. Weil aber Aufhängungs- und Schwingungsaxe reciprok sind, so liefern auch alle Geraden a', welche auf einer zweiten um γ mit dem Abstande $a' = \frac{\varkappa^2}{a}$ beschriebenen Cylinderfläche liegen, dieselben Schwingungen; denn jede von ihnen ist Schwingungsaxe zu derjenigen Geraden des ersten Cylinders, welche mit ihr und γ in einer Ebene auf entgegengesetzten Seiten von γ liegt. Jedem Abstande a entsprechen zwei solche Cylinderflächen, um deren Geraden als Axen das Pendel Schwingungen derselben einfachen Pendellänge $l = a + \frac{\varkappa^2}{a}$ ausführt. Je nachdem man a wählt, ändern sich diese Cylinderflächen. Es kann gefragt werden, für welchen Werth von a die Länge l ein Minimum werde. Da $l = a + a'$ und $aa' = \varkappa^2$ ist, so kommt diese Aufgabe darauf hinaus, unter allen Rechtecken desselben Inhaltes $\varkappa^2$ dasjenige vom kleinsten Umfange zu finden. Da das Quadrat diese Eigenschaft allein besitzt, so folgt, dass $a = a' = \varkappa$ sein müsse, welchem Werthe die Pendellänge $l = 2\varkappa$ entspricht. Die beiden Cylinderflächen fallen zusammen. Unter allen Axen also, welche einer gegebenen Massenmittelpunktsaxe γ von gegebenem Trägheitsradius $\varkappa$ parallel laufen, liegen die Axen der kürzesten Oscillationsdauer auf einem um γ mit dem Abstande $\varkappa$ beschriebenen Cylinder.

Durch den Massenmittelpunkt kann man eine Kegelfläche zweiten Grades legen, welche alle Axen desselben Trägheitsradius $\varkappa$ enthält. Es gibt daher eine Schaar von Cylindern, welche der Ort der Axen kürzester Oscillationsdauer dem Trägheitsradius $\varkappa$ entsprechend ist.

Da $l = 2\varkappa$ das Minimum der Pendellänge für den Trägheitsradius $\varkappa$ ist, so erhält man das absolute Minimum von l für das Minimum von $\varkappa$. Die Axen also, um welche ein Pendel die kürzeste Oscillationsdauer besitzt, liegen auf einem um die Massenmittelpunktshauptaxe des kleinsten Trägheitsmomentes mit dem Abstande gleich dem Trägheitsradius dieses letzteren beschriebenen Cylinder.

§. 16. Bewegung eines unveränderlichen Systems, welches mit einer Fläche (Oberfläche) fortwährend eine feste Ebene E berührt.

1. Wir wollen zunächst annehmen, dass die Berührung der Fläche mit E nur in einem einzigen Punkte stattfindet, welcher im Allgemeinen in der Fläche, wie auch auf der Ebene wechseln wird, sodass die Fläche auf der Ebene rollt. Wir legen der Untersuchung ein festes Coordinatensystem der x, y, z zu Grunde, in Bezug auf welches $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ die Richtungscosinusse der Normalen der festen Ebene und p ihr Abstand vom Coordinatenursprung seien, so dass

$$\varepsilon x + \varepsilon' y + \varepsilon'' z - p = 0$$

ihre Gleichung wird. $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ sind dann zugleich die Richtungscosinusse des Widerstandes R, welchen die Ebene im Berührungspunkte B leistet und $R\varepsilon = X_1$, $R\varepsilon' = Y_1$, $R\varepsilon'' = Z_1$ sind dessen Componenten parallel den festen Coordinatenaxen. Bezeichnen x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Massenmittelpunktes S, so hat man als die drei ersten Gleichungen der Bewegung

$$M\frac{d^2x_0}{dt^2} = \Sigma X + X_1, \quad M\frac{d^2y_0}{dt^2} = \Sigma Y + Y_1, \quad M\frac{d^2z_0}{dt^2} = \Sigma Z + Z_1. \qquad (1)$$

Wir nehmen weiter die Hauptaxen des Massenmittelpunktes als Coordinatenaxen der x', y', z' an und bezeichnen mit a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' die Richtungscosinusse dieser Axen gegen die festen Coordinatenaxen; dann sind die drei letzten Gleichungen der Bewegung

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = L' + (y'Z_1' - z'Y_1')$$
$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = M' + (z'X_1' - x'Z_1') \qquad (2)$$
$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = N' + (x'Y_1' - y'X_1'),$$

worin L', M', N' die Componenten des resultirenden Paares der gegebenen, am System angreifenden Kräfte in Bezug auf die Hauptaxen, x', y', z' die Coordinaten des Berührungspunktes B und X_1', Y_1', Z_1' die Componenten des Widerstandes R parallel denselben Axen bedeuten. Setzt man die Componenten des resultirenden Paares der gegebenen Kräfte bezüglich des Massenmittelpunktes und der den Axen der x, y, z parallelen Axen dieses Punktes gleich L, M, N, so sind L', M', N' die Projectionen von L, M, N auf die Axen der x', y', z', nämlich:

$$L' = aL + bM + cN, \quad M' = a'L + b'M + c'N, \quad N' = a''L + b''M + c''N$$

und ebenso sind:

$$X_1' = aX_1 + bY_1 + cZ_1, \quad Y_1' = a'X_1 + b'Y_1 + c'Z_1, \quad Z_1' = a''X_1 + b''Y_1 + c''Z_1.$$

Bezeichnen noch x, y, z die Coordinaten von B bezüglich der festen Axen, so hat man:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= ax' + a'y' + a''z' \\ y - y_0 &= bx' + b'y' + b''z' \qquad (3) \\ z - z_0 &= cx' + c'y' + c''z'; \end{aligned}$$

weil dieser Punkt auf der festen Ebene liegt, so gilt die Gleichung

$$\varepsilon x + \varepsilon' y + \varepsilon'' z - p = 0 \qquad (4)$$

und zugleich besteht für ihn in Bezug auf die Hauptaxen die Gleichung der berührenden Fläche, welche

$$F(x', y', z') = 0 \qquad (5)$$

sei. Endlich hat man, da R die Richtung der gemeinschaftlichen Normale dieser Fläche und der Ebene besitzt, die Gleichungen

$$\frac{X_1'}{\frac{\partial F}{\partial x'}} = \frac{Y_1'}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = \frac{Z_1'}{\frac{\partial F}{\partial z'}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)^2}}. \qquad (6)$$

Denkt man sich die neun Cosinusse a, b, c; ... durch die Euler'schen Winkel φ, ψ, ϑ dargestellt, so hat man als Unbekannte des Problems durch Functionen der Zeit auszudrücken: die Winkel φ, ψ, ϑ; die Componenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit um die Hauptaxen; die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Massenmittelpunktes S; die Coordinaten x', y', z' des Berührungspunktes B im beweglichen System; die Coordinaten x, y, z desselben Punktes im absoluten Raume oder auch statt dessen die Coordinaten $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ bezüglich eines dem festen Coordinatensystem parallelen durch S gelegten Systems, sowie endlich den Widerstand R oder seine Componenten X_1', Y_1', Z_1'. Zur Bestimmung dieser achtzehn Grössen liefern die Gleichungen (1) bis (6) dreizehn Bedingungen, wozu aber noch die Ausdrücke S. 817 für p, q, r, sowie die Relationen:

$$\frac{X_1'}{\varepsilon a + \varepsilon' b + \varepsilon'' c} = \frac{Y_1'}{\varepsilon a' + \varepsilon' b' + \varepsilon'' c'} = \frac{Z_1'}{\varepsilon a'' + \varepsilon' b'' + \varepsilon'' c''} \qquad (7)$$

kommen, welche man erhält, wenn man bedenkt, dass die drei Nenner die Cosinusse der Neigung des Widerstandes gegen die Hauptaxen sind. Man hat daher im Ganzen wirlich die nöthigen achtzehn Bedingungen zur Lösung des Problems.

Wenn die Fläche F die Ebene fortwährend mit einer Spitze berührt, so bleiben x', y', z' constant und hört die Bedingung auf, dass R die Richtung der

Flächennormale besitze, denn diese wird an einer Spitze unbestimmt. x', y', z' sind bekannt und hat man also nur fünfzehn Unbekannte. Es fallen von den achtzehn obigen Bedingungen aber auch die drei

$$F(x', y', z') = 0, \qquad X_1' : Y_1' : Z_1' = \frac{\partial F}{\partial x'} : \frac{\partial F}{\partial y'} : \frac{\partial F}{\partial z'}$$

weg.

Es kann aber auch der Fall eintreten, dass F die Ebene längs einer Geraden berührt. Da in diesem Falle die Ebene in allen Punkten der Geraden Tangentenebene ist, so sind die Widerstände in allen Punkten parallel und haben eine Einzelresultante mit bestimmtem, aber von Gerade zu Gerade wechselnden Angriffspunkte x', y', z'. Dieser vertritt die Stelle des obigen Berührungspunktes B und ändert sich die Anzahl der Gleichungen nicht. Dieser Fall tritt ein, wenn F abwickelbar ist. Ist aber F windschief, so findet die Berührung nur in einem Punkte der Geraden statt.

Besitzt die Fläche F eine scharfe Kante, mit welcher sie auf der Ebene gleitet, so fällt $F = 0$ und $X_1' : Y_1' : Z_1' = \frac{\partial F}{\partial x'} : \frac{\partial F}{\partial y'} : \frac{\partial F}{\partial z'}$ hinweg, treten aber an die Stelle dieser drei Bedingungen die beiden Gleichungen der Kante

$$\frac{x' - a}{n} = \frac{y' - b}{n'} = \frac{z' - c}{n''}$$

und die Bedingung, dass die Kante in die Ebene fällt, welche, da der Angriffspunkt x', y', z' des Widerstandes bereits in ihr liegt, sich darauf reducirt, dass die Kante auf der Richtung $(\varepsilon\,\varepsilon'\varepsilon'')$ senkrecht steht, nämlich auf

$$\varepsilon n + \varepsilon' n' + \varepsilon'' n'' = 0.$$

2. Eine Vereinfachung kann man in vorstehenden Gleichungen eintreten lassen, wenn man die feste Ebene zur xy-Ebene wählt. Dann ist $\varepsilon = \varepsilon' = 0$, $\varepsilon'' = 1$, $\bar{p} = 0$ und hat man

$$M\frac{d^2x_0}{dt^2} = \Sigma X + X_1, \quad M\frac{d^2y_0}{dt^2} = \Sigma Y + Y_1, \quad M\frac{d^2z_0}{dt^2} = \Sigma Z + Z_1 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr &= L' + (y'Z_1' - z'Y_1') \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp &= M' + (z'X_1' - x'Z_1') \qquad (2) \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq &= N' + (x'Y_1' - y'X_1') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - x_0 &= ax' + a'y' + a''z' \\ y - y_0 &= bx' + b'y' + b''z' \qquad (3) \\ z - z_0 &= cx' + c'y' + c''z' \end{aligned}$$

$$z = 0 \quad (4) \qquad F(x', y', z') = 0 \quad (5)$$

$$\frac{X_1'}{\frac{\partial F}{\partial x'}} = \frac{Y_1'}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = \frac{Z_1'}{\frac{\partial F}{\partial z'}} \quad (6), \qquad \frac{X_1'}{c} = \frac{Y_1'}{c'} = \frac{Z_1'}{c''} \quad (7).$$

An die Stelle der Gleichungen (2) wird man oft mit Erfolg die entsprechenden Gleichungen treten lassen, welche sich auf das dem festen Coordinatensystem parallele System des Massenmittelpunktes beziehen und die Componenten des resultiren den Paares der continuirlichen Kräfte darstellen. Nach Cap. XIII, §. 12., Nr. 1. sind dieselben die Derivirten des resultirenden Paares der Momentankräfte und da dieses letztere zu Componenten um die Hauptaxen die Grössen Ap, Bq, Cr hat, so erhält man durch Projection auf jene Axen die Grössen

$$Apa + Bqa' + Cra'', \quad Apb + Bqb' + Crb'', \quad Apc + Bqc' + Crc'',$$

um deren Derivirten es sich handelt. Da R die Richtung der z-Axe hat, so sind $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = R$, reduciren sich die Componenten des Paares von R auf $-R(y - y_0)$, $R(x - x_0)$ und werden mithin (2) vertreten durch:

$$\frac{d}{dt}(Apa + Bqa' + Cra'') = L - R(y - y_0)$$

$$\frac{d}{dt}(Apb + Bqb' + Crb'') = M + R(x - x_0)$$

$$\frac{d}{dt}(Apc + Bqc' + Crc'') = N.$$

3. Es sei das System der Schwere unterworfen und finde Reibung an der festen Ebene statt. Letztere sei unter dem Winkel i gegen den Horizont geneigt. Man hat dann, wenn die x-Axe in der festen schiefen Ebene horizontal, die y-Axe positiv die schiefe Ebene hinunter und die positive z-Axe oberhalb derselben angenommen werden, der positive Sinn der x-Axe aber so bestimmt ist, dass die positive Drehung um die z-Axe die positive x-Axe zur positiven y-Axe führt, indem man die Componenten der Reibung nach den Axen der x, y mit Mf, Mf' bezeichnet, sodass f, f' ihre Verhältnisse zur Masse des Systems darstellen:

$$\Sigma X = Mf, \qquad \Sigma Y = Mg \sin i + Mf', \qquad \Sigma Z = -Mg \cos i,$$

und da der Punkt B in Bezug auf die Axen des Punktes S parallel denen der x, y, z die Coordinaten $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ besitzt, so werden

$$L = -(z - z_0)Mf', \quad M = (z - z_0)Mf, \quad N = (x - x_0)Mf' - (y - y_0)Mf$$

Setzen wir also noch die relativen Coordinaten des Punktes B in Bezug auf S und die eben genannten Axen gleich x'', y'', z'', sodass $x'' = x - x_0$, $y'' = y - y_0$, $z'' = (z - z_0) = -z_0$, so wird das obige Gleichungssystem:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = f \qquad \frac{d}{dt}(Apa + Bqa' + Cra'') = -Mz''f' - Ry''$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} = g \sin i + f' \qquad \frac{d}{dt}(Apb + Bqb' + Crb'') = Mz''f + Rx''$$

$$\frac{d^2z_0}{dt^2} = -g \sin i + \frac{R}{M} \qquad \frac{d}{dt}(Apc + Bqc' + Crc'') = M(x''f' - y''f)$$

$$\begin{aligned} x'' &= ax' + a'y' + a''z' \\ y'' &= bx' + b'y' + b''z' \\ z'' &= cx' + c'y' + c''z' \end{aligned} \qquad F(x', y', z') = 0 \qquad \frac{X_1'}{\frac{\partial F}{\partial x'}} = \frac{Y_1'}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = \frac{Z_1'}{\frac{\partial F}{\partial z'}}$$

$$x - x_0 = x'', \quad y - y_0 = y'', \quad z - z_0 = z'', \quad z = 0 \qquad \frac{X_1'}{c} = \frac{Y_1'}{c'} = \frac{Z_1'}{c''}.$$

Die Componenten der Geschwindigkeit des Berührungspunktes B sind:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{dx''}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + x'\frac{da}{dt} + y'\frac{da'}{dt} + z'\frac{da''}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \frac{dy''}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + x'\frac{db}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{db''}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + \frac{dz''}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + x'\frac{dc}{dt} + y'\frac{dc'}{dt} + z'\frac{dc''}{dt} = 0, \qquad z = 0.$$

Seine Geschwindigkeitscomponente senkrecht zur festen Ebene der x, y ist stets Null, da er in dieser Ebene bleibt. Er gleitet auf dieser Ebene und die Geschwindigkeit dieses Gleitens wird durch die Reibung verändert. Er gleitet aber nur so lange, als die Reibung nicht seine Geschwindigkeit zu vernichten vermag; sowie dies letztere eintritt, liegt der Berührungspunkt in der Momentanaxe und beginnt das System auf der Ebene zu rollen oder zu bohren, je nachdem die Momentanaxe in die Ebene fällt, oder unter einem spitzen oder rechten Winkel gegen

sie geneigt ist. Wenn B gleitet, so ist die Reibung seiner Geschwindigkeit direct entgegengesetzt und verhalten sich daher ihre Componenten Mf, Mf' wie die Componenten seiner Geschwindigkeit, d. h. es ist

$$\frac{f}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f'}{\frac{dy}{dt}}$$

und da die Reibung dem Drucke proportional ist, so hat man zugleich

$$M\sqrt{f^2 + f'^2} = \mu R,$$

wo μ den constanten Reibungscoefficienten zwischen der Ebene und der Fläche F bedeutet. Reicht aber die Reibung hin, die Geschwindigkeit von B zu tilgen, so werden $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ und ist das Verhältniss der Componenten der Reibung unbestimmt, das System hört auf zu gleiten. Wir setzen hier voraus, dass sobald das Gleiten aufhört, auch keine Reibung mehr stattfindet, d. h. dass die Reibung sich nur auf eine Resultante ohne Paar reducire oder die wälzende Reibung Null sei.

§. 17. Als Beispiel zur vorstehenden Theorie behandeln wir die Bewegung einer schweren homogenen Kugel auf einer schiefen Ebene. Man hat hierfür, da der Massenmittelpunkt S zugleich der Kugelmittelpunkt, also z_0 constant ist, zunächst:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = f, \quad \frac{d^2y_0}{dt^2} = g \sin i + f', \quad 0 = R - Mg \sin i. \qquad (1)$$

Ferner ist, da $A = B = C = \frac{2}{5} Ms^2$, wenn s den Radius der Kugel bezeichnet, da zugleich $x'' = y'' = 0$, $z'' = s$ ist:

$$\frac{2}{5} s \frac{d}{dt}(ap + a'q + a''r) = -f'$$

$$\frac{2}{5} s \frac{d}{dt}(bp + b'q + b''r) = f$$

$$\frac{2}{5} s \frac{d}{dt}(cp + c'q + c''r) = 0.$$

Nun sind p, q, r die Componenten der Winkelgeschwindigkeit um die im System festen, mit ihm beweglichen Axen der x', y', z' und da diese gegen die Axen der x'', y'', z'' die Richtungen abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ haben, so stellen

$$ap + a'q + a''r = p_1, \quad bp + b'q + b''r = q_1, \quad cp + c'q + c''r = r_1$$

die Componenten der Winkelgeschwindigkeit nach den Axen x'', y'', z'' von fester Richtung dar, für die wir aber von jetzt p, q, r schreiben wollen, da keine Verwechselung zu befürchten ist. Demnach lauten diese Gleichungen jetzt:

$$\frac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = -f', \quad \frac{2}{5} s \frac{dq}{dt} = f, \quad \frac{2}{5} s \frac{dr}{dt} = 0. \qquad (2)$$

Die Componenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ der Geschwindigkeit des Punktes B lassen sich ebenfalls einfacher darstellen. Zunächst benutzen wir die Formeln S. 152 für $\frac{da}{dt}$, $\frac{da'}{dt}$, ..., mit deren Hülfe sich findet:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + (a'r - a''q)\,x' + (a''p - ar)\,y' + (aq - a'p)\,z'$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + (b'r - b''q)\,x' + (b''p - br)\,y' + (bq - b'p)\,z',$$

wo aber p, q, r die ursprüngliche Bedeutung haben.

Nun sind aber, da die Richtung BS die des Kugelradius ist:

$$\frac{x'}{c} = \frac{y'}{c'} = \frac{z'}{c''} = \frac{1}{s},$$

d. h. $x' = cs$, $y' = c's$, $z' = c''s$ und folglich, wenn man diese Werthe in die vorstehenden Ausdrücke einsetzt und nach p, q, r ordnet:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + s\left[(a''c' - a'c'')\,p + (ac'' - a''c)\,q + (a'c - ac')\,r\right]$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + s\left[(b''c' - b'c'')\,p + (bc'' - b''c)\,q + (b'c - bc')\,r\right],$$

welche Ausdrücke aber mit Hülfe der Formeln (4) S. 146 übergehen in

$$\frac{dx}{dt} = u + s\,(bp + b'q + b''r)$$

$$\frac{dy}{dt} = v - s\,(ap + a'p' + a''p''),$$

wobei zur Abkürzung noch $\frac{dx_0}{dt} = u$, $\frac{dy_0}{dt} = v$ gesetzt würde. Setzen wir nun wieder p und q an die Stelle von $ap + a'q + a''r$, $bp + b'q + b''r$, so werden die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes B:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= u + sq\\ \frac{dy}{dt} &= v - sp.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Die Richtigkeit dieser Formeln leuchtet auch sofort ein, wenn man bedenkt, dass sq, $-sp$ die Geschwindigkeitsbestandtheile sind, welche von den Rotationen um die y- und x-Axe herrühren, während u, v die Translationsgeschwindigkeiten des Systems sind.

Für den Fall, dass der Punkt B auf der Ebene gleitet, gelten demnach die Gleichungen:

$$\frac{du}{dt} = f \qquad \tfrac{2}{5}s\frac{dp}{dt} = -f' \qquad M\sqrt{f^2 + f'^2} = \mu R$$

$$\frac{dv}{dt} = g\sin i + f' \qquad \tfrac{2}{5}s\frac{dq}{dt} = f \qquad \frac{f}{u + sq} = \frac{f'}{v - sp}$$

$$0 = R - Mg\cos i \qquad \tfrac{2}{5}s\frac{dr}{dt} = 0.$$

Für den Fall des Rollens u. s. w. aber treten an die Stelle der beiden Gleichungen $M\sqrt{f^2 + f'^2} = \mu R$ und $f : f' = (u + sq) : (v - sp)$ die beiden

$$u + sq = 0$$

$$v - sp = 0,$$

welche ausdrücken, dass der Punkt B jeden Augenblick in der Momentanaxe liegt oder seine Geschwindigkeit Null ist.

In beiden Fällen hat man zur Bestimmung von p, q, r, u, v, f, f', R die acht nöthigen Gleichungen.

Aus dem Gleichungssystem ergibt sich nun Folgendes:

1. Der Widerstand ist $R = Mg\cos i$, also constand während der ganzen Bewegung.

2. Die Componente r der Winkelgeschwindigkeit um die Vertikale des Massenmittelpunktes ist constant.

3. Die Elimination von f, f', im Falle des Gleitens, gibt:

$$\frac{du}{dt} = \frac{2}{5} s \frac{dq}{dt} \qquad \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} - g \sin i\right)^2 = \mu^2 g^2 \cos^2 i$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = g \sin i \qquad \frac{1}{u + sq} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{v - sp} \left(\frac{dv}{dt} - g \sin i\right).$$

Sind nun u_0, v_0 die Componenten der Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes zur Zeit $t = 0$, p_0, q_0 die Componenten der Winkelgeschwindigkeit um die Axen der x', y' zu derselben Zeit, so liefert die Integration der beiden ersten Gleichungen:

$$u - u_0 = \frac{2}{5} s (q - q_0)$$
$$v - v_0 + \frac{2}{5} s (p - p_0) = g \sin i \cdot t.$$

Bilden wir hiermit die Grössen $u + sq$, $v - sp$, welche die Componenten der Geschwindigkeit des Berührungspunktes B sind, nämlich

$$u + sq = \frac{7}{2} u - \frac{5}{2} u_0 + s q_0 = \frac{7}{2} (u - \frac{5}{7} u_0 + \frac{2}{7} s q_0) = \frac{7}{2} U$$

$$v - sp = \frac{7}{2} v - \frac{5}{2} g \sin i \cdot t - \frac{5}{2} v_0 - s p_0 = \frac{7}{2} (v - g \sin i \cdot t - \frac{5}{7} v_0 - \frac{2}{7} s p_0) + g \sin i \cdot t$$
$$= \frac{7}{2} V + g \sin i \cdot t,$$

sodass also

$$u + sq = \frac{7}{2} U, \qquad U = u - \frac{5}{7} u_0 + \frac{2}{7} s q_0$$
$$v - sp = \frac{7}{2} V + g \sin i \cdot t, \qquad V = v - g \sin i \cdot t - \frac{5}{7} v_0 - \frac{2}{7} s p_0,$$

so können wir zunächst U und V durch die Zeit darstellen, hiermit also auch u, v, sowie p und q. Wir führen zu dem Ende U und V in die beiden letzten der obigen Differentialgleichungen ein. Da nun $\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dt}$, $\frac{dv}{dt} - g \sin i = \frac{dV}{dt}$ wird, so nehmen diese Gleichungen die Gestalt an:

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = \mu^2 g^2 \cos^2 i, \qquad \frac{1}{U} \frac{dU}{dt} = \frac{1}{V + \frac{2}{7} g \sin i \cdot t} \cdot \frac{dV}{dt},$$

oder, wenn wir behufs weiterer Vereinfachung $\mu g \cos i \cdot t = \Theta$ und $\frac{2}{7} g \sin i \cdot t = \varkappa \Theta$ setzen, wobei also $\varkappa = \frac{2}{7} \frac{tg\, i}{\mu}$ ist:

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dt}\right) = \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2, \qquad \frac{1}{U} \frac{dU}{dt} = \frac{1}{V + \varkappa\Theta} \cdot \frac{dV}{dt}.$$

Behufs der Integration führen wir eine Hülfsvariabele σ ein, derart, dass die erste dieser Gleichungen von selbst erfüllt wird; wir setzen nämlich

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d\Theta}{dt} \cdot \sin \sigma, \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{d\Theta}{dt} \cdot \cos \sigma.$$

Mit Hülfe dieser Werthe wird die zweite der Gleichungen

$$V + \varkappa\Theta = U \cdot cotg\, \sigma.$$

Sie gibt, differentiirt

$$\frac{dV}{dt} + \varkappa \frac{d\Theta}{dt} = \frac{dU}{dt} cotg\, \sigma - \frac{U}{\sin^2 \sigma} \frac{d\sigma}{dt}$$

und spaltet sich vermöge der Substitutionsgleichungen für σ, aus denen folgt $dV = dU \, cotg\, \sigma$, $dU = \sin \sigma \cdot d\Theta$, in die beiden

$$\varkappa d\Theta = - \frac{U d\sigma}{\sin^2 \sigma}, \qquad \varkappa dU = - \frac{U d\sigma}{\sin \varphi}.$$

Von diesen liefert zunächst die letzte das Integral $\varkappa l U + l\, tg \frac{1}{2} \sigma + Const = 0$, oder

$$U^\varkappa = c \cdot cotg \tfrac{1}{2} \sigma,$$

worin c die Integrationsconstante bedeutet. Weiter ist

$$d\Theta = \frac{dU}{\sin \sigma}, \qquad dV = dU \cdot cotg\, \sigma$$

und wenn man also behufs Entfernung von σ die Combinationen

$$cotg\,\tfrac{1}{2}\sigma + tg\,\tfrac{1}{2}\sigma = \frac{2}{\sin\sigma} = \frac{1}{c}\,U^{\varkappa} + c\,U^{-\varkappa}$$

$$cotg\,\tfrac{1}{2}\sigma - tg\,\tfrac{1}{2}\sigma = 2\,cotg\,\tfrac{1}{2}\sigma = \frac{1}{c}\,U^{\varkappa} - c\,U^{-\varkappa}$$

mit Hülfe des gefundenen Integrales bildet,

$$2\,d\Theta = \left(\frac{1}{c}\,U^{\varkappa} + c\,U^{-\varkappa}\right)dU,$$

$$2\,dV = \left(\frac{1}{c}\,U^{\varkappa} - c\,U^{-\varkappa}\right)dU,$$

woraus zwischen U, V, Θ die beiden Gleichungen

$$2\,\Theta = \frac{U^{1+\varkappa}}{c\,(1+\varkappa)} + \frac{c\,U^{1-\varkappa}}{1-\varkappa} + C$$

$$2\,V = \frac{U^{1+\varkappa}}{c\,(1+\varkappa)} - \frac{c\,U^{1-\varkappa}}{1-\varkappa} + C',$$

fliessen, wenn $\varkappa \gtrless 1$ und

$$2\,\Theta = \frac{1}{2c}\,U^{2} + l\cdot U^{c} + C$$

$$2\,V = \frac{1}{2c}\,U^{2} + l\cdot U^{c} + C',$$

wenn $\varkappa = 1$. Sobald die Constanten C, C', c bestimmt sein werden, bestimmen diese beiden Integrale vermöge $\Theta = \mu g \cos i\cdot t$ die Grössen U, V und durch sie $u = U + \frac{5}{7}u_0 - \frac{2}{7}sq_0$, $v = V + g\sin i\cdot t + \frac{5}{7}v_0 + \frac{2}{7}sp_0$, sowie $q = \frac{7}{2s}\,U - \ldots$, $p = \frac{1}{s}\,(u - \frac{7}{2}\,V - g\sin i\cdot t)$ als Functionen der Zeit t.

Um diese Constanten zu bestimmen, seien U_0, V_0 die Werthe von U, V für $t = 0$; man hat dann, da $\Theta = 0$ wird, für $t = 0$:

$$0 = \frac{U_0^{1+\varkappa}}{c\,(1+\varkappa)} + \frac{c\,U_0^{1-\varkappa}}{1-\varkappa} + C$$

$$2\,V_0 = \frac{U_0^{1+\varkappa}}{c\,(1+\varkappa)} - \frac{c\,U_0^{1-\varkappa}}{1-\varkappa} + C',$$

wenn $\varkappa \lessgtr 1$ und

$$0 = \frac{1}{2c}\,U_0^{2} + l\cdot U_0^{c} + C$$

$$2\,V_0 = \frac{1}{2c}\,U_0^{2} - l\cdot U_0^{c} + C',$$

wenn $\varkappa = 1$. Die Constante c ist aber eine überzählige und kam in die Rechnung durch die Integration nach σ, welche einer Differentiation folgte. Die beiden zu integrirenden Gleichungen

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2,\qquad \frac{1}{U}\,\frac{dU}{dt} = \frac{1}{V+\varkappa\Theta}\cdot\frac{dV}{dt}$$

verlangen nur zwei Constanten und hängt also c von C, C', also von U_0, V_0 ab. Diese Abhängigkeit ergibt sich, indem man mit Hülfe der beiden Integrale die Grösse

$$2\,(V + \varkappa\Theta) = \frac{1}{c}\,U^{1+\varkappa} - c\,U^{1-\varkappa} + C' + C\varkappa$$

bildet, welche vermöge der Differentialausdrücke

$$2\,d\Theta = \left(\frac{1}{c}\,U^{\varkappa} + c\,U^{-\varkappa}\right)dU$$

und

$$2\,dV = \left(\frac{1}{c}\,U^{\varkappa} - c\,U^{-\varkappa}\right)dU$$

auf die Form

$$2\,(V + \varkappa\Theta) = 2\,U\frac{dV}{dU} + C' + C\varkappa$$

gebracht werden kann, mit dem aus der Differentialgleichung

$$\frac{1}{U}\,\frac{dU}{dt} = \frac{1}{V + \varkappa\Theta}\,\frac{dV}{dt}$$

folgenden Werthe $V + \varkappa\Theta = U\frac{dV}{dU}$ vergleicht. Dies liefert $C' + C\varkappa = 0$, welche Gleichung aber durch die Gleichungen der Constantenbestimmung übergeht in $2\,V_0 = \frac{1}{c}\,U_0^{1+\varkappa} - c\,U_0^{1-\varkappa}$, oder

$$c^2 + 2\,V_0 U_0^{\varkappa-1}\cdot c - U_0^{2\varkappa} = 0,$$

sodass

$$c = U_0^{\varkappa-1}\left(-V_0 \pm \sqrt{U_0^2 + V_0^2}\right)$$

wird und also immer reell ist. Ueber das Vorzeichen in diesem Ausdrucke entscheidet der anfängliche Geschwindigkeitszustand. Es sei z. B. die horizontale Anfangsgeschwindigkeitscomponente $u_0 + s q_0 = \frac{1}{2}\,U_0$ positiv, so ist auch U wenigstens eine, wenn auch noch so kurze Zeit positiv und folglich

$$\frac{dU}{d\Theta} = \frac{1}{c}\,U^{\varkappa} + c\,U^{-\varkappa} = \frac{1}{\mu g \cos i}\cdot\frac{du}{dt}$$

mit c zugleich positiv oder negativ. Daher hat c mit $\frac{du}{dt} = -f$, d. h. mit dem Sinne, in welchem die Reibung parallel der x-Axe wirkt, gleiches Zeichen. Ist aber f negativ, so wird $c = -U_0^{\varkappa-1}\left(V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}\right)$ und hiermit

$$C = \frac{2}{1-\varkappa^2}\left(\varkappa V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}\right)$$

$$C' = -\frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2}\left(\varkappa V_0 - \sqrt{U_0^2 + V_0^2}\right),$$

da $C' + \varkappa C = 0$ ist.

4. Wenn $\varkappa \gtreqless 1$ ist, so ergibt sich aus den Gleichungen

$$2\,\Theta = \frac{U^{1+\varkappa}}{c\,(1+\varkappa)} + \frac{c\,U^{1-\varkappa}}{1-\varkappa} + C \qquad 2\,\Theta = \frac{1}{2\,c}\,U^2 + l\cdot U^c + C$$

und

$$2\,V = \frac{U^{1+\varkappa}}{c\,(1+\varkappa)} - \frac{c\,U^{1-\varkappa}}{1-\varkappa} + C' \qquad 2\,V = \frac{1}{2\,c}\,U^2 + l\cdot U^{-c} + C',$$

worin $\Theta = \mu g \cos i\cdot t$ ist, dass für $U = 0$ die Grösse Θ und folglich auch die Zeit t unendlich gross werden muss; es kann also in diesem Falle die Geschwindigkeit des Berührungspunktes, deren Componenten

$$u + sq = \tfrac{1}{2}\,U, \qquad v - sp = \tfrac{1}{2}\,V + g \sin i\cdot t$$

sind, niemals Null werden. Die Grösse $\varkappa$ ist $\frac{2}{7}\frac{tg\,i}{\mu}$ und die Bedingung $\varkappa \gtreqless 1$ ist also $tg\,i \gtreqless \frac{7}{2}\,\mu$.

Bewegt sich also eine schwere homogene Kugel auf einer unter einem Winkel i gegen den Horizont geneigten Ebene, dessen Tangente mindestens gleich $\frac{7}{2}$ vom Reibungscoefficienten zwischen Kugel und Ebene ist, so ist die Reibung niemals im Stande, die Ge-

schwindigkeit des Berührungspunktes zu tilgen und kann mithin die Kugel nur gleiten, nie rollen.

Je grösser i wird, desto kleiner wird der Druck $R = Mg\cos i$ und die Reibung μR, um so leichter gleitet also die Kugel.

Mit wachsendem t, also wachsendem Θ und mithin fortwährend wachsenden U reduciren sich die vorstehenden Formeln für $\varkappa > 1$ immer mehr auf

$$\Theta = \frac{c}{2(1-\varkappa)} \cdot U^{1-\varkappa}, \quad V = -\frac{c}{2(1-\varkappa)} \cdot U^{1-\varkappa} = -\Theta, \quad \text{also} \quad V + \Theta = 0$$

und werden, wenn man $\frac{c}{2(1-\varkappa)} = n$ setzt, indem man für U, V, Θ ihre Werthe einführt, immer näher die Gleichungen erfüllt:

$$u = \frac{1}{(n\mu g\cos i \cdot t)^{\varkappa - 1}} + \tfrac{5}{7}u_0 - \tfrac{2}{7}sq_0$$
$$v = g(\sin i - \mu\cos i)\,t + \tfrac{5}{7}v_0 + \tfrac{2}{7}sp_0,$$

welche abgekürzt lauten:

$$u = \tfrac{5}{7}u_0 - \tfrac{2}{7}hu_0, \qquad v = g(\sin i - \mu\cos i)\,t.$$

Es nähert sich demnach die horizontale Componente u der Geschwindigkeit des Berührungspunktes einer Constanten, die Componente in der Richtung des steilsten Abfalles aber wird der Zeit proportional. Die Bahn des Berührungspunktes wird daher mit wachsendem t immer mehr parabolisch.

5. Ist $\varkappa < 1$, so wird $U = 0$ für $\Theta = C$, d. h. da $\Theta = \mu g\cos i \cdot t$ ist, für die Zeit

$$t_1 = \frac{C}{2\mu g\cos i} = \frac{1}{(1-\varkappa^2)\mu g\cos i}\left(\varkappa V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}\right).$$

Für $U = 0$ wird aber $2V = C'$, also $2(V + \varkappa\Theta) = 2(C' + C\varkappa) = 0$, d. h. da $\varkappa\Theta = \frac{2}{7}g\sin i \cdot t$ ist, $V = -\frac{2}{7}g\sin i \cdot t_1$. Demnach werden die Componenten $u + sq = \frac{7}{2}U$, $v - sp = \frac{7}{2}V + g\sin i \cdot t_1$ der Geschwindigkeit des Berührungspunktes beide zugleich für $t = t_1$ Null. Es verschwindet also die Geschwindigkeit des Berührungspunktes und die Kugel beginnt zur Zeit t_1 zu rollen. Von diesem Augenblick an gilt mithin das Gleichungssystem:

$$\frac{du}{dt} = f \qquad \tfrac{2}{5}s\frac{dp}{dt} = -f \qquad u + sq = 0$$
$$\frac{dv}{dt} = g\sin i + f' \qquad \tfrac{2}{5}s\frac{dq}{dt} = f' \qquad v - sp = 0$$
$$R = Mg\cos i \qquad \tfrac{2}{5}s\frac{dr}{dt} = 0.$$

Sind nun u_1, v_1, p_1, q_1 die Werthe von u, v, p, q für $t = t_1$, so erhält man, wie in Nr. 3.:

$$u - u_1 = \tfrac{2}{5}s(q - q_1)$$
$$v - v_1 + \tfrac{2}{5}s(p - p_1) = g\sin i\,(t - t_1).$$

Um die Constanten zu bestimmen, hat man für $t = t_1$ aus den Gleichungen von Nr. 3.:

$$U = u - \tfrac{5}{7}u_0 + \tfrac{2}{7}sq_0$$
$$V = v - g\sin i \cdot t - \tfrac{5}{7}v_0 - \tfrac{2}{7}sp_0,$$

wofür $U = 0$, $V = -\frac{2}{7}g\sin i \cdot t_1$ ist:

$$u_1 = \tfrac{5}{7}u_0 - \tfrac{2}{7}sq_0, \qquad v_1 = \tfrac{5}{7}g\sin i \cdot t_1 + \tfrac{5}{7}v_0 + \tfrac{2}{7}sp_0$$

und weil zur Zeit t_1 auch die obigen beiden Gleichungen $u + sq = 0$, $v - sp = 0$ gelten:

$$u_1 + sq_1 = 0, \qquad v_1 - sp_1 = 0,$$

wodurch auch p_1 und q_1 bestimmt sind. Für irgend eine Zeit $t > t_1$ bestehen also die Gleichungen:

$$\begin{aligned} u - u_1 &= \tfrac{2}{5} s (q - q_1) & \qquad u + sq &= 0 \\ v - v_1 + \tfrac{2}{5} s (p - p_1) &= g \sin i \cdot (t - t_1) & \qquad v - sp &= 0. \end{aligned}$$

Man erhält hiermit unter Berücksichtigung der Werthe der Constanten:

$$u = u_1, \quad q = q_1, \quad v - v_1 = s (p - p_1) = \tfrac{5}{7} g \sin i \cdot (t - t_1),$$

sowie

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = s \frac{dp}{dt} = \tfrac{5}{7} g \sin i, \quad \tfrac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = - f' = \tfrac{2}{7} g \sin i$$

$$\frac{dq}{dt} = f = 0,$$

d. h.: Die horizontale Componente u der Geschwindigkeit des Mittelpunktes der rollenden Kugel ist constant und findet in ihrer Richtung kein Reibungswiderstand statt. Die Componente der Geschwindigkeit in der Richtung des stärksten Abfalles die schiefe Ebene hinab wächst der Zeit proportional. Der Kugelmittelpunkt beschreibt daher eine Parabel, parallel der schiefen Ebene, deren Hauptaxe die Richtung des stärksten Abfalles hat. Die Beschleunigung dieses Punktes in dieser Richtung ist $\frac{5}{7} g \sin i$ und die Reibung $- \frac{2}{7} Mg \sin i$. Da $R = \mu Mg \cos i$ und wegen $\varkappa < 1$ auch $\frac{2}{7} g \sin i < \mu g \cos i$ ist, so folgt, dass die Reibung im vorliegenden Falle nicht dem μ fachen des ganzen Druckes, sondern nur einem Bruchtheil hiervon gleich ist. Die Componente q der Winkelgeschwindigkeit um den Kugeldurchmesser parallel der Linie steilsten Abfalles ist constant, sowie die um den zur schiefen Ebene senkrechten Durchmesser; die Winkelgeschwindigkeit p um den horizontalen Durchmesser ist gleichförmig beschleunigt.

6. Es seien die Anfangsgeschwindigkeiten u_0, v_0, p_0, q_0, r_0 sämmtlich Null. Dann findet in horizontaler Richtung überhaupt keine Geschwindigkeit statt, wird also auch keine Reibung erregt, d. h. es ist fortwährend $f = 0$. Demnach ist das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = 0 & &\tfrac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = - f' & &Mf' = \mu R & & & &u + sq = 0 \\ &\frac{dv}{dt} = g \sin i + f' & &\tfrac{2}{5} s \frac{dq}{dt} = 0 & &u + sq = 0 & &\text{oder} & &v - sp = 0 \\ &R = Mg \cos i & &\tfrac{2}{5} s \frac{dr}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Man erhält hieraus mit Rücksicht auf den Anfangszustand:

$$u = 0, \quad q = 0, \quad u + sq = 0.$$

Der Mittelpunkt der Kugel bewegt sich also geradlinig die schiefe Ebene entlang und findet keine Rotation um eine Axe parallel der Richtung des steilsten Abfalles statt ebenso wenig wie um eine Axe senkrecht zur Ebene. Die horizontale Componente der Geschwindigkeit des Berührungspunktes ist Null.

Für den Fall des Gleitens der Kugel hat man nun:

$$\frac{dv}{dt} + \tfrac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = g \sin i$$

und da f' aufwärts wirkt, also negativ, nämlich $f' = -\mu g \cos i$ ist:

$$\tfrac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = \mu g \cos i.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$v + \tfrac{2}{5} sp = g \sin i \cdot t, \qquad \tfrac{2}{5} sp = \mu g \cos i \cdot t$$

und also wird:

$$v = g(\sin i - \mu \cos i)\, t, \qquad \tfrac{2}{5} sp = \mu g \cos i \cdot t$$

und die Geschwindigkeit des Berührungspunktes:

$$v - sp = g(\sin i - \tfrac{7}{2} \mu \cos i) \cdot t.$$

Dem Anfangszustande entsprechend kann das Gleiten nur abwärts stattfinden, daher muss diese Grösse positiv, d. h. $\sin i - \frac{7}{2} \mu \cos i > 0$ oder $tg\, i > \frac{7}{2} \mu$ oder also $\varkappa > 1$ sein. Die Kugel kann also nur gleiten, wenn die Neigung i der schiefen Ebene gegen den Horizont die Bedingung erfüllt $tg\, i > \frac{7}{2} \mu$.

Für das Rollen ist $\frac{dv}{dt} + \frac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = g \sin i$, also $v + \frac{2}{5} sp = g \sin i \cdot t$ und hierzu kommt $v - sp = 0$, sodass

$$sp = \tfrac{5}{7} g \sin i \cdot t, \qquad v = \tfrac{5}{7} g \sin i \cdot t$$

wird. Die Reibung beträgt hier $-f' = \frac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = \frac{2}{7} g \sin i$. Die Reibung des Gleitens ist $\mu g \cos i$, grösser als sie kann die im vorliegenden Falle stattfindende Reibung nicht sein, man muss also haben $\frac{2}{7} g \sin i \leqq \mu g \cos i$, d. h. $\frac{2}{7} tg\, i \leqq \mu$ oder $\varkappa \leqq 1$. Das Rollen der Kugel findet also in den Fällen statt, in welchen der Neigungswinkel i der Bedingung $tg\, i \leqq \frac{7}{2} \mu$ genügt.

§. 18. Wir wollen den Fall der Bewegung einer homogenen schweren Kugel auf einer horizontalen Ebene besonders behandeln. Man hat hierfür, da $i = 0$:

$$\frac{du}{dt} = f \qquad \tfrac{2}{5} s \frac{dp}{dt} = -f' \qquad \text{und} \qquad \sqrt{f^2 + f'^2} \doteq \mu g \qquad \text{oder} \qquad u + sq = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = f' \qquad \tfrac{2}{5} s \frac{dq}{dt} = f \qquad \frac{f}{u + sq} = \frac{f'}{v - sp} \qquad v - sp = 0$$

$$R = Mg \qquad \tfrac{2}{5} s \frac{dr}{dt} = 0$$

1. Es seien wieder u_0, v_0, p_0, q_0 die Componenten der Anfangsgeschwindigkeiten und habe für den Fall des Gleitens, den wir zuerst behandeln, die positive x-Axe Richtung und Sinn der Anfangsgeschwindigkeit des Berührungspunktes $u_0 + sq_0 = \frac{7}{2} U_0$. Dadurch wird die ihrer Componente $v_0 - sp_0 = 0$ und $V_0 = 0$. Es bestehen also die Gleichungen (§. 17., Nr. 3.):

$$u + sq = \tfrac{7}{2} U, \qquad U = u - \tfrac{5}{7} u_0 + \tfrac{2}{7} sq_0$$

$$v - sp = \tfrac{7}{2} V, \qquad V = v - \tfrac{5}{7} v_0 - \tfrac{2}{7} sp_0 = v - v_0, \qquad v_0 - sp_0 = 0.$$

Weiter wird

$$\varkappa = \tfrac{2}{7} \frac{tg\, i}{\mu} = 0, \quad C = 2 U_0, \quad C = 0$$

und mithin

$$\Theta = \mu g t = U_0 - U, \qquad V \doteq 0.$$

Daher ist

$$u + sq = \tfrac{7}{2} U = \tfrac{7}{2} (U_0 - \mu g t) = u_0 + sq_0 - \tfrac{7}{2} \mu g t, \qquad v - sp = 0;$$

d. h. die Geschwindigkeit des Berührungspunktes behält während des Gleitens constante Richtung und ist gleichförmig verzögert. Die Reibung ist daher ebenfalls constant nach Richtung und Intensität.

Für die Geschwindigkeit (u, v) des Kugelmittelpunktes hat man aus obigen Gleichungen:

$$u = U + \tfrac{5}{7} u_0 - \tfrac{2}{7} s q_0 = U_0 - \mu g t + \tfrac{5}{7} u_0 - \tfrac{2}{7} s q_0 = \tfrac{2}{7}(u_0 + s q_0) + \tfrac{5}{7} u_0 - \tfrac{2}{7} s q_0 - \mu g t,$$

d. h. $u = u_0 - \mu g t, \ v = v_0$.

Die Projection der Geschwindigkeit des Mittelpunktes auf die Richtung des Gleitens ist gleichförmig verzögert, die Projection derselben senkrecht zu dieser Richtung in der Horizontalebene constant; der Mittelpunkt beschreibt demnach, so lange die Kugel gleitet, einen Bogen einer horizontalen Parabel, deren Hauptaxe der Richtung des Gleitens parallel läuft. Dieser Satz rührt von J. Albr. Euler, dem Sohne von L. Euler her (*Mém. de l'Acad. de Berlin* 1758, p. 284).

Um die Gleichung dieser Parabel zu erhalten, hat man

$$u = \frac{dx}{dt} = u_0 - \mu g t, \qquad v = \frac{dy}{dt} = 0$$

und hieraus, da $x = y = 0$ für $t = 0$, wenn der Ursprung des Coordinatensystems die Anfangslage des Berührungspunktes ist:

$$x = u_0 t - \tfrac{1}{2} \mu g t^2, \qquad y = v_0 t,$$

mithin nach Elimination von t:

$$(\mu g y - u_0 v_0)^2 = v_0^2 (u_0^2 - 2 \mu g x).$$

Die Coordinaten α, β des Scheitels erhält man, indem man $x + \alpha$, $y + \beta$ für x und y in diese Gleichung einsetzt und α, β so bestimmt, dass die constanten Glieder verschwinden. Dies gibt $\alpha = \frac{u_0^2}{2 \mu g}$, $\beta = \frac{u_0 v_0}{\mu g}$. Die Scheitelgleichung der Parabel ist also $y^2 = -\frac{v_0^2}{2 \mu g} x$; ihr Parameter $\frac{v_0^2}{2 \mu g}$.

Die Componenten der Winkelgeschwindigkeit ergeben sich aus den obigen Gleichungen für die Componenten der Geschwindigkeit des Berührungspunktes, nämlich

$$p = \frac{v_0}{s}, \qquad q = \frac{1}{s}(\tfrac{7}{2} U - u) = q_0 - \tfrac{5}{2} \frac{\mu g t}{s}.$$

Die Componente der Winkelgeschwindigkeit um die Axe parallel der Richtung des Gleitens ist constant, um eine hierzu senkrechte horizontale Axe aber gleichförmig verzögert.

2. Die Bahn des Mittelpunktes ist nur so lange parabolisch, als die Kugel gleitet. Das Gleiten hört auf, sobald die Geschwindigkeit

$$u + s q = \tfrac{7}{2} U = u_0 + s_0 q_0 - \tfrac{7}{2} \mu g t$$

des Berührungspunktes Null wird. Dies und damit das Rollen der Kugel erfolgt mit der Zeit t_1, welche der Gleichung genügt

$$t_1 = \tfrac{2}{7} \frac{u_0 + s q_0}{\mu g} = \frac{U_0}{\mu g}.$$

Sind u_1, v_1 die Componenten der Geschwindigkeit des Mittelpunktes für diese Zeit t_1, so hat man aus den obigen Formeln $u = u_0 - \mu g t$, $v = v_0$:

$$u_1 = u_0 - \mu g t_1 = u_0 - \tfrac{2}{7}(u_0 + s q_0) = \tfrac{5}{7} u_0 - \tfrac{2}{7} s q_0, \qquad v_1 = v_0.$$

Zu derselben Zeit t_1 treten aber vermöge des Rollens die Bedingungen

$$u + s q = 0, \qquad v - s p = 0$$

ein. Daher geben diese $u_1 + s q_1 = 0$, $v_1 - s p_1 = 0$ und es bestehen daher für irgend eine auf t_1 folgende Zeit t die Gleichungen:

$$u - u_1 = \frac{2}{5}s(q - q_1) \qquad u + sq = 0 \qquad u_1 = u_0 - \mu g t_1 \qquad u_1 + sq_1 = 0$$
$$v - v_1 + \frac{2}{5}s(p - p_1) = 0 \qquad v - sp = 0 \qquad v_1 = v_0 \qquad v_1 - sp_1 = 0,$$

woraus folgt: $u - u_1 = \frac{2}{5}s(q - q_1) = -s(q - q_1)$, also $q = q_1$, $u = u_1$;
$v - v_1 = -\frac{2}{5}s(p - p_1) = s(p - p_1)$, also $p = p_1$, $v = v_1 = v_0$.

Es bleiben demnach die Componenten u, v der Geschwindigkeit des Mittelpunktes constant und behält diese selbst also denselben Werth $\sqrt{u_1^2 + v_0^2}$ und dieselbe Richtung. Ebenso bleiben die Componenten p, q der Winkelgeschwindigkeit constant. Die Berührungspunkte mit der Ebene liegen in gerader Linie, nämlich in der Tangente der Parabel, welche die Projection der Bahn des Mittelpunktes bis zur Zeit t_1 darstellt.

Die Reibung ist von der Zeit t_1 an Null, wie aus $\frac{du}{dt} = 0 = f$, $\frac{dv}{dt} = 0 = f'$ folgt.

3. Ein interessanter Specialfall ist $v_0 = 0$. Hierfür ist für die Zeit des Gleitens $u = u_0 - \mu g t$, $v = 0$. Die Bahn des Mittelpunktes ist eine Gerade parallel der x-Axe, er beschreibt sie gleichförmig verzögert. Ferner ist $p = 0$, $q = q_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g t}{s}$. Von der Zeit $t_1 = \frac{2}{7}\frac{u_0 + sq_0}{\mu g}$ hört das Gleiten auf und rollt die Kugel. Die Geschwindigkeit ihres Mittelpunktes ist dann constant gleich $u_1 = u_0 - \mu g t_1 = \frac{5}{7}u_0 - \frac{2}{7}sq_0$. Wenn u während des Gleitens, also vor der Zeit t_1 Null und hierauf negativ wird, d. h. wenn für die Zeit t_2 zwischen 0 und t_1 die Gleichung $u_0 - \mu g t_2 = 0$ erfüllt wird, so wird die Kugel zurücklaufen. Es ist nämlich $t_2 < t_1$, d. h. $\frac{u_0}{2g} < \frac{2}{7}\frac{u_0 + sq_0}{\mu g}$, also $u_0 < \frac{2}{7}(u_0 + sq_0)$ und folglich $u_1 = u_0 - \frac{2}{7}(u_0 + sq_0)$ negativ. u_0 muss aber positiv sein, damit $u_0 - \mu g t_2 = 0$ für eine positive Zeit t_2 verschwinden könne.

4. Auch wenn v_0 nicht Null ist, kann der Rücklauf der Kugel eintreten. Der Mittelpunkt beginnt den Parabelbogen zu beschreiben mit der Anfangsgeschwindigkeit $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$ in der Richtung der Anfangstangente; zur Zeit t_1 von wo an er geradlinig in der Richtung der Endtangente fortgeht und die Kugel rollt, ist seine Geschwindigkeit $\sqrt{u_1^2 + v_0^2} = \sqrt{(\frac{5}{7}u_0 - \frac{2}{7}sq_0)^2 + v_0^2}$. Hat nun der Mittelpunkt zur Zeit t_1 den Scheitel der Parabel noch nicht erreicht, so erscheint diese Geschwindigkeit in Bezug auf die Anfangsrichtung rechtläufig, sowie er aber den Scheitel überschritten hat, rückläufig. Die Zeit, welche er aber braucht, um den Scheitel zu erreichen, ergibt sich aus $y = v_0 t$, wenn man für y die Ordinate $\beta = \frac{u_0 v_0}{\mu g}$ des Scheitels einsetzt, nämlich $t_2 = \frac{u_0}{\mu g}$. Da sie positiv sein muss, so bewegt sich der Mittelpunkt überhaupt nur dann nach dem Scheitel hin, wenn u_0 positiv ist. Soll also die Kugel rechtläufig gleiten, so muss $t_1 < t_2$, d. h. $\frac{2}{7}(u_0 + sq_0) < u_0$, d. h. $\frac{2}{5}sq_0 < u_0$ sein. Da nun t_1 positiv, also $u_0 + sq_0 > 0$ ist, so folgt $sq_0 > -u_0$. Es muss also für die Rechtläufigkeit sq_0 zwischen $-u_0$ und $+\frac{5}{2}u_0$ liegen. Ist aber $t_1 > t_2$, so hat der Mittelpunkt den Parabelscheitel bereits überschritten, bis die Kugel zu rollen anfängt. Sie rollt daher in der Richtung einer Tangente fort, welche mit der Anfangsrichtung einen stumpfen Winkel bildet und ihre Bewegung erscheint rückläufig. Damit dies eintrete, muss u_0 positiv und $sq_0 > \frac{5}{2}u_0$ sein.

Ueber das Problem der Bewegung einer homogenen schweren Kugel auf einer Ebene mit Rücksicht auf Reibung ist von Literatur insbesondere anzuführen:

Coriolis, *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*, Cap. 1, sowie Minding, Handbuch der theoretischen Mechanik. Berlin 1838. S. 325 etc.

Résal, *Etude géometrique sur le mouvement d'une sphère glissant ou roulant sur un plan horizontal.* (*Compt. rend. de l'Acad. des sciences*, T. LXVIII (1869), p. 1158.)

Amthor, Ueber die Bewegung eines Körpers auf einer krummen Fläche mit Rücksicht auf gleitende Reibung (Dissertation). Leipzig 1869. (Behandelt verschiedene hierher gehörige Probleme, Bewegung eines homogenen Rotationskörpers auf einer horizontalen Ebene, einer Kugel auf einer Kugel, die Bewegung des Kreisels etc.)

Jullien, *Problèmes de mécanique rationelle*, T. II, p. 192. (2ième édit.)

XV. Capitel.

Die Bewegungsgleichungen eines beliebigen veränderlichen Systems. D'Alembert's Princip. Das Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges. Verwandtschaft der Bewegungen. Newton's Satz über die Aehnlichkeit der Bewegungen.

§. 1. Es sei ein beliebiges System von n Massenpunkten m_i gegeben, auf welches sowohl äussere als innere Kräfte einwirken; dasselbe sei frei, d. h. nicht an Bedingungen gebunden, dass gewisse Punkte auf gegebenen Curven oder Flächen bleiben sollen und dgl. Sind X_i, Y_i, Z_i die Componenten der Resultante P_i aller auf m_i wirkenden Kräfte parallel den Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems, in Bezug auf welches dieser Punkt die Coordinaten x_i, y_i, z_i besitzt, so sind

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i, \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i$$

die Bewegungsgleichungen desselben. Aehnliche Gleichungen erhält man für $i = 1, 2, 3 \ldots n$, d. h. für alle Punkte des Systems; im Ganzen also $3n$. Die Grössen X_i, Y_i, Z_i sind Functionen der Coordinaten der n Punkte, deren Differentialquotienten nach der Zeit t und von t selbst, können zum Theil constant, insbesondere Null sein u. s. w. Man kann diese $3n$ Gleichungen in eine einzige zusammenfassen, welche vermöge der Willkürlichkeit gewisser darin vorkommender Grössen sofort wieder in sie zerfällt werden kann, ihrer Bedeutung wegen aber von Wichtigkeit ist. Bringen wir nämlich in jeder der drei Gleichungen die rechten Seiten auf Null, multipliciren sie mit den vollständig willkürlichen unendlich kleinen virtuellen Verschiebungen δx_i, δy_i, δz_i der Punkte, addiren sie alle drei und summiren hierauf nach i durch das ganze System hindurch, so ergibt sich

$$\Sigma \left\{\left(m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} - X_i\right)\delta x_i + \left(m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} - Y_i\right)\delta y_i + \left(m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} - Z_i\right)\delta z_i\right\} = 0$$

als die fragliche Gleichung, welche vermöge der Willkürlichkeit der

Grössen δx, δy, δz gleichbedeutend mit den $3n$ Bewegungsgleichungen des Systems ist.

Sowohl das System der Kräfte $m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}$, $m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}$, $m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}$, oder was dasselbe ist, der Kräfte $m_i \varphi_i$, deren Componenten sie sind, als das System der gegebenen Kräfte P_i (X_i, Y_i, Z_i) vermag dem Punktsystem die Bewegung zu ertheilen, welche dasselbe annimmt. Daher sind beide Kräftesysteme äquivalent und halten sich folglich, wenn man eines von ihnen, z. B. das letzte, umkehrt, Gleichgewicht. Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für ein freies System muss daher die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - Y_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - Z_i$$

für jede beliebige virtuelle Verschiebung des Systems, d. h. für jede Wahl der Grössen δx_i, δy_i, δz_i verschwinden. Dies ist der Sinn der vorstehenden Gleichung.

Die Kräfte $m_i \varphi_i$, welche den Systempunkten m_i ihre Bewegung zu ertheilen vermögen und zwar jedem für sich so, als ob er nicht mit den übrigen das System bildete, heissen bei einzelnen Autoren Effectivkräfte und wenn sie in umgekehrtem Sinne genommen werden: Reactionskräfte. Da es für das Gleichgewicht einerlei ist, welches von den beiden Kräftesystemen, das der $m_i \varphi_i$ oder das der P_i, umgekehrt wird, so kann man den Inhalt jener Gleichung auch so aussprechen:

Das System der gegebenen Kräfte P_i und das der Reactionskräfte $-m_i \varphi_i$ halten sich in jedem Augenblicke während der Bewegung an dem Punktsysteme Gleichgewicht.

Da die gegebenen Kräfte P_i, welche auf das System einwirken, den Bewegungszustand jeden Augenblick abändern, so muss, damit der Bewegungszustand für jeden Zeitmoment bestimmt werden könne, derselbe für irgend eine Zeit, z. B. für $t = 0$ gegeben sein. Für diesen Anfangszustand müssen die Geschwindigkeiten aller Systempunkte nach Grösse, Richtung und Sinn bekannt oder wenigstens solche Bedingungen gegeben sein, mit Hülfe deren sie sich ermitteln lassen. Uebrigens kann dieser Anfangszustand auch der Zustand der Ruhe des Systems sein. An Stelle der Anfangsgeschwindigkeiten kann man auch ein System von Momentankräften K_i geben, welche fähig sind, dieselben zu erzeugen. Dies System ist alsdann dem System der Momentankräfte $m_i v_i$ für die Zeit $t = 0$ ebenso äquivalent, wie das System der Kräfte P_i es in Bezug auf $m_i \varphi_i$ ist. Sind Ξ_i, H_i, Z_i die Componenten von K_i, so führen dieselben Schlüsse wie oben zu der Gleichung

$$\Sigma\left\{\left(m_i \frac{dx_i}{dt} - \Xi_i\right)\delta x_i + \left(m_i \frac{dy_i}{dt} - H_i\right)\delta y_i + \left(m_i \frac{dz_i}{dt} - Z_i\right)\delta z_i\right\} = 0, \quad (t = 0).$$

welche vermöge der Willkürlichkeit der Grössen δx_i, δy_i, δz_i in $3n$ Gleichungen zerfällt werden kann.

§. 2. Wir wollen die Hauptgleichung des §. 1. in die Form bringen:

$$\Sigma m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right) = \Sigma (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i).$$

Sie drückt aus, dass die virtuelle Arbeit der Kräfte $m_i\varphi_i$ der virtuellen Arbeit der Kräfte P_i gleich ist für jede beliebige Verschiebungsart des Systems. Sind nun X_i, Y_i, Z_i die partiellen Differentialquotienten einer Function U der Coordinaten der Systempunkte nach x_i, y_i, z_i genommen, nämlich

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

so wird die virtuelle Arbeit der Kräfte P_i rechter Hand:

$$\Sigma (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = \Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right) = \delta U$$

und nimmt jene Gleichung die Form an:

$$\Sigma m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right) = \delta U.$$

Die Function U, deren Natur in den einfachsten Fällen bereits S. 243 und 615 erörtert wurde und welche den Namen „Kräftefunction" führt, kann in folgenden Fällen leicht gebildet werden:

1. Wenn auf die Systempunkte Kräfte P_i von constanten Richtungen $(\alpha_i \beta_i \gamma_i)$ und Intensitäten wirken. Denn für eine solche ist

$$X_i = P_i \cos\alpha_i, \qquad Y_i = P_i \cos\beta_i, \qquad Z_i = P_i \cos\gamma_i,$$

$$\begin{aligned} X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i &= P_i(\cos\alpha_i \cdot \delta x_i + \cos\beta_i \cdot \delta y_i + \cos\gamma_i \cdot \delta z_i) \\ &= \delta \cdot P_i(x_i\cos\alpha_i + y_i\cos\beta_i + z_i\cos\gamma_i), \end{aligned}$$

mithin die Kräftefunction

$$U = \Sigma P_i(x_i\cos\alpha_i + y_i\cos\beta_i + z_i\cos\gamma_i) = \Sigma(A_ix_i + B_iy_i + C_iz_i),$$

wo A_i, B_i, C_i von t unabhängig sind, aber mit i variiren können.

2. Wenn Kräfte P_i wirken, deren Richtung senkrecht zu einer festen Ebene

$$x\cos\alpha_i + y\cos\beta_i + z\cos\gamma_i - p = 0$$

und deren Intensitäten Functionen $f_i(\varrho_i)$ von dem Abstande

$$\varrho_i = -(x_i\cos\alpha_i + y_i\cos\beta_i + z_i\cos\gamma_i - p)$$

der Systempunkte von diesen Ebenen sind. Denn dann ist

$$X_i = f_i(\varrho_i)\cos\alpha_i, \qquad Y_i = f_i(\varrho_i)\cos\beta_i, \qquad Z_i = f_i(\varrho_i)\cos\gamma_i;$$

$$\begin{aligned} X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i &= f_i(\varrho_i)\{\cos\alpha_i \cdot \delta x_i + \cos\beta_i \cdot \delta y_i + \cos\gamma_i \cdot \delta z_i\} \\ &= -f_i(\varrho_i) \cdot \delta\varrho_i = \delta \cdot \int - f_i(\varrho_i)\,d\varrho_i, \end{aligned}$$

mithin

$$U = \Sigma \int - f_i(\varrho_i)\,d\varrho_i.$$

3. Wenn die Kräfte P_i Attractionen nach festen Centren C_i (a_i, b_i, c_i) und ihre Intensitäten Functionen der Entfernung r_i von diesen sind. Dann wird nämlich

$$X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i = - P_i \left\{ \frac{x_i - a_i}{r_i} \delta x_i + \frac{y_i - b_i}{r_i} \delta y_i + \frac{z_i - c_i}{r_i} \delta z_i \right\}$$

$$= - P_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial r_i}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial r_i}{\partial z_i} \delta z_i \right) = - P_i \delta r_i = \delta \cdot \int - P_i dr_i,$$

also

$$U = \Sigma \int - P_i dr_i.$$

4. Wenn die Kräfte P_i gegenseitige Anziehungen der Systempunkte unter einander sind. Bezeichnen wir nämlich die Intensität der Kraft, mit welcher sich die Massen m_i und m_k anziehen, durch P_{ik}, so sind die Componenten der an m_i angreifenden Kraft $- P_{ik} \frac{\partial r_{ik}}{\partial x_i}$, $- P_{ik} \frac{\partial r_{ik}}{\partial y_i}$, $- P_{ik} \frac{\partial r_{ik}}{\partial z_i}$, oder wenn man $\int - P_{ik} dr_{ik} = R_{ik}$ setzt: $\frac{\partial R_{ik}}{\partial x_i}$, $\frac{\partial R_{ik}}{\partial y_i}$, $\frac{\partial R_{ik}}{\partial z_i}$. Die Componenten der an m_k angreifenden Kraft sind dann ebenso $\frac{\partial R_{ik}}{\partial x_k}$, $\frac{\partial R_{ik}}{\partial y_k}$, $\frac{\partial R_{ik}}{\partial z_k}$. Nun wirken auf m_1 Kräfte in den Richtungen nach allen übrigen Punkten $m_2, m_3, \ldots m_n$, daher sind die Componenten der ganzen an m_1 wirkenden Kraft:

$$X_1 = \frac{\partial (R_{12} + R_{13} + \cdots + R_{1n})}{\partial x_1}$$

$$Y_1 = \frac{\partial (R_{12} + R_{13} + \cdots + R_{1n})}{\partial y_1}$$

$$Z_1 = \frac{\partial (R_{12} + R_{13} + \cdots + R_{1n})}{\partial z_1}.$$

Für den Punkt m_2 erhält man X_2, Y_2, Z_2, indem man die eingeklammerte Summe durch $R_{21} + R_{23} + \cdots + R_{2n}$ ersetzt. Die Grössen R hängen nur von den Coordinaten der beiden Punkte ab, deren Indices ihnen angehängt sind; es sind daher die Differentialquotienten derselben nach Coordinaten mit anderen Indices Null. Daher kann man der Summe $R_{12} + R_{13} + \cdots + R_{1n}$ die Summe aller übrigen R zufügen und erhält die Kräftefunction

$$U = R_{12} + R_{13} + \cdots + R_{1n} + R_{23} + R_{24} + \cdots + R_{2n} + \cdots + R_{n-1,n} = \Sigma R_{ik}.$$

sodass

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

$$X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i = \delta U.$$

5. Wenn auf Punkte des Systems theils Kräfte der unter 1., theils solche, welche unter 2., 3. oder 4. aufgeführt sind, wirken. Die Kräftefunction ist dann die Summe von Gliedern, welche von den den einzelnen Kräftegruppen entsprechenden Kräftefunctionen gebildet werden.

Die Attractionsgesetze, welche hierbei zu Grunde gelegt werden können, sind willkürlich, können auch von Punkt zu Punkt verschieden sein, sowohl nach der Kraftintensität als auch nach dem Sinne der Kraft, als auch nach der Stärke der Anziehung in der Einheit der Entfernung. Auch ist es nicht nöthig, anzunehmen, dass jedes Centrum alle Massen anzieht.

§. 3. Sollen an die Stelle der $3n$ Coordinaten $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n$ neue Coordinaten $q_1, q_2, \ldots q_{3n}$ in die Bewegungsgleichungen oder in die Hauptgleichung des §. 1. eingeführt werden, so gestaltet sich die Ausführung dieser Operation folgendermassen. Man multiplicire die $3n$ Gleichungen

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i$$

resp. mit $\frac{\partial x_i}{\partial q_s}, \frac{\partial y_i}{\partial q_s}, \frac{\partial z_i}{\partial q_s}$, addire sie und summire nach i. Man erhält dann:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right).$$

Indem man nun dem Index s die Werthe $1, 2, \ldots 3n$ beilegt, erhält man $3n$ Gleichungen dieser Art und indem man sie mit den willkürlichen Variationen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_{3n}$ der neuen Variabelen multiplicirt und addirt, weiter:

$$\sum_s \sum_i m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) \delta q_s$$
$$= \sum_s \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) \delta q_s.$$

Indem man die Ordnung der beiden Summationen umkehrt, erhält man

$$\sum_i m_i \left\{\frac{d^2 x_i}{dt^2} \cdot \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \cdot \sum_s \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \cdot \sum_s \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \delta q \right\}$$
$$= \sum_i \left\{X_i \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \delta q_s + Y_i \sum_s \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \delta q_s + Z_i \sum_s \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \delta q_s\right\}.$$

Die Vergleichung dieser Gleichung mit der früheren

$$\Sigma m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i\right) = \Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i)$$

zeigt, dass an die Stelle der Variationen $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ blos die Ausdrücke

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{3n}} \delta q_{3n}$$
$$\frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_{3n}} \delta q_{3n}$$
$$\frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_{3n}} \delta q_{3n}$$

treten. Existirt eine Kräftefunction U, so nimmt die rechte Seite der Gleichung die Form an:

$$\sum_s \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) \delta q_s$$
$$= \sum_s \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) \delta q_s = \sum_s \frac{\partial U}{\partial q_s} \delta q_s.$$

Die neuen Coordinaten q sind von einander unabhängig, wie die Coordinaten x, y, z und zerfällt die obige Gleichung in $3n$ Gleichungen, indem man die Coefficienten der $q_1, q_2, \ldots q_{3n}$ der Reihe nach gleich Null setzt.

§. 4. Wir nehmen jetzt an, das System der Massenpunkte m_i sei nicht mehr frei, sondern Bedingungen unterworfen und stellen die Differentialgleichungen der Bewegung für dasselbe auf. Wir beschränken uns hierbei aber ausdrücklich auf solche Bedingungen, deren Einfluss durch Kräfte von bestimmter Intensität und Richtung vertreten werden kann und welche analytisch durch Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten der Punkte, welche ihnen genügen sollen, darstellbar sind. Von Bedingungen, welche durch Ungleichungen ausgedrückt werden, sehen wir ab. Ersetzen wir die Bedingungen durch Kräfte, so kann das System als ein freies angesehen werden. Es seien $S^{(i)}$ die Resultanten aller Bedingungskräfte, welche an den Punkten m_i angreifen, $S_x^{(i)}$, $S_y^{(i)}$, $S_z^{(i)}$ ihre Componenten; indem wir diese den Componenten X_i, Y_i, Z_i der äusseren und inneren Kräfte hinzufügen, erhalten wir gemäss §. 1. als Bewegungsgleichungen:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + S_x^{(i)}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + S_y^{(i)}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + S_z^{(i)},$$

worin die Grössen $S_x^{(i)}$, $S_y^{(i)}$, $S_z^{(i)}$ aber noch zu bestimmen sind. Indem wir nun ähnlich, wie §. 1. verfahren und die Bewegungsgleichungen mit den Componenten δx_i, δy_i, δz_i willkührlicher virtueller Verschiebungen multipliciren, sie addiren und hierauf noch den Index i summiren, ergibt sich die eine Gleichung

$$\Sigma \left\{ \left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i \right) \delta x_i + \left(m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - Y_i \right) \delta y_i + \left(m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - Z_i \right) \delta z_i \right\}$$
$$= \Sigma \left(S_x^{(i)} \delta x_i + S_y^{(i)} \delta y_i + S_z^{(i)} \delta z_i \right),$$

welche aber wegen der Willkührlichkeit der δx, δy, δz wiederum in die ursprünglichen $3n$ Gleichungen zerfällt werden kann.

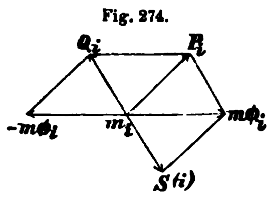
Denkt man sich die Glieder auf der linken Seite dieser Gleichung mit entgegengesetzten Zeichen den Gliedern rechter Hand zugefügt, so drückt dieselbe den Satz aus:

Die gegebenen Kräfte P_i, die Reactionskräfte $- m_i \sigma_i$ und die Bedingungskräfte $S^{(i)}$ halten sich während der Be-

wegung jeden Augenblick Gleichgewicht an dem System der Punkte m_i, wie an einem freien System von einander unabhängiger Punkte.

Es seien (Fig. 274.) P_i und $S^{(i)}$ die Resultanten der gegebenen und die der Bedingungskräfte am Massenpunkte m_i. Die Resultante von P_i und $S^{(i)}$ ist die Effectivkraft $m_i\varphi_i$. Bringen wir sie und die ihr entgegengesetzte Reactionskraft $-m_i\varphi_i$ an, wodurch die Wirkung von P_i und $S^{(i)}$ nicht alterirt wird und bilden die Resultante von P_i und $-m_i\varphi_i$, so folgt aus den Parallelogrammen der Figur, dass Q_i entgegengesetzt gleich $S^{(i)}$ ist. Weiter folgt, dass P_i in die beiden Componenten $m_i\varphi_i$ und Q_i zerfällt. Da von diesen die Kraft $m_i\varphi_i$ die Bewegung des Punktes m_i für sich bestimmt, so nennt D'Alembert die Componente Q_i von P_i, weil sie nichts zur Bewegung beiträgt, vielmehr der Bedingungskraft $S^{(i)}$ Gleichgewicht zu halten hat, eine verlorene Kraft. Da dieselbe Betrachtung für alle Punkte gilt, so kann der Inhalt des vorstehenden Satzes auch so ausgesprochen werden:

Fig. 274.



Während der Bewegung des Systems halten jeden Augenblick die verlorenen Kräfte den Bedingungkräften (Spannungen, Pressungen) Gleichgewicht.

Restituirt man daher die Bedingungen selbst für die Kräfte $S^{(i)}$, so kann man auch unter Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten sagen:

Während der Bewegung des Systems halten jeden Augenblick mit Rücksicht auf die Bedingungen, denen das System unterworfen ist, die verlorenen Kräfte sich Gleichgewicht und ist mithin die virtuelle Arbeit derselben für jede mit der Natur des Systems vereinbare Verschiebung Null.

Dieser Satz führt den Namen des D'Alembert'schen Princips, weil er von diesem Mathematiker zuerst aufgestellt, in einem Memoire 1742 der Pariser Academie vorgelegt und in seinem *Traité de mécanique* (IIième partie, Chap. I) 1743 vollständig begründet wurde. Mit Hülfe der obigen Gleichung wird er durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten analytisch eingekleidet und dient also im Grunde dazu, die Probleme der Bewegung der Systeme auf Probleme des Gleichgewichts zurückzuführen.

Durch Einführung der Bedingungskräfte $S^{(i)}$ machten wir das System zu einem freien und waren in Folge dessen die Variationen δx, δy, δz vollkommen willkührlich. Es genügt aber nach Cap. VII, §. 4. zum Gleichgewichte von Kräften an einem Bedingungen unterworfenen System, dass nur solche Variationen eingeführt werden, welche mit den Bedingungen verträglich sind. Für solche ist aber die Summe der virtuellen

55*

Arbeiten, nämlich $\Sigma(S_x^{(i)}\delta x_i + S_y^{(i)}\delta y_i + S_z^{(i)}\delta z_i) = 0$. Sind also $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ die dem System vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen, so kann die obige Gleichung zweckmässig durch das Gleichungssystem

$$\Sigma\left\{\left(m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} - X_i\right)\delta x_i + \left(m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} - Y_i\right)\delta y_i + \left(m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} - Z_i\right)\delta z_i\right\} = 0$$

$$\Sigma\left\{\frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial L}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial L}{\partial z_i}\delta z_i\right\} = 0$$

$$\Sigma\left\{\frac{\partial M}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial M}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial M}{\partial z_i}\delta z_i\right\} = 0$$

$$\Sigma\left\{\frac{\partial N}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial N}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial N}{\partial z_i}\delta z_i\right\} = 0$$

$$\vdots$$

ersetzt werden.

Es bleiben nun noch die Grössen $S_x^{(i)}$, $S_y^{(i)}$, $S_z^{(i)}$ zu bestimmen, um die Differentialgleichungen der Bewegung der einzelnen Systempunkte vollständig zu haben. Hierzu bedienen wir uns der Euler'schen Methode der Multiplicatoren, die wir bereits Cap. VII, §. 8. (S. 611) bei der Aufstellung der Bedingungen des Gleichgewichts anwandten. Von den $3n$ Variationen δx_i, δy_i, δz_i sind nämlich nur $3n - \varkappa$ von einander unabhängig, wenn $\varkappa$ die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist, indem durch die zweite, dritte, ... $\varkappa$te der Gleichungen des vorstehenden Gleichungssystems $\varkappa$ Variationen durch die übrigen ausgedrückt und aus der ersten Gleichung eliminirt werden können. Multiplicirt man daher behufs dieser Elimination die zweite, dritte, ... Gleichung resp. mit den noch unbestimmten Multiplicatoren λ, μ, ν, ..., deren Anzahl $\varkappa$ ist und addirt sie zur ersten Gleichung, so können λ, μ, ν, ... so bestimmt werden, dass die Coefficienten von $\varkappa$ Variationen Null und diese hierdurch eliminirt werden. Da die übrigen Variationen alsdann von einander unabhängig und vollkommen willkührlich sind, so erfordert das Bestehen der gewonnenen Gleichung, dass auch ihre Coefficienten verschwinden. Demnach sind in jener Gleichung alle Coefficienten der Variationen gleich Null zu setzen. Die Ausführung dieser Rechnung ergibt unmittelbar die $3n$ Gleichungen der Bewegung, nämlich:

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial x_i} + \cdots$$

$$m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial y_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial y_i} + \cdots \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n$$

$$m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial z_i} + \nu\frac{\partial N}{\partial z_i} + \cdots$$

Sie wurden zuerst von Lagrange gegeben.

Vergleicht man sie mit den obigen Bewegungsgleichungen, nämlich

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i + S_x^{(i)}, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i + S_y^{(i)}, \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i + S_z^{(i)},$$

so erhält man als Componenten der Verbindungskräfte S_i:

$$\begin{aligned} S_x^{(i)} &= \lambda \frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial N}{\partial x_i} + \cdots \\ S_y^{(i)} &= \lambda \frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial y_i} + \nu \frac{\partial N}{\partial y_i} + \cdots \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n. \\ S_z^{(i)} &= \lambda \frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial z_i} + \nu \frac{\partial N}{\partial z_i} + \cdots \end{aligned}$$

Die Bedeutung der einzelnen Glieder dieser Ausdrücke, sowie die der Multiplicatoren $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ ist dieselbe, wie sie S. 612 angegeben wurde. Um die Multiplicatoren wirklich darzustellen, muss man die Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ zweimal differentiiren, indem man x_i, y_i, z_i als Functionen von t behandelt und sodann in die zweiten Differentialgleichungen derselben für $\frac{d^2x_i}{dt^2}$, $\frac{d^2y_i}{dt^2}$, $\frac{d^2z_i}{dt^2}$ die Ausdrücke

$$\frac{1}{m_i}\left(X_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_i} + \cdots\right), \quad \frac{1}{m_i}\left(Y_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial y_i} + \cdots\right), \quad \frac{1}{m_i}\left(Z_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial z_i} + \cdots\right)$$

einsetzen. Dies liefert x Gleichungen zur Bestimmung von $\lambda, \mu, \nu, \ldots$

Zur Bestimmung der Bewegung des Systems ist die Kenntniss des Anfangszustandes erforderlich. Sind Ξ_i, H_i, Z_i die anfänglichen Momentankräfte, welche auf m_i stossend wirken, so hat man:

$$\Sigma \left\{ \left(m_i \frac{dx_i}{dt} - \Xi_i\right) \delta x_i + \left(m_i \frac{dy_i}{dt} - H_i\right) \delta y_i + \left(m_i \frac{dz_i}{dt} - Z_i\right) \delta z_i \right\} = 0$$

$$\begin{aligned} \Sigma \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial L}{\partial z_i} \delta z_i \right\} &= 0 \\ \Sigma \left\{ \frac{\partial M}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial M}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial M}{\partial z_i} \delta z_i \right\} &= 0, \qquad t = 0 \\ \Sigma \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial N}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial N}{\partial z_i} \delta z_i \right\} &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

aus welchen man für die anfänglichen Momentankräfte mit Hülfe eines Multiplicatorensystems $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots$ findet:

$$\begin{aligned} m_i \frac{dx_i}{dt} &= \Xi_i + \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu_1 \frac{\partial M}{\partial x_i} + \nu_1 \frac{\partial N}{\partial x_i} + \cdots \\ m_i \frac{dy_i}{dt} &= H_i + \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu_1 \frac{\partial M}{\partial y_i} + \nu_1 \frac{\partial N}{\partial y_i} + \cdots \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n \quad t = 0. \\ m_i \frac{dz_i}{dt} &= Z_i + \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu_1 \frac{\partial M}{\partial z_i} + \nu_1 \frac{\partial N}{\partial z_i} + \cdots \end{aligned}$$

Um $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots$ zu bestimmen, hat man in die ersten Differentialgleichungen von $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ die Ausdrücke

$$\frac{1}{m_i}\left(\Xi_i + \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial x_i} + \cdots\right), \quad \frac{1}{m_i}\left(H_i + \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial y_i} + \cdots\right), \quad \frac{1}{m_i}\left(Z_i + \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial z_i} + \cdots\right)$$

einzuführen.

Setzt man in den Gleichungen der Bewegung die Beschleunigungscomponenten $\frac{d^2x_i}{dt^2}$, $\frac{d^2y_i}{dt^2}$, $\frac{d^2z_i}{dt^2}$ gleich Null, so erhält man die Bedingungen des Gleichgewichts, wie sie S. 611 angegeben sind.

Vermöge der Bedingungsgleichungen, deren Anzahl $\varkappa$ ist, hängen die Coordinaten der n Systempunkte von einander ab und ist daher die Bewegung aller bekannt, wenn es die einer gewissen Anzahl ist. Daher sind von den $3n$ obigen Bewegungsgleichungen nicht alle von einander unabhängig. Dies sind die $3n - \varkappa$ nach der Elimination von $\varkappa$ Variationen übrig bleibenden Gleichungen. Sie bestimmen zusammen mit den $\varkappa$ Bedingungsgleichungen wieder $3n$ Gleichungen für die n Punkte. Ist das System z. B. unveränderlich und frei, so sind die Bedingungsgleichungen die, welche die constante Entfernung der Systempunkte von einander ausdrücken und von der Form

$$L = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 - c = 0.$$

Ihre Anzahl ist $\varkappa = 3n - 6$, indem für drei Punkte drei, für jeden der $n - 3$ übrigen drei weitere Bedingungen erforderlich sind. Daher ist die Anzahl der von einander unabhängigen Bewegungsgleichungen des freien unveränderlichen Systems $3n - (3n - 6) = 6$, wie sie sich in Cap. V zeigte. Dieselben ergeben sich, wie wir bald zeigen werden, durch Elimination von $S_x^{(i)}$, $S_y^{(i)}$, $S_z^{(i)}$ sehr einfach wieder.

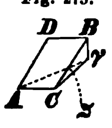
Da die $3n - \varkappa$ Differentialgleichungen der Bewegung von der zweiten Ordnung sind, so führen sie $2(3n - \varkappa) = 6n - 2\varkappa$ Constanten durch die Integration ein. Dieselben bestimmen sich durch die Anfangswerthe der Coordinaten und der Geschwindigkeiten, deren Zahl $6n$ ist, zwischen denen aber $2\varkappa$ Bedingungen $L = 0$, $M = 0, \ldots, \frac{dL}{dt} = 0$, $\frac{dM}{dt} = 0, \ldots$ bestehen, sodass zu ihrer Bestimmung die nöthige Anzahl $6n - 2\varkappa$ Gleichungen vorhanden ist.

§. 5. Aus dem D'Alembert'schen Princip kann ein anderes Princip gefolgert werden, welches von Gauss aufgestellt und von ihm das Princip des kleinsten Zwanges genannt wurde. Den statischen Theil desselben lernten wir bereits S. 629 kennen.

Es sei (Fig. 275.) A der Ort des Massenpunktes m_i zur Zeit t, B der Ort, an welchen er zur Zeit $t + dt$ gelangen würde, wenn die Kraft P_i auf ihn als einen freien Punkt wirken würde, d. h. wenn die Bedingungen, denen m_i als Systempunkt genügen muss, nicht vorhanden wären. Nach B_i würde er vermöge der in A zur Zeit t erlangten Ge-

schwindigkeit und der Beschleunigung, die ihm P_i ertheilt, gelangen. Es sei ferner C der Ort, an welchen m_i am Ende der Zeit $t + dt$ vermöge seiner Geschwindigkeit und der Wirkung der Kraft $m_i \varphi_i$ oder, was dasselbe ist, vermöge der Kraft P_i und der Bedingungen, welche ihm seine Verbindung mit dem System auferlegt, gelangt. Die Kraft P_i zerfällt nun in die Kraft $m_i \varphi_i$ und die verlorene Kraft Q_i, welche ihn, ohne dass er weiter Geschwindigkeit besässe, von A nach D um die Strecke $AD = CB$ im Zeitelemente dt fortführen würde. Nach S. 201 hat man $AD = \frac{1}{2} \frac{Q_i}{m_i} \cdot dt^2$ und folglich wird $Q_i = 2\, m_i \cdot \frac{CB}{dt^2}$, also der Strecke CB proportional.

Fig. 275.



Nach dem D'Alembert'schen Princip halten nun die verlorenen Kräfte Q_i am System Gleichgewicht und ist also die Summe ihrer virtuellen Arbeiten für jede mit den Bedingungen des Systems vereinbare virtuelle Bewegung Null oder negativ. Es sei nun γ der Ort, an welchen m_i vermöge irgend einer solchen virtuellen Bewegung gelangen würde, sodass $A\gamma$ seine virtuelle Verschiebung darstellt. Die Projection derselben auf die Richtung der Kraft Q, nämlich auf die Richtung von AD, ist aber gleich der Projection von $C\gamma$ auf CB und wird, wenn der Winkel $CB\gamma$ mit ϑ bezeichnet wird, durch $C\gamma \cdot \cos\vartheta$ ausgedrückt. Demnach stellt $Q_i \cdot C\gamma \cdot \cos\vartheta = \frac{2\, m_i}{dt^2} \cdot CB \cdot C\gamma \cdot \cos\vartheta$ die virtuelle Arbeit von Q_i dar und muss also nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\Sigma 2\, m_i \cdot CB \cdot C\gamma \cdot \cos\vartheta \overline{\gtrless} 0$$

sein. Es ist aber $\overline{\gamma B^2} = \overline{CB^2} + \overline{C\gamma^2} - 2 \cdot CB \cdot C\gamma \cdot \cos\vartheta$ und folglich

$$\Sigma m_i \cdot \overline{\gamma B^2} - \Sigma m_i \cdot \overline{CB^2} = \Sigma m_i \cdot \overline{C\gamma^2} - 2\, \Sigma m_i \cdot CB \cdot \cos\gamma \cdot \cos\vartheta.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung in Folge der eben entwickelten Bedingung unter allen Umständen positiv ist, so folgt, dass für jede beliebige virtuelle Bewegung

$$\Sigma m_i \cdot \overline{CB^2} < \Sigma m_i \cdot \overline{\gamma B^2}$$

ist. Die Linie CB stellt die Abweichung des Ortes C, welchen m_i zur Zeit $t + dt$ wirklich einnimmt, von dem Orte B, welchen er in Folge der freien Bewegung einnehmen würde, dar. Ebenso ist γB die Abweichung desselben Punktes von dem Orte der freien Bewegung, welche er bei irgend einer beliebigen anderen mit den Bedingungen des Systems vereinbaren Bewegung, als der wirklich erfolgenden erleiden würde.

Daher ist die Summe der Produkte aus den Massen der Systempunkte in die Quadrate ihrer Abweichungen von der freien Bewegung für die wirklich erfolgende Bewegung unter den ähnlich gebildeten Summen aller anderen mit den Be-

dingungen des Systems vereinbaren Bewegungen ein Minimum.

Die Bewegung des Punktes m_i als eines Systempunktes ist eine gezwungene; der Zwang rührt von seiner Verbindung mit dem System her. Betrachtet man $\Sigma m_i \cdot \overline{CB}^2$ als das Maass dieses Zwanges, so kann der vorstehende Satz, den man nach seinem Entdecker dass Gauss'sche Princip vom kleinsten Zwange nennt, auch so ausgesprochen werden:

Die Bewegung der Punkte eines irgend welchen Bedingungen unterworfenen Systems erfolgt in jedem Augenblick in möglichster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung oder unter möglichst kleinem Zwange, wenn unter dem Maasse des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeitelemente erleidet, die Summe der Produkte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punktes von seiner freien Bewegung in seiner Masse verstanden wird.

Vgl. Gauss, Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik [Crelle's Journ. Bd. IV, S. 232 (1829)]; Scheffler, Ueber das Gauss'sche Grundgesetz der Mechanik [Schlömilch's Zeitschrift für Mathem. und Physik. III. Jahrg. (1858) S. 197].

Für den Fall des Gleichgewichtes der Kräfte P_i an dem System fallen die verlorenen Kräfte Q_i mit den Kräften P_i zusammen, also die Punkte D mit B, C mit A und wird $\Sigma m_i \cdot \overline{AB}^2$ ein Minimum (vgl. S. 62[illegible]).

Man kann die Arbeit bestimmen, welche die Ablenkung des Systempunktes von der freien Bewegung erfordert. Sie ist

$$\Sigma Q_i \cdot \overline{CB} = -\Sigma Q_i \cdot \overline{BC} = -\frac{2}{dt^2}\Sigma m_i \cdot \overline{BC}^2$$

und mithin dem Zwange proportional. — Gauss deutet in seiner Abhandlung noch auf die Analogie des Satzes mit der Methode der kleinsten Quadrate hin; Möbius hat, wohl hierdurch veranlasst, denselben das Princip der kleinsten Quadrate genannt.

Wir fügen einige einfache Beispiele zu den vorstehenden §§. 1—5 hinzu, für welche das System aus zwei Massenpunkten zusammengesetzt ist.

§. 6. Zwei Massenpunkte m, m' bewegen sich frei mit gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten, indem sie allein ihrer gegenseitigen Anziehung oder Abstossung unterworfen sind; welches ist die Natur ihrer Bewegung?

1. Ist P die Kraftintensität, mit welcher sie sich anziehen oder abstossen, so greifen an m und m' resp. die Kräfte $X = \mp P\frac{x-x'}{r}$, $Y = \mp P\frac{y-y'}{r}$, $Z = \mp P\frac{z-z'}{r}$; $X' = -X$, $Y' = -Y$, $Z' = -Z$ an. Die Gleichungen der Bewegung sind daher:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X \qquad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = -X$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \qquad m'\frac{d^2y'}{dt^2} = -Y$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \qquad m'\frac{d^2z'}{dt^2} = -Z.$$

Addirt man die Gleichungen paarweise, so geben sie $m\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2x'}{dt^2} = 0$ u. s. w., mithin durch Integration:

$$m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = \alpha, \quad m\frac{dy}{dt} + m'\frac{dy'}{dt} = \beta, \quad m\frac{dz}{dt} + m'\frac{dz'}{dt} = \gamma.$$

Demnach bleiben die Summen der Componenten der Momentankräfte während der ganzen Bewegung constant. Setzt man daher in irgend einem Punkte, z. B. im Coordinatenursprung, die Momentankräfte zusammen, so **bleibt die Resultante der Momentankräfte nach Grösse und Richtung fortwährend constant.** Ihre Intensität ist $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}$ und ihre Richtungscosinusse sind α, β, γ proportional. Dies leuchtet ein, wenn man bedenkt, dass die continuirlichen Kräfte, welche diese Resultante abändern könnten, nämlich die Anziehungen oder Abstossungen der Punkte, entgegengesetzt gleich sind. Da für die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Massenmittelpunktes $(m + m')\,x_1 = mx + m'x'$; $(m + m')\,y_1 = my + m'y'$; $(m + m')\,z_1 = mz + m'z'$ ist, so geben die vorstehenden Gleichungen:

$$(m + m')\frac{dx_1}{dt} = \alpha, \quad (m + m')\frac{dy_1}{dt} = \beta, \quad (m + m')\frac{dz_1}{dt} = \gamma.$$

Der Massenmittelpunkt besitzt daher constante Geschwindigkeit von constanter Richtung; sie ist Null, wenn die Summe der Momentankräfte anfangs Null ist.

2. Man erhält weiter die Combinationen der Bewegungsgleichungen:

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) + m'\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2} - z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right) = 0$$
$$m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) + m'\left(z'\frac{d^2x'}{dt^2} - x'\frac{d^2z'}{dt^2}\right) = 0$$
$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) + m'\left(x'\frac{d^2y'}{dt^2} - y'\frac{d^2x'}{dt^2}\right) = 0,$$

da

$$yZ - zY - (y'Z - z'Y) = (y - y')\,Z - (z - z')\,Y$$
$$= \mp P\left\{(y - y')(z - z') - (z - z')(y - y')\right\} = 0$$

ist. Diese Gleichungen drücken aus, dass das resultirende Paar der continuirlichen Kräfte verschwindet. Sie geben integrirt:

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + m'\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right) = c_1$$
$$m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + m'\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right) = c_2$$
$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + m'\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = c_3.$$

Demnach ist das resultirende Paar der Momentankräfte während der Bewegung nach Grösse und Axenrichtung constant. Seine Grösse ist $(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)^{\frac{1}{2}}$ und seine Richtungscosinusse sind proportional c_1, c_2, c_3. Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, so liefert ihre Addition:

$$c_1(x - x') + c_2(y - y') + c_3(z - z') = 0.$$

Da nun $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ den Richtungscosinussen der Verbindungslinie der Punkte m, m' proportional sind, so folgt: **Das System der beiden Punkte bewegt sich so, dass ihre Verbindungslinie fortwährend zur Axenrichtung des resultirenden Paares der Momentankräfte senkrecht oder also zur invariabelen Ebene desselben parallel bleibt.** Fallen die anfänglichen Momentankräfte in eine Ebene, so erfolgt die Bewegung der Punkte in dieser Ebene. Die obigen drei Gleichungen drücken auch aus, dass **die Summe der Projectionen der Flächenräume, die von einem festen Punkte nach den beweglichen Punkten gezogenen Radienvectoren beschrieben werden, auf eine beliebige Ebene constant bleibt.**

3. Man kann denselben Gleichungen nach Poinsot noch eine andere interessante Bedeutung abgewinnen. Wählen wir die invariabele Ebene zur Ebene der YZ, so sind c_2 und c_3 Null, weil sie den Richtungscosinussen der Axe des resultirenden Paares proportional sind, welche jetzt in die x-Axe fällt. Aus den zwei letzten der Gleichungen

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + m'\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right) = c_1$$
$$m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + m'\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right) = 0$$
$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + m'\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = 0$$

erhält man nämlich durch Elimination von m, m':

$$\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) : \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right) : \left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right).$$

Nun denke man sich in m und m' die Tangenten an die Bahnen dieser Punkte, lege durch sie und den Coordinatenursprung Ebenen und errichte in denselben auf sie die Normalen N, N'. Sind p, q, r die Richtungscosinusse für N, so bestehen, weil sowohl der Punkt x, y, z, als auch der Punkt $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ in die zu N senkrechte Ebene fällt, die Gleichungen:

$$px + qy + rz = 0,$$
$$pdx + qdy + rdz = 0,$$

aus welchen man

$$p : q : r = (ydz - zdy) : (zdx - xdz) : (xdy - ydx)$$

zieht. Ebenso ergibt sich für die Richtungscosinusse p', q', r' der Normalen N':

$$p' : q' : r' = (y'dz' - z'dy') : (z'dx' - x'dz') : (x'dy' - y'dx').$$

Mit Hülfe dieser Werthe kann die aus den Bewegungsgleichungen gezogene Proportion so geschrieben werden: $q : r = q' : r'$. Nun sind aber die Gleichungen der beiden Normalen N, N':

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \quad \text{und} \quad \frac{x}{p'} = \frac{y}{q'} = \frac{z}{r'}$$

und folglich $\frac{y}{q} = \frac{z}{r}$, $\frac{y}{q'} = \frac{z}{r'}$ die ihrer Projectionen auf die invariabele Ebene. Beide sind hiernach identisch. **Legt man daher durch die Tangenten der Bahnen der Punkte und einen festen Punkt Ebenen, so schneiden sie die durch denselben Punkt geführte invariabele Ebene in einer gemeinschaftlichen Schnittlinie.**

4. Da der Massenmittelpunkt sich mit constanter Geschwindigkeit geradlinig bewegt, so braucht man nur die relative Bewegung der Punkte m, m' in Bezug auf ihn weiter zu verfolgen, um das ganze Problem zu lösen. Die ursprünglichen Gleichungen waren:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mp P\frac{x-x'}{r}, \qquad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = \pm P\frac{x-x'}{r}$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \mp P\frac{y-y'}{r}, \qquad m'\frac{d^2y'}{dt^2} = \pm P\frac{y-y'}{r}$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \mp P\frac{z-z'}{r}, \qquad m'\frac{d^2z'}{dt^2} = \pm P\frac{z-z'}{r}$$

Setzt man $x = x_1 + \xi$, $y = y_1 + \eta$, $z = z_1 + \zeta$; $x' = x_1 + \xi'$, $y' = y_1 + \eta'$, $z' = z_1 + \zeta'$, wo x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwerpunktes, $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ relative Coordinaten in Bezug auf diesen sind, so erhält man vermöge

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{d^2z_1}{dt^2} = 0,$$

z. B. für m, die Gleichungen:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mp P\frac{\xi-\xi}{r}, \qquad m\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mp P\frac{\eta-\eta'}{r}, \qquad m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \mp P\frac{\zeta-\zeta'}{r}.$$

Aus $m\xi + m'\xi' = 0$ erhält man aber durch Addition und Subtraction von $m'\xi$ weiter:

$$(m + m')\,\xi = m'(\xi - \xi')$$

und ebenso

$$(m + m')\,\eta = m'(\eta - \eta'), \qquad (m + m')\,\zeta = m'(\zeta - \zeta'),$$

sodass ξ', η', ζ' aus den Gleichungen für m verschwinden und diese werden:

$$mm'\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mp (m + m')\,P\frac{\xi}{r}, \qquad mm'\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mp (m + m')\,P\frac{\eta}{r},$$
$$mm'\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \mp (m + m')\,P\frac{\zeta}{r}.$$

Ihre weitere Behandlung hängt von der Natur der Kraft P ab. Für das Newton'sche Attractionsgesetz sind die relativen Bahnen von m, m' um ihren Massenmittelpunkt Kegelschnitte.

Um die relative Bewegung des Punktes m' gegen m zu bestimmen, würde man aus den ursprünglichen Gleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \pm P\frac{x'-x}{r}, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \pm P\frac{y'-y}{r}, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = \pm P\frac{z'-z}{r};$$
$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} = \mp P\frac{x'-x}{r}, \ldots$$

ableiten:

$$\frac{\frac{d^2(x'-x)}{dt^2}}{x'-x} = \frac{\frac{d^2(y'-y)}{dt^2}}{y'-y} = \frac{\frac{d^2(z'-z)}{dt^2}}{z'-z},$$

worin $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ die relativen Coordinaten von m' gegen m sind u. s. w.

§. 7. Zwei schwere Massenpunkte m, m' sind durch einen biegsamen Faden mit einander verknüpft, welcher über eine vertikale feste Rolle ohne Reibung hinweggeht. Welche Bewegung nimmt dies System unter Einwirkung der Schwere an?

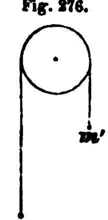


Fig. 276.

Es seien x, x' (Fig. 276.) die Abstände von m, m' bis zu den Berührungspunkten des Fadens mit der Rolle zur Zeit t; die gegebenen Kräfte P sind die vertikal abwärts wirkenden Gewichte mg, $m'g$; die Effectivkräfte $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m'\frac{d^2x'}{dt^2}$ und die verlorenen Kräfte mithin $mg - m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m'g - m'\frac{d^2x'}{dt^2}$. Das Gleichgewicht derselben erfordert für jede mit der Bedingung $x + x' = Const.$ vereinbare virtuelle Bewegung

$$m\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + m'\left(g - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' = 0, \quad \delta x + \delta x' = 0.$$

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit λ, addirt sie zur ersten und setzt die Coefficienten von δx, $\delta x'$ gleich Null, so kommt

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg + \lambda, \quad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = m'g + \lambda$$

und wenn man, um zunächst λ zu bestimmen, hiermit die Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2} = 0$ verbindet, so ergibt sich

$$\lambda = -\frac{2mm'}{m + m'}\cdot g = -\frac{2mg \cdot m'g}{mg + m'g},$$

d. h. $-\lambda$ ist das harmonische Mittel der Gewichte mg, $m'g$. Hiermit werden die Bewegungsgleichungen der beiden Massen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = G, \quad \frac{d^2x'}{dt^2} = -G, \quad \text{wo} \quad G = \frac{m - m'}{m + m'}g.$$

Sind daher m und m' gleich, so ist $G = 0$ und die Bewegung beider Massen gleichförmig; ist G nicht Null, so ist sie gleichförmig veränderlich. Für die Geschwindigkeiten ergibt sich

$$v = \frac{dx}{dt} = Gt + \alpha, \quad v' = \frac{dx'}{dt} = -Gt + \alpha'$$

und da $\frac{dx}{dt} + \frac{dx'}{dt} = 0$ ist, so sind die Anfangsgeschwindigkeiten α und α' vermöge $\alpha + \alpha' = 0$ einander entgegengesetzt gleich. Für die Abstände x, x' hat man

$$x = \tfrac{1}{2}Gt^2 + \alpha t + \beta, \quad x' = -\tfrac{1}{2}Gt^2 - \alpha t + \beta',$$

wo $\beta + \beta' = Const.$, nämlich gleich der Länge des Fadens weniger des Stücks, welches auf der Rolle aufliegt.

Sind nicht die Anfangsgeschwindigkeiten α, α', sondern die anfänglichen momentanen Stosskräfte $m\omega$, $m'\omega'$ gegeben, welche in der Richtung des Fadens wirken mögen, so liefert das D'Alembert'sche Princip für sie:

$$m\left(\omega - \frac{dx}{dt}\right)\delta x + m'\left(\omega' - \frac{dx'}{dt}\right)\delta x' = 0, \quad \delta x + \delta x' = 0, \quad \text{für} \quad t = 0$$

$$m\frac{dx}{dt} = m\omega + \lambda_1, \quad m'\frac{dx'}{dt} = m'\omega' + \lambda_1 \quad \text{für} \quad t = 0,$$

also

$$\lambda_1 = -\frac{mm'}{m + m'}(\omega + \omega'), \quad \frac{dx}{dt} = \alpha = -\frac{dx'}{dt} = \frac{m\omega - m'\omega'}{m + m'}.$$

Die Grössen $-\lambda$ und $-\lambda_1$ drücken die continuirlich wirkende Spannung T zur Zeit t und die momentane Spannung T_1 zur Zeit $t = 0$ aus, welche der Faden auszuhalten hat. Denn indem man den Faden durchgeschnitten und an seiner Stelle die Spannung T eingeführt denkt, wird z. B. die Bewegungsgleichung für die Masse m werden: $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - T$, deren Vergleichung mit der oben aufgestellten $T = -\lambda$ ergibt, u. s. w.

Die vorliegende Aufgabe und ihre Lösung enthält die Theorie der Atwood'schen Fallmaschine. Für $m : m' = 7 : 8$ erhält man deren gewöhnliche Einrichtung, für welche $G = \frac{1}{15}g$ wird.

Man kann die Aufgabe etwas verallgemeinern. Die Punkte m, m' seien genöthigt, auf zwei Geraden zu bleiben, welche sich tangirend an die Rolle anschliessen und mit der Horizontalen die Winkel α, α' bilden. Die Gewichte zerfallen in zwei Componenten $mg\cos\alpha$, $m'g\cos\alpha'$, welche durch die Normalwider-

stände der Geraden vernichtet werden und $mg \sin\alpha$, $m'g \sin\alpha'$, welche an die Stelle der obigen mg, $m'g$ treten. Dies ist die einzige Modification, welche in die oben behandelte Lösung eingeführt zu werden braucht, um die Lösung der erweiterten Aufgabe zu erhalten.

§. 8. **Eine schwere homogene Linie (Kette) hängt über eine vertikale feste Rolle auf beiden Seiten mit ungleich langem Stücken herab; welche Bewegung nimmt sie an?** Ist $2a$ die Summe der Kettenstücke, welche rechts und links niederhängen, von den Berührungspunkten mit der Rolle an gerechnet (ohne das auf der Rolle aufliegende Stück), x das eine, $2a - x$ das andere Stück, so ist das Gewicht der Differenz $2(x - a)$ die beschleunigende Kraft des Systems. Man erhält daher als Bewegungsgleichung:

$$2\mu a \frac{d^2x}{dt^2} = 2\mu g(x - a),$$

wo μ das Gewicht der Längeneinheit bedeutet. Die Integration derselben gibt:

$$x - a = Ae^{t\sqrt{\frac{g}{a}}} + Be^{-t\sqrt{\frac{g}{a}}}.$$

War die Kette anfangs in Ruhe und hing auf der einen Seite die Länge $a + b$, so hat man zur Bestimmung der Constanten $b = A + B$, $0 = A - B$, wenn letztere Gleichung mit Hülfe der Gleichung für die Geschwindigkeit folgt. Daher wird:

$$x - a = \tfrac{1}{2} b\left(e^{t\sqrt{\frac{g}{a}}} + e^{-t\sqrt{\frac{g}{a}}}\right).$$

Diese Gleichung gilt bis $x = 2a$, wo die Kette bis auf ein Stück abgerollt ist, welches auf der Rolle berührend aufliegt. Die Zeit t_0 hierfür ergibt sich aus

$$\frac{2a}{b} = e^{t_0\sqrt{\frac{g}{a}}} + e^{-t_0\sqrt{\frac{g}{a}}}.$$

Mit Hülfe der Relation $(e^{\alpha} + e^{-\alpha})^2 - (e^{\alpha} - e^{-\alpha})^2 = 4$ findet sich hierzu noch

$$2\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} = e^{t_0\sqrt{\frac{g}{a}}} - e^{-t_0\sqrt{\frac{g}{a}}},$$

deren Addition zur vorigen

$$t_0\sqrt{\frac{g}{a}} = l\left\{2\left(\frac{a}{b} + \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}\right)\right\}$$

ergibt, woraus t_0 folgt. Beispiel: $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$.

§. 9. **An einer biegsamen Geraden (einem Faden), welcher, mit seinem einen Ende A befestigt, vertikal herabhängt, befinden sich zwei schwere Massenpunkte m, m'; das System macht, aus der Gleichgewichtslage herausgebracht, Schwingungen um dieselbe. Wie sind dieselben beschaffen, wenn die Entfernung aus dieser Lage sehr klein ist und das System in einer Ebene schwingt?**

Die x- und y-Axe seien horizontal, die z-Axe vertikal, positiv abwärts, der Ursprung der Coordinaten im Aufhängepunkte des Fadens. Die Länge der Fadenstücke Am, mm' sei a, a'. Ferner sei der Winkel, den Am mit der z-Axe bildet, ϑ und der Winkel, den die Ebene mAz mit der xz-Ebene bildet, φ; endlich seien ϑ', φ' die analogen Winkel für das Fadenstück mm'. Indem man die Spannungen T, T' der Fadenstücke einführt, erhält man sogleich die Gleichungen der Bewegung beider Massen m, m', nämlich:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -T\sin\vartheta\cos\varphi + T'\sin\vartheta'\cos\varphi' \qquad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = -T'\sin\vartheta'\cos\varphi'$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -T\sin\vartheta\sin\varphi + T'\sin\vartheta'\sin\varphi' \qquad m'\frac{d^2y'}{dt^2} = -T'\sin\vartheta'\sin\varphi'$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - T\cos\vartheta + T'\cos\vartheta' \qquad m'\frac{d^2z'}{dt^2} = m'g - T'\cos\vartheta'.$$

Hierzu kommen:

$$x = a\sin\vartheta\cos\varphi \qquad x' = a'\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y = a\sin\vartheta\sin\varphi \qquad y' = a'\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$z = a\cos\vartheta \qquad z' = a'\cos\vartheta.$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich, wenn ϑ, ϑ' sehr klein sind und die Bewegung in der xz-Ebene erfolgt. Man hat dann näherungsweise:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -T\vartheta + T'\vartheta', \quad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = -T'\vartheta', \quad x = a\vartheta, \quad x' = a\vartheta + a'\vartheta$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - T + T', \quad m'\frac{d^2z'}{dt^2} = m'g - T', \quad z = a, \quad z' = a + a'.$$

Da z, z' constant bleiben, so folgt sofort $T' = m'g$, $T = (m + m')g$. Weiter erhält man:

$$ma\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -(m+m')g\vartheta + m'g\vartheta', \qquad m'\left(a\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + a'\frac{d^2\vartheta'}{dt^2}\right) = -m'g\vartheta'.$$

Multiplicirt man die letzte dieser Gleichungen mit einer unbestimmten Grösse λ und addirt sie zur ersten, so kommt

$$(m + \lambda m')\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \lambda m'\frac{a'}{a}\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} + \frac{g}{a}\left\{(m+m')\vartheta + m'(\lambda - 1)\vartheta'\right\} = 0.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\vartheta + \frac{a'}{a}\cdot\frac{\lambda m'}{m+\lambda m'}\cdot\vartheta'\right) + \frac{g}{a}\cdot\frac{m+m'}{m+\lambda m'}\left(\vartheta + \frac{(\lambda-1)m'}{m+m'}\vartheta'\right) = 0,$$

setzt

$$\vartheta + \frac{a'}{a}\frac{\lambda m'}{m+\lambda m'}\vartheta' = \varphi = \vartheta + \varkappa\vartheta'$$

und disponirt über λ so, dass

$$\frac{\lambda}{m+\lambda m'} = \frac{a}{a'}\frac{\lambda - 1}{m+m'}$$

wird, so geht die Gleichung über in die Form

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{a}\cdot\frac{m+m'}{m+\lambda m'}\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + n\varphi = 0; \qquad n = \frac{g}{a}\frac{m+m'}{m+\lambda m'}.$$

Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung für λ sind reell und ist die eine positiv, die andere negativ; auch für die negative Wurzel ist $m + \lambda m'$ positiv, wie sich aus der vorstehenden Form dieser quadratischen Gleichung ergibt, deren rechte Seite und deren Zähler linker Hand für ein negatives λ negativ sind. Demnach ist der Coefficient von φ in unserer Differentialgleichung positiv und erhalten wir als Integral

$$\varphi = \vartheta + \varkappa\vartheta' = \alpha\cos(nt + \beta),$$

oder entsprechend den beiden Wurzelwerthen λ_1, λ_2 von λ, zu welchen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ gehören mögen, die beiden Integrale

$$\varphi_1 = \vartheta + \varkappa_1\vartheta' = \alpha_1\cos(n_1 t + \beta_1)$$
$$\varphi_2 = \vartheta + \varkappa_2\vartheta' = \alpha_2\cos(n_2 t + \beta_2),$$

woraus

$$\vartheta = \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \left\{ \alpha_1 \varkappa_2 \cos(n_1 t + \beta_1) - \alpha_2 \varkappa_2 \cos(n_2 t + \beta_2 \right\}$$
$$\vartheta' = \frac{1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \left\{ \alpha_1 \cos(n_1 t + \beta_1) - \alpha_2 \cos(n_2 t + \beta_2 \right\}$$

folgt. Die Anfangswerthe von ϑ, ϑ', $\frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{d\vartheta'}{dt}$ bestimmen die Constanten α_1, α_2; β_1, β_2. Man sieht, dass die Winkel ϑ, ϑ' algebraische Summen sind von Winkeln, welche zwei Pendelschwingungen von den Oscillationsdauern $\frac{2\pi}{n_1}$, $\frac{2\pi}{n_2}$ entsprechen. Sind daher n_1 und n_2 commensurabel, so wird die Bewegung periodisch, sodass das System in die Anfangslage zurückkehrt.

§. 10. Zwei schwere Massenpunkte m, m' sind durch einen nicht schweren Stab verbunden und liegt dies System in einer Vertikalebene auf zwei gegen die Vertikale unter den Winkeln α, α' geneigten Geraden auf; dasselbe macht kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage; man soll die Oscillationsdauer derselben finden.

Ist ϑ die Neigung des Stabes gegen die Vertikale zur Zeit t, T seine Spannung, sind N, N' die Widerstände der beiden Geraden, x, x' die Abstände von m, m' vom Schnittpunkte derselben und a die Länge des Stabes, so bestehen die Gleichungen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\,g\cos\alpha + T\cos(\vartheta + \alpha), \qquad N = m\,g\sin\alpha + T\sin(\vartheta + \alpha)$$
$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} = m'g\cos\alpha' - T\cos(\vartheta - \alpha'), \qquad N' = m'g\sin\alpha' + T\sin(\vartheta - \alpha')$$
$$x = x'\cos(\alpha + \alpha') - a\cos(\vartheta + \alpha)$$
$$x' = x\cos(\alpha + \alpha') + a\cos(\vartheta - \alpha'),$$

mit Hülfe welcher x, x', N, N', T, ϑ als Functionen der Zeit zu finden sind. Für die fraglichen kleinen Schwingungen hat man zunächst die Gleichgewichtslagen dadurch zu suchen, dass man

$$m\,g\cos\alpha + T\cos(\vartheta + \alpha) = 0$$
$$m'g\cos\alpha' - T\cos(\vartheta - \alpha') = 0$$

setzt. Es seien x_1, x_2' die Werthe von x, welche einer solchen entsprechen. Dann kann man setzen:

$$x = x_1 + \xi, \qquad x' = x_1' + \xi'$$

und sind ξ, ξ' sehr kleine Grössen, deren Quadrate und Produkt getilgt werden sollen. Indem man nun aus den Gleichungen der Bewegung T eliminirt und abkürzend $\alpha + \alpha' = \beta$ setzt, ergibt sich

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2} - g\cos\alpha\right)(x' - x\cos\beta) - m'\left(\frac{d^2x'}{dt^2} - g\cos\alpha'\right)(x - x'\cos\beta) = 0.$$

Aus der Gleichung $x^2 + x'^2 - 2xx'\cos\beta = a^2$ folgt aber nach Einsetzung der Werthe $x = x_1 + \xi$, $x' = x_1' + \xi'$ mit Streichung der Glieder zweiter Ordnung: $x_1\xi + x_1'\xi' - (x_1\xi' + x_1'\xi)\cos\beta = 0$, woraus

$$\xi' = \xi\frac{x_1 - x_1'\cos\beta}{x_1\cos\beta - x_1'}.$$

Durch Elimination von x, x', ξ' ergibt sich daher, wenn blos die Glieder erster Ordnung beibehalten werden:

$$\left\{m(x_1' - x_1\cos\beta)^2 + m'(x_1 - x_1'\cos\beta)^2\right\}\frac{d^2\xi}{dt^2}$$
$$+ g\sin^2\beta\,(m x_1\cos\alpha + m'x_1'\cos\alpha')\cdot\xi = 0,$$

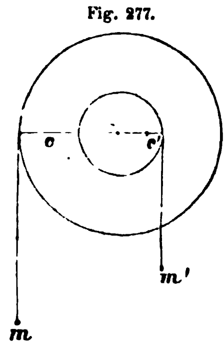
eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + n^2\xi = 0,$$

welche auf die Oscillationsdauer $\frac{2\pi}{n}$ hinweist.

§. 11. Bewegung des Rades an der Welle. Es seien m, m' (Fig. 277) die schweren Massen, welche durch Fäden mit dem Rade und der Welle verbunden sind, x, x' die Abstände ihrer Schwerpunkte von den Berührungspunkten. Dann sind $m\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$, $m'\left(g - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)$ deren verlorene Kräfte. Ein Massenpunkt μ des Rades oder der Welle im Abstande r von der Axe wird von der Tangentialkraft $\mu r \frac{d\omega}{dt}$ afficirt, wo ω die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t bedeutet; die Centripetalkraft $\mu r \omega^2$ kommt nicht in Betracht, da sie bei einer mit der Natur des Systems vereinbaren Verschiebung keine virtuelle Arbeit leistet. Die verlorene Kraft an μ ist daher die der Tangentialkraft entgegengesetzte Kraft, da keine gegebene Kraft an μ angreift, wenn wir das Gesammtgewicht des Rades und der Welle am Schwerpunkte der Maschine angreifend denken, woselbst aber von ihm gleichfalls keine Arbeit geleistet wird. Sind nun der Radius des Rades und der der Welle c und c', so sind, wenn der Apparat um den unendlich kleinen Winkel $\delta\vartheta$ gedreht wird, $c\delta\vartheta$, $c'\delta\vartheta$, $r\delta\vartheta$ die virtuellen Wege und besteht daher nach dem D'Alembert'schen Princip die Gleichung

Fig. 277.



$$m\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right)c\delta\vartheta - m'\left(g - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)c'\delta\vartheta - \frac{d\omega}{dt}\Sigma\mu r^2 \cdot \delta\vartheta = 0.$$

Nun hat man $\frac{dx}{dt} = c\omega$, $\frac{dx'}{dt} = -c'\omega$, weil die Geschwindigkeiten der Massen m, m' denen der Berührungspunkte gleich sind, x' aber mit wachsendem Drehungswinkel abnimmt; daher sind $\frac{d^2x}{dt^2} = c\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2x'}{dt^2} = -c'\frac{d\omega}{dt}$ und nimmt die Gleichung die Form an:

$$mc\left(g - c\frac{d\omega}{dt}\right) - m'c'\left(g + c'\frac{d\omega}{dt}\right) - \frac{d\omega}{dt}M\varkappa^2 = 0,$$

wenn $M\varkappa^2$ das Trägheitsmoment der Maschine für ihre Axe ist. Hieraus folgt:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{mc - m'c'}{M\varkappa^2 + mc^2 + m'c'^2} \cdot g,$$

mithin, wenn $\omega = 0$ für $t = 0$ ist:

$$\omega = \frac{mc - m'c'}{M\varkappa^2 + mc^2 + m'c'^2} \cdot gt.$$

Ist also $mc - m'c'$ nicht Null, d. h. sind m und m' nicht im Gleichgewicht, so ist die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte. Die Spannungen T, T' der Faden sind:

$$T = m\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = m\left(g - c\frac{d\omega}{dt}\right) = \left(m - \frac{c(mc - m'c')}{M\varkappa^2 + mc^2 + m'c'^2}\right)g$$

$$T' = m\left(g - \frac{d^2x'}{dt^2}\right) = m\left(g + c'\frac{d\omega}{dt}\right) = \left(m' + \frac{c'(mc - m'c')}{M\varkappa^2 + mc^2 + m'c'^2}\right)g$$

Die Spannungen sind constant während der Bewegung.

§. 12. Zwei geometrische Systeme, welche so auf einander bezogen sind, dass jedem Punkte des einen ein einziger Punkt des anderen entspricht und umgekehrt, stehen in einer eindeutigen Verwandtschaft zu einander in Bezug auf diese Punktpaare. Solche Verwandtschaften sind die Congruenz, die Aehnlichkeit, die projectivische Verwandtschaft u. s. w. Zwei mechanische Systeme können, wenn ihren Punkten die Coefficienten zukommen, welche man Masse nennt, ausser diesen geometrischen Beziehungen auch hinsichtlich letzterer verwandt sein und wenn an ihnen Kräfte wirken, so kann auch hinsichtlich dieser eine Correspondenz zwischen beiden Systemen bestehen, vermöge welcher die Kräfte des einen Systems eindeutig durch die Kräfte des anderen nach Intensität, Richtung und Sinn bestimmt werden. Ist dies der Fall und ist ausserdem noch für irgend eine Zeit eine bestimmte Beziehung der Geschwindigkeiten für die Punkte beider Systeme festgesetzt, so werden auch die Bewegungen, welche beide Systeme annehmen, eine bestimmte Verwandtschaft zeigen, sodass die Beschaffenheit der Bewegung des einen aus der des anderen gefolgert werden kann. Von den Einheiten, welche in der Mechanik in Anwendung kommen, können drei, die der Länge, der Zeit und der Masse, willkürlich angenommen werden, während die der Geschwindigkeit und der Kraft auf sie zurückführbar sind. Je nach der Definition der beiden mit einander zu vergleichenden Bewegungen werden diese fünferlei Grössen bestimmte Verhältnisse zu einander haben und umgekehrt entsprechen bestimmt vorausgesetzten Beziehungen dieser Grössen, bestimmte Verwandtschaften der Bewegungen.

§. 13. Aus der grossen Menge von Möglichkeiten, welche hinsichtlich der Verwandtschaft der Bewegungen zweier Systeme eintreten können, wollen wir hier nur den einfachsten Fall behandeln, dass die homologen Längen (also auch Flächen- und Körperräume), die Zeiten, in welchen homologe Punkte homologe Bahnstrecken durchlaufen, die homologen Massen, die Geschwindigkeiten und die Kräfte während der Bewegung beider Systeme constante Verhältnisse bewahren sollen. Wegen der constanten Linienverhältnisse werden die Systeme geometrisch ähnlich sein; der constanten Massenverhältnisse wegen werden sie beiderseits aus gleich viel ähnlichen übereinander gelagerten Systemen bestehend angesehen werden können und wenn hierzu noch die Bedingung tritt, dass die Kräfte in beiden Systemen dieselben Richtungen, gleichen Sinn und constantes Verhältniss ihrer Intensitäten haben, so werden auch die homologen Zeiten und Geschwindigkeiten constante, von den Verhältnissen der genannten Grössen abhängige Verhältnisse besitzen. Um dies näher zu begründen, seien x_i, y_i, z_i; ξ_i, η_i, ζ_i; m_i, μ_i; X_i, Y_i, Z_i; Ξ_i, H_i, Z_i die Coordinaten, Massen und Kräfte der homologen Punkte. Dann bestehen für die homologen Bewegungen beider Systeme die Beziehungen:

$$\Sigma\left\{\left(m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}-X_i\right)\delta x_i+\left(m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}-Y_i\right)\delta y_i+\left(m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}-Z_i\right)\delta z_i\right\}=0$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial L}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial L}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial M}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial M}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0$$

$$\vdots$$

für das eine und

$$\Sigma\left\{\left(\mu_i\frac{d^2\xi_i}{dt^2}-\Xi_i\right)\delta\xi_i+\left(\mu_i\frac{d^2\eta_i}{dt^2}-H_i\right)\delta\eta_i+\left(\mu_i\frac{d^2\zeta_i}{dt^2}-Z_i\right)\delta\zeta_i\right\}=0$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial L'}{\partial\xi_i}\delta\xi_i+\frac{\partial L'}{\partial\eta_i}\delta\eta_i+\frac{\partial L'}{\partial\zeta_i}\delta\zeta_i\right)=0$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial M'}{\partial\xi_i}\delta\xi_i+\frac{\partial M'}{\delta\eta_i}\delta\eta_i+\frac{\partial M'}{\partial\zeta_i}\delta\zeta_i\right)=0,$$

$$\vdots$$

wenn $L(x, y, z; x', y', z', \ldots)=0$, $M(x, y, z; x', y', z', \ldots)=0, \ldots$ $L'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)=0$, $M'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)=0, \ldots$ die Bedingungen sind, welchen beide Systeme genügen müssen. Ist nun α das constante Verhältniss der Liniendimensionen, β das der Massen, γ das der Kräfte und sind ε und σ die Verhältnisse der homologen Zeiten und Geschwindigkeiten, so hat man:

$$\xi_i=\alpha x_i,\quad \eta_i=\alpha y_i,\quad \zeta_i=\alpha z_i;\quad \mu_i=\beta m_i;$$
$$\Xi_i=\gamma X_i,\quad H_i=\gamma Y_i,\quad Z_i=\gamma Z_i;\quad t=\varepsilon t.$$

Hierdurch geht die Hauptgleichung für das zweite System über in

$$\Sigma\left\{\left(\frac{\alpha\beta}{\varepsilon^2}\frac{d^2x_i}{dt^2}-\gamma X_i\right)\alpha\delta x_i+\left(\frac{\alpha\beta}{\varepsilon^2}\frac{d^2y_i}{dt^2}-\gamma Y_i\right)\alpha\delta y_i\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\alpha\beta}{\varepsilon^2}\frac{d^2z_i}{dt^2}-\gamma Z_i\right)\alpha\delta z_i\right\}=0$$

und diese Relation muss vermöge der Aehnlichkeit der Systeme und der Bewegungen unabhängig von den Multiplicatoren α, β, γ, ε sein. Demnach müssen diese als gemeinschaftliche Factoren zur Linken herausfallen und muss folglich

$$\frac{\alpha\beta}{\varepsilon^2}=\gamma$$

sein. Das Verhältniss σ der Geschwindigkeiten ergibt sich, wenn man bedenkt, dass Geschwindigkeit der Quotient des Bogenelementes durch das Zeitelement ist; es wird daher

$$\sigma=\frac{\alpha}{\varepsilon}=\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}.$$

Was die Bedingungen $L=0$, $L'=0$; $M=0$, $M'=0, \ldots$ betrifft, so müssen vermöge der geometrischen Aehnlichkeit der Systeme die Functionen L', M', ... dieselben wie L, M, ... und damit L', M', ... von

dem Factor α unabhängig sein können, homogene Functionen der Coordinaten sein.

Die vorstehende Betrachtung liefert daher den Satz:

Zwei Systeme, welche einander geometrisch ähnlich nach dem Aehnlichkeitsverhältnisse α sind, deren homologe Punkte Massen von constantem Verhältniss β besitzen und an deren homologen Punkten Kräfte wirken, deren Richtungen und Sinn in beiden ähnliche Lage und welche Intensitäten von constantem Verhältniss γ besitzen, welche ferner von homologen Stellungen mit Geschwindigkeiten ausgehen, deren Verhältniss $\sigma = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}$ ist, führen durchweg ähnliche Bewegungen aus und zwar ist das Verhältniss ε der homologen Zeiten, in welchen je zwei homologe Punkte homologe Bahnstrecken beschreiben, $\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma}}$ und behalten die Geschwindigkeiten das Verhältniss σ fortwährend bei.

§. 14. Man verdankt diesen wichtigen Satz Newton (*Principia*, lib. II, prop. 32). Schon Galilei wirft in seinen Dialogen die Frage auf, wie es komme, dass zwei ähnlich construirte Maschinen nicht auch immer ähnliche Bewegungen zeigen, dass oft eine Maschine im Modell sehr gut ist, während sie in grossem Massstabe ausgeführt, nicht das Gewünschte leistet. Er findet die Schwierigkeit in der Verschiedenheit der Widerstände, welche in beiden Maschinen auftreten. Nach Newton haben Cauchy [*Mém. de l'Acad. des sc.* T. IX, p. 117 (1829)] und Combes Folgerungen aus den Betrachtungen des ersteren gezogen, Cauchy in Bezug auf physikalische Vorgänge, Combes in Bezug auf die Turbinen. In neuerer Zeit hat Bertrand (*Note sur la similitude en mécanique*, Journ. de lécole polytechn. Cah. XXXII, p. 189 (1848)] den Newton'schen Satz aus dem D'Alembert'schen Princip entwickelt und eine Menge älterer und neuerer Beispiele hinzugesammelt, von denen wir einige mittheilen wollen.

1. Wenn zwei Punkte M, M' von gleichen Massen von demselben Centrum O der ersten Potenz ihrer Entfernung von ihm proportional angezogen werden, so erreichen sie, obgleich von verschiedenen Anfangslagen ausgehend, dennoch zu gleicher Zeit das Centrum, vorausgesetzt, dass sie ohne Anfangsgeschwindigkeiten oder mit solchen abgehen, welche proportional ihren anfänglichen Entfernungen von O sind. Das Centrum O bildet nämlich mit den Punkten M, M' zwei Systeme, in welchen das Verhältniss der Kräfte $\gamma = OM : OM'$, das der Linien $\alpha = OM : OM'$ und das der Massen $\beta = 1$ ist. Daher ist für das der Zeiten $\varepsilon^2 = \frac{OM}{OM'} : \frac{OM}{OM'} = 1$. Es entsprechen also proportionalen Abständen derselben von O gleiche Zeiten, mithin erreichen beide Punkte zu derselben Zeit das Centrum.

Zieht O nach der $n$ten Potenz der Entfernung an, so ist $\alpha = OM : OM'$, $\beta = 1$, $\gamma = \left(\frac{OM}{OM'}\right)^n$, also $\varepsilon^2 = \left(\frac{OM}{OM'}\right)^{1-n}$. Die homologen Strecken werden dann in Zeiten durchlaufen, deren Verhältniss $\varepsilon = \alpha^{\frac{1}{2}(1-n)}$ ist. Für die Newton'sche Attraction $n = -2$ wird $\varepsilon = \alpha^{\frac{3}{2}}$ (Euler, *Mechanica*, T. I, Cap. III, §. 308.).

Für die Bewegung eines schweren Punktes auf der Cycloide ist die Tangentialkraft $m\frac{dv}{dt} = mg\cos\frac{1}{2}\omega$, wenn ω den Wälzungswinkel darstellt (s. S. 332). Denkt man sich daher um einen Punkt O einen Kreis mit g als Radius beschrieben und einen Punkt M' gleichförmig auf diesem Kreise sich bewegend, so würde, wenn der nach ihm gezogene Radius OM' mit einem festen Durchmesser des Kreises den Winkel $\frac{1}{2}\omega$ bildet, seine Projection M auf diesen Durchmesser eine Bewegung haben, für welche $m\frac{dv}{dt} = mg\cos\frac{1}{2}\omega$ wäre, also dieselbe, als ob M von O der ersten Potenz der Entfernung proportional angezogen würde. Man folgert hieraus leicht den Isochronismus des Cycloidenpendels.

2. Zwei Punkte bewegen sich auf zwei Kreisen von den Radien r, r' mit constanten Geschwindigkeiten; ihre Massen und Umlaufszeiten seien m, m'; T, T'. Welches ist das Verhältniss der Centripetalkräfte, welche diese Bewegungen ermöglichen? Man hat hier $\alpha = r : r'$, $\beta = m : m'$, $\varepsilon = T : T'$, mithin

$$\gamma = \frac{\alpha\beta}{\varepsilon^2} = \frac{mr}{T^2} : \frac{m'r'}{T'^2}.$$

3. Zwei Pendel von den Längen schwingen an zwei Orten, wo die Beschleunigung der Schwere g und g' ist, nachdem sie um dieselben Elongationswinkel aus der Gleichgewichtslage herausgebracht sind; welches ist das Verhältniss der Zeiten, in welchen sie homologe Bogen durchlaufen, also auch das Verhältniss ihrer Oscillationsdauern? Es ist für sie $\alpha = l : l'$, $\beta = m : m'$, $\gamma = mg : m'g'$, mithin ist

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} = \sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{\frac{l'}{g'}}.$$

4. Zwei Fäden von den Längen l, l' und den Massen m, m' seien durch zwei Gewichte P, P' gespannt. Die Oscillationsdauern T, T' haben für sie das Verhältniss:

$$T : T' = \sqrt{\frac{ml}{P}} : \sqrt{\frac{m'l'}{P'}}.$$

Denn (mit Vernachlässigung der Fadendurchmesser) sind die Fäden zwei ähnliche Systeme, für welche $\alpha = l : l'$, $\beta = m : m'$, $\gamma = \frac{P}{P'}$, mithin ist

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{l}{l'} \cdot \frac{m}{m'} \cdot \frac{P'}{P}} \text{ u. s. w.}$$

Wenn die Fäden beide durch gleiche Gewichte gespannt und durch eine beliebige Anzahl von Massen belastet werden, welche auf beide ähnlich vertheilt sind und sich verhalten, wie die Längen der Fäden, so führen beide Fäden ihre Oscillationen in Zeiten aus, welche den Längen l, l' proportional sind. (Duhamel.) Denn es ist $\alpha = l : l'$, $\beta = l : l'$, $\gamma = 1$, also $\varepsilon = l : l'$.

5. Das Modell einer Maschine ist gegeben, man soll beurtheilen, ob die Ausführung im Grossen empfehlenswerth ist oder nicht.

Ist α das Aehnlichkeitsverhältniss, so ist α^3 das der Massen, das der Schwerkräfte ist also gleichfalls α^3, es muss mithin das Verhältniss aller anderen Kräfte, welche auf die Maschine und das Modell wirken, gleichfalls α^3 sein. Das Verhältniss der Zeiten ist demzufolge $\varepsilon = \sqrt{\alpha}$; das der Arbeiten α^4, das der Geschwindigkeiten $\sqrt{\alpha}$. Da die Widerstände der Luft dem Quadrate der Geschwindigkeit und den Flächen proportional sind, so ist ihr Verhältniss α^3, wie gefordert wird; auch die gleitende Reibung, welche proportional dem Drucke ist, liefert das Verhältniss α^3, die wälzende Reibung aber, welche proportional dem Drucke und umgekehrt proportional dem Durchmesser der Räder angenommen wird, liefert das Verhältniss α^2. Sie ist demnach im Modell grösser, als in der Maschine.

XVI. Capitel.

Die Principe der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes, der Flächen, der lebendigen Kraft und der kleinsten Wirkung für das veränderliche System.

§. 1. Durch Combination der Bewegungsgleichungen

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i + S_x^{(i)},\quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i + S_y^{(i)},\quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i + S_z^{(i)},\quad i = 1, 2, 3, \ldots n$$

des §. 4. im vorigen Capitel oder auch durch passende Wahl der virtuellen Verschiebungen in der Gleichung

$$\Sigma \left\{ \left(m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} - X_i\right) \delta x_i + \left(m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} - Y_i\right) \delta y_i + \left(m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} - Z_i\right) \delta z_i \right\}$$
$$= \Sigma \left\{ S_x^{(i)} \delta x_i + S_y^{(i)} \delta y_i + S_z^{(i)} \delta z_i \right\}$$

erhält man Sätze von umfassender Anwendbarkeit (Principe) für das beliebig veränderliche System, welche zum Theil Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung liefern und für das unveränderliche System bereits in Cap. XII und Cap. XIII aufgestellt wurden.

Summirt man die Bewegungsgleichungen nach dem Index i, so erhält man

$$\Sigma m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \Sigma X_i + \Sigma S_x^{(i)}$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \Sigma Y_i + \Sigma S_y^{(i)}$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \Sigma Z_i + \Sigma S_z^{(i)}.$$

Für den Massenmittelpunkt $(x_1\, y_1\, z_1)$ des Systems bestehen aber die Gleichungen

$$\Sigma m_i x_i = M x_1, \qquad \Sigma m_i y_i = M y_1, \qquad \Sigma m_i z_i = M z_1$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = M \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \quad \Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = M \frac{d^2 y_1}{dt^2}, \quad \Sigma m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = M \frac{d^2 z_1}{dt^2}.$$

Mit ihrer Hülfe erhält man daher aus den vorstehenden:

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \Sigma X_i + \Sigma S_x^{(i)}, \quad M \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \Sigma Y_i + \Sigma S_y^{(i)}, \quad M \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \Sigma Z_i + \Sigma S_z^{(i)}.$$

Dies sind aber die Bewegungsgleichungen des Punktes x_1, y_1, z_1. Sie drücken den Satz aus:

Der Massenmittelpunkt des Systems bewegt sich so, als ob er die Gesammtmasse des Systems enthielte und an ihn sämmtliche Kräfte, innere, äussere und die Kräfte, welche die Bedingungen des Systems vertreten, parallel mit ihren Richtungen angriffen. (Princip der Bewegung des Massenmittelpunktes.)

Es sei nun zunächst das System frei, also $S_x^{(i)} = 0$, $S_y^{(i)} = 0$, $S_z^{(i)} = 0$. Halten sich in diesem Falle die Kräfte P_i, wenn sie parallel mit sich an einen Punkt verschoben gedacht werden, Gleichgewicht oder sind sie Null, so ist $\Sigma X_i = 0$, $\Sigma Y_i = 0$, $\Sigma Z_i = 0$ und die Bewegungsgleichungen des Massenmittelpunktes werden:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = 0.$$

Aus ihnen folgt:

$$x_1 = \alpha_0 + \alpha_1 t, \quad y_1 = \beta_0 + \beta_1 t, \quad z_1 = \gamma_0 + \gamma_1 t.$$

Der Massenmittelpunkt beschreibt daher die Gerade

$$\frac{x_1 - \alpha_0}{\alpha_1} = \frac{y_1 - \beta_0}{\beta_1} = \frac{z_1 - \gamma_0}{\gamma_1}$$

mit constanter Geschwindigkeit $\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}$ von constanter Richtung. Dieser Fall tritt insbesondere ein, wenn eine Kräftefunction U existirt, welche blos von den Differenzen der Coordinaten der Systempunkte abhängt. Enthält nämlich U die Differenz $x_h - x_k = \xi$, so ist:

$$\frac{\partial U}{\partial x_h} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_k} = -\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial U}{\partial x_h} + \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0$$

und ähnlich für alle übrigen Differenzen, sodass

$$\Sigma X_i = \Sigma \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad \Sigma Y_i = \Sigma \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0, \quad \Sigma Z_i = \Sigma \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0$$

werden. Dies findet insbesondere bei gegenseitigen Attractionen der Systempunkte statt. Man sieht dies auch direct ein, indem diese inneren Kräfte paarweise gleich und entgegengesetzt sind und sich also bei der Verlegung an einen Punkt paarweise tilgen.

Ist das System nicht frei, sind aber die Bedingungen so beschaffen, dass sie blos von den Differenzen der x-Coordinaten, der y-Coordinaten und der z-Coordinaten abhängen, so werden $\Sigma S_x^{(i)}$, $\Sigma S_y^{(i)}$, $\Sigma S_z^{(i)}$ Null, weil sie die Differentialquotienten $\frac{\partial L}{\partial x_h}$, $\frac{\partial L}{\partial x_k}$, ... enthalten, welche paarweise sich tilgen. Die Kräfte, welche solche Bedingungen zu vertreten vermögen, tilgen sich daher ebenfalls paarweise. Man kann daher den Satz aufstellen:

Ist ein System keinen continuirlichen Kräften oder inneren paarweise entgegengesetzt gleichen oder überhaupt solchen Kräften unterworfen, welche an einen Punkt verlegt sich Gleichgewicht halten und ist es frei, so bewegt sich der Massenmittelpunkt desselben gleichförmig in gerader Linie oder bleibt in Ruhe, wenn es anfänglich ruhte. Dasselbe findet statt, wenn das System nicht frei ist, aber ausser diesen Bedingungen auch die Kräfte, welche die Bedingungsgleichungen des Systems vertreten, an einen Punkt verlegt im Gleichgewichte sind. Insbesondere findet dieser Satz statt, wenn eine Kräftefunction existirt und sie nebst den Bedingungsgleichungen nur von den Coordinatendifferenzen abhängt. (Princip der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes.)

Die Gleichungen für die Bewegung des Massenmittelpunktes erhält man auch aus der Gleichung, welche das D'Alembert'sche Princip mit Hülfe der Variationen der Coordinaten darstellt, indem man dem System einmal eine Verschiebung parallel der x-Axe, das anderemal eine solche parallel der y-Axe oder parallel der z-Axe ertheilt denkt. Die Variationen δx sind hierbei im ersten Falle alle gleich und zugleich alle δy und δz Null; in den beiden anderen sind alle δy, resp. δz gleich und δx und δz, resp. δx und δy Null. Jedesmal fällt aber die noch in der Gleichung verbleibende Variation als gemeinsamer Factor heraus.

§. 2. Um den Inhalt und Umfang des Princips von der Bewegung des Massenmittelpunktes zu erläutern, wählen wir folgende Beispiele und Anwendungen.

1. Ein Körper, auf welchen die Schwere wirkt, wird im leeren Raume in irgend einer Weise geschleudert und ist sich hierauf selbst überlassen. Sein Massenmittelpunkt beschreibt dem Principe zufolge eine Parabel, deren Ebene vertikal ist und durch die Anfangsrichtung der Geschwindigkeit desselben hindurchgeht. Die vollständige Bewegung des Körpers ist eine Schraubenbewegung mit jedem Augenblick wechselnder Schraubenaxe; dieselbe kann man auflösen in die Translationsbewegung eines Systempunktes und die Rotation um eine bewegliche, durch diesen hindurchgehende Axe. Wählt man zu dem Systempunkt den Massenmittelpunkt, so zerfällt die Bewegung des Körpers also in die parabolische Translation dieses, verbunden mit einer Rotation um eine wechselnde Axe des Massenmittelpunktes.

2. Zerfällt ein System während der Bewegung oder finden Explosionen in demselben statt, so finden diese Ereignisse nur in Folge des Aufhörens oder der Erregung innerer Kräfte statt und da diese stets paarweise sich gleich und entgegengesetzt sind, so vermögen sie nicht die Bewegung des Schwerpunktes zu ändern; dieser setzt vielmehr trotz des Auseinanderfliegens der Systemstücke seine Bahn fort, als ob gar keine Störung stattgefunden hätte. Wenn eine Bombe zerplatzt, so wird die Explosion durch die chemischen Molecularkräfte hervorgerufen, welche als gegenseitige Anziehungs- und Abstossungskräfte paarweise gleich und entgegengesetzt sind. So lange die Bombenstücke nicht auf ein Hinderniss stossen, dessen Widerstand als eine neue Kraft in das System eintritt, geht der Schwerpunkt der zerplatzten Bombe in der parabolischen Bahn der kugelförmigen Bombe fort. Eine kleine Modification erleidet die Bewegung des Schwerpunktes in der Luft nach dem Zerplatzen, indem der Luftwiderstand auf die Bombensplitter anders wirkt, als auf die unversehrte Bombe.

In ähnlicher Weise haben alle Eruptionen der Vulkane, Erdbeben u. s. w. absolut keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunktes der Erde oder gar des Sonnensystems; die Erde könnte zertrümmert werden und das ganze Sonnensystem könnte zerfallen, ohne dass der Schwerpunkt des Ganzen in seiner Bahn oder seiner Geschwindigkeit gestört würde.

3. Auf unser Sonnensystem wirken als äussere Kräfte die Anziehungen der Fixsternwelt; wegen der ausserordentlich grossen Entfernung sind diese Kräfte sehr klein und halten sich, an dem Schwerpunkt des Sonnensystems angebracht gedacht, nahezu Gleichgewicht. Daher ist der Schwerpunkt des Sonnensystems entweder in Ruhe oder er bewegt sich nahezu in gerader Linie mit approximativ constanter Geschwindigkeit. Man hofft die Richtung dieser Geraden durch Beobachtung bestimmen zu können.

4. Ein lebendes Wesen befinde sich isolirt im Raume; es mögen auf dasselbe keine äusseren Kräfte, ausser etwa die Schwere wirken und in diesem Falle soll dasselbe durch eine vollkommen glatte horizontale Ebene unterstützt sein, deren Widerstand das Gewicht tilgt. Trotz aller Muskelanstrengung wird es dem Wesen nicht gelingen, seinen Schwerpunkt in Bewegung zu bringen, wenn es ursprünglich in Ruhe war oder ihn zur Ruhe zu bringen, wenn es sich in Bewegung befindet. Denn alle Muskelkräfte sind als innere Kräfte paarweise gleich und entgegengesetzt und vernichten sich, an den Schwerpunkt verlegt. So sehr auch immer ein Vogel in solcher Lage mit den Flügeln schlagen mag, es wird nicht helfen, ihn vom Fleck zu bringen; so viel auch immer der Mensch auf einer vollkommen glatten Horizontalebene sich drehen und wenden und seine Muskeln anstrengen mag, er wird seinen Schwerpunkt nicht heben und nicht aufstehen können, wenn er liegt oder sitzt. Blos der Luftwiderstand und die Reibung, wenn sie als neue äussere Kräfte hinzutreten, machen eine Aenderung in der Lage des Schwerpunktes möglich.

5. Eine Locomotive wird an Ketten frei aufgehängt, sodass sie schwingen kann, wie ein Pendel; sie befinde sich in Ruhe. Wird nun der Kessel geheizt und lässt man den Dampf auf die Kolben wirken, so macht die Locomotive Schwingungen. Bei der Bewegung der Kolben wird nämlich der Schwerpunkt im Innern der Maschine verlegt, da aber auf das ganze System nur äussere Kräfte wirken, die im Gleichgewichte sind (denn der Dampfdruck bildet sich durch innere Kräfte), so muss der Schwerpunkt im Raume ruhen. Dies ist aber nur möglich, wenn gleichzeitig mit dem Vorwärtsgehen der Kolben das ganze System rückwärts geht und umgekehrt.

§. 3. Integrirt man die Gleichungen

$$\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \Sigma m_i \frac{dx_i}{dt} = \Sigma X_i + \Sigma S_x^{(i)}$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \Sigma m_i \frac{dy_i}{dt} = \Sigma Y_i + \Sigma S_y^{(i)}$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \Sigma m_i \frac{dz_i}{dt} = \Sigma Z_i + \Sigma S_z^{(i)}$$

über ein beliebiges Zeitintervall $t - t_0$ hinweg, so kommt

$$\Sigma m_i \frac{dx_i}{dt} - \left(\Sigma m_i \frac{dx_i}{dt}\right)_{t_0} = \Sigma \int_{t_0}^{t} (X_i + S_x^{(i)})\, dt$$

$$\Sigma m_i \frac{dy_i}{dt} - \left(\Sigma m_i \frac{dy_i}{dt}\right)_{t_0} = \Sigma \int_{t_0}^{t} (Y_i + S_y^{(i)})\, dt$$

$$\Sigma m_i \frac{dz_i}{dt} - \left(\Sigma m_i \frac{dz_i}{dt}\right)_{t_0} = \Sigma \int_{t_0}^{t} (Z_i + S_z^{(i)})\, dt$$

und wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit den Richtungscosinussen einer beliebigen Axe $(\alpha\beta\gamma)$ multiplicirt und sie addirt, weiter

$$\Sigma \left(m_i \frac{dx_i}{dt} \cos\alpha + m_i \frac{dy_i}{dt} \cos\beta + m_i \frac{dz_i}{dt} \cos\gamma\right)$$

$$- \Sigma \left(m_i \frac{dx_i}{dt} \cos\alpha + m_i \frac{dy_i}{dt} \cos\beta + m_i \frac{dz_i}{dt} \cos\gamma\right)_{t_0}$$

$$= \Sigma \int_{t_0}^{t} [(X_i + S_x^{(i)}) \cos\alpha + (Y_i + S_y^{(i)}) \cos\beta + (Z_i + S_z^{(i)}) \cos\gamma]\, dt.$$

Bezeichnet nun ϑ_i den Winkel, welchen die Geschwindigkeit v_i des Punktes m_i, Θ_i den Winkel, welchen P_i und Θ_i' den, welchen $S^{(i)}$ mit jener Axe bildet, so kann man die Gleichung schreiben:

$$\Sigma m_i v_i \cos\vartheta_i - (\Sigma m_i v_i \cos\vartheta_i)_{t_0} = \Sigma \int_{t_0}^{t} (P_i \cos\Theta_i + S_i \cos\Theta_i')\, dt,$$

d. h.: Projicirt man ein in Bewegung begriffenes System auf irgend eine Axe, so ist die Aenderung der Summe der Momentankräfte für die Projectionsbewegung während irgend eines Zeitintervalls gleich der Projection des totalen Kraftantriebes auf die Axe während dieser Zeit.

Sind $\Sigma X_i = \Sigma Y_i = \Sigma Z_i = 0$, $\Sigma S_x^{(i)} = \Sigma S_y^{(i)} = \Sigma S_z^{(i)} = 0$, so bleibt blos

$$\Sigma m_i v_i \cos\vartheta_i = (\Sigma m_i v_i \cos\vartheta_i)_{t_0},$$

d. h.: Gilt das Princip der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes, so bleibt die Summe der Momentankräfte für die Projectionsbewegung constant.

Man kann die obigen Gleichungen auch durch folgende ersetzen:

$$M\frac{dx_1}{dt} - \left(M\frac{dx_1}{dt}\right)_{t_0} = \Sigma\int_{t_0}^{t}(X_i + S_x^{(i)})\,dt$$

$$M\frac{dy_1}{dt} - \left(M\frac{dy_1}{dt}\right)_{t_0} = \Sigma\int_{t_0}^{t}(Y_i + S_y^{(i)})\,dt$$

$$M\frac{dz_1}{dt} - \left(M\frac{dz_1}{dt}\right)_{t_0} = \Sigma\int_{t_0}^{t}(Z_i + S_z^{(i)})\,dt$$

und erhält, wenn A der Winkel ist, den die Momentankraft MV des Massenmittelpunktes mit der Axe bildet:

$$MV\cos A - (MV\cos A)_{t_0} = \Sigma\int_{t_0}^{t}(P_i\cos\Theta_i + S_i\cos\Theta_i')\,dt.$$

§. 4. Der Satz des vorigen §. kann folgende Erscheinungen erklär[en]. *a*) den **Rückstoss der Geschütze**. Vor der Explosion bilden Geschütz und Ladung ein System, welches unter Einfluss der Schwere und des Widerstand[s] des ebenen Bodens im Gleichgewicht und ausserdem in Ruhe sich befindet. D[ie] Summe der Momentankräfte, projicirt auf eine beliebige Axe, z. B. auf die Ax[e] des Rohrs, ist daher Null. Da nun bei der Explosion nur innere Kräfte entwick[elt] werden, so muss diese Summe constant gleich Null bleiben; damit dies mög[lich] sei, muss die Summe der Momentankräfte für die Kugel der Summe der Momentan[-] kräfte für das Geschütz entgegengesetzt gleich sein. Daher erlangen die Schw[er-] punkte beider Theile entgegengesetzte Geschwindigkeiten, welche sich umgek[ehrt] wie die Massen dieser Theile verhalten und wird das Geschütz rückwärts a[us-] weichen. Eine kleine Abweichung hiervon findet allerdings statt, weil das Pulv[er] der Ladung verdampft; die Geschwindigkeit, mit welcher das Geschütz zur[ück-] weicht, ist deshalb etwas grösser, als sie ohne dies sein würde. *b*) Das **A[uf-] steigen der Raketen**. Bei der Entzündung tritt am unteren Ende der Rake[te] immer mehr Zündmasse aus, welche verbrennt und den Feuerstreifen liefert; da[her] muss die Rakete selbst eine entgegengesetzte Geschwindigkeit annehmen und a[uf-] steigen. Die Beschleunigung der Schwere vernichtet diese Geschwindigkeit a[ll-] mählig.

§. 5. Wir combiniren jetzt die Differentialgleichungen der Beweg[ung] des §. 2. in Cap. XIV so, dass wir die dritte mit y_i und die zw[eite] mit z_i multipliciren, letzteres Produkt von ersterem subtrahiren [und] hierauf nach i summiren. Dies liefert, in Bezug auf alle drei Co[ordi-] natenpaare $y_i z_i$, $z_i x_i$, $x_i y_i$ ausgeführt, die Gleichungen

$$\Sigma m_i\left(y_i\frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i\frac{d^2 y_i}{dt^2}\right) = \Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) + \Sigma(y_i S_z^{(i)} - z_i S_y^{(i)}$$

$$\Sigma m_i\left(z_i\frac{d^2 x_i}{dt^2} - x_i\frac{d^2 z_i}{dt^2}\right) = \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) + \Sigma(z_i S_x^{(i)} - x_i S_z^{(i)}$$

$$\Sigma m_i\left(x_i\frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i\frac{d^2 x_i}{dt^2}\right) = \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) + \Sigma(x_i S_y^{(i)} - y_i S_x^{(i)}$$

denkt man sich die Kräfte, welche am System zugreifen, für den Coordinatenursprung reducirt, wie beim unveränderlichen System, so drücken diese Gleichungen die Aequivalenz des resultirenden Paares der Effectivkräfte $m_i \varphi_i$ mit dem resultirenden Paare der gegebenen und der Bedingungskräfte aus. Ebenso drücken die Gleichungen

$$\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma X_i + \Sigma S_x^{(i)}, \ldots$$

aus welchen das Princip der Bewegung des Massenmittelpunktes hervorging, die Aequivalenz der Reductionsresultanten der Kräfte $m_i \varphi_i$ mit den Reductionsresultanten der gegebenen und der Bedingungskräfte aus.

Nehmen wir nun an, es sei die rechte Seite einer der drei obigen Gleichungen, z. B. die der ersten fortwährend gleich Null, so wird

$$\Sigma m_i \left(y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}\right) = 0,$$

d. h. die Componente des Axenmomentes des Paares der Kräfte $m_i \varphi_i$, welche der x-Axe parallel ist, bleibt Null. Diese Gleichung gibt integrirt

$$\Sigma m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt}\right) = D_1$$

und drückt aus, dass die Componente des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte parallel der x-Axe contant bleibt. Projicirt man nun das System sammt allen vom Ursprung nach den Systempunkten gezogenen Radienvectoren auf eine zur x-Axe senkrechte Ebene und nennt $d\sigma_x^{(i)}$ den Elementarsector, welchen die Projection des nach m_i hinführenden Radiusvectors auf jene Ebene im Zeitelemente beschreibt, so nimmt die Gleichung die Gestalt an

$$\Sigma m_i \frac{d\sigma_x^{(i)}}{dt} = \tfrac{1}{2} D_1$$

und liefert nach der Integration

$$\Sigma m_i \sigma_x^{(i)} = \tfrac{1}{2} D_1 (t - t_0),$$

wenn man die Sectoren $\sigma_x^{(i)}$ von der Stellung der Radienvectoren zur Zeit $t = 0$ an rechnet. Man hat daher den Satz:

Wenn die Componente des resultirenden Axenmomentes aller am System angreifenden Kräfte, welches sich ergibt, wenn man dieselben wie beim unveränderlichen System für einen Punkt (den Coordinatenursprung) reducirt, parallel irgend einer Axe während der Bewegung des Systems fortwährend verschwindet, also die Componente des entsprechenden Axenmomentes der Momentankräfte constant ist, so ist für die Projection des beweglichen Systems auf eine zu jener Axe senkrechte Ebene die Summe der Sectorenge-

schwindigkeiten, jede mit der Masse des betreffenden Systempunktes multiplicirt constant und ändert sich die Summe der Produkte aus den Sectoren und den Massen der Zeit proportional. (Princip der Flächen.) Sind auch die beiden Grössen

$\Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) + \Sigma(z_i S_x^{(i)} - x_i S_z^{(i)}) = 0$, $\Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) + \Sigma(x_i S_y^{(i)} - y_i S_x^{(i)}) = 0$,

so gilt dieser Satz auch für die Axen des y in z, resp. für Ebenen senkrecht zu ihnen als Projectionsebenen und hat man ebenso

$$\Sigma m_i \frac{d\sigma_y^{(i)}}{dt} = \tfrac{1}{2} D_2 \quad , \quad \Sigma m_i \frac{d\sigma_z^{(i)}}{dt} = \tfrac{1}{2} D_3$$

und

$$\Sigma m_i \sigma_y^{(i)} = \tfrac{1}{2} D_2 (t - t_0) \quad , \quad \Sigma m_i \sigma_z^{(i)} = \tfrac{1}{2} D_3 (t - t_0) .$$

Gilt als Flächenprincip für drei zu einander senkrechte Ebenen, d. h. verschwinden sämmtliche drei Componenten des resultirenden Paares der continuirlichen Kräfte bei der Reduction für einen Punkt, so gilt dasselbe für alle Ebenen des Raumes. Denn es sei $(\alpha\beta\gamma)$ die Richtung der Normalen N einer beliebigen Ebene, so erhält man sofort

$$\Sigma m_i (d\sigma_x^{(i)} . \cos\alpha + d\sigma_y^{(i)} . \cos\beta + d\sigma_z^{(i)} . \cos\gamma) = \tfrac{1}{2} (D_1 \cos\alpha + D_2 \cos\beta + D_3 \cos\gamma) dt.$$

Es bedeutet aber $d\sigma_x^{(i)} \cos\alpha + d\sigma_y^{(i)} \cos\beta + d\sigma_z^{(i)} \cos\gamma$ die Projectionssumme der Elementarsectoren $d\sigma_x^{(i)}$, $d\sigma_y^{(i)}$, $d\sigma_z^{(i)}$ oder also die Proportion des vom Radiusvector, der nach m_i führt, im Raume beschriebenen Elementarsectors auf die neue Ebene. Bezeichnen wir dieselbe mit $d\sigma_N^{(i)}$, so ist die linke Seite vorstehender Gleichung $\Sigma m_i d\sigma_N^{(i)}$. Die Grössen D_1, D_2, D_3 sind die Componenten des resultirenden Paares $G = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}$ der Momentankräfte und wenn $(a\,b\,c)$ dessen Richtung ist, so sind $D_1 = G \cos a$, $D_2 = G \cos b$, $D_3 = G \cos c$. Daher wird die rechte Seite obiger Gleichung gleich

$$\tfrac{1}{2} G (\cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma)\, dt = \tfrac{1}{2} G \cos\vartheta \,.\, dt ,$$

wenn ϑ den Winkel (N, G) bezeichnet. Demnach erhalten wir

$$\Sigma m_i d\sigma_N^{(i)} = \tfrac{1}{2} G \cos\vartheta\, dt , \qquad \Sigma m_i \sigma_N^{(i)} = \tfrac{1}{2} G \cos\vartheta \,.\, (t - t_0) .$$

Diese Summen werden ein Maximum für $\vartheta = 0$, d. h. die Summe der Flächenräume, multiplicirt mit den Massen, wird ein Maximum für die zur Axe des resultirenden Paares der Momentankräfte senkrechte Ebene.

§. 6. Es fragt sich nun, in welchen Fällen eine oder die andere der drei Summen auf den rechten Seiten der Gleichungen des §. 5. verschwindet. Nehmen wir an, das System sei frei, also alle $S_x^{(i)} = S_y^{(i)} = S_z^{(i)} = 0$. Damit $\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i)$ verschwinde, muss das Paar, welches die Kräfte Y_i, Z_i, in der yz-Ebene bei der Reduction für den Coordinatenursprung liefern, Null sein, müssen sich also diese Kräfte auf eine blosse Resultante reduciren, deren Lage also die Lage der Centralaxe des ebenen

Kräftesystems hat. Es existire nun eine Kräftefunction U. An die Stelle der Coordinaten y_i, z_i führen wir Polarcoordinaten r_i, ϑ_i in der yz-Ebene ein, während wir x_i beibehalten. Wird dadurch nun U zu einer Function von x_i, r_i und den Differenzen der Winkel ϑ, so verschwindet

$$\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) = \Sigma\left(y_i \frac{\partial U}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial U}{\partial y_i}\right),$$

weil sich darin die Glieder paarweise tilgen. Man erhält nämlich vermöge der Gleichungen

$$y_h = r_h \cos\vartheta_h,\ z_h = r_h \sin\vartheta_h;\ y_k = r_k \cos\vartheta_k,\ z_k = r_k \sin\vartheta_k,$$

behufs Einführung der neuen Variabelen, weil die Differentiation nach z_h und y_h resp. y_h und z_h als constant voraussetzen:

$$\frac{\partial U}{\partial z_h} dz_h = \frac{\partial U}{\partial r_h} dr_h + \frac{\partial U}{\partial \vartheta_h} \partial\vartheta_h \qquad \frac{\partial U}{\partial y_h} dy_h = \frac{\partial U}{\partial r_h} dr_h + \frac{\partial U}{\partial \vartheta_h} d\vartheta_h$$

$$dz_h = \sin\vartheta_h\, dr_h + y_h d\vartheta_h \qquad 0 = \sin\vartheta_h\, dr_h + y_h d\vartheta_h$$

$$0 = \cos\vartheta_h\, dr_h + z_h d\vartheta_h \qquad dy_h = \cos\vartheta_h\, dr_h - z_h d\vartheta_h,$$

woraus

$$\frac{\partial U}{\partial z_h} = \frac{\partial U}{\partial r_h}\sin\vartheta_h + \frac{1}{r_h}\frac{\partial U}{\partial \vartheta_h}\cos\vartheta_h, \qquad \frac{\partial U}{\partial y_h} = \frac{\partial U}{\partial r_h}\cos\vartheta_h - \frac{1}{r_h}\frac{\partial U}{\partial \vartheta_h}\sin\vartheta_h$$

und mithin

$$y_h \frac{\partial U}{\partial z_h} - z_h \frac{\partial U}{\partial y_h} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta_h} \text{ und ebenso } y_k \frac{\partial U}{\partial z_k} - z_k \frac{\partial U}{\partial y_k} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta_k}.$$

Enthält nun U blos die Differenzen $\vartheta_h - \vartheta_k = \xi$, so werden

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta_k} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta_h} = -\frac{\partial U}{\partial \xi}$$

und folglich tilgen sich die den Indices h und k entsprechenden Glieder in $\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i)$. Daher: **wenn eine Kräftefunction U existirt und sie bloss von den Differenzen der Winkel abhängt, welche die Projectionen der Radienvectoren auf die eine Coordinatenebene mit einer der in ihr liegenden Axen bilden, so gilt das Princip der Flächen für diese Coordinatenebene.**

Der Sinn davon, dass U blos Function von den Winkeldifferenzen ist, ist der, dass U sich nicht ändert, wenn man dem System eine virtuelle Drehung um die zur Ebene, wofür das Princip gilt, senkrechte Axe dergestalt ertheilt, dass das System sich wie ein unveränderliches verhält. Dieser Fall tritt ein, wenn in U nur die Entfernungen je zweier Punkte vorkommen. Denn man hat für die Entfernung r_{hk} der Punkte m_h, m_k

$$r_{hk}^2 = (x_h - x_k)^2 + (r_h\cos\vartheta_h - r_k\sin\vartheta_k)^2 + (r_h\sin\vartheta_h - r_k\sin\vartheta_k)^2$$
$$= (x_h - x_k)^2 + r_h^2 + r_k^2 - 2r_h r_k\cos(\vartheta_h - \vartheta_k)$$

und dieser Ausdruck enthält die Winkel ϑ_h, ϑ_k blos in der Verbindung

$\vartheta_h - \vartheta_k$. Wenn daher beim unveränderlichen System U blos von Coordinatendifferenzen abhängt, so gilt immer das Princip der Flächen. Für gegenseitige Attractionen gibt es immer eine Kräftefunction, welche von den Entfernungen abhängt, daher gilt das Princip für alle Ebenen. Es erhellt dies auch daraus, dass alle diese inneren paarweise entgegengesetzt gleichen Kräfte sich bei der Bildung des resultirenden Paares tilgen und dieses selbst mithin verschwindet. Bestehen ausser den gegenseitigen Attractionen noch Attractionen nach festen Centren, so hört das Princip der Flächen auf zu gelten, es sei denn, dass diese Centren alle in gerader Linie liegen. Denn wählt man diese Gerade zur Axe der x und projicirt auf die Ebene senkrecht zu ihr, so liefern die Attractionen nach den Centren in der Projection eine Resultante, welche durch den Ursprung des Coordinatensystems geht und kein resultirendes Paar.

In allen Fällen, in welchen sich alle Kräfte auf eine Einzelresultante reduciren, die durch einen festen Punkt geht, gilt das Princip der Flächen für alle Ebenen.

Ist das System nicht frei, so gilt das Princip nur dann, wenn die Bedingungen und Bedingungskräfte an den genannten zur Existenz des Princips erforderlichen Eigenschaften Theil nehmen. So z. B. wenn die Bedingungsgleichungen blos von den Winkeldifferenzen abhängen, wenn die Verbindungskräfte paarweise gleich und entgegengesetzt sind u. s. w.

§. 7. Das Princip der Flächen gilt auch für die relative Bewegung freier Systeme. Setzt man $x_i = x_1 + \xi_i$, $y_i = y_1 + \eta_i$, $z_i = z_1 + \zeta_i$ in die Gleichungen des §. 5. ein, so wird z. B. die dritte:

$$x_1 \Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_1 \Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - \eta_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)$$
$$= x_1 \Sigma Y_i - y_1 \Sigma X_i + \Sigma(\xi_i Y_i - \eta_i X_i)$$

oder da vermöge des Princips der Bewegung des Massenmittelpunktes

$$\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma X_i,\quad \Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \Sigma Y_i \text{ ist,}$$

$$\Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - \eta_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right) = \Sigma(\xi_i Y_i - \eta_i X_i)$$

Setzt man hierin die Werthe

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 \xi_i}{dt^2},\quad \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{d^2 \eta_i}{dt^2},\quad \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2}$$

ein, so kommt

$$\Sigma m_i \xi_i \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \Sigma m_i \eta_i \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} - \eta_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2}\right) = \Sigma(\xi_i Y_i - \eta_i X_i)$$

Diese Gleichung, sowie die analog gebildeten, vereinfacht sich durch die besondere Wahl des Ursprungs $(x_1 y_1 z_1)$ der relativen Coordinaten. Ist

derselbe der Massenmittelpunkt, oder ein Systempunkt, welcher eine gleichförmige Bewegung hat oder ein Punkt dessen Beschleunigung fortwährend durch den Massenmittelpunkt hindurchgeht, so ist $\Sigma m_i \xi_i = \Sigma m_i \eta_i = 0$, oder $\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2} = 0$ oder $\frac{d^2x_1}{dt^2} : \frac{d^2y_1}{dt^2} : \frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma m_i \xi_i : \Sigma m_i \eta_i : \Sigma m_i \zeta_i$. In allen drei Fällen wird $\Sigma m_i \xi_i \cdot \frac{d^2y_1}{dt^2} - \Sigma m_i \eta_i \cdot \frac{d^2x_1}{dt^2} = 0$ und die obige Gleichung nebst den beiden analogen:

$$\Sigma m_i \left(\eta_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} - \zeta_i \frac{d^2\eta_i}{dt^2}\right) = \Sigma(\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i)$$

$$\Sigma m_i \left(\zeta_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} - \xi_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2}\right) = \Sigma(\zeta_i X_i - \xi_i Z_i)$$

$$\Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d^2y_i}{dt^2} - \eta_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2}\right) = \Sigma(\xi_i Y_i - \eta_i X_i).$$

Da diese Gleichungen dieselbe Form, wie die Gleichungen des §. 1. für die freien Systeme haben, so gelten auch die von dieser Form abhängigen Bedingungen der Existenz des Flächenprincips.

§. 8. Integrirt man die Gleichungen des §. 5. über das Zeitintervall $t - t_0$ hinweg, so erhält man

$$\Sigma m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt}\right) - \left[\Sigma m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt}\right)\right]_{t_0}$$
$$= \Sigma \int_{t_0}^{t} (y_i Z_i - z_i Y_i)\, dt + \Sigma \int_{t_0}^{t} \left(y_i S_z^{(i)} - z_i S_y^{(i)}\right) dt$$

$$\Sigma m_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt}\right) - \left[\Sigma m_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt}\right)\right]_{t_0}$$
$$= \Sigma \int_{t_0}^{t} (z_i X_i - x_i Z_i)\, dt + \Sigma \int_{t_0}^{t} (z_i X_i - x_i Z_i)\, dt$$

$$\Sigma m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}\right) - \left[\Sigma m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}\right)\right]_{t_0}$$
$$= \Sigma \int_{t_0}^{t} (x_i Y_i - y_i X_i)\, dt + \Sigma \int_{t_0}^{t} (x_i Y_i - y_i X_i)\, dt$$

d. h.: *Die Aenderungen, welche die Componenten des resultirenden Paares der Momentankräfte während irgend eines Zeitraumes erfahren, sind die Integrale der Componenten des resultirenden Paares der gegebenen und der Bedingungskräfte, über dieselbe Zeit ausgedehnt.*

Ist $(\alpha\beta\gamma)$ die Richtung einer Axe, multiplicirt man diese drei Gleichungen mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und addirt sie, so ergibt sich:

Die Aenderung der Projection des resultirenden Axenmomentes der Momentankräfte auf irgend eine Axe ist gleich dem Integrale der Projection des Axenmomentes der gegebenen und der Bedingungskräfte auf dieselbe Axe.

Sind daher die gegebenen und die Bedingungskräfte im Gleichgewicht oder reduciren sich dieselben fortwährend auf eine Einzelresultante, so bleibt das resultirende Axenmoment der Momentankräfte constant nach Grösse und Axenrichtung.

Die zu dieser Axe senkrechte Ebene behält während der Bewegung fortwährend dieselbe Stellung im Raume und wurde von Laplace die invariabele Ebene genannt; ihre Normale heisst die invariabele Axe. Die invariabele Ebene ist die §. 5. erwähnte Ebene des Maximums der Flächen. Laplace glaubte sie benutzen zu können, zu finden, ob im Laufe der Zeit im Sonnensystem Stösse vorgekommen sind. Ist das der Fall, so muss ihre Lage sich geändert haben und umgekehrt haben Beobachtungen eine solche Lagenänderung festgestellt, so kann man auf Stösse schliessen. Diese Betrachtungen basiren auf der Voraussetzung, dass das resultirende Paar der auf das Sonnensystem wirkenden Kräfte nahezu Null ist, was für die innern Kräfte genau, für die äussern wegen der grossen Entfernungen sehr nahe zutrifft.

§. 8. Zur näheren Erläuterung des Flächenprincips lassen wir zunächst einige leichte Anwendungen folgen, welche sich den Betrachtungen anschliessen, die wir zur Erläuterung des Princips der Bewegung des Schwerpunktes gegeben haben.

Ein lebendes Wesen befinde sich irgendwo isolirt im Raume, die Einwirkungen der äusseren Kräfte auf dasselbe seien Null und es sei anfangs ruhig. Dass es seinen Schwerpunkt nicht in Bewegung zu setzen vermag, sahen wir bereits früher; allein es kann sich auch nicht einmal um denselben drehen. Denn betrachten wir den Schwerpunkt desselben als Pol, ziehen von diesem nach allen Punkten seines Körpers Radienvectoren und projiciren das ganze System auf irgend eine Ebene, z. B. auf die durch den Schwerpunkt gehende Symmetrieebene. Da das System in Ruhe anfänglich ist, so ist zu Anfang die Summe der Sectoren Null; da das Spiel der Muskeln aber, wie es immer beschaffen sein möge, nur innere Kräfte, welche paarweise gleich und entgegengesetzt sind, zur Ursache haben kann, so muss die Summe der Momente der Momentankräfte constant bleiben und da anfangs alle Geschwindigkeiten Null sind, so ist die Sectorensumme anfangs Null und muss fortwährend Null bleiben. Wenn daher das Wesen einige Theile seines Körpers derart in Bewegung setzt, dass für sie die Sectorensumme beginnt positiv zu werden, so müssen gleichzeitig andere Körpertheile so in Bewegung gerathen, dass die ihnen entsprechende Sectorensumme einen negativen Werth annimmt und hierdurch die ganze Summe auf den ursprünglichen Werthe Null erhalten wird. Wenn z. B. ein Mensch in solcher Lage den Kopf nach rechts dreht, so wird sich der übrige Körper nach links drehen; wenn er das eine Bein vorsetzen will, wird er in Gefahr sein, mit dem anderen rückwärts auszugleiten. Man sieht hieraus, dass wir nur deswegen auf dem Boden vorwärts schreiten können, weil das eine Bein, welches nach rück

wärts ausgleiten will, durch die durch den Druck auf den Boden erregte Reibung an dem Ausgleiten gehindert wird. Auf einem glatten Boden, z. B. einer Eisfläche, findet das Ausgleiten in Wirklichkeit sehr leicht statt.

Ein Tänzer, welcher sich auf der Fussspitze umdrehen will, gibt seinem Oberkörper eine Drehung im einen Sinn, gleichzeitig wird aber sein Unterkörper das Bestreben erlangen, sich im entgegengesetzten Sinne zu drehen; denn nur so kann die Sectorensumme, projicirt z. B. auf die Horizontalebene Null, bleiben. Der Unterkörper würde in Wirklichkeit jene Bewegung annehmen, wenn nicht die Reibung der Fussspitze am Boden als eine neue äussere Kraft hinzuträte und dies hinderte.

§. 9. Die 6 Combinationen der Differentialgleichungen der Bewegung eines beliebigen veränderlichen Systems, welche der Entwicklung der Principe der Bewegung des Massenmittelpunktes und der Flächen zu Grunde lagen, nämlich:

$$\Sigma m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \Sigma X_i + \Sigma S_x^{(i)}$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \Sigma Y_i + \Sigma S_y^{(i)}$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \Sigma Z_i + \Sigma S_z^{(i)}$$

$$\Sigma m_i \left(y_i \frac{d^2z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2y_i}{dt^2}\right) = \Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) + \Sigma\left(y_i S_z^{(i)} - z_i S_y^{(i)}\right)$$

$$\Sigma m_i \left(z_i \frac{d^2x_i}{dt^2} - x_i \frac{d^2z_i}{dt^2}\right) = \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) + \Sigma\left(z_i S_x^{(i)} - x_i S_z^{(i)}\right)$$

$$\Sigma m_i \left(x_i \frac{d^2y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2x_i}{dt^2}\right) = \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) + \Sigma\left(x_i S_y^{(i)} - y_i S_x^{(i)}\right)$$

sind dieselben, wie für das unveränderliche System. Für die Erforschung der Bewegung des letzteren sind sie hinreichend, für das veränderliche aber bestehen ausser ihnen noch $3n - k - 6$ andere. Wir schliessen hieraus, dass auch die aus ihnen abgeleiteten Sätze für alle Systeme gültig sind. In der That leiteten wir aus ihnen auch die beiden eben genannten Principe ab, welche für das unveränderliche System bereits früher erwiesen wurden und sie liefern für das veränderliche System Integrale der Bewegungsgleichungen, wie für das unveränderliche. Beim unveränderlichen System liessen sich nun Kräfte und Paare verlegen und zusammensetzen und war die Wirkung der zusammengesetzten Kraftgebilde dieselbe, wie die der ursprünglichen. Beim veränderlichen System hört diese Aequivalenz auf; indessen behält die Zusammensetzung von Kräften und Paaren, überhaupt die Reduction von Kräften auch hier nichtsdestoweniger eine Bedeutung. So z. B. die Unveränderlichkeit der Resultanten und des resultirenden Paares der Momentankräfte, wenn die entsprechenden Gebilde der continuirlichen Kräfte verschwinden.

§. 10. Combiniren wir die Differentialgleichungen

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i + S_x^{(i)}, \qquad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i + S_y^{(i)}, \qquad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i + S_z^{(i)}$$

so, dass wir sie der Reihe nach mit den ersten Differentialquotienten der Coordinaten multiplicirt addiren und hierauf durch das ganze System summiren, so kommt

$$\Sigma m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt} + \frac{dy_i}{dt}\frac{d^2y_i}{dt^2} + \frac{dz_i}{dt}\frac{d^2z_i}{dt^2}\right) = \Sigma\left(X_i \frac{dx_i}{dt} + Y_i \frac{dy_i}{dt} + Z_i \frac{dz_i}{dt}\right)$$
$$+ \Sigma\left(S_x^{(i)} \frac{dx_i}{dt} + S_y^{(i)} \frac{dy_i}{dt} + S_z^{(i)} \frac{dz_i}{dt}\right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nur der Differentialquotient

$$\frac{d}{dt} \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma\left\{m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt^2}\right)^2\right\} = \frac{d}{dt} \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2,$$

die zweite Summe rechts aber hat die Bedeutung

$$\Sigma\left(S_x^{(i)} \frac{dx_i}{dt} + S_y^{(i)} \frac{dy_i}{dt} + S_z^{(i)} \frac{dz_i}{dt}\right) = \lambda \Sigma\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right)$$
$$+ \mu \Sigma\left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial M}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial M}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right) + \ldots$$

wenn $L = 0$, $M = 0$, ... die Bedingungsgleichungen des Systems sind.

Sind nun diese Bedingungen nicht mit der Zeit veränderlich, so enthalten L, M, ... die Zeit nicht explicit und erhält man

$$\Sigma\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right) = 0, \quad \Sigma\left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial M}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial M}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right) = 0, \ldots$$

es verschwindet also auch die zweite Summe rechter Hand in jener Gleichung. Dagegen hat man

$$\Sigma\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right) + \frac{\partial L}{dt} = 0,$$
$$\Sigma\left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial M}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial M}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right) + \frac{\partial M}{\partial t} = 0, \ldots$$

wenn dies nicht der Fall ist und z. B. einzelne Punkte sich auf veränderlichen Flächen oder Curven bewegen, vielmehr wird dann die zweite Summe rechts

$$-\lambda \frac{\partial L}{\partial t} - \mu \frac{\partial M}{\partial t} - \cdots$$

Mit Ausschluss dieses letzteren Falles erhält man also die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = \Sigma\left(X_i \frac{dx_i}{dt} + Y_i \frac{dy_i}{dt} + Z_i \frac{dz_i}{dt}\right)$$

oder

$$d \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = \Sigma(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i).$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Elementaränderung der halben lebendigen Kraft des Systems und die Elementararbeitssumme aller Kräfte P_i längs der von ihren Angriffspunkten durchlaufenen Bogenelementen gleich sind. In dieser Gleichung erscheinen die Kräfte, welche die Bedingungen des Systems zu vertreten geeignet sind, nicht, da ihre Elementararbeit Null ist, indem sie senkrecht zu den Wegen ihrer Angriffspunkte wirken. Bezeichnet T die Summe der Arbeiten, welche von einer beliebigen Anfangslage des Systems an gerechnet bis zur Lage, wo die Geschwindigkeiten v_i sind, geleistet würden, so ist dT die Elementararbeit für den Uebergang in die nächste Lage und also $dT = \Sigma(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$. Daher wird

$$d \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = dT$$

und wenn man integrirt von einer Lage, wo die Geschwindigkeiten $v_0^{(i)}$ sind, bis zur Lage, wo sie die Werthe v_i haben:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_0^{(i)2} = T - T_0,$$

d. h. die Aenderung der halben lebendigen Kraft des Systems beim Uebergang aus einer Lage in die andere ist gleich der Aenderung, welche die totale Arbeit der Kräfte während dieses Ueberganges erleidet. (Princip der Aequivalenz zwischen Arbeit und lebendiger Kraft.)

Existirt eine Kräftefunction U der Coordinaten, so dass $X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$, $Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}$, $Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}$, so wird

$$d \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = dU, \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = U + h,$$

d. h. wenn eine Kräftefunction existirt und die Bedingungen des Systems von der Zeit unabhängig sind, so ist die halbe lebendige Kraft des Systems gleich der Kräftefunction, vermehrt um eine Constante. (Princip der lebendigen Kraft.)

Bezieht man die vorstehende Gleichung auf zwei Lagen des Systems, welchen die Werthe U_0, $v_0^{(i)}$; U, v_i entsprechen, so erhält man durch Elimination der Constanten h

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_0^{(i)2} = U - U_0,$$

d. h. beim Uebergange des Systems aus einer ersten Lage in eine zweite ist die Aenderung der halben lebendigen Kraft gleich der Differenz der Werthe, welche die Kräftefunction für diese Lagen annimmt.

Da die Kräftefunction eine Function der Coordinaten ist, so nimmt sie denselben Werth an, so oft das System in dieselbe Lage zurückkehrt. Daher ist auch die lebendige Kraft des Systems dieselbe bei der Rückkehr zu derselben Lage. Von der Art der Bewegung des Systems zwischen beiden Lagen und der Zeit, welche zum Uebergang aus

der einen in die andere verwandt wird, ist das Princip der lebendigen Kraft unabhängig, wie von den Bedingungen des Systems.

Es ist $dT = dU$, $T = U + h$.

Man erhält das Princip der lebendigen Kraft auch aus der Gleichung

$$\Sigma\left\{\left(m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} - X_i\right)\delta x_i + \left(m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} - Y_i\right)\delta y_i + \left(m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} - Z_i\right)\delta z_i\right\}$$
$$= \Sigma\left(S_x^{(i)}\delta x_i + S_y^{(i)}\delta y_i + S_z^{(i)}\delta z_i\right)$$

indem man für die willkührlichen virtuellen Verschiebungen die durch die wirkliche Bewegung des Systems erfolgenden nimmt, d. h. $\delta x_i = dx_i$, $\delta y_i = dy_i$, $\delta z_i = dz_i$ setzt. Dies liefert

$$\Sigma m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}dx_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}dy_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}dz_i\right) = \Sigma(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

da die Summe rechter Hand verschwindet. Die linke Seite dieser Gleichung ist aber $d\,.\,\frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2$ u. s. w.

§. 11. Zwischen der lebendigen Kraft der absoluten Bewegung des Systems und der lebendigen Kraft seiner relativen Bewegung bezüglich des Massenmittelpunktes besteht eine sehr einfache Beziehung. Sind x_1, y_1, z_1 Coordinaten dieses Punktes, ξ_i, η_i, ζ_i die relativen Coordinaten von m_i in Bezug auf ihn, so dass $x_i = x_1 + \xi_i$, $y_i = y_1 + \eta_i$, $z_i = z_1 + \zeta_i$, so wird

$$\Sigma m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Sigma m_i\left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\}$$
$$= \Sigma m_i\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\}$$
$$+ \Sigma m_i\left\{\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right\}$$
$$+ 2\,\Sigma m_i\left\{\frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi_i}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\eta_i}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\zeta_i}{dt}\right\}.$$

Die erste Summe zur Rechten ist, wenn v_1 die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes ist, $\frac{1}{2}Mv_1^2$, d. h. die halbe lebendige Kraft, welche dieser Punkt besitzen würde, wenn in ihm die ganze Masse des Systems vereinigt wäre, die zweite Summe aber ist, wenn u_i die relative Geschwindigkeit des Systempunktes m_i ist, $\frac{1}{2}\Sigma m u_i^2$; die dritte Summe aber verschwindet, da $\Sigma m\xi_i = 0$ und mithin $\Sigma m_i \frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dx_1}{dt}\Sigma m_i \frac{d\xi_i}{dt} = 0$ ist u. s. w. Daher bleibt

$$\Sigma m_i v_i^2 = M v_1^2 + \Sigma m_i u_i^2$$

d. h. Die lebendige Kraft der absoluten Bewegung ist gleich der lebendigen Kraft der relativen Bewegung in Bezug auf den Massenmittelpunkt, zusammen mit der absoluten leben

digen Kraft, welche dieser Punkt besitzen würde, wenn in ihm die ganze Masse des Systems vereinigt wäre.

Wir haben hiebei eine relative Bewegung in Bezug auf ein in Translation begriffenes System zu Grunde gelegt, man sieht aber sofort, dass der Satz auch für eine beliebige Bewegung gilt, auf welche man die Bewegung des Systems bezieht; wenn man nämlich

$$x_i = x_1 + a\xi_i + a'\eta_i + a''\zeta_i, \ldots.$$

setzt.

Man kann hiemit das Princip der lebendigen Kraft auf die relative Bewegung bezüglich des Massenmittelpunktes ausdehnen. Führt man nämlich die obige Substitution $x_i = x_1 + \xi_i$, $y_i = y_1 + \eta_i$, $z_i = z_1 + \zeta_i$ in die Gleichung des Princips ein, so kommt

$$d \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = (dx_1 \Sigma X_i + dy_1 \Sigma Y_i + dz_1 \Sigma Z_i) + \Sigma(X_i d\xi_i + Y_i d\eta_i + Z_i d\zeta_i).$$

Aus den Gleichungen

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X_i, \qquad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y_i, \qquad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z_i,$$

welche bestehen, wenn das System frei oder solchen Bedingungen unterworfen ist, deren Kräfte, an einen Punkt verlegt, sich Gleichgewicht halten, folgt

$$d \cdot \tfrac{1}{2}Mv_1^2 = dx_1 \Sigma X_i + dy_1 \Sigma Y_i + dz_1 \Sigma Z_i$$

und da in Folge der oben entwickelten Relation

$$d \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = d \cdot \tfrac{1}{2}Mv_1^2 + d \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma m_i u_i^2$$

ist, so ergibt sich

$$d \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma m_i u_i^2 = \Sigma(X_i d\xi_i + Y_i d\eta_i + Z_i d\zeta_i)$$

d. h. die Aenderung der halben relativen lebendigen Kraft bezüglich des Massenmittelpunktes ist gleich der relativen Elementararbeit der gegebenen Kräfte.

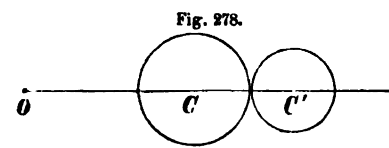
§. 12. Wenn für ein System von n Punkten die höchstmögliche Anzahl von Bedingungen, nämlich $3n - 1$ besteht, so genügt das Princip der lebendigen Kraft, um die Bewegung aller Systempunkte zu bestimmen. Denn dasselbe liefert ein Integral der Bewegungsgleichungen, welches in Verbindung mit den Bedingungen $3n$ Gleichungen liefert, durch welche die Coordinaten aller Punkte als Functionen der Zeit erhalten werden. Dies findet z. B. bei dem unveränderlichen System mit einer festen Axe statt. Die Unveränderlichkeit desselben erfordert $3n - 6$, die Festigkeit der Axe aber fünf Bedingungen. Da nämlich zwischen zwei festen Punkten der Axe bereits constanter Abstand besteht, so werden ausser dieser bereits in den $3n - 6$ Bedingung mit inbegriffenen Bedingungen zur Unveränderlichkeit der sechs Coordinaten dieser Punkte blos noch fünf Bedingungen erfordert. Zusammen hat man also $3n - 6 + 5 = 3n - 1$ Bedingungen, zu welchen das Integral, welches die lebendige Kraft liefert, die noch fehlende Gleichung hinzufügt. So z. B. beim zusammengesetzten Pendel (S. 845), wo die letzte der Bewegungsgleichungen die Gleichung der lebendigen Kraft ist.

§. 13. Als Anwendung der Principe der Bewegung des Massenmittelpunktes und der lebendigen Kraft behandeln wir den geraden Stoss sphärischer Körper.

1. Es seien gegeben zwei homogene oder concentrisch geschichtete Kugeln, in Translation begriffen und zwar so, dass ihre Schwerpunkte dieselbe Gerade in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne durchlaufen. Die beiden Körper mögen zusammentreffen; dabei geht eine Formveränderung derselben vor sich, welche eine Folge der gegenseitigen Einwirkungen der Moleküle auf einander ist. Obgleich die Bestimmung der Bewegung des einzelnen Moleküls sehr complicirt sein wird, lässt sich doch leicht die Bewegung der Schwerpunkte ermitteln. Dabei sind aber zwei Fälle zu sondern. 1. Die Körper sind absolut unelastisch; dann drücken sie sich zusammen, bis die Geschwindigkeiten sich ausgeglichen haben und gehen sie von diesem Momente an mit gemeinschaftlicher Geschwindigkeit weiter, indem sie sich berühren und die durch den Stoss veränderte Gestalt beibehalten. 2. Die Körper sind vollkommen elastisch. In diesem Falle nehmen sie von dem Momente, wo die Zusammendrückung aufhört und die Geschwindigkeiten gleich geworden sind, allmählich ihre alte Gestalt wieder an, indem sie in entgegengesetztem Sinne auf einander einwirken und in Folge dieser abstossenden Einwirkung sich trennen. Zwischen diesen beiden Grenzfällen der absolut unelastischen Beschaffenheit und der vollkommenen Elasticität liegen alle Fälle des grösseren oder geringeren Grades der Elasticität, in welchen die Körper nicht genau in die frühere Form zurückkehren. Während bei vollkommen elastischen Körpern die Periode von dem Moment des Maximums der Zusammendrückung bis zu dem Momente der Trennung der Periode vom Moment der Berührung bis zur grössten Zusammendrückung vollkommen gleich ist und in ihr alle Erscheinungen genau ebenso, wie in jener, nur in umgekehrter Ordnung eintreten, ist dies bei weniger elastischen Körpern nicht mehr der Fall und für unelastische Körper ist diese zweite Periode vollständig auf Null herabgesunken.

2. Betrachten wir nun die Körper zu irgend einer Zeit t im Laufe des Stosses; x, x' seien die Abscissen der Mittelpunkte C, C' derselben von irgend einem Punkte O (Fig. 278.) der Centralen gemessen und m, m' ihre Massen. Die Kugel C ist ein System, auf welches die Molecüle der Kugel C' mit Kräften einwirken, welche vermöge der symmetrischen Beschaffenheit des Systems eine Resultante liefern, deren Richtung in die Centrale fällt; die Kugel C' ist ebenso ein System, auf welches C einwirkt und da die Einwirkungen je zweier Molecüle gegenseitig gleich sind, so ist die Resultante, welche an C' angreift, jener an C angreifenden entgegengesetzt gleich. Ist also R ihr gemeinsamer Werth, so erhalten wir für die Bewegung der Schwerpunkte beider Körper nach dem Princip von der Bewegung des Massenmittelpunktes die Gleichungen:

Fig. 278.



$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -R, \qquad m' \frac{d^2x'}{dt^2} = R.$$

Aus ihnen folgt durch Addition:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m' \frac{d^2x'}{dt^2} = 0$$

und hieraus weiter durch Integration:

$$m \frac{dx}{dt} + m' \frac{dx'}{dt} = Const.$$

Es bleibt also die Summe der Momentankräfte fortwährend constant und besteht, wenn v, v' die Geschwindigkeiten zu Anfang des Stosses sind, während der ganzen Bewegung die Gleichung

$$m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = mv + m'v'.$$

Sind nun die **Kugeln vollkommen unelastisch** und ist u ihre gemeinsame Geschwindigkeit im Momente des Maximums der Zusammendrückung, so ist $(m + m')u$ die Summe der Bewegungsgrössen für diesen Moment und erhält man aus der Gleichung $(m + m')u = mv + m'v'$ für die gemeinsame Geschwindigkeit, mit welcher beide Körper nach dem Stosse weitergehen:

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

Hierbei können v, v' gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, auch kann die eine von diesen Grössen Null sein. Gehen die Körper mit entgegengesetzt gleichen Momentankräften gegen einander, so wird $u = 0$ und gelangen sie zur Ruhe.

3. Sind die **Kugeln vollkommen elastisch**, so bedürfen wir zur Bestimmung der Geschwindigkeiten V, V', mit welchen sich die Körper trennen, neben dem vorigen Satze noch eines anderen. Zu dem Ende multipliciren wir die beiden Gleichungen für die Bewegung der Schwerpunkte mit $2\frac{dx}{dt}$, $2\frac{dx'}{dt}$ und addiren sie. Dadurch kommt

$$\frac{d\cdot\left\{m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2\right\}}{dt} = 2R\frac{d(x'-x)}{dt},$$

oder wenn wir die relative Entfernung $x' - x$ der Schwerpunkte mit r bezeichnen und vom Anfange des Stosses, wo dieselbe r_0 sei bis zu irgend einem Momente des Stosses, wo sie r beträgt, integriren, so folgt:

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 - [mv^2 + m'v'^2] = 2\int_{r_0}^{r} R\,dr.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Aenderung der lebendigen Kraft vor Beginn des Stosses bis zu irgend einem Momente gleich der doppelten Arbeit ist, welche die Stosskräfte R während dieser Zeit geleistet haben. Beziehen wir nun diese Gleichung auf das Ende des Stosses, wo sich die Körper trennen, so wird für vollkommen elastische Körper das Integral rechter Hand Null, denn während der ersten Periode des Stosses findet Zusammendrückung statt und ist folglich dr und also auch Rdr und der Werth des Integrales, ausgedehnt über diese Periode, negativ; in der zweiten Periode ist dr positiv, hat Rdr die entgegengesetzt gleichen Werthe, wie vorher und ist das Integral ausgedehnt über diese Periode dem vorigen entgegengesetzt gleich. Daher ist das Integral ausgedehnt über die ganze Stosszeit Null und erhalten wir die Gleichung:

$$mV^2 + m'V'^2 = mv^2 + m'v'^2,$$

d. h. **bei vollkommen elastischen Körpern ist die lebendige Kraft nach wie vor dem Stosse dieselbe.** Bei unelastischen oder nicht vollkommen elastischen Körpern ist das Integral über die Stosszeit ausgedehnt negativ und findet folglich ein Verlust an lebendiger Kraft statt gleich der doppelten Arbeit der molecularen Kräfte.

Die folgenden beiden Gleichungen, von denen die erste die auf das Ende des Stosses angewandte obige Gleichung der Momentankräfte ist, nämlich

$$mV + m'V' = mv + m'v'$$
$$mV^2 + m'V'^2 = mv^2 + m'v'^2$$

dienen zur Bestimmung der Geschwindigkeiten V, V', mit welchen sich zwei vollkommen elastische Kugeln trennen. Indem man sie so schreibt:

$$m(V^2 - v^2) = m'(v'^2 - V'^2)$$
$$m(V - v) = m'(v' - V')$$

und in einander dividirt, sieht man, dass sie äquivalent sind mit

$$mV + m'V' = mv + m'v'$$
$$V - V' = -v + v'$$

und aus ihnen erhält man

$$(m + m')V = (m - m')v + 2m'v'$$
$$(m' + m)V' = (m' - m)v' + 2mv,$$

von welchen Gleichungen die eine aus der anderen durch Vertauschung von m, v, V und m', v', V' hervorgeht. Addirt und subtrahirt man rechts mv, resp. $m'v'$ und berücksichtigt $mv + m'v' = (m + m')u$, so erhält man weiter:

$$V = 2u - v, \quad V' = 2u - v'; \quad u = \frac{V + v}{2} = \frac{V' + v'}{2};$$

es ist mithin die Geschwindigkeit im Momente des Maximums der Compression das arithmetische Mittel aus den Geschwindigkeiten eines jeden der Körper zu Anfang und Ende des Stosses.

4. Als spezielle Fälle heben wir folgende hervor. 1. Es sei C' in Ruhe, also $v' = 0$; sind die Körper unelastisch, so ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stosse $u = \frac{mv}{m + m'}$; u wird Null, wenn $m' = \infty$ wird, d. h. die ruhende Masse ein unendlich grosser eben begrenzter Körper ist (näherungsweise für das Auffallen eines Körpers auf den Erdboden giltig). Sind die Körper vollkommen elastisch, so wird $V = \frac{m - m'}{m + m'}v$, $V' = \frac{2m}{m + m'}v$; für $m' = \infty$ wird $V = -v$, $V' = 0$, der Körper C prallt von C' mit derselben Geschwindigkeit zurück. (Auffallen einer elastischen Kugel auf eine feste elastische Ebene.) — 2. Die Massen der beiden Kugeln seien gleich. Für unelastische Körper ist dann $u = \frac{1}{2}(v + v')$; für elastische wird $V = v'$, $V' = v$, d. h. die Körper gehen mit verwechselten Geschwindigkeiten nach dem Stosse weiter, ist also der eine in Ruhe, so geht er nach dem Stosse mit der Geschwindigkeit des anderen weiter, während dieser zur Ruhe gelangt. (Anwendung hiervon auf die geradlinige Reihe elastischer Kugeln gleicher Masse.)

5. Es seien gegeben zwei vollkommen elastische Kugeln von den Massen m, m' (Fig. 279.), man sucht die Masse μ einer dritten gleichfalls vollkommen elastischen Kugel von der Eigenschaft, dass, wenn die Mittelpunkte der drei Kugeln in gerader Linie liegen, sodass μ zwischen m, m' sich befindet, die Kugel m mit der Geschwindigkeit V auf die ruhende Kugel μ treffend, dieser eine solche Geschwindigkeit ertheilt, dass sie beim Stosse auf die gleichfalls ruhende Kugel m' letztere mit der grösstmöglichen Geschwindigkeit forttreibt.

Fig. 279.

Die Geschwindigkeit ω, welche μ durch m erlangt, ist $\omega = \frac{2mV}{m + \mu}$, die Geschwindigkeit, welche m' von μ erhält, $V' = \frac{2m\omega}{\mu + m'}$, folglich nach Elimination von ω:

$$V' = 4mV \cdot \frac{\mu}{(m + \mu)(\mu + m')} = 4mV \cdot \frac{1}{\mu\left(1 + \frac{m}{\mu}\right)\left(1 + \frac{m'}{\mu}\right)};$$

daher muss die Function $\mu\left(1+\frac{m}{\mu}\right)\left(1+\frac{m'}{\mu}\right)$ ein Minimum werden. Dies führt zu der Bedingung $1-\frac{mm'}{\mu^2}=0$, d. h. $\mu=\sqrt{mm'}$. Es muss demnach die Masse der eingeschalteten Kugel das geometrische Mittel zwischen den Massen der gegebenen Kugeln sein.

Soll zwischen m und m' eine ganze Reihe von Kugeln $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ eingeschalten werden, sodass jede folgende, also auch die letzte, mit dem Maximum der Geschwindigkeit fortgetrieben wird, so wird

$$\mu_1^2 = m\mu_2,\quad \mu_2^2=\mu_1\mu_3,\quad \mu_3^2=\mu_2\mu_4, \ldots \quad \mu_i^2=\mu_{i-1}\mu_{i+1}, \ldots \quad \mu_n^2=\mu_{n-1}m'$$

und hieraus folgt $\frac{\mu_1}{m}=\frac{\mu_2}{\mu_1}=\frac{\mu_3}{\mu_2}=\ldots=\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}=\frac{m'}{\mu_n}=\varepsilon$, wenn ε der gemeinschaftliche Werth des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Kugeln ist. Multiplicirt man diese $n+1$ Gleichungen von der Form $\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}=\varepsilon$ mit einander, so hat man $\varepsilon^{n+1}=\frac{m'}{m}$, also die geometrische Progression $\mu_1=\varepsilon m$, $\mu_2=\varepsilon^2 m$, $\mu_3=\varepsilon^3 m, \ldots \mu_n=\varepsilon^n m$, wo $\varepsilon=\left(\frac{m'}{m}\right)^{\frac{1}{n+1}}$.

6. Bei vollkommen elastischen Körpern findet kein Verlust an lebendiger Kraft statt, wohl aber bei unelastischen. Um diesen Verlust δ zu bestimmen, hat man

$$\delta = mv^2 + m'v'^2 - (m+m')u^2.$$

Addirt und subtrahirt man $2(m+m')u^2$, so wird

$$\begin{aligned}\delta &= mv^2 + m'v'^2 + (m+m')u^2 - 2(m+m')u\cdot u\\ &= mv^2 + m'v'^2 + (m+m')u^2 - 2(mv+m'v')u,\end{aligned}$$

da

$$(m+m')u = mv + mv'.$$

Indem man zusammenzieht, nimmt δ die Form an:

$$\delta = m(v-u)^2 + m'(u-v')^2.$$

$v-u$ und $u-v'$ sind Gewinn oder Verlust an Geschwindigkeit der Körper; demnach ist der Verlust an lebendiger Kraft gleich der Summe der lebendigen Kräfte, welche man mit den gewonnenen und verlorenen Geschwindigkeiten der Körper bilden kann. Setzt man in die Formel für δ den Werth von u, nämlich $u=\frac{mv+m'v'}{m+m'}$ ein, so kann man δ unter der Form

$$\delta = \frac{mm'}{m+m'}(v-v')^2$$

darstellen. Der vorliegende Satz ist ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes über den Verlust an lebendiger Kraft eines Systems durch Stösse, welchen Carnot zuerst aufgestellt hat.

7. Es sei X die Abscisse des Massenmittelpunktes der beiden Kugeln zusammen als ein System betrachtet; für ihn besteht die Gleichung:

$$(m+m')X = mx + mx'.$$

X ist eine Function der Zeit, wie x, x' und erhält man die Geschwindigkeit $\frac{dX}{dt}$ des Massenmittelpunktes aus der Gleichung $(m+m')\frac{dX}{dt}=m\frac{dx}{dt}+m\frac{dx'}{dt}$. Die rechte Seite ist die Summe der Momentankräfte und da diese durch den Stoss

nicht geändert wird, so folgt, dass der Stoss auf die Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes beider Kugeln keinen Einfluss hat.

§. 13. **Der schiefe Stoss sphärischer Körper.** Die beiden Kugeln C, C' mögen zwei geradlinige Translationsbewegungen besitzen, aber so, dass die Schwerpunkte verschiedene gerade Linien beschreiben; ihre Geschwindigkeiten seien constant. Die Kugeln sollen im Laufe ihrer Bewegung zusammentreffen, es fragt sich, wie wird ihre Bewegung durch den Stoss geändert? In dem Moment des Zusammentreffens zerlegen wir ihre Geschwindigkeiten jede in zwei Componenten, von denen die eine in die Richtung der gemeinschaftlichen Normalen CC' der Berührungsstelle fällt und resp. v, v' heissen soll und eine andere r, r' parallel der Berührungsebene. Blos die ersteren Componenten werden durch den Stoss geändert, die geänderten setzen sich hierauf wieder mit r, r' zusammen und liefern die Geschwindigkeiten V, V', mit welchen die Körper nach dem Stosse weiter gehen. Bei unelastischen Körpern ist daher die gemeinsame Normalgeschwindigkeit

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

und diese ist mit r, resp. r' zu combiniren, um V, V' zu finden. Bei vollkommen elastischen Körpern dagegen sind die Normalcomponenten N, N' nach dem Stosse:

$$N = \frac{(m - m')v + 2m'v'}{m + m'}, \quad N' = \frac{(m' - m)v' + 2mv}{m' + m},$$

welche resp. mit r, r' zusammentreten.

Ist m' ursprünglich in Ruhe, also $v' = 0$, $r' = 0$, so wird

$$N = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot v, \quad N' = \frac{2m}{m + m'} \cdot v$$

und für $m' = \infty$ wird $N = -v$, $N' = 0$. Combinirt man in diesem letzteren Falle $N = -v$ mit r, so folgt das Reflexionsgesetz, nämlich: wenn eine vollkommen elastische Kugel auf eine feste vollkommen elastische Platte trifft, so bleibt die Geschwindigkeit ihres Schwerpunktes constant; ihre Richtung bildet vor und nach dem Auffallen gleiche Winkel mit der Platte.

Sind die Massen gleich, so ergibt sich $N = v'$, $N' = v$; die Kugeln gehen mit vertauschten Normalcomponenten der Geschwindigkeiten weiter.

§. 14. Wir wollen als weitere Anwendung des Princips der lebendigen Kraft mit dessen Hülfe die Wirkungsweise der Kräfte an einer Maschine und deren Gang untersuchen. Eine Maschine ist ein System, an welchem Kräfte wirken mit Bedingungen, welche als von der Zeit unabhängig angesehen werden. Daher gilt für sie die Gleichung $\frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 - \frac{1}{2}\Sigma m_i v_0^{(i)2} = T - T_0$, wenn auch wegen Reibungen u. s. w. eine Kräftefunction nicht existirt. Die Maschinen gestatten aber nicht beliebige virtuelle Verschiebungen, sondern in der Regel nur eine, aber meistens in doppeltem Sinne (vorwärts und rückwärts); es ist daher die Bewegung aller Systempunkte bestimmt, sobald die eines derselben bekannt ist, daher wird auch nur eine einzige Gleichung zur Bestimmung der Bewegung der Maschine erfordert und hierzu kann die Gleichung der lebendigen Kraft benutzt werden.

Die Kräfte, welche an einer Maschine wirken, sind doppelter Art. 1. solche, welche eine positive Elementararbeit leisten, indem sie die Punkte, an welchen sie angreifen, beschleunigen und mit der Richtung der Wegelemente derselben spitze Winkel bilden; sie heissen Motoren und sind z. B. die Dampfkraft, Wasserdruck, Wärme, Electricität, der Wind, die Schwere, die Elasticität, die Muskel-

kraft der Menschen und Thiere u. s. w. Die Motoren wirken auf einen besonderen Maschinenbestandtheil, welcher der Receptor genannt wird (bei einer Wassermühle sind es die Schaufeln, bei der Dampfmaschine die Kolben, bei vielen einfacheren ist es ein Handgriff oder ein Fusstritt u. s. w.). Die 2. Art der Kräfte sind solche, deren Arbeit negativ ist, indem ihre Angriffspunkte zurückweichen und sie mit den Wegelementen derselben stumpfe Winkel bilden. Diese Kräfte heissen Widerstände; sie werden geleistet von den Körpern, welche mit Hülfe der Wirkung der Motoren durch die Maschine umgeformt werden sollen oder werden zum Theil durch die Berührung der Maschinentheile unter einander oder mit der umgebenden Luft u. s. w. erregt. Der Maschinentheil, welcher mit den zu deformirenden Körpern in Berührung kommt, an welchem also die erstgenannten Widerstände angreifen, heisst das Werkzeug oder bei grösserem Umfange der Maschine die Arbeitsmaschine, und besteht oft selbst aus einem ganzen System von Arbeitsmaschinen.

Die Arbeit der Motoren heisst die bewegende Arbeit, die Arbeit der Widerstände die widerstehende Arbeit. Die Bestimmung der Maschine selbst ist die, die Motoren und Widerstände überhaupt in Verbindung zu setzen oder wie man sich ausdrückt, die Arbeit der Motoren zu übertragen. Der Maschinentheil, welcher zu diesem Ende den Receptor mit der Arbeitsmaschine verbindet, heisst die Transmission der Maschine. Bezeichnen wir die bewegende Arbeit, die während des Laufes der Maschine geleistet wird, indem die Geschwindigkeiten $v_0^{(i)}$ in v_i übergehen, mit T_m und die gleichzeitig geleistete Arbeit der Widerstände mit $-T_r$, so ist $T - T_0 = T_m - T_r$ und kann die Gleichung der lebendigen Kraft geschrieben werden:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_0^{(i)2} = T_m - T_r\,.$$

Wir wollen jetzt verschiedene Annahmen über den Gang der Maschine machen und zusehen, wie sich hierbei die Arbeiten der Motoren und Widerstände verhalten. Es sei von einem gewissen Zeitpunkte an die Bewegung der Maschine gleichförmig und die Geschwindigkeiten v_i also constant gleich $v_0^{(i)}$; dann ist die linke Seite der Gleichung Null und folglich $T_m = T_r$, es nimmt also während dieses Intervalls die Arbeit der Motoren und Widerstände um dieselbe Grösse zu oder es wird die Arbeit der Motoren vollständig aufgebraucht, um eine gleichgrosse Arbeit der Widerstände zu tilgen. Umgekehrt ergibt sich, dass, so lange $T_m = T_r$ bleibt, die Bewegung der Maschine gleichförmig bleibt, weder beschleunigt, noch verzögert wird. Denn man kann vermöge des bekannten Zusammenhanges der Systempunkte alle Geschwindigkeiten auf der linken Seite der Gleichung durch eine von ihnen ausdrücken und diese muss folglich constant bleiben, wenn die linke Seite der Gleichung auf dem Werthe Null erhalten werden soll; was aber von ihr gilt, gilt von jeder, folglich u. s. w. Wird der Gang der Maschine innerhalb eines Zeitintervalles beschleunigt, so wächst die linke Seite der Gleichung, also muss während desselben $T_m > T_r$ sein und umgekehrt; einem Ueberschuss der Arbeit der Motoren über die der Widerstände entspricht nothwendig eine Zunahme der Geschwindigkeit. Ebenso entspricht einer Verlangsamung der Bewegung ein Ueberschuss von T_r über T_m und umgekehrt. Aus dieser Wechselbeziehung zwischen dem Gange der Maschine und der Arbeit der Motoren und Widerstände ergibt sich, dass wenn die Arbeit der Motoren sämmtlich auf die Tilgung der Arbeit der Widerstände verwandt werden soll, man die Maschine in gleichförmiger Bewegung erhalten muss, dass jeder Ueberschuss von Arbeit der Motoren, der nicht auf die Tilgung eines entsprechenden Aequivalentes

von Arbeit der Widerstände verwandt wird, eine Beschleunigung der Bewegung der Maschine (Vermehrung der lebendigen Kraft) und jeder Defect von Arbeit der Motoren eine Verlangsamung (Abnahme der lebendigen Kraft) zur nothwendigen Folge hat. Man sieht hieraus, in welchem Sinne die Redensart gemeint ist, wenn man sagt, die Maschine verhalte sich wie ein Reservoir, in welches Arbeit der Motoren eintritt und unter der Form von lebendiger Kraft wieder ausgegeben wird.

Nicht immer aber ist es möglich, den Gang der Maschine so gleichförmig zu erhalten, dass in jedem Zeitelemente die Arbeit der Motoren die Arbeit der Widerstände tilgt; ist dieser ideale Zustand nicht herbeizuführen, so sucht man eine periodische Bewegung der Maschine zu erreichen. Es tilgen sich dann wenigstens in jeder Periode für sich die beiderlei Arbeiten; denn zu Anfang und zu Ende der Periode haben die Geschwindigkeiten dieselben Werthe, also ist die linke Seite der Gleichung, wenn man sie auf die ganze Periode bezieht, Null und folglich während derselben im Ganzen $T_m = T_r$. Dass ein gleichförmiger oder ein periodischer Gang der Maschine mit möglichst kurzer Periode wünschenswerth ist, liegt am Tage. Denn durch die Tilgung der Arbeit der Widerstände wird ein Fabrikat geliefert, dessen Erzeugung der Zweck der Anwendung der Maschine ist; die Beschleunigung der Bewegung hat daher keinen Nutzen, vielmehr muss die Arbeit der Motoren vollständig dem Zwecke entsprechend ausgebeutet werden. Andererseits hat der gleichförmige Gang der Maschine auf die egale Beschaffenheit und damit auf den Werth des Fabrikates Einfluss.

Beziehen wir jetzt die Gleichung der lebendigen Kraft auf den ganzen Zeitraum vom Anfang der Bewegung der Maschine bis zum Stillstand derselben. Anfangs sind alle Geschwindigkeiten Null, am Ende auch, mithin ist die linke Seite der Gleichung Null und daher $T_m = T_r$, d. h. während des ganzen Laufes der Maschine tilgen sich die Arbeiten beiderlei Kräfte vollständig; es wird nichts an Arbeit gewonnen, nichts verloren. Man kann den ganzen Lauf der Maschine in drei Epochen zerlegen: 1. den Anlauf, vom Beginn der Bewegung bis zu dem Momente, mit welchem eine gleichförmige oder eine periodische Bewegung eintritt, 2. den Mittellauf, die Zeit der gleichförmigen oder periodischen Bewegung und 3. den Endlauf, die Zeit vom Schluss der letzteren Periode bis zum Stillstande. Während des Anlaufes wächst die lebendige Kraft von Null an und daher ist während dieses Zeitraumes in jedem Moment und im Ganzen die Arbeit der Motoren grösser als die der Widerstände, der Ueberschuss bringt die Maschine „in den Gang". Während des Mittellaufs ist in jedem Momente oder wenigstens für jede Periode die Arbeit der Motoren gleich der Arbeit der Widerstände; während des Endlaufes ist die linke Seite der Gleichung negativ, die lebendige Kraft nimmt bis zu Null ab und es geschieht dies in Folge des Nachlassens oder Aufhörens der Wirkung der Motoren.

Die Widerstände zerfallen in zwei Klassen: 1. solche, welche durch die Bestimmung der Maschine gegeben sind und herrühren von den umzuformenden Körpern, durch Tilgung von deren Arbeit das Fabrikat erzeugt wird; sie heissen nützliche Widerstände, ihre Arbeit sei T_u; 2. solche, welche in Folge der Bewegung der Maschine rege werden, wie die Reibung, Luftwiderstand u. s. w. und welche nichts gemein haben mit dem Fabrikate; sie heissen passive (schädliche) Widerstände, ihre Arbeit sei T_s. Die Gesammtarbeit T_r aller Widerstände zerfällt daher in zwei Theile und hat man $T_r = T_u + T_s$. Da nun die Arbeit der Motoren T_m gleich T_r sein soll, so folgt, dass ein Theil der Arbeit der Motoren auf die Tilgung der Arbeit der passiven Widerstände verwandt werden muss

und also für die Bestimmung der Maschine verloren geht. Daher muss man die passiven Widerstände soviel als möglich zu verkleinern suchen. Eine Maschine ist um so besser, je kleiner das Verhältniss $\frac{T_s}{T_m}$ und je grösser $\frac{T_u}{T_m}$ ist.

Jeder Verlust an lebendiger Kraft muss vermieden werden. Nun besteht die lebendige Kraft aus zwei Theilen: 1. der lebendigen Kraft, welche durch die Geschwindigkeiten der äusserlich sichtbaren Bewegung gebildet wird und welche also den Gang der Maschine bestimmt; 2. der lebendigen Kraft, welche die innere Bewegung der Maschinentheile, die kleinen Erschütterungen, die Schwingungen der elastischen Bänder, die molecularen Bewegungen u. s. w. darstellt und nichts mit dem Gange der Maschine im Ganzen gemein hat. Dieser zweite Bestandtheil darf womöglich gar nicht zu Stande kommen oder muss durch Einführung grosser Massen, Polster u. s. w. herabgedrückt werden; denn die Arbeit des Motors, welche ihn veranlasst, ist verloren. Eine schlotterige Mühle ist ein Beispiel für diesen Nachtheil.

Die Gleichung der lebendigen Kraft zeigt deutlich die Unmöglichkeit eines Perpetuum Mobile; ein solches wäre nämlich eine Maschine, durch welche ohne continuirliche Wirkung eines Motors fortwährend die Arbeit eines Widerstandes getilgt wird; auch wenn der Widerstand noch so gering ist, so kann seine Arbeit nur durch eine äquivalente Arbeit entgegengesetzter Art getilgt werden; geschieht dies nicht, sondern wirkt ein Motor nur eine kurze Zeit, nach welcher die Maschine sich selbst überlassen bleibt, so nimmt die lebendige Kraft ab und sowie sie Null ist, steht die Maschine still. Will man aber eine Maschine ein Perpetuum Mobile nennen, an welcher überhaupt keine Arbeit geleistet wird, weder von einem Motor, noch von einem Widerstande, sondern die einmal durch Momentankräfte in Bewegung gesetzt, fortwährend in Bewegung bleibt, so ist dieselbe zwar denkbar, aber nicht realisirbar, da wir die materiellen Elemente einer Maschine nicht der Wirkung der Naturkräfte entziehen können.

§. 15. Das Princip der lebendigen Kraft hat die Physiker der Neuzeit zu einer wesentlich veränderten und allgemeineren Auffassung der Naturprozesse und ihres gegenseitigen Zusammenhanges geführt. Man hat die Ansicht gewonnen, dass die Summe aller Arbeit im gesammten Weltsystem als eine constante Grösse anzusehen sei und dass alle Erscheinungen der Natur, so mannigfach sie auch sein mögen, im Grunde nichts anderes seien, als die Wechselbeziehung zwischen Arbeit und lebendiger Kraft, wie sie die Gleichung ausspricht. Wo nach dieser Ansicht ein Bewegungsphänomen auftritt, wird ein entsprechendes Quantum Arbeit auf sein Zustandekommen verwandt und wo es aufhört, wird ein ihm äquivalentes Quantum Arbeit disponibel. Vorzugsweise ist es die mechanische Theorie der Wärme, welche von diesem Grundsatze ausgehend zu Folgerungen der grössten Wichtigkeit geführt hat und noch ferner führen wird. Die heutige Naturforschung ist Daniel Bernoulli grossen Dank dafür schuldig, dass er die Gleichung der lebendigen Kraft zuerst in der heutigen allgemeinen Fassung festgestellt hat. Nicht geringere Anerkennung zollt sie den Ideen und Forschungen eines Meyer, Helmholtz, Joule, Thomson u. s. w. auf diesem Gebiete.

§. 16. Von der Gleichung der lebendigen Kraft kann man ein Criterium für die Stabilität des Gleichgewichtes entlehnen. Besteht nämlich für das System eine Kräftefunction, sodass

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_0^{(i)2} = U - U_0$$

ist und

$$dU = \Sigma\left(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i\right),$$

so fällt die Bedingung, dass für bestimmte Werthe von x_i, y_i, z_i, ..., d. h. für eine bestimmte Lage des Systems Gleichgewicht bestehe, mit der Bedingung zusammen, dass für diese Werthe das vollständige Differential dU verschwinde, sodass also im Allgemeinen für jede Gleichgewichtslage die Kräftefunction ein Maximum oder ein Minimum sein wird. Wir setzen hierbei voraus, dass aus U bereits mit Hülfe der Bedingungen des Problems ebenso viel Variabeln eliminirt sind, als die Zahl der Bedingungen beträgt und demnach U als eine Function vollständig unabhängiger Variabeln, die wir λ, μ, ν, ... nennen wollen, dargestellt sei. Findet ein Maximum von U wirklich statt, so besitzt das System den Charakter der Stabilität, d. h. das System wird sich, wenn die Punkte desselben aus der dem Maximum entsprechenden Lage nur wenig verrückt werden und kleine Anfangsgeschwindigkeiten erhalten, im Laufe der Zeit nie über gewisse enge Grenzen hinaus von derselben entfernen.

Um diesen Satz zu beweisen, können wir unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass das Maximum von U für die Werthe $\lambda = \mu = \nu = \cdots = 0$ eintrete und da ferner die Function U in der obigen Gleichung blos in der Verbindung $U - U_0$ vorkommt, so kann ihr auch eine beliebige Constante zugefügt werden. Durch eine zweckmässige Wahl dieser Constanten kann man aber immer erreichen, dass der Maximalwerth von U selbst die Null ist. Unter diesen Voraussetzungen schreiben wir nun die Gleichung so:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = U(\lambda, \mu, \nu, \ldots) - U(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_0^{(i)2},$$

sodass also $U(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ für $\lambda = \mu = \nu = \cdots = 0$ ein Maximum wird, dessen Werth Null ist und λ_0, μ_0, ν_0, ... $v_0^{(i)}$ zusammengehörige Werthe von λ, μ, ν, ... v_i sind. Da jeder Nachbarwerth des Maximums negativ ist, so lassen sich immer so kleine positive Grössen l, m, n, ... angeben, dass für jedes System von Werthen λ, μ, ν, ... dessen Zahlenwerthe resp. nicht grösser, als l, m, n, ... sind, $U(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ stets negativ ist. Ist nun $-p$ von allen diesen negativen Werthen der Function, absolut genommen der kleinste, so kann gezeigt werden, dass wenn λ_0, μ_0, ν_0, ... numerisch kleiner als l, m, n, ... und zugleich so angenommen werden, dass

$$-U(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_0^{(i)2} < p$$

ist, jede der Variabelen λ, μ, ν, ... im Laufe der Bewegung unter ihrer Grenze l, m, n, ... bleiben wird. Fände nämlich ein Ueberschreiten dieser Grenze statt, so müsste wegen der Stetigkeit der Grössen λ, μ, ν, ... zu einer gewissen Zeit zuerst Gleichheit zwischen einer oder mehreren dieser Grössen und ihrer Grenzen l, m, n, ... eintreten, ohne dass eine der übrigen die Grenze überschritten hätte. Für diesen Zeitpunkt wäre der negative Werth von $U(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ numerisch nicht kleiner als p, mithin die rechte Seite unserer Gleichung negativ, was mit der Natur der positiven linken Seite im Widerspruch steht; folglich überschreiten λ, μ, ν, ... nicht ihre Grenzen und das Gleichgewicht ist stabil. Man sieht zugleich auch, dass die Geschwindigkeiten v_i gewisse Grenzen nicht überschreiten, denn da das Maximum von U Null ist, so ist

$$\Sigma m v_i^2 \leq -U(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_0^{(i)2}.$$

Endlich, da l, m, n, ... beliebig klein angenommen werden können, so können die Grenzen für die die Lage des Systems bestimmenden Grössen λ, μ, ν, ... und die Geschwindigkeiten v beliebig eng gezogen werden.

Der vorstehende Beweis ist von Dirichlet; vgl. Crelle's Journ. B. XXXIII S. 84, woselbst auch eine Kritik der mangelhaften früheren Beweise gegeben ist.

§. 17. Wir wollen jetzt ein freies System betrachten, auf welches nur innere Kräfte P wirken. Für seine Bewegung existirt eine Kräftefunction U und gilt die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = U - U_0,$$

die wir aber so schreiben wollen

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - U = \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 - U_0.$$

Die Function U ist nach S. 864. $U = \int - mm' F(r) dr$, wenn $F(r)$ das Gesetz darstellt, nach welchem zwei Masseneinheiten auf einander einwirken und wenn U ein Maximum wird, so findet stabiles Gleichgewicht der inneren Kräfte statt. Da U eine willkürliche Constante enthält, so können wir diese so bestimmen, dass der Werth des Maximums gleich Null wird und für den Fall, dass U mehrere Maxima besitzt, soll dies für das grösste von ihnen gelten. Dann sind also alle andern Werthe von U negativ. Lässt man nun das System aus der stabilen Gleichgewichtslage in eine andere übergehen und bezieht die Gleichung der lebendigen Kraft auf beide, so stellt die negative Grösse $U - 0$ die Arbeit der inneren Kräfte dar, welche dazu nöthig ist. Ebenso wenn das System aus einer beliebigen Lage, welcher der Werth U entspricht, zur stabilen Gleichgewichtslage gelangen soll, so ist die positive Arbeit $0 - U$ erforderlich. Es bedeutet demnach $-U$ die positive Arbeit, welche die inneren Kräfte leisten müssen, um das System aus der Lage, welcher U entspricht, in eine Lage stabilen Gleichgewichts überzuführen. Hiemit kann die obige Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - U = \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 - U_0$$

auch so ausgesprochen werden:

Für ein freies System, welches blos inneren Kräften unterworfen ist, bleibt während der Bewegung für jede Lage desselben die Summe der halben lebendigen Kraft und der Arbeit, welche die inneren Kräfte zu leisten haben würden, um das System aus dieser Lage in eine Lage stabilen Gleichgewichtes zu bringen, eine constante Grösse. Der Werth der Kräftefunction für die fragliche Lage gibt jene zu leistende Arbeit an.

Als Beispiel wollen wir das System zweier Massenpunkte m, m' behandeln, welche sich mit der Kraft

$$\frac{mm'a}{r^n}\left\{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^p\right\}$$

anziehen. In der Entfernung $r = r_0$ befinden sich dieselben im stabilen Gleichgewicht; für $r > r_0$ findet Attraction, für $r < r_0$ Repulsion satt. Bringt man sie auf ihrer Verbindungslinie aus der Gleichgewichtslage in eine Entfernung $> r_0$, so ist eine positive Arbeit nöthig, um sie in diese Lage zurückzubringen; nähert man dieselben einander auf eine Entfernung $< r_0$, so ist gleichfalls eine positive

Arbeit nöthig, um sie zurückzuführen. Die Arbeit ist im ersten Falle positiv, weil Anziehung stattfindet und dr negativ ist, im anderen Falle, weil Abstossung stattfindet und dr positiv ist. Die Kräftefunction ist

$$U = -mm'a\int\left\{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^p\right\}\frac{dr}{r^n} = \frac{mm'a}{r^{n-1}}\left\{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+p-1}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^p\right\} + Const.$$

und erreicht für $r = r_0$ ihr Maximum. Um dasselbe auf Null zu bringen, hat man $Const. = -\frac{mm'a}{r_0^{\,n-1}}$ zu setzen.

Die Gleichung $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - U = Const.$ zeigt auch einen gewissen Uebergang von Arbeit und lebendiger Kraft von einem Systemtheil auf den anderen. Das System bestehe aus zwei Partialsystemen A und B, welche durch einen nicht dehnbaren Faden ohne Masse mit einander verbunden sein mögen. Da der Faden keine Masse hat, so ist seine lebendige Kraft Null und wenn er gespannt ist, so ist die Arbeit der beiden ihn spannenden gleichen Kräfte Null. Es besteht daher die Summe $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - U$ aus einem von A und einem von B herrührenden Theile. Da beide zusammen constant bleiben, so muss der erstere wachsen, wenn der zweite abnimmt und ist letzterer Null geworden, so kommt die ganze Summe dem Theile A zu, wenn in demselben Momente der Faden durchschnitten wird. B gelangt in den Zustand des stabilen Gleichgewichtes.

§. 18. Wir fanden früher die Gleichung $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}\Sigma mu^2$. Da keine äusseren Kräfte auf das System wirken, so ist Mv_1 constant. Substituiren wir also den Ausdruck rechts in die Gleichung $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - U = C$, so kommt

$$\frac{1}{2}\Sigma mu^2 - U = C',$$

wo C' nur eine andere Constante ist. Da U blos von den Abständen der Systempunkte abhängt, so hat es für die relative Bewegung derselben Werth, wie für die absolute. Es ist also auch die halbe Summe der relativen lebendigen Kraft zusammen mit der Arbeit $-U$ eine constante.

Die lebendige Kraft $\frac{1}{2}\Sigma mu^2$ zerfällt in vielen Fällen in zwei Theile, von denen der eine nur sich an der äusserlich sichtbaren Bewegung des Systems bemerken lässt. Wenn nämlich die Systempunkte um gewisse Gleichgewichtslagen oscilliren, welche sich in relativer Ruhe oder Bewegung befinden, so hat man, wenn x, y, z die relativen Coordinaten in Bezug auf den Massenmittelpunkt für einen Systempunkt, x_1, y_1, z_1 die der Gleichgewichtslage und ξ, η, ζ die relativen Coordinaten bezüglich dieser Gleichgewichtslagen sind: $x = x_1 + \xi$, $y = y_1 + \eta$, $z = z_1 + \zeta$. Hiernach werden $\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{d\xi}{dt}$, ... und ergibt sich ein Bestandtheil von u^2, welcher aus $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$ und ein anderer, der aus $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ gebildet ist. Ist das Oscillationscentrum $(x_1\ y_1\ z_1)$ in relativer Ruhe, so ist der erstere Bestandtheil Null; dann ist u blos von der inneren Bewegung des Systems abhängig.

§. 19. **Das Princip der kleinsten Wirkung** besteht in dem Satze:

Wenn das Princip der lebendigen Kraft gilt, so wird das Integral

$$V = \int \Sigma m_i v_i ds_i,$$

nachdem mit Hülfe dieses Princips aus ihm die Zeit eliminirt ist und wenn es auf die ganze Bahn des Systems von einer ersten Position in eine zweite erstreckt wird, für die wirkliche Bewegung ein Minimum, d. h. kleiner, als wenn das System auf irgend einem anderen Wege, welcher mit den Bedingungen desselben vereinbar ist, aus der ersten Position in die zweite gelangt.

Eliminirt man nämlich mit Hülfe der Gleichung $\frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = U + h$ die Zeit, so erhält man, genau wie S. 292

$$V = \int \sqrt{2(U+h)}\,\sqrt{\Sigma m_i ds_i^2}.$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung geben nun durch ihre Integration die $3n$ Coordinaten der Systempunkte, da man aber aus ihnen die Zeit eliminiren kann, so kann man $3n - 1$ der Coordinaten durch eine, z. B. durch x_1 ausdrücken. Dadurch wird für $\Sigma m_i ds_i^2$ der Ausdruck $\Sigma m_i \left(\frac{ds_i}{dx_1}\right)^2 dx_1^2$ zu substituiren sein und erhält man

$$V = \int \sqrt{2(U+h)}\,\sqrt{\Sigma m_i \left(\frac{ds_i}{dx_1}\right)^2} \cdot dx_1$$

$$= \int \sqrt{2(U+h)} \int \sqrt{\Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)} \cdot dx_1 = \int P dx_1.$$

und ist zu zeigen, dass $\delta \int P dx_1 = \int \delta P\, dx_1 = 0$ wird. Es ist aber

$$\delta P = \Sigma\left\{\frac{\partial P}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial P}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial P}{\partial z_i}\delta z_i + \frac{\partial P}{\partial x_i'}\delta x_i' + \frac{\partial P}{\partial y_i'}\delta y_i' + \frac{\partial P}{\partial z_i'}\delta z_i'\right\}$$

und wenn man die partiellen Integrationen, wie

$$\int \frac{\partial P}{\partial x_i'}\delta x_i' dx_1 = \int \frac{\partial P}{\partial x_i'}\frac{d\delta x_i}{dx_1} \cdot dx_1$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x_i'}\delta x_i - \int \frac{d\frac{\partial P}{\partial x_i'}}{dx_1}\delta x_i\, dx_1 = -\int \frac{d\frac{\partial P}{\partial x_i'}}{dx_1}\delta x_i\, dx_1$$

(da δx_i an den Grenzen der Integration verschwindet, weil die Anfangs- und Endpunkte fest bleiben) benutzt, so wird

$$\delta \int P dx_1$$

$$= \int \Sigma\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{d\frac{\partial P}{\partial x_i'}}{dx_1}\right)\delta x_i + \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} - \frac{d\frac{\partial P}{\partial y_i'}}{dx_1}\right)\delta y_i + \left(\frac{\partial P}{\partial z_i} - \frac{d\frac{\partial P}{\partial z_i'}}{dx_1}\right)\delta z_i\right\} dx_1.$$

Setzt man zur Abkürzung $A = 2(U + h)$, $B = \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$, so wird $P = \sqrt{A}\cdot\sqrt{B}$ und

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{d\frac{\partial P}{\partial x_i'}}{dx_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{B}{A}}\frac{\partial A}{\partial x_i} - \frac{d\left(m_i\sqrt{\frac{A}{B}}\frac{dx_i}{dx_1}\right)}{dx_1}$$

oder da

$$\sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{\Sigma m_i\left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2\right)}{2(U+h)}} = \sqrt{\frac{\Sigma m_i v_i^2\cdot\left(\frac{dt}{dx_1}\right)^2}{\Sigma m_i v_i^2}} = \frac{dt}{dx_1}$$

ist:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{d\frac{\partial P}{\partial x_i'}}{dx_1} = \sqrt{\frac{B}{A}}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} - m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right),$$

durch Einführung dieses und der beiden ähnlichen Ausdrücke ergibt sich

$$\delta\int Pdx = \int\sqrt{\frac{B}{A}}\cdot\Sigma\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} - m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(\frac{\partial U}{\partial y_i} - m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \left(\frac{\partial U}{\partial z_i} - m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right\}dx_1$$

Es ist aber nach dem D'Alembert'schen Princip

$$\Sigma\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} - m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(\frac{\partial U}{\partial y_i} - m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \left(\frac{\partial U}{\partial z_i} - m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right\} = 0$$

und mithin $\delta V = \delta\int Pdx_1 = 0$.

Man sieht, dass man aus dem Principe der kleinsten Wirkung die Bewegungsgleichungen des Systems erhalten kann.

XVII. Capitel.

Die zweite Form der Differentialgleichungen der Bewegung von Lagrange und das Hamilton'sche Princip. Die Hamilton'sche Form der Bewegungsgleichungen und die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung.

§. 1. In die Differentialgleichungen der Bewegung

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial x_i} + \cdots$$
$$m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial y_i} + \cdots \quad . i = 1, 2, \ldots n,$$
$$m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda\frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu\frac{\partial M}{\partial z_i} + \cdots$$

wofür $L = 0$, $M = 0$, ... die x Bedingungen des Systems darstellen, welche von Lagrange zuerst aufgestellt wurden, führen wir an die Stelle der Variabelen x_i, y_i, z_i neue Variabele q_1, q_2, ... q_μ ein, deren Zahl $\mu = 3n - x$ und

welche so gewählt sind, dass die $\varkappa$ Bedingungen $L = 0$, $M = 0, \ldots$ durch sie identisch erfüllt werden, d. h. dass ohne Zuhülfenahme irgend welcher Relationen zwischen den Grössen q die Gleichungen

$$L(q_1, q_2, \ldots q_\mu) = 0, \qquad M(q_1, q_2, \ldots q_\mu) = 0, \ldots$$

bestehen. So können z. B. die Coordinaten x_i, y_i, z_i, welche der Bedingung

$$\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} + \frac{z_i^2}{c^2} = 1$$

genügen sollen, durch die zwei Variabeln q_1, q_2 ersetzt werden, welche mit ihnen durch die Gleichungen $x_i = a \cos q_1$, $y_i = b \sin q_1 \cos q_2$, $z_i = c \sin q_1 \sin q_2$ verbunden sind. Setzt man diese Ausdrücke für x_i, y_i, z_i in die genannte Bedingung ein, so wird sie von selbst erfüllt. Durch Einführung der Grössen q nehmen die Differentialgleichungen der Bewegung eine sehr bemerkenswerthe Form an, welche gleichfalls von Lagrange zuerst gegeben wurde.

Es werden x_i, y_i, z_i Functionen von $q_1, q_2, \ldots q_\mu$. Multipliciren wir die obigen Gleichungen der Reihe nach mit den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_i}{\partial q_s}$, $\frac{\partial y_i}{\partial q_s}$, $\frac{\partial z_i}{\partial q_s}$ von x_i, y_i, z_i nach einer, q_s, der Grössen q, addiren sie und summiren nach i durch das ganze System hindurch, so kommt, da

$$\Sigma\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial L}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial L}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial L(q_1, q_2, \ldots q_\mu)}{\partial q_s}$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial M}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial M}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial M(q_1, q_2, \ldots q_\mu)}{\partial q_s}, \ldots$$

und diese Ausdrücke verschwinden, da $L(q_1, q_2, \ldots q_\mu)$, $M(q_1, q_2, \ldots q_\mu), \ldots$ identisch Null sind:

$$\sum_i m_i \left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{d^2y_i}{dt^2}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{d^2z_i}{dt^2}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right\} = Q_s,$$

wenn Q_s den Ausdruck

$$Q_s = \sum_i\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)$$

darstellt. Wir wollen die Differentiationen nach der Zeit durch angeführte Accente bezeichnen und $\frac{dx_i}{dt} = x_i'$, $\frac{dy_i}{dt} = y_i'$, $\frac{dz_i}{dt} = z_i'$ setzen und die vorstehende Gleichung also schreiben:

$$\sum_i m_i \left\{\frac{dx_i'}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{dy_i'}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{dz_i'}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right\} = Q_s.$$

Nun ist:

$$\frac{d}{dt}\cdot\sum_i m_i\left\{x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} + y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} + z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_s'}\right\} = \sum_i m_i\left\{\frac{dx_i'}{dt}\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} + \frac{dy_i'}{dt}\frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} + \frac{dz_i'}{dt}\frac{\partial z_i'}{\partial q_s'}\right\}$$
$$+ \Sigma m_i\left\{x_i'\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} + y_i'\frac{d}{dt}\frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} + z_i'\frac{d}{dt}\frac{\partial z_i'}{\partial q_s'}\right\},$$

Der Ausdruck links hat die Bedeutung

$$\frac{d}{dt}\cdot\sum_i m_i\left\{x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} + y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} + z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_s'}\right\} = \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial q_s'}\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial q_s'},$$

wenn die halbe lebendige Kraft mit T bezeichnet und also gesetzt wird:

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

Die zweite Summe rechter Hand gestaltet sich folgendermassen um. Es bestehen, da x_i, y_i, z_i Functionen der neuen Variabelen werden, die Gleichungen:

$$x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q_2' + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} q_\mu'$$

$$y_i' = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} q_2' + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_\mu} q_\mu'$$

$$z_i' = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} q_2' + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_\mu} q_\mu'.$$

Differentiirt man diese in q_1', q_2', ... q_s', ... q_μ' linearen Ausdrücke nach q_s', so ergibt sich

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} = \frac{\partial x_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} = \frac{\partial y_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial z_i'}{\partial q_s'} = \frac{\partial z_i}{\partial q_s}.$$

Wir können daher die Differentialquotienten von x_i, y_i, z_i nach q_s durch die entsprechenden Differentialquotienten ihrer Derivirten x_i', y_i', z_i' nach q_s ersetzen und erhalten für jene Summe:

$$\sum_i m_i \left\{ x_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} + y_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} + z_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i'}{\partial q_s'} \right\}$$

$$= \sum_i m_i \left\{ x_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + y_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + z_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right\}.$$

Differentiiren wir aber die obigen Ausdrücke für x_i', y_i', z_i' nach q_s, so erhalten wir:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial q_1} q_1' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial q_2} q_2' + \cdots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial q_\mu} q_\mu' = \frac{\partial \frac{\partial x_i}{\partial q_s}}{\partial q_1} q_1' + \cdots = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_s},$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial q_s} = \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial z_i'}{\partial q_s} = \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_s}.$$

Indem wir daher die Werthe für die Differentialquotienten $\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_s}, \ldots$ einführen, folgt weiter für jene Summe die Form:

$$\sum_i m_i \left\{ x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_s} + y_i' \frac{\partial y_i'}{\partial q_s} + z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial q_s} \right\} = \frac{\partial}{\partial q_s} \tfrac{1}{2} \Sigma m_i \left\{ x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2 \right\} = \frac{\partial T}{\partial q_s}.$$

Die erste Summe rechts in obiger Gleichung (s. vor. Seite) aber ist vermöge der Relationen $\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} = \frac{\partial x_i}{\partial q_s}, \ldots$ identisch mit Q_s. Demnach erhalten wir jetzt als eine der Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q_s'} - Q_s = \frac{\partial T}{\partial q_s}$$

oder

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q_s'} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s,$$

welches die zweite Lagrange'sche Form ist. Indem wir s von 1 bis μ variiren lassen, erhalten wir die μ Bewegungsgleichungen, welche q_1, q_2, ... q_μ als Functionen von t liefern.

Im Falle, dass eine Kräftefunction U existirt, haben wir:

$$Q_s = \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) = \ldots$$

und werden mithin die Bewegungsgleichungen in diesem Falle:

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial q_s'} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_s},$$

oder wenn man noch $\frac{\partial T}{\partial q_s'} = p_s$ setzt:

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_s}, \quad p_s = \frac{\partial T}{\partial q_s'}, \quad s = 1, 2, 3, \ldots \mu.$$

Substituirt man die linearen Ausdrücke

$$x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q_1' + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} q_\mu',$$

$$y_i' = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} q_1' + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_\mu} q_\mu',$$

$$z_i' = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} q_1' + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_\mu} q_\mu'$$

in den Ausdruck

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

so wird T eine homogene Function der Grössen $q_1', q_2', \ldots q_\mu'$ und folglich nach dem Euler'schen Satze über die homogenen Functionen:

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q_1'} q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'} q_2' + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_\mu'} q_\mu',$$

oder mit Rücksicht auf $\frac{\partial T}{\partial q_s'} = p_s$:

$$2T = p_1 q_1' + p_2 q_2' + \cdots + p_\mu q_\mu'.$$

§. 2. Wenn die Variabelen q so gewählt werden können, dass eine von ihnen in der Kräftefunction U und in dem Ausdrucke T der halben lebendigen Kraft nicht vorkommt, während letztere Grösse den Differentialquotienten q_s' enthalten kann, so wird $\frac{\partial (T+U)}{\partial q_s} = 0$, also $\frac{dp_s}{dt} = 0$ und ergibt sich mithin ein Integral $p_s = Const.$ der Differentialgleichungen der Bewegung unmittelbar.

Dies tritt z. B. bei der Newton'schen Attraction eines Punktes nach einem festen Centrum ein. Denn für dies Centrum als Ursprung der Polarcoordinaten $q_1 = r$, $q_2 = \vartheta$, $q_3 = \varphi$ hat man:

$$U = -\frac{x}{r}, \quad T = \tfrac{1}{2} m (r'^2 + r^2\vartheta'^2 + r^2 \sin^2\vartheta \cdot \varphi'^2)$$

(s. S. 119) und kommt φ nicht in U und T und in T blos φ' vor. Daher ist

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial q_3'} = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = m r^2 \sin^2\vartheta \cdot \varphi' = Const.,$$

oder $r^2 \sin^2\vartheta \cdot \varphi' = Const.$ ein Integral der Bewegungsgleichungen. Vermöge der Transformationsformeln $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $z = r\sin\vartheta\sin\varphi$ ergibt sich $tg\,\varphi = \frac{z}{y}$, $\frac{\varphi'}{\cos^2\varphi} = \frac{yz' - y'z}{y^2}$, d. h. $r^2\sin^2\vartheta\cdot\varphi' = yz' - y'z = Const.$, nämlich das Princip der Flächen.

§. 3. Aehnlich, wie Cap. XVI, §. 19. aus dem Princip der kleinsten Wirkung die Differentialgleichungen der Bewegung in der gewöhnlichen Form abgeleitet wurden, können dieselben in der zweiten Lagrange'schen Form aus einem anderen Principe erhalten werden, welches von Hamilton zuerst aufgestellt wurde. Dies Princip ist der folgende Satz:

Wenn die Lage des Systems zu einer Anfangszeit $t = t_0$ und zu einer Endzeit t_1 gegeben ist, so liefert die Gleichung

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt = 0$$

die Gleichungen der Bewegung, worin T die halbe lebendige Kraft und U die Kräftefunction ist, letztere von den Coordinaten und der Zeit, nicht aber von den Componenten der Geschwindigkeit abhängt.

Es ist nämlich, wenn P von den Grössen $q_1, q_2, \ldots q_\mu, q_1', q_2', \ldots q_\mu'$ abhängt:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} P\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta P \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \frac{\partial P}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial P}{\partial q_\mu} \delta q_\mu$$
$$+ \frac{\partial P}{\partial q_1'} \delta q_1' + \frac{\partial P}{\partial q_2'} \delta q_2' + \cdots + \frac{\partial P}{\partial q_\mu'} \delta q_\mu' \Big\}\, dt.$$

Man hat aber, wie S. 913:

$$\int \frac{\partial P}{\partial q_1'} \delta q_1' \cdot dt = \int \frac{\partial P}{\partial q_1'} \delta \cdot \frac{dq_1}{dt} \cdot dt = \int \frac{\partial P}{\partial q_1'} \frac{d \cdot \delta q_1}{dt}\, dt$$
$$= \frac{\partial P}{\partial q_1'} \cdot \delta q_1 - \int \frac{d \cdot \frac{\partial P}{\partial q_1'}}{dt} \cdot \delta q_1 \cdot dt,$$

oder, da δq_1 an den Grenzen der Integration verschwindet, indem die Endposition des Systems, wie die Anfangsposition eine feste ist:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial P}{\partial q_1'} \delta q_1\, dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d \frac{\partial P}{\partial q_1'}}{dt} \cdot \delta q_1\, dt.$$

Setzt man dies, sowie die analogen Grössen in den Ausdruck für die Variation des Integrales ein, so erhält man:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} P\, dt$$
$$= - \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left(\frac{d \frac{\partial P}{\partial q_1'}}{dt} - \frac{\partial P}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left(\frac{d \frac{\partial P}{\partial q_2'}}{dt} - \frac{\partial P}{\partial q_2} \right) \delta q_2 + \cdots + \left(\frac{d \frac{\partial P}{\partial q_\mu'}}{dt} - \frac{\partial P}{\partial q_\mu} \right) \delta q_\mu \right\} dt$$

und wenn dieses Integral verschwinden soll, so müssen wegen der Unabhängigkeit der Grössen $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ von einander die Coefficienten der willkürlichen Aenderungen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_\mu$ einzeln verschwinden. Dies liefert die Gleichungen

$$\frac{d \frac{\partial P}{\partial q_s'}}{dt} - \frac{\partial P}{\partial q_s} = 0, \quad s = 1, 2, 3, \ldots \mu.$$

In dem vorliegenden Falle ist nun $P = T + U$ und hängt U nicht von den Grössen q_s' ab, weil es nur von den Coordinaten selbst abhängt, welche nur Functionen von q_s sind. Daher ist $\frac{\partial P}{\partial q_s'} = \frac{\partial T}{\partial q_s'}$ und werden mithin die Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q_s'} - \frac{\partial (T + U)}{\partial q_s} = 0, \qquad s = 1, 2, 3, \ldots \mu,$$

welches die Lagrange'schen Gleichungen sind für den Fall, dass eine Kräftefunction existirt.

Ueber die Ausdehnung dieser Methode auf den Fall, dass U auch die Componenten der Geschwindigkeit und mithin auch q_s enthält, s. Holzmüller, Ueber die Anwendung der Jacobi-Hamilton'schen Methode auf den Fall der Anziehung eines Punktes nach dem electrodynamischen Gesetz von Weber [Schlömilch's Zeitschrift f. Mathem. u. Physik Bd. XV, S. 69 (1870)].

§. 4. Hamilton hat die Differentialgleichungen der Bewegung in einer eigenthümlichen Form gegeben und für den Fall, dass eine Kräftefunction existirt, dieselbe von einer Function abhängig gemacht, welche er die charakteristische Function nennt. Wir fanden §. 1. die Gleichung

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q_1'} q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'} q_2' + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_\mu'} q_\mu' = \Sigma p_s q_s'.$$

Behufs der Entwickelung der Hamilton'schen Gleichungen schreiben wir sie so:

$$T = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s'} q_s' - T$$

und differentiiren sie vollständig nach allen darin vorkommenden Grössen q_s und q_s'. Dies gibt

$$dT = \Sigma q_s' \cdot d\frac{\partial T}{\partial q_s'} + \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s'} dq_s' - \left(\Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s'} dq_s' + \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s\right),$$

oder, weil sich die beiden Mittelglieder tilgen:

$$dT = \Sigma q_s' \cdot d\frac{\partial T}{\partial q_s'} - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s = \Sigma q_s' dp_s - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s.$$

Indem wir aber uns die Grössen $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ als neue Variabeln an die Stelle der Grössen $q_1', q_2', \ldots q_\mu'$ eingeführt denken, wird T eine Function der Grössen p_s und q_s und wenn wir die Differentialquotienten von T partiell nach p_s und q_s genommen unter dieser Voraussetzung in Klammern einschliessen, so erhalten wir für das vollständige Differential von T auch die Gleichung:

$$dT = \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) dp_s + \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) dq_s.$$

Die Vergleichung dieser mit der vorigen Formel liefert aber die Beziehungen:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) = q_s', \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_s}$$

und wenn wir den Werth $\frac{\partial T}{\partial q_s} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)$ in die Gleichung $\frac{dp_s}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_i$ des §. 1. einsetzen, so folgt

$$q_s' = \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right), \qquad \frac{dp_s}{dt} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) + Q_s, \qquad s = 1, 2, 3, \ldots \mu$$

als die Hamilton'sche Form der Bewegungsgleichungen. Für den Fall, dass eine Kräftefunction U existirt, welche von q_s, nicht aber von q_s', also auch nicht von den für q_s' eingeführten p_s abhängt, ist $Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s} = \left(\frac{\partial U}{\partial q_s}\right)$ und folglich

$$\frac{dp_s}{dt} = -\left(\frac{\partial (T - U)}{\partial q_s}\right).$$

Aus demselben Grunde, dass U kein p_s enthält, kann man aber die Gleichung $q_s' = \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right)$ auch so schreiben:

$$q_s' = \left(\frac{\partial (T - U)}{\partial p_s}\right).$$

Setzt man daher $T - U = H$ und tilgt die Klammern als selbstverständlich, so kann man die Differentialgleichungen der Bewegung unter der über U gemachten Voraussetzung schreiben:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad H = T - U$$

und wenn keine Kräftefunction existirt:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s, \quad s = 1, 2, 3, \ldots \mu.$$

Die Grössen $p_s = \frac{\partial T}{\partial q_s'}$ sind, da T eine homogene Function des zweiten Grades der Grössen q_s' ist, lineare Functionen von q_s'; löst man daher das Gleichungssystem $p_s = \frac{\partial T}{\partial q_s'}$ auf, so ergeben sich für die q_s' lineare Functionen von den p_s, deren Coefficienten die q_s enthalten. Mit ihrer Hülfe treten die p_s an die Stelle der q_s'.

Vermöge der Relationen $\frac{\partial T}{\partial q_s'} = p_s$ und $\left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) = q_s'$ besteht zwischen den Grössen p_s und q_s' eine gewisse Reciprocität.

Die Function $H = T - U$ nennt Hamilton die charakteristische Function. Vgl. Hamilton: *On a general method in Dynamics; by wich the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function* (*Philosoph. Transactions of the Royal Society of London for the year* 1834, P. II, p. 247 und *Second essay on a general method in Dynamics* (Ibid. 1835, P. I, p. 95).

Wir lernten die charakteristische Function bereits Cap. XVI, §. 17. ihrer mechanischen Bedeutung nach kennen.

§. 5. Hamilton hat die Integration der Bewegungsgleichungen von einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung abhängig gemacht, die wir jetzt aufstellen wollen.

Die halbe lebendige Kraft T und die Kräftefunction U, welche t auch explicit enthalten darf, seien durch die $3n - \varkappa = \mu$ Variabeln q_s dargestellt welche den Bedingungen des Systems identisch genügen. Wir bilden die Variation des Integrales

$$V = \int_\tau^t (T + U)\, dt,$$

aber so, dass die Werthe an den Grenzen nicht als gegeben angesehen werden, sondern an den Grenzen andere Bedingungen stattfinden. Indem wir abkürzend $T + U = \varphi$ setzen, erhalten wir, da φ eine Function von q_s und q_s' ist:

$$\delta V = \delta \int \varphi\, dt = \int \delta\varphi \cdot dt = \int \left(\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \delta q_s\right) dt + \int \left(\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q_s'} \delta q_s'\right) dt$$

und vermöge der Relation

$$\int\left(\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\delta q_s'\right)dt = \Sigma\int\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\delta q_s'\,dt = \Sigma\int\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\delta\frac{dq_s}{dt}\,dt$$

$$= \Sigma\int\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\frac{d\cdot\delta q_s}{dt}\,dt = \Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\delta q_s - \int\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}}{dt}\cdot\delta q_s\,dt\right),$$

also, wenn man zwischen den Grenzen τ und t integrirt und die dem Werthe τ entsprechenden Anfangswerthe mit dem angefügten Index 0 bezeichnet:

$$\Sigma\int_\tau^t\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\delta q_s'\,dt = \Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\delta q_s - \frac{\partial\varphi^0}{\partial q_s'}\delta q_s^0 - \int_\tau^t\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}}{dt}\cdot\delta q_s\,dt\right).$$

Setzt man dies in δV ein, so ergibt sich:

$$\delta V = \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\delta q_s - \Sigma\frac{\partial\varphi^0}{\partial q_s'}\delta q_s^0 + \int_\tau^t\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_s} - \frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}}{dt}\right)\delta q_s\,dt.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich sehr, indem die eingeklammerten Grössen unter dem Integralzeichen in Folge der Differentialgleichungen der Bewegung verschwinden. Da nämlich U keine q_s' enthält, so ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_s'} = \frac{\partial T}{\partial q_s'} = p_s.$$

Daher ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial q_s'} = 0.$$

Demnach bleibt blos

$$\begin{aligned}\delta V &= \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\delta q_s - \Sigma\frac{\partial\varphi^0}{\partial q_s'}\delta q_s^0 = \Sigma p_s\delta q_s - \Sigma p_s^0\delta q_s^0\\ &= p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_\mu\delta q_\mu\\ &\quad - p_1^0\delta q_1^0 - p_2^0\delta q_2^0 - \cdots - p_\mu^0\delta q_\mu^0.\end{aligned}$$

Da die Differentialgleichungen der Bewegung als erfüllt angesehen werden, so sind q_s und q_s', sowie p_s als gegebene Functionen von t und den 2μ Constanten zu betrachten, welche die Integration dieser Gleichungen einführt. Die Variationen δq_s sind daher solche, welche aus der Aenderung der 2μ Constanten entspringen, da t nicht variirt wird und die δq_s^0 sind die der unteren Grenze τ des Integrales V entsprechenden Werthe derselben. Nun können nach der Integration der Bewegungsgleichungen alle Variabeln, also auch φ als Functionen von t und den 2μ Constanten dargestellt werden. Diese Constanten sind willkürlich und kann man hierzu die Anfangswerthe q_s^0, p_s^0 wählen. Es bilden die $2\mu+1$ Variabeln t, q_s, p_s und die 2μ Constanten q_s^0, p_s^0 ein System von $4\mu+1$ Grössen, zwischen welchen aber die 2μ Integralgleichungen bestehen. Durch dieselben kann man also die 2μ Grössen p_s, p_s^0 durch t und q_s, q_s^0 darstellen und es wird hiernach $V = \int\varphi\,dt$ eine Function von t, q_s, q_s^0. Hiernach erhält man die Aenderung von V, indem t unvariirt bleibt, auch unter der Form

$$\delta V = \Sigma\frac{\partial V}{\partial q_s}\delta q_s + \Sigma\frac{\partial V}{\partial q_s^0}\delta q_s^0.$$

Die Vergleichung beider Formeln für δV ergibt:

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s, \quad \frac{\partial V}{\partial q_s^0} = - p_s^0.$$

Nun ist $\varphi = \frac{\partial V}{dt}$; da aber V die Zeit sowohl explicit als in den Grössen q_s implicit enthält, so wird

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma p_s q_s'$$

und mithin:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma p_s q_s' - \varphi.$$

Es ist aber $\varphi = T + U$, $p_s = \frac{\partial T}{\partial q_s'}$ und $\Sigma p_s q_s' = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s'} q_s' = 2T$, also $\Sigma p_s q_s' - \varphi = T - U = H$, sodass sich die **Hamilton'sche** partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

ergibt, welcher die Function V genügen muss. Dies ist jedoch so zu verstehen, dass in H die Grössen q_s' durch p_s ausgedrückt und $p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}$ gesetzt wird. Man kann daher den Satz aufstellen:

Wenn die Bewegung, deren Gleichungen sind:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad \text{wo} \quad H = T - U, \quad p_s = \frac{\partial T}{\partial q_s'},$$

wo H durch p_s und q_s dargestellt ist, zwischen zwei Zeitmomenten τ, t betrachtet wird und als willkürliche Constante der Integralgleichungen die 2μ Anfangswerthe q_s^0 und p_s^0 gelten und ferner $p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}$ in H gesetzt wird, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, durch welche V als eine Function von t und den μ Grössen q_s definirt wird. Das Integral

$$V = \int_\tau^t (T + U)\, dt,$$

in welchem $T + U$ vermöge der Integralgleichungen eine Function blos von t und den 2μ Constanten q_s^0, p_s^0 ist, nachdem das Resultat der Quadratur durch t und die Grössen q_s, q_s^0 dargestellt ist, ist eine Lösung dieser Differentialgleichung.

Diese Lösung enthält μ Constanten q_s^0 und $\mu + 1$ Variabeln t und q_s. Da nun in H kein V vorkommt, so kann man der Lösung noch eine willkürliche Constante hinzufügen und sie dadurch zu einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung machen, d. h. zu einer solchen, welche ebenso viele Constanten, als unabhängige Variabeln enthält.

§. §. Umgekehrt kann man behaupten:

Kennt man eine vollständige Lösung V der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

wo $H = T - U$ eine Function der $\mu + 1$ Grössen t, q_s, p_s und $p_s = \frac{\partial V}{\partial q^s}$ ist, d. h. eine solche, welche ausser der mit V durch Addition verbundenen noch μ andere willkürliche Constanten α_s enthält, so sind die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_\mu} = \beta_\mu,$$

worin die β_s neue willkürliche Constanten bezeichnen nebst

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_\mu} = p_\mu$$

die Integralgleichungen des Systems von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial q_s}{dt} = \frac{\partial H}{dp_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad s = 1, 2, 3, \cdots \mu.$$

Differentiirt man nämlich die Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial \alpha_s} = \beta_s$ vollständig nach t, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_\mu}\frac{dq_\mu}{dt} = 0\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_\mu}\frac{dq_\mu}{dt} = 0\\
&\vdots\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_\mu \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_\mu \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_\mu \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_\mu \partial q_\mu}\frac{dq_\mu}{dt} = 0
\end{aligned}$$

Differentiirt man aber die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$ nach den Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\mu$ und berücksichtigt, dass H die Grössen t, q_s und $p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}$ enthält, die Constanten a_s aber nur in den p_s enthalten sind, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \alpha_1} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_1} = 0\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \alpha_2} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_2} = 0\\
&\vdots\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \alpha_\mu} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_\mu} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_\mu} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_\mu} = 0.
\end{aligned}$$

dies System linearer Gleichungen geht aber vermöge der Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s$ über in ein System, welches sich von dem vorstehenden nur dadurch unterscheidet, dass die Grössen $\frac{\partial H}{\partial p_s}$ an die Stelle der Grössen $\frac{dq_s}{dt}$ getreten sind und hieraus folgt $\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}$, $s = 1, 2, \cdots \mu$, welches die einer der **Hamilton**'schen Differentialgleichungen der Bewegung sind.

Differentiirt man aber die Gleichungen $p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}$, so kommt

$$\frac{\partial p_s}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_\mu}\frac{dq_\mu}{dt}$$

oder weil
$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_s},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_2} = \frac{\partial p_2}{\partial q_s}, \ldots$$

und
$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1},\quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_2}, \ldots \frac{dq_\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_\mu}$$

bereits als richtig erwiesen sind:

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial p_\mu}{\partial q_\mu}\frac{\partial H}{\partial p_\mu}.$$

Andererseits gibt aber die Differentiation der Gleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$ partiell nach q_s:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_s} = \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_s} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial q_s} + \frac{\partial H}{\partial q_s}.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der vorigen, so folgt $\frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$, welches die andern **Hamilton**'schen Differentialgleichungen sind.

§. 7. Für den Fall der freien Bewegung ist $\mu = 3n$ und kann man für die Grössen q die Coordinaten x_i, y_i, z_i wählen. Man hat dann $T = \frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$ und da die Grössen $p = \frac{\partial T}{\partial q}$ sind, so folgt, dass die Grössen p hier $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$ werden und da $p = \frac{\partial V}{\partial p}$ ist, so hat man $m_i x_i' = \frac{\partial V}{\partial x_i}$, $m_i y_i' = \frac{\partial V}{\partial y_i}$, $m_i z_i' = \frac{\partial V}{\partial z_i}$. Entnimmt man hieraus x_i', y_i', z_i' um sie in T einzusetzen, so wird

$$T = \frac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right\}.$$

Demnach wird die **Hamilton**'sche Differentialgleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$, $H = T - U$ hier

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right\} = U,$$

wo U blos von den q, d. h. von den Coordinaten x_i, y_i, z_i abhängt. Eine vollständige Lösung V dieser Gleichung mit $3n$ willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n}$ ausser der additiven Constanten liefert die Integrale in den Bewegungsgleichungen

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z_i},\quad i = 1, 2, \cdots n$$

nämlich

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1,\quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{3n}} = \beta_{3n},$$

wozu als erste Integrale

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = m_i \frac{dx_i}{dt},\quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = m_i \frac{dy_i}{dt},\quad \frac{\partial V}{\partial z_i} = m_i \frac{dz_i}{dt},\quad i = 1, 2, \cdots n$$

gehören.

§. 8. In dem Falle, dass H die Zeit t nicht explicit enthält, reducirt sich die **Hamilton**'sche Gleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$ auf eine andere, welche eine Variable

weniger enthält. Setzt man nämlich $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$, $V - t\frac{\partial V}{\partial t} = W$ und führt durch diese Gleichungen an die Stelle von t und V zwei neue Variabeln α und W ein, so wird t eine Function von α und den in V ausser t vorkommenden Grössen und W Function von α, $q_1, q_2 \cdots q_\mu$ und den Constanten $\alpha_1, \alpha_2 \cdots$ Man hat daher

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha} - \alpha\frac{\partial t}{\partial \alpha} - t = -t, \quad \frac{\partial W}{\partial q_s} = \frac{\partial V}{\partial q_s} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial q_s} - \alpha\frac{\partial t}{\partial q_s} = \frac{\partial V}{\partial q_s},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha_s} - \alpha\frac{\partial t}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_s}$$

und die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \cdots q_\mu, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \cdots \frac{\partial V}{\partial q_\mu}\right) = 0$ wird jetzt

$$\alpha + H\left(q_1, q_2, \cdots q_\mu, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \cdots \frac{\partial W}{\partial q_\mu}\right) = 0 \text{ oder } \alpha + T - U = 0.$$

Nachdem sie integrirt ist, erhält man V vermittelst $V - t\frac{\partial V}{\partial t} = W$, d. h. da $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$, $t = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}$ vermittelst: $V = W - \alpha\frac{\partial W}{\partial \alpha}$ und in dies V ist überall statt α wieder t einzuführen durch die Gleichung $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -t$, welche nach α aufzulösen ist.

Die Lösung W enthält nur μ Constanten und die aus ihr abgeleitete Grösse V ebenfalls; es muss aber V, um vollständig zu sein, $\mu + 1$ Constanten haben. Allein da t in $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$ selbst nicht auftritt, sondern nur $\frac{\partial V}{\partial t}$, so bleibt V eine Lösung, wenn man auch t um eine Constante vermehrt oder vermindert. Man kann daher $t - \tau$ für t setzen, wodurch $W = V - (t-\tau)\frac{\partial V}{\partial t} = V - \alpha(t-\tau)$ und $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$ wird. Dann erhält V die nöthige Anzahl $\mu + 1$ Constanten, nämlich die $\mu - 1$ Constanten $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{\mu-1}$, die additive Constante von W und τ. Die Integralgleichungen des Problems sind demnach

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \cdots \frac{\partial V}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} = \text{const.}$$

Die letzte derselben kann, da τ nur in der Verbindung $t - \tau$ vorkommt, also $\frac{\partial V}{\partial \tau} = -\frac{\partial V}{\partial t}$ ist, durch $\frac{\partial V}{\partial t} = \text{const.}$ ersetzt werden. Da nun $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$ gesetzt würde, so erkennt man, dass die neu eingeführten Variabeln und die Bahn einer Constanten spielt.

Die Integralgleichungen kann man durch W darstellen, denn es ist $\frac{\partial V}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_s}$ und $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$ eine Folge von $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$ und $W = V - (t-\tau)\frac{\partial V}{\partial t}$. Daher werden dieselben

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \cdots \frac{\partial W}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t.$$

Auch das System der Integralgleichungen: $\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s$ kann vermöge $\frac{\partial V}{\partial q_s} = \frac{\partial W}{\partial q_s}$ in

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \cdots \quad \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = p_\mu$$

umgesetzt werden. Man hat daher den Satz:

Wenn die Kräftefunction U und in Folge dessen die charakteristische Function $H = T - U$ die Zeit nicht explicit enthält, so stelle man T durch q_s und p_s dar und ersetze in der Gleichung

$$\alpha + T - U = 0$$

die Grössen p_s durch $\frac{\partial W}{\partial q_s}$, wodurch diese Gleichung eine partielle Differentialgleichung wird. Ist W eine vollständige Lösung derselben, welche ausser der zu W additiv hinzuzufügenden Constanten noch $\mu - 1$ Constante $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{\mu-1}$ enthält, so sind

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \cdots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$$

die zweiten und

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \cdots \quad \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = p_\mu$$

die ersten Integralgleichungen der Differentialgleichugen der Bewegung. Die 2μ Constanten derselben sind $\alpha_1 \cdots \alpha_{\mu-1}, \alpha, \beta_1 \cdots \beta_{\mu-1}, \tau$.

Für $\mu = 3n$, d. h. für das freie System sind p_s die $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$,

$T = \Sigma \frac{1}{m_i} \left\{(m_i x_i')^2 + (m_i y_i')^2 + (m_i z_i')^2\right\}$ und folglich ist die Hamilton'sche Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z_i}\right)^2\right\} = U - \alpha .$$

§. 9. Um Probleme der Bewegung nach der Hamilton'schen Methode zu behandeln, bedarf man der Integration einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Es ist von Wichtigkeit, wenn auch nur für einfachere Fälle aus den bekannten Methoden der Integration dieser Gleichungen einige Folgerungen für die Behandlung der mechanischen Probleme zu ziehen. Unter Beschränkung auf die Variabeln x, y, z, wofür $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, ist die Lagrange'sche Integrationsmethode folgende.

Wenn zwischen x, y, z, p, q die partielle Differentialgleichung erster Ordnung besteht:

$$\Psi(x, y, z, p, q) = 0$$

und mithin das totale Differential der Function z die Form hat

$$dz = pdx + qdy,$$

so kann man sich jene Gleichung nach q aufgelöst denken und das Resultat $q = \chi(x, y, z, p)$ in den Ausdruck für dz substituiren, so dass

$$dz = pdx + \chi(x, y, z, p)\, dy$$

wird. Um nun eine vollständige Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung mit zwei willkürlichen Constanten zu finden, genügt es, für p einen Ausdruck $p = \varpi(x, y, z, a)$ zu finden, durch welchen $pdx + \chi dy$ ein vollständiges Differential wird. Durch die Integration desselben erhält man z mit der Constanten a und der durch die Integration eintretenden weiteren Constanten. Damit $pdx + \chi dy$ ein totales Differential werde, muss die Bedingung

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

oder

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z} p = -\frac{\partial \chi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\chi - \frac{\partial \chi}{\partial p} p\right)\frac{\partial p}{\partial z}$$

erfüllt werden. Diese partielle Differentialgleichung für p braucht nicht allgemein gelöst zu werden, vielmehr bedarf man nur irgend einer Lösung mit einer willkürlichen Constanten a, nämlich $\varpi(x, y, z, a)$. In besonderen Fällen vereinfacht sich diese Gleichung sehr wesentlich.

Kommt insbesondere in $\Psi(x, y, z, p, q) = 0$ die Function z nicht vor, ist also die vorgelegte Differentialgleichung

$$\Psi(x, y, p, q) = 0,$$

so wird $\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0$ und kann man p als Function von x, y, a ohne z bestimmen, dass $pdx + \chi dy$ ein totales Differential wird. Dann ist auch $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ und wird p durch die Gleichung

$$\frac{\partial \chi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0$$

zu finden sein. Es ist jedoch zweckmässiger, hierin χ durch die Function Ψ selbst auszudrücken und die Lösung $p = \varpi(x, y, a)$ unter der Form $f(x, q, p) = a$ darzustellen. Die Differentiation von $\Psi = 0$ liefert zu diesem Behufe

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial p} + \frac{\partial \Psi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

woraus

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} : \frac{\partial \Psi}{\partial q}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial q},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe wird die partielle Differentialgleichung für p oder jetzt vielmehr für f

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Sobald man also von ihr eine Lösung f kennt, so liefert $f(x, y, p) = a$ mit $\Psi(x, y, p, q) = 0$ die Grössen p und q als Functionen von x, y so, dass $dz = pdx + qdy$ ein totales Differential und $z = \int(pdx + qdy)$ die gesuchte Lösung von $\Psi(x, y, p, q) = 0$ darstellt, wobei zu z eine additive Constante hinzutritt. Diese partielle Differentialgleichung lösen oder ein Integral $f(x, y, p) = a$ des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$dx : dy : dp = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial q} : -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

finden, ist dasselbe. Denn die Differentiation von $f = a$ gibt

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp = 0$$

und wenn man hierin für dx, dy, dp die ihnen proportionalen Grössen einsetzt, so erscheint die obige partielle Differentialgleichung, welcher mithin f genügt. Man kann die eben aufgestellte Proportion noch durch dy und die ihm proportionale Grösse ergänzen. Die Differentiation von $\Psi = 0$ ergibt nämlich

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Psi}{\partial p}dp + \frac{\partial \Psi}{\partial q}dq = 0$$

und da $dx : dp = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ liefert: $\frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial p}dp = 0$, so bleibt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Psi}{\partial q}dq = 0$$

woraus
$$dy : dq = \frac{\partial \Psi}{\partial q} : -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$
folgt, so dass jetzt vollständig:
$$dx : dy : dp : dq = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial q} : -\frac{\partial \Psi}{\partial x} : -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$
wird, welche Proportion in Bezug auf x und p, sowie in Bezug auf y und q symmetrisch ist.

Man kann die Betrachtungen, denen $f(x, y, p) = a$ zu Grunde lag, dahin erweitern, dass die Function f auch q enthält und $F(x, y, p, q) = a$ an die Stelle von $f(x, y, p) = a$ tritt. Dies heisst so viel, als man sucht $F(x, y, p, q) = a$, so, dass hieraus die Verbindung mit $\Psi(x, y, p, q) = 0$ für p und q Ausdrücke in x, y, a folgen, welche $p dx + q dy$ zu einem vollständigen Integrale machen. Es ergibt sich leicht, dass die Function F der Gleichung
$$\frac{\partial \Psi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q} = 0$$
genügen, also $F = a$ ein Integral von
$$dx : dy : dp : dq = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial y} : -\frac{\partial \Psi}{\partial x} : -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$
sein muss.

Differentiirt man nämlich $\Psi(x, y, p, q) = 0$ und $F(x, y, p, q) = a$, indem man p und q als unbekannte Functionen von x und q ansieht, welche der Bedingung
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$
genügen müssen, partiell nach x und y und eliminirt aus dieser und den so zu gewinnenden Gleichungen
$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0$$
$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}$, so ergibt sich die Gleichung
$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial p}\right) = 0$$
deren erster Factor links, der Null gleichgesetzt, die obige partielle Differentialgleichung liefert. Man erhält daher den Satz:

Bildet man behufs der Integration der partiellen Differentialgleichung $\Psi(x, y, p, q) = 0$ das System gewöhnlicher Differentialgleichungen $dx : dy : dp : dq = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial q} : -\frac{\partial \Psi}{\partial x} : -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ und findet ausser $\Psi = 0$ noch ein Integral $F(x, y, p, q) = a$ desselben, so erhält man mit Hülfe von $\Psi = 0$ und $F = a$ solche Functionen p und q von x und y, dass
$$z = \int (p\,dx + q\,dy)$$
als eine vollständige Lösung der Gleichung $\Psi = 0$ durch blosse Quadratur gefunden wird.

§. 10. Für die Bewegungsgleichungen eines Problems, für welches die Kräftefunction die Zeit nicht explicit enthält, kann man, wenn blos zwei Variabele q_1, q_2 vorkommen, schreiben:
$$dq_1 : dq_2 : dp_1 : dp_2 = \frac{\partial H}{\partial p_1} : \frac{\partial H}{\partial p_2} : -\frac{\partial H}{\partial q_1} : -\frac{\partial H}{\partial q_2}$$

und für sie besteht die partielle Differentialgleichung

$$\alpha + H = 0, \quad H = T - U$$

wenn darin $p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1}$, $p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2}$ gesetzt wird. Von dieser Gleichung wird nun eine vollständige Lösung W gefordert mit zwei Constanten a und α und dann sind

$$\frac{\partial W}{\partial a} = b, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$$

Integrale der Bewegungsgleichungen. Hat man daher als zweites Integral des Systems derselben ausser $\alpha + H = 0$ noch die Gleichung $F(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0$ gefunden, so ist

$$W = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2),$$

indem an die Stelle der Grössen x, y, p, q, ψ, z hier $q_1, q_2, p_1, p_2, \alpha + H, W$ treten. Es sind dabei also

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2\right) = b, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} dq_2\right) = \tau - t.$$

Auch kann man der obigen Proportion, welche die Bewegungsgleichungen ausdrückt, links dt und rechts 1 zufügen. Man hat daher den folgenden, zuerst von Jacobi 1836 aufgestellten Satz:

Wenn ein Problem der Mechanik blos von zwei Variabelen q_1, q_2 abhängt, wenn für dasselbe eine Kräftefunction U existirt, welche die Zeit nicht explicit enthält und man von dem System der Bewegungsgleichungen, nämlich

$$dt : dq_1 : dq_2 : dp_1 : dp_2 = 1 : \frac{\partial H}{\partial p_1} : \frac{\partial H}{\partial p_2} : -\frac{\partial H}{\partial q_1} : -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad H = T - U$$

noch ein Integral $F(q_1, q_2, p_1, p_2) = a$ kennt, wo $p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}$, $p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'}$, so bestimmen die Gleichungen $\alpha + H = 0$ und $F(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0$ die Grössen p_1, p_2 als Functionen von q_1, q_2, a und α so, dass die beiden übrigen Integrale der Bewegungsgleichungen sind:

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2\right) = b, \quad \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} dq_2\right) = \tau - t,$$

welche mit $\alpha + H = 0$, $F = a$ zusammen die vollständige Integration des Gleichungssystems darstellen. (Vergl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 175.)

§. 11. Für die freie Bewegung eines Punktes in der Ebene sind $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}$ die Bewegungsgleichungen und ist $T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)$. Kennt man also ausser $\alpha + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - U = 0$ noch ein Integral $F(x, y, x', y') = a$, so sind

$$\int \left(\frac{\partial x'}{\partial a} dx + \frac{\partial y'}{\partial a} dy\right) = b, \quad \int \left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha} dx + \frac{\partial y'}{\partial \alpha} dy\right) = \tau - t$$

die Integralgleichungen des Problems, erstere die Gleichung der Bahn, während durch letztere die Zeit eingeführt wird.

Ein anderes hierher gehöriges Problem ist die Bewegung eines Punktes auf einer krummen Fläche. Vgl. Jacobi, Dynamik, S. 176; Padova, Applicazione del metodo di Hamilton al moto di un punto sopra una superficie (Battaglini, Giornale di matematiche, T. VIII, p. 90. [1870]).

XVIII. Capitel.

Probleme der Bewegung veränderlicher Systeme.

§. 1. **Bewegung eines biegsamen und dehnbaren homogenen Fadens** (Problem der schwingenden Saiten). Ein biegsamer und dehnbarer Faden sei zwischen zwei festen Punkten A, B gespannt. Zur Zeit $t = 0$ sei er um ein Weniges aus der Gleichgewichtslage entfernt, und ihm ein bestimmter Geschwindigkeitszustand ertheilt und mögen dann auf ihn continuirliche Kräfte wirken. Es sollen die Gleichungen seiner Bewegung aufgestellt und näherungsweise integrirt werden.

1. Wir nehmen die Gerade AB zur x-Axe, zwei andere zu ihr und unter einander senkrechte Axen des Punktes A zur y- und z-Axe. Die anfängliche Spannung des Fadens, ohne dass die Kräfte P wirken, sei in allen Punkten gleich τ. Die Gerade AB ist nicht die Gleichgewichtslage, um welche der Faden schwingen wird, sie ist die Gestalt des Fadens, welche er annehmen würde, wenn blos die Spannung τ wirkte. Ein Punkt N dieser Linie wird zur Zeit $t = 0$ die Lage M_0, zur Zeit t die Lage M haben. Ist $AN = x$, so seien $x + u$, y, z die Coordinaten von M, entsprechend der Zeit t, so dass u, y, z die Verschiebungen des Punktes N darstellen. An dem Punkte M, in welchem man sich das Bogenelement MM' verschwindend zu denken hat, wirkt nun die gegebene Kraft, welche wir wie auf die Masse ε der Längeneinheit beziehen, so dass $X\varepsilon\partial s$, $Y\varepsilon\partial s$, $Z\varepsilon\partial s$ ihre an M in Betracht kommenden Componenten sind; ferner die Spannungen T, $T + \partial T$ längs den beiden an M anstossenden Elementen, deren Componenten $T_x + \partial T_x$, $T_y + \partial T_y$, $T_z + \partial T_z$ im Sinne des wachsenden Bogens und $-T_x$, $-T_y$, $-T_z$ im entgegengesetzten Sinne sind.

Diese Componenten beziehen sich auf die Zeit t und ∂T_x, ∂T_y, ∂T_z, ∂s sind Aenderungen, welche man zu derselben Zeit beim Uebergange vom Punkte N zum Punkte N' erhält, wobei sich x allein ändert; es sind partielle Aenderungen nach x. Diese Spannungscomponenten liefern nun mit denen der äussern Kraft zusammen $\partial T_x + X\varepsilon\partial s$, $\partial T_y + Y\varepsilon\partial s$, $\partial T_z + Z\varepsilon\partial s$, welche mit den Reactionskräften am Punkte M Gleichgewicht halten. Die Beschleunigungscomponenten des Punktes $M(x + u, y, z)$ zur Zeit t sind nun die zweiten Derivirten seiner Coordinaten nach der Zeit. Daher ergeben sich als Reactionskräfte $-\varepsilon ds\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $-\varepsilon ds\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $-\varepsilon ds\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, indem x von der Zeit unabhängig ist. Da u, y, z Functionen von x und t sind, so sind diese Derivirten partielle; daher das Zeichen ∂ und nicht d geschrieben werden muss. Das Gleichgewicht der Kräfte von M liefert uns daher die Gleichungen der Bewegung:

$$\partial T_x + \left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\varepsilon\partial s = 0,\ \partial T_y + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\varepsilon\partial s = 0,\ \partial T_z + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\varepsilon\partial s = 0.$$

Um nun T_x, T_y, T_z zu erhalten, ist T mit seinen Richtungscosinussen zu multipliciren. Diese sind die Richtungscosinusse der Fadentangente zur Zeit t, nämlich $\frac{\partial(x+u)}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$, wo dies Zeichen ∂ einer Aenderung des x, d. h. einem Uebergange vom Punkte M zu M' zu derselben Zeit t entspricht. Demnach ist

$$T_x = T\cdot\frac{\partial(x+u)}{\partial s},\qquad T_y = T\cdot\frac{\partial y}{\partial s},\qquad T_z = T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Wir wollen nun unser bewegliches System, den Faden, so beschaffen annehmen, dass das Bogenelement $MM' = \partial s$, welches ursprünglich die Länge $NN' = dx$ hatte, nach wie vor dieselbe Masse besitzt. Dann ist, wenn M die Gesammtmasse des Fadens und l seine ursprüngliche Länge AB bezeichnet, $\varepsilon \partial s = \frac{M}{l} \partial x$. Führen wir diesen Ausdruck in die Bewegungsgleichungen ein, und schreiben statt der Differentiation derivirte Functionen, so nehmen dieselben die Gestalt an:

$$\frac{\partial}{\partial x} T \frac{\partial(x+u)}{\partial s} + \frac{M}{l}\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} T \frac{\partial y}{\partial s} \qquad + \frac{M}{l}\left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} T \frac{\partial z}{\partial s} \qquad + \frac{M}{l}\left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = 0.$$

2. Nehmen wir jetzt an, es wirken keine äusseren Kräfte, d. h. es seien X, Y, Z gleich Null und sei der Zusammenhang der Fadentheile der Art, dass die Verlängerung, welche ein Theil desselben durch eine spannende Kraft erleidet, der ursprünglichen Länge und der spannenden Kraft proportional sei. Nun besass ∂s ursprünglich die Länge ∂x und ist mithin $\partial s - \partial x$ seine Verlängerung; die ursprüngliche Spannung war τ und ist mithin die Kraft, welche die Verlängerung hervorgebracht hat $T - \tau$. Daher besteht die Gleichung $\partial s - \partial x = E\,(T - \tau)\,\partial x$, sowie E einen constanten, von der materiellen Beschaffenheit des Fadens abhängigen Coefficienten bedeutet. Im vorliegenden Falle, wo keine äusseren Kräfte wirken, ist die Gleichgewichtslage des Fadens die Gerade AB und wird derselbe, wenn er zur Zeit $t = 0$ nur eine kleine Ausbiegung erfährt, fortwährend nur kleine Abweichungen von AB zeigen. In Folge dessen wird zu allen Zeiten die Tangente der Fadencurve mit AB einen sehr kleinen Winkel bilden, sein Cosinus $\frac{\partial(x+u)}{\partial s}$ also sehr nahe die Einheit und $\partial s = \partial x + \partial u$ sein. Daher ergibt die oben entwickelte Formel

$$T = \tau + E\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Demzufolge wird die erste der drei Bewegungsgleichungen:

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{M}{l}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Drücken wir jetzt die beiden anderen Richtungscosinusse der Fadentangente und die Componenten der Spannung mit Rücksicht auf die angeführten speciellen Verhältnisse aus. Man erhält zunächst:

$$T\frac{\partial y}{\partial s} = \left(\tau + E\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial x + \partial u} = \left(\tau + E\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial x}\left[1 - \frac{\partial u}{\partial x} + \cdots\right].$$

Es ist aber $\frac{\partial y}{\partial x}$ die Tangente der Neigung der Projection des Fadenelementes auf die xy-Ebene gegen die x-Axe, also sehr klein. Ebenso ist u gegen x und mithin ∂u gegen ∂x sehr klein. Mit Beseitigung der kleinen Grössen höherer Ordnung erhält man demnach

$$T\frac{\partial y}{\partial s} = \tau\frac{\partial y}{\partial x}$$

und folglich für die zweite Bewegungsgleichung:

$$\tau\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{l}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

59*

und ganz in derselben Weise die dritte

$$\tau \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{M}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Setzt man noch $\frac{El}{M} = \alpha^2$ und $\frac{\tau l}{M} = a^2$, so nehmen jetzt die Bewegungsgleichungen die einfache Form an:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Sie sind simultane partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung und dienen dazu, u, y, z und mithin die Lage jedes Systempunktes $(x, 0, 0)$ als Functionen seines Abstandes AN in der Gleichgewichtslage von dem einen Endpunkte des Fadens und der Zeit zu finden. Die erste Gleichung bestimmt die Bewegung der Projection des Systems auf die x-Axe (die sogenannten Longitudinalschwingungen der Saite), die zweite und dritte die Bewegung der Projection auf die xy- und die xz-Ebene (die Transversalschwingungen). Da jede der Gleichungen blos eine der gesuchten Functionen u, y, z und die unabhängigen Variabeln x und t enthält, so können sie gesondert integrirt werden. Zu den Differentialgleichungen treten nun noch die Bedingungen der Anfangslage und des anfänglichen Geschwindigkeitszustandes hinzu, sowie die für alle Zeiten zu erfüllende Bedingung des Systems, dass die beiden Endpunkte fest seien. Bezüglich der Anfangslage müssen sich also u, y und z für $t = 0$ auf bestimmte Functionen $f_0(x)$, $f(x)$, und $f_1(x)$ von x reduciren, sodass $y = f(x)$, $z = f_1(x)$ die Gleichungen der Form sind, in welche man die Saite zur Zeit $t = 0$ durch Herausbringen aus der Gleichgewichtslage gebracht hat. Ebenso müssen die Componenten der Geschwindigkeit sich für $t = 0$ auf gegebene Functionen $\frac{\partial u}{\partial x} = F_0(x)$, $\frac{\partial y}{\partial x} = F(x)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = F_1(x)$ reduciren. Demnach ist das Problem in folgenden Bedingungen vollständig enthalten:

$$\begin{array}{lllll}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & u = f_0(x) & & \frac{\partial u}{\partial t} = F_0(x) & u = 0 \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} & y = f(x) & \text{und} & \frac{\partial y}{\partial t} = F(x) \text{ für } t = 0, & y = 0 \text{ für } \begin{matrix} x = 0 \\ x = l \end{matrix} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & z = f_1(x) & & \frac{\partial z}{\partial t} = F_1(x) & z = 0 \text{ und alle } t
\end{array}$$

3. Wir beschäftigen uns vorläufig nur mit der Behandlung des Gleichungssystems

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad y = f(x) \text{ und } \frac{\partial y}{\partial t} = F(x) \text{ für } t = 0,$$

$$y = 0 \quad \text{für} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = l \end{matrix} \quad \text{für jedes } t.$$

Für sich drücken diese Gleichungen die Bewegung der Saite aus, wenn dieselbe blos Transversalschwingungen in der xy-Ebene macht. Der erste, welcher die vorliegende Aufgabe löste, war D'Alembert (*Mémoires de l'Académie de Berlin*). Wir wollen zunächst seine Methode der Integration der partiellen Differentialgleichung erläutern, die beiden willkürlichen Functionen, welche das allgemeine Integral enthält, bestimmen und später erst die neuere Methode mit Hülfe von Particularlösungen und der Fourier'schen Reihen auseinandersetzen. D'Alembert schreibt die obige Differentialgleichung in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a^2 \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

und bemerkt, dass sie ausdrückt, dass die Grösse $\frac{\partial y}{\partial t}\,dx + a^2\frac{\partial y}{\partial x}\,dt$ ein vollständiges Differential einer Function u von x und t ist, sodass

$$du = \frac{\partial y}{\partial t}\,dx + a^2\frac{\partial y}{\partial x}\,dt.$$

Hierzu tritt die allgemein gültige Gleichung:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial y}{\partial t}\,dt.$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich sehr leicht, wenn man die zweite mit a multiplicirt und mit der ersteren durch Addition und Subtraction verbindet:

$$d(u + ay) = \left(\frac{\partial y}{\partial t} + a\frac{\partial y}{\partial x}\right) d(x + at)$$

$$d(u - ay) = \left(\frac{\partial y}{\partial t} - a\frac{\partial y}{\partial x}\right) d(x - at).$$

Da die linken Seiten dieser Gleichungen vollständige Differentialien sind, so müssen es auch die rechten Seiten sein. Demnach ist $\frac{\partial y}{\partial t} + a\frac{\partial y}{\partial x}$ eine Function von $x + at$ und $\frac{\partial y}{\partial t} - a\frac{\partial y}{\partial x}$ eine Function von $x - at$. In Folge dessen sind $u + ay$ und $u - ay$ Functionen resp. von $x + at$ und $x - at$, d. h. man kann setzen

$$u + ay = \varphi(x + at), \qquad u - ay = -\psi(x - at)$$

mithin wird

$$2ay = \varphi(x + at) + \psi(x - at),$$

welche Gleichung die allgemeine Lösung der Differentialgleichung der schwingenden Saiten mit den zwei willkürlichen Functionen φ und ψ darstellt. Um die Form derselben zu finden, wie sie dem mechanischen Probleme entspricht, haben wir gemäss den Bedingungen des Anfangszustandes

$$2af(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$
$$2F(x) = \varphi'(x) - \psi'(x),$$

mithin, nachdem man die zweite dieser Gleichungen zwischen 0 und x integrirt hat, wodurch

$$2\int_0^x F(x)\,dx = \varphi(x) - \psi(x)$$

wird

$$\varphi(x) = af(x) + \int_0^x F(x)\,dx, \qquad \psi(x) = af(x) - \int_0^x F(x)\,dx$$

und mithin, indem man an die Stelle des Argumentes x die Argumente $x + at$, $x - at$ setzt:

$$2ay = a[f(x + at) + f(x - at)] + \int_0^{x+at} F(x)\,dx - \int_0^{x-at} F(x)\,dx,$$

oder

$$y = \tfrac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(x)\,dx.$$

Da die Zeit t von 0 bis ∞ und x von 0 bis l läuft, so erhält $x + at$ alle Werthe von 0 bis ∞, $x - at$ aber alle Werthe von $-\infty$ bis l. Damit also y und mithin

auch $\frac{\partial y}{\partial t}$ für alle Werthe von t gefunden werden könne, müssen die Functionen $\varphi(\xi)$ und $\psi(\xi)$ für alle Werthe des Argumentes ξ, die erste von 0 bis ∞, die zweite von $-\infty$ bis l bekannt sein. Durch den Anfangszustand sind aber die Functionen f und F und in Folge dessen auch die aus ihnen gebildeten Functionen φ und ψ nur für alle Argumente zwischen 0 und l bestimmt. Die Ausdehnung dieser Kenntniss der Werthe derselben ergibt sich nun mit Hülfe der Bedingung für die Grenzpunkte der Saite. Vermöge derselben ist $y = 0$ für $x = 0$ und $x = l$, d. h. es bestehen die Gleichungen:

$$\varphi(at) + \psi(-at) = 0$$
$$\varphi(l + at) + \psi(l - at) = 0,$$

oder, wenn man $at = \varrho$ setzt:

$$\varphi(\varrho) + \psi(-\varrho) = 0$$
$$\varphi(l + \varrho) + \psi(l - \varrho) = 0.$$

Diese Gleichungen bestimmen den periodischen Charakter der Functionen φ und ψ und damit den der ganzen Bewegung. Die erste Gleichung zeigt, dass wenn $\varphi(\varrho)$ für irgend ein positives ϱ bekannt ist, man sofort $\psi(-\varrho)$ für das absolut ebenso grosse negative ϱ erhält und dass wenn $\psi(-\varrho)$ für ein negatives ϱ, also für ein positives Argument bekannt ist, φ für das entsprechende negative Argument erhalten wird, sowie dass die eine dieser Functionen periodisch ist, wenn es die andere ist. Die zweite Gleichung sagt aber aus, dass eine derselben periodisch sein muss. Denn setzt man in ihr $l - \varrho = -\sigma$, also $\varrho = l + \sigma$, so kommt

$$\varphi(2l + \sigma) = -\psi(-\sigma)$$

und da die erste Gleichung hierzu

$$-\psi(-\sigma) = \varphi(\sigma)$$

liefert, so wird

$$\varphi(\sigma + 2l) = \varphi(\sigma).$$

Die Periode von φ ist also $2l$. Dasselbe gilt von ψ. Hiernach ist klar, wie die Reihe der Werthe der Functionen φ und ψ, welche durch den Anfangszustand nur zwischen den Grenzen 0 und l des Argumentes gegeben ist, über diese Grenzen ausgedehnt wird und wie durch die Bedingungen an den festen Endpunkten diese Functionen als periodische definirt werden. Setzt man für σ die Grösse at, so erhellt, dass wenn at um $2l$ zunimmt, die Functionen φ und ψ und also auch die Ordinate y und die Geschwindigkeit $\frac{\partial y}{\partial t}$ dieselben Werthe annehmen. Es kehren daher nach der Zeit $T = \frac{2l}{a}$ alle Zustände der Saite in derselben Ordnung wieder, wie früher und macht die Saite fortwährend gleiche Oscillationen von der Dauer T. Für die Anzahl n der Oscillationen in der Zeiteinheit hat man $nT = 1$, also $n = \frac{a}{2l}$, oder da $a^2 = \frac{\tau l}{M}$ ist: $n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau}{Ml}}$. Diese Schwingungszahl, welche unabhängig von der Anfangsgestalt der Saite ist, bestimmt die Höhe des Tones, den sie erzeugt. Sie ist proportional der Quadratwurzel aus der Spannung τ. Da M selbst proportional l ist, so wird n umgekehrt proportional dieser Länge der Saite.

4. Ist z. B. $\frac{\partial y}{\partial x} = F(x)$ für $t = 0$ gleich Null, so erhält man

$$\varphi(x) = af(x), \qquad \psi(x) = af(x),$$

also

$$y = \tfrac{1}{2}\left\{f(x + at) + f(x - at)\right\}.$$

5. Wir wollen jetzt die früher erwähnte zweite Behandlungsweise unseres Problems durchführen. Die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ist linear, d. h. es kommen in ihr die Differentialquotienten weder auf Potenzen noch durch Multiplication mit einander verbunden vor. Einer solchen Differentialgleichung kann man immer durch eine Exponentialfunction als Particularlösung genügen. Man sieht nämlich vermöge der Eigenschaft der Exponentialfunction, sich in ihren Differentialquotienten wieder zu erzeugen, ein, dass $y = e^{\alpha x + \beta t}$ der Gleichung genügt, sobald über die Constanten α, β so disponirt wird, dass sie durch die algebraische Gleichung $\beta^2 = a^2\alpha^2$ von einander abhängig sind, wie sich ergibt, wenn man $y = e^{\alpha x + \beta t}$ in die Differentialgleichung einsetzt. Von den Grössen α, β kann über die eine noch weiter verfügt werden. Setzen wir $\beta = \pm a\alpha$ ein, so wird die Particularlösung $y = e^{(x \pm at)\alpha}$ und spaltet sich in zwei solche, nämlich $y = e^{(x + at)\alpha}$ und $y = e^{(x - at)\alpha}$. Jede von diesen Lösungen genügt auch noch, wenn man sie mit einer willkürlichen Constanten multiplicirt, d. h. es sind $y = C_1 e^{(x+at)\alpha}$ und $y = C_2 e^{(x-at)\alpha}$ gleichfalls Particularlösungen. Nun ist aber weiter einleuchtend, dass allgemein, wenn X_1 und X_2 zwei Lösungen sind, auch die Summe $X_1 + X_2$ eine Lösung ist. Dies ist eine Folge der linearen Beschaffenheit der Differentialgleichung und des Mangels eines Absolutgliedes, wie man sofort einsieht, wenn man die genannte Summe einsetzt. Es verschwinden dann für sich die Resultate, welche aus der Einsetzung von X_1 und X_2 einzeln folgen würden. Daher ist auch

$$y = C_1 e^{(x+at)\alpha} + C_2 e^{(x-at)\alpha}$$

eine Lösung. Die speciellen weiteren Bedingungen unseres mechanischen Problems fordern nun aber, dass für $x = 0$ und $x = l$ die Function y bei jedem Werthe von t verschwinde. Dies ist in der vorliegenden Form für reelle α nicht möglich, wohl aber, wenn α imaginär, d. h. $\beta = \pm a\alpha i$ genommen wird. Dann gehen nämlich die Exponentialgrössen in goniometrische Functionen über. An die Stelle der Lösungen $e^{(x \pm at)\alpha i}$ treten alsdann $\cos\alpha(x \pm at) + i \sin\alpha(x \pm at)$, welche man aber selbst wieder in ihre reellen und imaginären Theile spalten kann, sodass $\cos\alpha(x \pm at)$ und $\sin\alpha(x \pm at)$ selbst Particularlösungen sind. Die letzteren kann man aber auch nach der obigen Bemerkung durch Addition und Subtraction combiniren. Daher ist $\sin\alpha(x + at) + \sin\alpha(x - at)$ oder $\sin\alpha x \cos\alpha a t$ eine Lösung; ebenso $\cos\alpha(x - at) - \cos\alpha(x + at)$ oder $\sin\alpha x \sin\alpha a t$. Multipliciren wir die beiden letztgenannten Lösungen mit Constanten und addiren sie, so wird

$$y = \sin\alpha x\,(A \cos\alpha a t + B \sin\alpha a t)$$

eine Lösung. Sie besitzt bereits die Eigenschaft, dass y für $x = 0$ bei jedem Werthe von t verschwindet. Wir können aber die Grösse α noch so wählen, dass y auch für $x = l$ Null wird. Dies liefert die Bedingung $\sin\alpha l = 0$, woraus $\alpha = 0, \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \ldots, \frac{n\pi}{l}$ folgt, sodass

$$y = \sin\frac{n\pi}{l} x\left(A \cos\frac{n\pi a}{l} t + B \sin\frac{n\pi a}{l} t\right)$$

wird. Endlich können wir hierin zu jedem Werthe von n immer andere Werthe der Constanten A und B wählen und alle so erhaltenen Particularlösungen summiren, sodass wir unter der Form

$$y = \Sigma \sin \frac{n\pi}{l} x \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right), \qquad n = 1, 2, \ldots \infty$$

eine Lösung erhalten, welche der Differentialgleichung nicht allein, sondern auch den Bedingungen $y = 0$ für $x = 0$ und $x = l$ genügt. Durch Differentiation erhält man für die Geschwindigkeit:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{a\pi}{l} \Sigma \sin \frac{n\pi}{l} x \left(- n A_n \sin \frac{na\pi}{l} t + n B_n \cos \frac{na\pi}{l} t \right), \qquad n = 1, 2, \ldots \infty.$$

Hierin sind nun die Coefficienten A und B noch so zu bestimmen, dass sich y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $t = 0$ auf gegebene Functionen $f(x)$ und $F(x)$ von x reduciren. Dies führt zu den Bedingungen:

$$f(x) = \Sigma A_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$F(x) = \frac{a\pi}{l} \Sigma n B_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Um hierin A_n und B_n für alle Werthe von $n = 1, 2, \ldots \infty$ zu bestimmen, entwickelt man die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ auf den linken Seiten nach Sinussen der Vielfachen von $\frac{\pi x}{l}$ und vergleicht beiderseits die Coefficienten. Unter dem Namen der Fourier'schen Reihe kennt die Analysis aber nun folgende Entwickelung einer beliebigen Function $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = C_1 \sin \frac{\pi}{l} x + C_2 \sin \frac{2\pi}{l} x + C_3 \sin \frac{3\pi}{l} x + \cdots, \qquad 0 \leqq x \leqq l$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\sigma) \sin \frac{n\pi}{l} \sigma \cdot d\sigma.$$

Die Entwickelung von $f(x)$ und $F(x)$ in eine solche Reihe liefert daher sofort:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\sigma) \sin \frac{n\pi}{l} \sigma \cdot d\sigma, \qquad B_n = \frac{2}{na\pi} \int_0^l F(\sigma) \sin \frac{n\pi}{l} \sigma \cdot d\sigma.$$

Demnach wird y dargestellt durch die periodische Reihe:

$$y = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi a t}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi a t}{l} + A_3 \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi a t}{l} + \cdots$$

$$+ B_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi a t}{l} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi a t}{l} + B_3 \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi a t}{l} + \cdots$$

und A_n, B_n haben die oben angeführte Bedeutung.

Aus dieser Form der Lösung erhellt die Periodicität der Bewegung besser als aus der früheren D'Alembert'schen. Insbesondere erkennt man leichter die Oscillationsdauer. Soll nämlich y für t und $t + T$ denselben Werth annehmen, so muss $\frac{\pi a T}{l} = 2\pi$, also $T = \frac{2l}{a}$ sein. Der Einfluss des Anfangszustandes spricht sich in den Coefficienten aus. Wenn derselbe derart ist, dass Coefficienten von bestimmtem Index ausfallen, so zeigt die Saite ausser den festen Endpunkten noch andere ruhende Punkte (Schwingungsknoten). Fallen z. B. alle Coefficienten aus, für welche n nicht durch die Zahl m ohne Rest theilbar ist, so ist für die Anfangsglieder der Reihe $n = m$ und wird $\frac{ma\pi}{l} T = 2\pi$, also $T = \frac{1}{m} \frac{2l}{a}$

und alle Punkte, für welche $\frac{m\pi}{l}x = 1, 2, \ldots m$, also $x = \frac{l}{m\pi}, \frac{2l}{m\pi}, \ldots \frac{2l}{\pi}$ sind Schwingungsknoten.

Den speciellen Einfluss des Anschlags der Saite durch einen Hammer, durch das Pizzicato, den Bogenstrich u. s. w. auf den Anfangszustand der Saite und die Bildung der Schwingungsknoten, abgeleitet aus der vorstehenden Entwickelungsreihe für y, s. Helmholtz, die Lehre von den Tonempfindungen S. 563 u. f.

6. Die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ für die Longitudinalschwingungen hat dieselbe Form, wie die für die Transversalschwingungen. Man erhält daher aus ihr analoge Resultate. Die Constante α aber hat eine etwas andere Bedeutung. Es ist $\alpha^2 = \frac{El}{M}$ und $a^2 = \frac{\tau l}{M}$. Die Oscillationsdauer der Longitudinalschwingungen ist $T' = \frac{2l}{\alpha}$, während die der Transversalschwingungen $T = \frac{2l}{a}$ ist. Man hat daher $\frac{T}{T'} = \frac{\alpha}{a} = \sqrt{\frac{E}{\tau}}$. Die Grösse E, welche der Elasticitätsmodulus des Systems heisst, ist eine sehr grosse Zahl und daher T bedeutend grösser, als T'. Daher sind die Longitudinaltöne der Saite weit höher, als ihre Transversaltöne. Wir hatten früher die Formel

$$T - \tau = E\,\frac{ds - dx}{dx}.$$

Aus ihr erkennt man die Bedeutung von E. Würde nämlich $T - \tau$ so gross, dass die Verlängerung $ds - dx$ von dx gleich $2\,dx$ würde, so erhielte man $E = T - \tau$. Es bedeutet demnach der Elasticitätsmodulus den Zuwachs der Spannung, welcher eine Ausdehnung der Saitentheile auf die doppelte Länge zu erzeugen im Stande wäre. Es ist daher E sehr viel grösser, als τ.

7. Im Vorstehenden ist nur eine specielle Aufgabe über die schwingenden Saiten behandelt worden, nämlich die Schwingungen der Saite mit zwei festen Endpunkten. Andere Probleme, welche hierher gehören, sind die Bewegung eines Fadens, welcher nur einen festen Punkt oder gar keinen festen Punkt hat, aber durch Kräfte ursprünglich gespannt ist. Auch haben wir mancherlei Einzelheiten übergangen, wie die Bildung der Wellen, ihre Reflexion und Superposition, ihre Fortpflanzung u. s. w. Wir werden bei anderen Problemen, bei welchen Aehnliches vorkommt, derartige Fragen etwas eingehender behandeln.

§. 2. Bewegung flüssiger Systeme. Die Bedingungen, welche die Natur eines Systems charakterisiren, können zweierlei Art sein, geometrische Bedingungen zwischen den Abständen der Systempunkte oder mechanische zwischen den Kräften, welche den Zusammenhang der Punkte mit dem System darstellen. Das flüssige System wird auf die letztere Art definirt. Man versteht unter einem flüssigen System eine continuirliche Vereinigung materieller Punkte, der Art, dass, wenn an irgend einer Stelle nach irgend einer Richtung hin die Verbindung mit dem System aufgehoben wird, die Kraft, welche den Einfluss des Zusammenhanges darstellt (der Druck), von der Richtung unabhängig ist. Denkt man sich daher durch einen Punkt des Systems ein ebenes Flächenelement gelegt, so wird hinter demselben der Einfluss der hinweggedachten Masse durch dieselbe Kraft vertreten, nach welcher Richtung man auch das Element hindrehen mag.

Wir stellen zunächst die Bewegungsgleichungen einer Flüssigkeit auf, indem wir eine kleine Parthie, z. B. ein kleines rechtwinkliges Flüssigkeitsparallelepiped, abtrennen und das Gleichgewicht der Reactionskraft mit den gegebenen und den Druckkräften analytisch darstellen. Man kann verlangen, dass durch diese Glei-

chungen die Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes, die Componenten seiner Geschwindigkeit, der Druck, der auf ihn ringsherum wirkt und seine specifische Masse als Functionen der Zeit gefunden werden können, wenn die Anfangslage und der anfängliche Geschwindigkeitszustand des Systems bekannt sind. Hierdurch würde unter Anderem auch die Bahn bekannt, welche jedes Theilchen beschreibt. Man legt der Aufstellung der Bewegungsgleichungen gewöhnlich aber eine etwas andere Auffassungsweise zu Grunde, auf welche sich übrigens die oben angeführte leicht zurückführen lässt. Die Geschwindigkeit, mit welcher ein Theilchen zur Zeit t durch den Punkt xyz hindurchgeht und ihre Componenten können als Functionen von t und x, y, z angesehen werden, indem sie an demselben Orte zu verschiedenen Zeiten und zu derselben Zeit an verschiedenen Orten verschieden sein werden. Dasselbe findet Statt bei dem Druck und der specifischen Masse. Hiernach hat man für die drei Componenten u, v, w der Geschwindigkeit, die specifische Masse ϱ und den Druck p fünf Differentialgleichungen aufzustellen zwischen den vier Variabeln x, y, z, t, durch deren Integration jene fünf Grössen als Functionen dieser vier Variabeln dargestellt werden. Von diesen Gleichungen ist eine gewöhnlich eine algebraische Gleichung, nämlich die, welche einen Zusammenhang der specifischen Masse und des Druckes darstellt, d. h. erstere als Function des letzteren bestimmt. Diese Gleichung ist dann durch die Beschaffenheit des Systems gegeben. Man unterscheidet in dieser Hinsicht zwei Arten von Flüssigkeiten: incompressibele, für welche ϱ durchaus constant bleibt, und elastische, für welche dies nicht der Fall, ϱ vielmehr eine gegebene Function von p ist. Die vier nothwendigen Differentialgleichungen sind partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung und ihre zweimalige Integration würde die Gleichungen liefern, aus denen man unter andern auch durch Elimination von u, v, w, p und ϱ die Grössen x, y, z als Functionen von t finden würde, wodurch die obige Auffassungsweise des Problems mit der jetzigen vermittelt wäre.

Zu den Bedingungen, welche den Anfangszustand ausdrücken, treten noch andere hinzu, welche die Begrenzung des Systems (Gefässwände, freie Oberfläche u. s. w.) betreffen.

Den Systempunkt (xyz) denken wir uns als ein verschwindend kleines Parallelepipid von den Kanten dx, dy, dz, welches während des Zeitelementes dt sich um die Strecken dx, dy, dz parallel den Axen fortbewegt. Um die Componenten der an demselben angreifenden Reactionskraft zu finden, haben wir seine Beschleunigungscomponenten $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ darzustellen. Da u, v, w Functionen von x, y, z, t sind, so sind diese Grössen

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial w}{\partial t},$$

oder da $\frac{dx}{dt}=u$, $\frac{dy}{dt}=v$, $\frac{dz}{dt}=w$ sind,

$$\frac{du}{dt}=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{dv}{dt}=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{dw}{dt}=u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Sie sind mit der Masse dm des Punktes $dm=\varrho\,dx\,dy\,dz$ zu multipliciren und stellen dann

$$-\varrho\frac{du}{dt}dx\,dy\,dz\,,\qquad -\varrho\frac{dv}{dt}dx\,dy\,dz\,,\qquad -\varrho\frac{dw}{dt}dx\,dy\,dz$$

die Componenten der Reactionskraft dar.

Die Resultante der gegebenen am Punkte (xyz) angreifenden Kräfte werde auf die Einheit der Masse bezogen und sind demnach Xdm, Ydm, Zdm oder $X\varrho\,dx\,dy\,dz$, $Y\varrho\,dx\,dy\,dz$, $Z\varrho\,dx\,dy\,dz$ ihre Componenten. Beziehen wir den Druck p auf die Flächeneinheit, so wirkt auf die Seitenfläche $dy\,dz$, welche durch den Punkt (xyz) geht, der Druck $p\,dy\,dz$ in der Richtung der x Axe. Der Druck auf die gegenüberliegende Seitenfläche $dy\,dz$ des unendlich kleinen Parallelepipeds geht aus diesem hervor, indem x sich um dx ändert, welcher Aenderung eine Aenderung von p um $\frac{\partial p}{\partial x}dx$ entspricht. Er ist, da er mit dem vorigen entgegengesetzten Sinn hat: $-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz$. Beide Pressungen, welche der x-Axe parallel sind, haben daher die Resultante

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy\,dz\,.$$

Analog erhalten wir für die Pressungen parallel der y- und z-Axen:

$$-\frac{\partial p}{\partial y}dx\,dy\,dz\qquad\text{und}\qquad -\frac{\partial p}{\partial z}dx\,dy\,dz\,.$$

Demnach liefert das Gleichgewicht der gegebenen, der Druck- und der Reactionskräfte, die Gleichungen

$$\varrho X-\frac{\partial p}{\partial x}-\varrho\frac{du}{dt}=0,\quad \varrho Y-\frac{\partial p}{\partial y}-\varrho\frac{dv}{dt}=0,\quad \varrho Z-\frac{\partial p}{\partial z}-\varrho\frac{dw}{dt}=0$$

oder nach Einsetzung der obigen Werthe

$$(1)\qquad\begin{aligned}
u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}&=X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial t}&=Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}&=Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\,.
\end{aligned}$$

Zu diesen Gleichungen tritt eine weitere hinzu, welche die Aenderung der specifischen Masse an der Stelle (xyz) während des Zeitelementes entwickelt. Man erhält dieselbe, indem man die Masse bestimmt, welche in das Volumenelement $dx\,dy\,dz$ an der fraglichen Stelle während des Zeitelementes dt eintritt und dieselbe durch das Volumenelement selbst dividirt. Diese Masse setzt sich aus drei Theilen zusammen. Durch die Seitenfläche $dy\,dz$ tritt parallel der x-Axe mit der Geschwindigkeit u die Masse $\varrho\,dy\,dz\cdot u\,dt$ ein, indem während dt zusammenhängende Masse um die Strecke $dx=u\,dt$ fortrückt. Gleichzeitig aber tritt durch die gegenüberliegende Seitenfläche Masse aus. Man erhält dieselbe aus der vorigen, indem man x um dx zunehmen lässt, denn diese austretende Masse ist die, welche in das anstossende Volumenelement eintritt, welches der Abscisse $x+dx$ entspricht. Die austretende Masse ist daher $dy\,dz\left(u\varrho+\frac{\partial(u\varrho)}{\partial x}\right)dt$. Die Differenz zwischen ihr und der vorigen Masse gibt die in dem Zeitelemente dt erfolgte Aenderung der Masse des Volumenelementes in Folge eines Massenein- und Austritts parallel der x-Axe an, nämlich $-\frac{\partial(u\varrho)}{\partial x}dx\,dy\,dz\,dt$. Aehnliche Ausdrücke erhält man für die Massenänderungen bezüglich der y- und z-Axe, nämlich

$$, \quad -\frac{\partial(u\varrho)}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\,dt\,, \qquad -\frac{\partial(u\varrho)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,dt$$

und die Summe aller durch $dx\,dy\,dz$ dividirt gibt die Aenderung der specifischen Masse an der Stelle (xyz) nach t, d. h. $\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,dt$. Nach Division mit dt hat man daher die Gleichung:

$$(2)\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{\partial(u\varrho)}{\partial x}+\frac{\partial(u\varrho)}{\partial y}+\frac{\partial(u\varrho)}{\partial z}=0\,.$$

Die totale Aenderung der specifischen Masse, welche beim Uebergang des Massenelementes von der Stelle (xyz) zur Stelle $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ im Zeitelemente erfolgt, würde sein

$$d\varrho=\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varrho}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\varrho}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial\varrho}{\partial t}\right)dt$$

und die totale Derivirte von ϱ

$$\frac{d\varrho}{dt}=\frac{\partial\varrho}{\partial x}u+\frac{\partial\varrho}{\partial y}v+\frac{\partial\varrho}{\partial z}w+\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,.$$

Für die incompressibeln Flüssigkeiten ist ein $\varrho=$ const., mithin

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x}u+\frac{\partial\varrho}{\partial y}v+\frac{\partial\varrho}{\partial z}w+\frac{\partial\varrho}{\partial t}=0$$

und wenn man mit Hülfe dieser Rotation die Gleichung (2) nach Ausführung der Differentiationen reducirt, so wird sie ersetzbar durch:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\,.$$

Man hat daher für die incompressibeln Flüssigkeiten als Differentialgleichungen der Bewegung die folgenden fünf:

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}&=X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial t}&=Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}&=Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\\
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}&=0\\
u\frac{\partial\varrho}{\partial x}+v\frac{\partial\varrho}{\partial y}+w\frac{\partial\varrho}{\partial z}+\frac{\partial\varrho}{\partial t}&=0\,.
\end{aligned}$$

Die Integration derselben gibt $u,\ v,\ w,\ \varrho,\ p$ als Functionen von $x,\ y,\ z,\ t$. Eliminirt man zwischen den Integralen dieses Gleichungssystems ϱ und p, so erhält man noch drei Gleichungen mit $u,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z,\ t$, welche mit

$$\frac{dx}{dt}=u\,,\qquad \frac{dy}{dt}=v\,,\qquad \frac{dz}{dt}=w$$ verbunden nach abermaliger Integration die Coordinaten als Functionen der Zeit geben.

Für die compressibelen flüssigen Systeme muss noch eine Definitionsgleichung gegeben sein, welche einen Zusammenhang zwischen dem Druck und der specifischen Masse herstellt, z. B. $p=\varphi(\varrho)$. Für solche Systeme gelten die drei vorstehenden Bewegungsgleichungen ebenfalls, die vierte und fünfte dagegen sind zu ersetzen durch:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{\partial(u\varrho)}{\partial x}+\frac{\partial(u\varrho)}{\partial y}+\frac{\partial(u\varrho)}{\partial z}=0$$

$$p=\varphi(\varrho)\,.$$

§. 3. **Oscillatorische Bewegung einer elastischen Flüssigkeit.** Es sei ϱ ursprünglich constant, $\varrho = c$, die äusseren Kräfte X, Y, Z seien Null, die Flüssigkeit in Ruhe und es werde nun zur Zeit $t = 0$ in der Flüssigkeit eine kleine Störung vorgenommen. Zu irgend einer Zeit t wird dann ϱ von c um eine kleine veränderliche Grösse verschieden sein, nämlich $\varrho = c\,(1 + s)$. Der Factor s heisst, je nachdem er positiv oder negativ ist, die Condensation oder Dilatation zur Zeit t. Man hat dann $p = \varphi(\varrho) = \varphi(c + cs)$ und erhält für die erste Bewegungsgleichung, da u, v, w wegen der Kleinheit der Störung fortwährend klein sein werden, abgekürzt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{c + cs}\,\varphi'\,(c + cs) \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

oder wenn man $\varphi'\,(c + cs)$ und $\frac{1}{c + cs}$ nach Potenzen von s entwickelt und die Glieder mit s tilgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varphi'\,(c) \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = 0\,.$$

Da der Druck und die specifische Masse gleichzeitig wachsen und abnehmen, so ist $\frac{\partial p}{\partial \varrho} = \varphi'\,(\varrho)$ für $\varrho = c$ positiv und wenn wir diese Grösse daher mit a^2 bezeichnen, die Rechnung für alle Coordinatenaxen durchführen und behufs der vierten der Gleichungen des §. 2. berücksichtigen, dass $u\varrho = uc + ucs$ wegen der Kleinheit von u und s sich auf uc reducirt, also $\frac{\partial(u\varrho)}{\partial x} = c\,\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ ist, so erhalten wir für die oscillatorisehe Bewegung der elastischen Flüssigkeit unter den angegebenen Bedingungen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + a^2\,\frac{\partial s}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + a^2\,\frac{\partial s}{\partial y} = 0\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + a^2\,\frac{\partial s}{\partial z} = 0\\
&\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\\
&p = \varphi\,(\varrho), \qquad \varrho = c\,(1 + s).
\end{aligned}$$

Die Integration dieses Gleichungssystems mit Rücksicht auf den Anfangszustand und die Bedingungen an den Grenzen des Systems wollen wir in einigen speciellen und dann auch für den allgemeinen Fall ausführen.

§. 4. **Die elastische Flüssigkeit erfülle einen nach beiden Seiten unendlich langen Cylinder von beliebiger Form, die Störung des Gleichgewichts sei so beschaffen, dass alle Punkte eines zur Cylinderaxe senkrechten Querschnittes gleiche Geschwindigkeiten parallel der Axe und gleiche Condensation besitzen. Welche Bewegung erfolgt in dem Systeme und wie ist die Condensation in demselben beschaffen?**

Die Axe des Cylinders sei die x-Axe; nur in ihrer Richtung erfolgt Bewegung, nicht in den Richtungen der y- und z-Axen. Die ganze Bewegung hängt blos von zwei Variabeln x, t ab; y und z eines Punktes ändern sich nicht, v und w, $\frac{\partial v}{\partial t}$ und $\frac{\partial w}{\partial t}$ sind Null; s hängt nicht von y und z ab, es ist mithin $\frac{\partial s}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial s}{\partial z} = 0$ und bleiben uns blos die Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \qquad p = \varphi(\varrho) \qquad\qquad u = f(x)$$
$$\text{und} \qquad\qquad \text{für } t = 0,$$
$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \varrho = c(1+s) \qquad\qquad s = F(x)$$

von denen die letzteren ausdrücken, dass die Geschwindigkeit und die Condensation für $t = 0$ sich auf gegebene Functionen $f(x)$ und $F(x)$ reduciren sollen.

Um u und s als Functionen von x und t zu bestimmen, könnte man aus den beiden ersten Gleichungen je eine dieser Grössen eliminiren; indem man beide Gleichungen nach einer Variabeln x, t differentiirte und beide dann von einander subtrahirte. Indessen gelangt man kürzer durch Auflösung von Particularlösungen, die den simultanen Gleichungen genügen., zum Ziel. Die lineare Beschaffenheit und die constanten Coefficienten derselben deuten hinreichend an, dass ihnen Exponentialgrössen genügen. Wir setzen also

$$u = l\, e^{\alpha t + \beta x}, \qquad s = m\, e^{\alpha t + \beta x}.$$

Die Einsetzung dieser Grössen liefert für die Constanten α, β, l, m die beiden Bedingungen

$$l\alpha + m\beta a^2 = 0, \qquad m\alpha + l\beta = 0,$$

so dass von diesen 4 Grössen noch zwei willkührlich bleiben. Wählen wir hierzu β und l, so folgt $\alpha = \pm a\beta$, $m = \mp \frac{l}{\alpha}$ und werden also

$$u = l\, e^{\beta(x \pm at)}, \qquad s = \mp \frac{l}{a}\, e^{\beta(x \pm at)}.$$

Indem man nun eine Reihe von Werthen $\beta_1, \beta_2 \cdots\cdot$ annimmt und ihr eine Reihe von Werthen $l_1, l_2 \cdots\cdot$ zuordnet, dass jedem β_i ein bestimmtes l_i zugehört, erhält man eine Menge von Particularlösungen, aus welchen man auch die vollständige Lösung würde zusammensetzen können. Indessen bedarf es nur einer kleinen Ueberlegung, um diese sofort in weit bequemerer Gestalt aufzufinden. Das Genügen der Exponentialfunction beruht nämlich darauf, dass sie in ihren Differentialquotienten sich wiederholt und vermöge der linearen Beschaffenheit der Differentialgleichungen, die keine Absolutglieder besitzen, herausfällt, so dass blos algebraische Beziehungen zwischen den Constanten übrig bleiben. Dasselbe leistet aber auch, da blos Differentialquotienten gleich hoher Ordnung vorkommen, jede Function von $x \pm at$. Man überzeugt sich sofort, dass

$$u = \psi(x \pm at), \qquad s = \mp \frac{1}{a}\, \psi(x \pm at)$$

genügen, indem man $\frac{\partial u}{\partial t} = \pm a\psi'(x \pm at)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \psi'(x \pm at)$, $\frac{\partial s}{\partial t} = -\psi'(x \pm at)$, $\frac{\partial s}{\partial x} = \mp \frac{1}{a}\psi'(x \pm at)$ einsetzt. Der doppelten Zeichen wegen erhält man aber zwei Lösungen:

$$u = \psi(x + at) \qquad\qquad u = \chi(x - at)$$
$$\text{und}$$
$$s = -\frac{1}{a}\psi(x + at) \qquad\qquad s = \frac{1}{a}\chi(x - at),$$

indem man zugleich eine andere Function χ statt ψ wählt. Aus beiden bildet man nun aber durch Addition die allgemeine Lösung mit 2 willkührlichen Functionen

$$u = \psi(x + at) + \chi(x - at)$$
$$s = -\frac{1}{a}\psi(x + at) + \frac{1}{a}\chi(x - at).$$

[illegible]ann zu dieser Form der Lösung auch gelangen, indem man $x + at = \lambda$.

$x - at = \mu$ als neue Variabeln in die Differentialgleichungen einführt. Man hat nämlich, da λ und μ Functionen von x und t sind:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial \lambda} - a\frac{\partial u}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial u}{\partial \mu},$$

$\frac{\partial s}{\partial t} = a\frac{\partial s}{\partial \lambda} - a\frac{\partial s}{\partial \mu}$, $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial \lambda} + \frac{\partial s}{\partial \mu}$ und die Einführung dieser Ausdrücke in die Differentialgleichungen ertheilt diesen die Form:

$$\frac{\partial(u + as)}{\partial \lambda} - \frac{\partial(u - as)}{\partial \mu} = 0, \qquad \frac{\partial(u + as)}{\partial \lambda} + \frac{\partial(u - as)}{\partial \mu} = 0.$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{\partial(u + as)}{\partial \lambda} = 0, \qquad \frac{\partial(u - as)}{\partial \mu} = 0,$$

so dass also $u + as$ Function blos von μ, $u - as$ blos von λ ist. Setzt man also

$$u + as = \chi(\mu) \qquad u - as = \psi(\lambda),$$

so ergibt sich

$$u = \tfrac{1}{2}\psi(\lambda) + \tfrac{1}{2}\chi(\mu), \qquad s = \tfrac{1}{2}\psi(\lambda) - \tfrac{1}{2}\chi(\mu),$$

welches nach Restitution von $\lambda = x + at$, $\mu = x - at$ die obige Form ist.

2. Die unbekannten Functionen ψ und χ in der allgemeinen Lösung

$$u = \psi(x + at) + \chi(x - at), \qquad s = -\frac{1}{a}\psi(x + at) + \frac{1}{a}\chi(x - at)$$

werden nun durch die Bedingungen des Anfangszustandes bestimmt. Diesen zufolge ist

$$\psi(x) + \chi(x) = f(x), \qquad -\psi(x) + \chi(x) = aF(x),$$

woraus

$$\psi(x) = \tfrac{1}{2}f(x) - \tfrac{1}{2}aF(x), \qquad \chi(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{2}aF(x)$$

folgt, und mithin unsre Lösung vollständig bestimmt ist, nämlich

$$u = \tfrac{1}{2}f(x + at) - \tfrac{1}{2}aF(x + at) \qquad s = -\frac{1}{2a}f(x + at) + \tfrac{1}{2}F(x + at)$$

$$+ \tfrac{1}{2}f(x - at) + \tfrac{1}{2}aF(x - at) \qquad\qquad + \frac{1}{2a}f(x - at) + \tfrac{1}{2}F(x - at).$$

Durch diese Formeln wird die Geschwindigkeit u und die Condensation s als Functionen von x, t bestimmt; sie hängen von der Natur zweier Functionen $f(x)$ und $F(x)$ ab, welche den anfänglichen Geschwindigkeitszustand und die anfängliche Condensation darstellen. Diese Functionen müssen bei dem beiderseits unendlich langen Cylinder für alle Werthe von x gegeben sein, können aber Discontinuitäten besitzen. Wir wollen hier aber jetzt specielle Annahmen machen.

3. Es werde der ursprüngliche Gleichgewichtszustand nur innerhalb des Raumes von $x = -\alpha$ bis $x = +\alpha$ gestört, so dass $u = f(x)$ und $s = F(x)$ für $t = 0$ an allen Stellen $x > \alpha$ und $x < -\alpha$ die Werthe Null haben, während sie zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ im Allgemeinen nicht Null sind.

Für einen Punkt $x > \alpha$, der ausserhalb des Erregungsraumes liegt, ist $x + at > \alpha$, mithin werden für ihn $f(x + at)$ und $F(x + at)$ Null und bleiben in u und s blos zwei Glieder, nämlich:

$$u = \tfrac{1}{2}f(x - at) + \tfrac{1}{2}aF(x - at), \qquad s = \frac{1}{2a}f(x - at) + \tfrac{1}{2}F(x - at).$$

Der Punkt x ist anfangs in Ruhe, da für ihn für $t = 0$, $f(x) = F(x) = 0$; mit wachsendem t nimmt aber $x - at$ ab und sobald es gleich α wird, hören die Functionen f, F auf Null zu sein und erlangen u und s Werthe, welche von Null

verschieden sind. Die Zeit t_1, für welche der Punkt seine Bewegung beginnt, folgt demnach aus der Gleichung $x - at_1 = \alpha$ und ist

$$t_1 = \frac{x - \alpha}{a}.$$

Im weiteren Verlauf von t nimmt aber $x - at$ bis $-\alpha$ ab, und dann verschwinden wieder f und F und folglich auch u und s. Für die Zeit t_2, welche aus $x - at_2 = -\alpha$ folgt, nämlich

$$t_2 = \frac{x + \alpha}{a}$$

kommt der Punkt x wieder zur Ruhe. Die Dauer seiner Bewegung ist daher $t_2 - t_1 = \frac{2\alpha}{a}$. Sie ist proportional der Länge des Erschütterungsraumes.

Für zwei Punkte x, x' ausserhalb des Erschütterungsraumes auf der Seite der positiven x-Axe sind die Zeiten t, t', zu welchen sie die Bewegung beginnen: $t' = \frac{x' + \alpha}{a}$, $t = \frac{x + \alpha}{a}$ und stellt die Differenz $t' - t = \frac{x' - x}{a}$ die Zeit dar, während welcher sich das Phänomen von dem dem Erschütterungsraume näher liegenden Punkte x bis zu dem entfernteren x' fortgepflanzt hat. Dieser Zeitunterschied ist proportional dem Abstande $x' - x$ beider Punkte. Für $t' - t$ gleich der Zeiteinheit wird $x' - x = a$. Die Constante a stellt also die Strecke dar, um welche das Phänomen in der Zeiteinheit fortschreitet. Sie heisst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Es sei x ein Punkt, in welchem das Phänomen zur Zeit t beginnt, x' ein solcher, in welchem es zu derselben Zeit aufhört. Für beide bestehen zur selben Zeit die Gleichungen $x - at = \alpha$, $x' - at = -\alpha$. Hieraus folgt $x - x' = 2\alpha$ für die Länge des Raumes, welcher zur Zeit t sich in Erschütterung befindet. Er ist ebenso lang, wie der anfängliche Erschütterungsraum. Er rückt scheinbar fort mit der Geschwindigkeit a und wird die Welle genannt.

Aus den Formeln für u und s ergibt sich noch $u = as$, d. h. die Geschwindigkeit ist der Condensation proportional. Da a positiv ist, so ist u positiv, wenn s positiv ist, d. h. wenn Condensation stattfindet, dagegen ist u negativ, wenn Dilatation eintritt. Der Systempunkt oscillirt also immer nach der Seite hin, nach welcher Verdichtung des Systems stattfindet.

Nehmen wir den Punkt x jetzt ausserhalb des Erschütterungsraumes auf der negativen Seite des x an, sodass $x < -\alpha$. Hierfür ist $x - at$ stets kleiner als α, daher fallen in den Ausdrücken für u und s jetzt die Glieder aus, welche $f(x - at)$ und $F(x - at)$ enthalten, da die Functionen f und F für alle Argumente kleiner als $-\alpha$ Null sind. Demnach wird

$$u = \tfrac{1}{2}f(x + at) - \tfrac{1}{2}aF(x + at), \qquad s = -\frac{1}{2a}f(x + at) + \tfrac{1}{2}F(x + at).$$

Es ist hier $u = -as$, so dass die negative Geschwindigkeit dieselbe Rolle spielt, wie oben die positive.

Für $x + at_1 = -\alpha$ und $x + at_2 = \alpha$ ergeben sich die Anfangs- und Endzeit für die Bewegung des Punktes x, nämlich $t_1 = -\frac{x + \alpha}{a}$, $t_2 = -\frac{x - \alpha}{a}$, sowie die Dauer der Bewegung $t_2 - t_1 = \frac{2\alpha}{a}$ wie oben.

Ebenso erhält man für zwei Punkte x', x, in denen das Phänomen anfängt und aufhört $x + at = -\alpha$, $x' - at = \alpha$. Die Gleichung $x' - x = 2\alpha$ zeigt, dass auch nach der negativen Seite des x eine Welle von der Länge 2α fortschreitet.

Für einen Punkt x innerhalb des Erschütterungsraumes, d. h. für $-\alpha < x < \alpha$ ist das Phänomen complicirter, indem dort jene beiden Glieder in u und s nicht ausfallen. Um zu bestimmen, wann dortselbst die Geschwindigkeit und die Condensation Null werden, muss man für die einzelnen Glieder die Zeit des Verschwindens untersuchen. Für zwei Glieder tritt dies ein, sobald $x + at = \alpha$, also $t = \frac{\alpha - x}{a}$, für die beiden andern, sobald $x - at = -\alpha$, d. h. $t = \frac{x + \alpha}{a}$ wird. Für die grösste von beiden Zeiten verschwinden alle vier Glieder, also auch u und s. Diese Zeit hängt von der Grösse α und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit a ab.

Euler warf die Frage auf, wie es komme, dass aus dem Anfangszustande zwei Wellen hervorgehen, von denen die eine nach der positiven, die andere nach der negativen Seite des x fortschreitet, dass aber nicht zu jeder Zeit aus dem zu dieser stattfindenden Zustande zwei solche Wellen hervorgehen. An sich hat der Anfangszustand nichts voraus vor dem Zustande, welcher zu irgend einer Zeit t stattfindet. Er erklärt diesen Umstand so, dass ausserhalb des Erregungsraumes u und s eine solche Beziehung haben, dass eine Welle ausfällt; diese Beziehung ist $u = as$ und $u = -as$. Uebrigens kann man den Anfangszustand so in zwei Anfangszustände spalten, dass der eine von ihnen nur die eine, der andere nur die andere Welle zur Folge hat. Der Satz, mit Hülfe dessen diess möglich ist, heisst der Satz von der Superposition oder Coexistenz der Bewegungen. Er lautet folgendermassen.

Wenn aus einem Anfangszustande $u = f_1(x)$, $s = F_1(x)$ für die Geschwindigkeit und die Condensation zur Zeit t die Functionen u_1 und s_1 folgen; wenn ferner ein zweiter Anfangszustand $u = f_2(x)$, $s = F_2(x)$ für die Geschwindigkeit und Condensation zur Zeit t die Functionen u_2 und s_2 ergibt und man führt nun einen Anfangszustand $u = f_1(x) \pm f_2(x)$, $s = F_1(x) \pm F_2(x)$ ein, dessen Geschwindigkeit und Condensation durch die algebraischen Summen der Geschwindigkeiten und Condensationen jener beiden Anfangszustände gebildet werden, so folgen aus diesem dritten Anfangszustande zur Zeit t für die Geschwindigkeit u_3 und Condensation s_3 die Functionen $u_3 = u_1 \pm u_2$, $s_3 = s_1 \pm s_2$, d. h. die algebraischen Summen aus den Functionen, welche diese Grössen für die einzelnen Bewegungen darstellen.

Denn u_3 und s_3 gehen aus $f_1(x) \pm f_2(x)$ und $F_1(x) \pm F_2(x)$ hervor, indem man in den Formeln Nr. 2. diese Summen an die Stelle von $f(x)$ und $F(x)$ treten lässt. Dadurch erhält man aber je 8 Glieder, von welchen nach denselben Formeln die 4 einen die Grössen u und s bilden, welche man durch Einführung von $f_1(x)$ und $F_1(x)$ an die Stelle von $f(x)$ und $F(x)$ erhält, während die 4 andern dem Einsetzen von $f_2(x)$ und $F_2(x)$ entsprechen.

Man kann nun den oben zu Grunde gelegten Anfangszustand $u = f(x)$, $s = F(x)$ auf mannigfache Weise in zwei Anfangszustände $f_1(x)$, $F_1(x)$ und $f_2(x)$, $F_2(x)$ zerlegen, sodass

$$\left.\begin{array}{l} u = f(x) = f_1(x) + f_2(x) \\ s = F(x) = F_1(x) + F_2(x) \end{array}\right\} \text{für } t = 0$$

ist, insbesondere so, dass auch für $t = 0$ die Relationen $u = as$ und $u = -as$, d. h. $f_1(x) = aF_1(x)$ und $f_2(x) = -aF_2(x)$ wird. Sobald dies aber der Fall ist, so fallen in dem Bewegungszustande f_1, F_1 zu allen Zeiten und an allen Orten in den Ausdrücken für u und s zwei Glieder aus und schreitet mithin nur eine Welle im positiven Sinne der x-Axe fort. Ebendasselbe gilt für den Bewegungszustand f_2, F_2 und liefert derselbe nur eine Welle, welche im negativen Sinne fortschreitet.

Im Erschütterungsraume legen sich beide Wellen übereinander. Die fragliche Zerlegung des Anfangszustandes ist:

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}F(x) \qquad F_1(x) = \tfrac{1}{2}af(x) + \tfrac{1}{2}F(x)$$

$$f_2(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}F(x) \qquad F_2(x) = -\tfrac{1}{2}af(x) + \tfrac{1}{2}F(x).$$

4. Nimmt man an zwei Stellen im Cylinder Störungen des ursprünglichen Gleichgewichtes zugleich vor zur Zeit $t = 0$, so kann man den Anfangszustand in zwei andere zerlegen, in einen, für welchen an der ersten Stelle Erschütterung stattfindet, während an der zweiten Stelle u und s Null sind und einen zweiten, für welchen derselbe bezüglich der andern Stelle eintritt. Jeder der beiden Anfangszustände veranlasst zwei Wellen, von denen die eine nach rechts, die andere nach links fortschreitet. Diese Wellen kreuzen sich, gehen aber dann ungehindert weiter fort, ohne sich zu stören. Nur an der Kreuzungsstelle complicirt sich das Phänomen.

§. 5. **Der Cylinder, in welchen die elastische Flüssigkeit eingeschlossen ist, erstrecke sich nur nach einer Seite ins Unendliche und sei nach der anderen Seite durch eine zu den Erzeugungslinien senkrechte Ebene geschlossen. Welche oscillatorische Bewegung folgt hier aus einem gegebenen Anfangszustande?**

Zu den Bedingungen des Problems in §. 4. tritt hier noch die hinzu, dass an der Grenzwand die Geschwindigkeit fortwährend Null ist. Nehmen wir diese Ebene zur yz-Ebene, so sind die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a^2\frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad u = f(x) \qquad\qquad x = 0$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } t = 0, \quad u = 0 \text{ für}$$
$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad s = F(x) \qquad\qquad t = t.$$

Die Functionen ψ und χ der allgemeinen Lösung

$$u = \psi(x + at) + \chi(x - at), \qquad s = -\frac{1}{a}\psi(x + at) + \frac{1}{a}\chi(x - at)$$

bestimmen sich durch die Bedingungen

$$\psi(x) + \chi(x) = f(x), \qquad -\psi(x) + \chi(x) = aF(x),$$

nämlich:

$$\psi(x) = \tfrac{1}{2}f(x) - \frac{a}{2}F(x), \qquad \chi(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \frac{a}{2}F(x).$$

Es sind aber $f(x)$ und $F(x)$ nur für positive Argumente gegeben, da die negative Richtung der x-Axe nicht dem System angehört; es sind also auch ψ und χ bloss für positive Argumente bis jetzt bestimmt. Die Function ψ wird auch nur für positive Werthe $x + at$ für u und s in Anspruch genommen, das Argument $x - at$ in χ aber kann negativ werden und müssen wir also diese Function auch für negative Argumente kennen. Hierzu dient die letzte Bedingung. Vermöge derselben ist $\psi(at) + \chi(-at) = 0$

oder

$$\chi(-\varrho) = -\psi(\varrho),$$

wenn man $at = \varrho$ setzt. Für negative $x - at$ ist mithin $\chi(x - at)$ durch $-\psi(at - x)$ zu ersetzen. Unsere Formeln spalten sich nun folgendermassen:

Für $x - at > 0$:

$$u = \tfrac{1}{2}f(x + at) - \frac{a}{2}F(x + at)$$
$$+ \tfrac{1}{2}f(x - at) + \frac{a}{2}F(x - at)$$

für $x - at < 0$:

$$u = \tfrac{1}{2}f(x + at) - \frac{a}{2}F(x + at)$$
$$- \tfrac{1}{2}f(at - x) + \frac{a}{2}F(at - x)$$

$$s = -\frac{1}{2a}f(x+at) + \tfrac{1}{2}F(x+at) \qquad s = -\frac{1}{2a}f(x+at) + \tfrac{1}{2}F(x+at)$$
$$+\frac{1}{2a}f(x-at) + \tfrac{1}{2}F(x-at) \qquad -\frac{1}{2a}f(at-x) + \tfrac{1}{2}F(at-x)\,.$$

Wir wollen annehmen, es finde die Erschütterung zur Zeit $t = 0$ nur innerhalb eines bestimmten Raumes statt, so dass innerhalb desselben f und F gegebene Werthe besitzen, ausserhalb desselben Null sind. Da für negative x diese Functionen nicht gegeben sind, so kann man sie hierfür beliebig definiren. Die Vergleichung der vorstehenden Ausdrücke zeigt nun, dass sowohl die beiden Werthe für u, als auch die für s sich in einen zusammenfassen lassen, wenn man $f(x)$ und $F(x)$ so definirt, dass

$$f(-x) = -f(x) \text{ und } F(-x) = F(x).$$

Die Bedeutung dieser Definitionserweiterung ist folgende. Wir wollen uns einen nach beiden Seiten unendlich langen Cylinder denken und in dem elastisch flüssigen Medium, welches ihn erfüllt, eine Störung des Gleichgewichts vornehmen, so dass auf der Seite des positiven x die anfängliche Geschwindigkeit und Condensation durch die Functionen $f(x)$, $F(x)$ angegeben werden, welche aber nur innerhalb eines gewissen Bereiches von Null verschiedene Werthe haben mögen. Auf der Seite des negativen x wollen wir in dem zu diesen Bereiche symmetrisch liegenden Raume zugleich derart das Gleichgewicht stören, dass die Geschwindigkeit und die Condensation durch $-f(x)$ und $F(x)$ angegeben werden, d. h. dass die Geschwindigkeit entgegengesetzt, die Condensation aber dieselbe ist, wie auf der positiven Seite. Dieser Anfangszustand wird zur Zeit t einen Bewegungszustand zur Folge haben, welcher auf der Seite der positiven x derselbe sein wird, wie in dem an der Stelle $x = 0$ durch eine Ebene begrenzten Cylinder unseres Problems, so dass man behaupten kann, dass das Phänomen in dem begrenzten Cylinder unter Einfluss der Bedingungen $u = f(x)$ und $s = F(x)$ für $t = 0$ und $u = 0$, für $x = 0$ ebenso erfolge, als ob an Stelle dieser Bedingungen der Cylinder beiderseits unendlich lang wäre und in der Verlängerung die genannte symmetrische Störung eintrete. Den angenommenen Anfangszustand in dem beiderseits unendlichen Cylinder kann man nun zerlegen in zwei andere, einen, für welchen blos auf der potitiven Seite, nicht aber zugleich auf der negativen Seite eine Erschütterung eintritt, und einen andern, bei welchem umgekehrt blos auf der negativen Seite dies der Fall ist. Aus beiden ergeben sich vier Wellen, von den aber die beiden, die auf der negativen Seite fortschreiten, für das wirkliche Bewegungsphänomen nicht in Betracht kommen, weil der Cylinder in Wirklichkeit abgeschnitten ist. Die von dem Anfangszustande auf der negativen Seite herrührende und sich nach der positiven Seite fortpflanzende Welle liefert das Phänomen der Zurückwerfung der von der positiven Seite ausgehenden Welle an der festen Wand. An der Stelle $x = 0$ ist die Geschwindigkeit von selbst zu allen Zeiten Null.

§. 6. Der Cylinder sei durch zwei zu den Erzeugungslinien senkrechte Ebenen begrenzt. Nehmen wir die eine Ebene zur yz-Ebene und nennen c den Abstand beider Ebenen von einander, so sind jetzt die Bedingungen des Problems:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a^2\frac{\partial s}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\}\left\{0 < x < c\right\}, \qquad \begin{aligned} u &= f(x) \\ s &= F(x) \end{aligned}\left\{\begin{matrix} t = 0 \\ 0 < x < c \end{matrix}\right\},$$

$$u = 0\left\{\begin{matrix} x = 0 \\ t = t \end{matrix}\right\}, \qquad u = 0\left\{\begin{matrix} x = c \\ t = t \end{matrix}\right\}.$$

Die Functionen ψ, χ, welche die allgemeine Lösung

$$u = \psi(x + at) + \chi(x - at), \qquad s = -\frac{1}{a}\psi(x + at) + \frac{1}{a}\chi(x - at)$$

enthält, müssen zunächst den Bedingungen:

$$\psi(x) + \chi(x) = f(x), \qquad -\psi(x) + \chi(x) = aF(x)$$

genügen, woraus folgt:

$$\psi(x) = \tfrac{1}{2}f(x) - \frac{a}{2}F(x), \qquad \chi(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \frac{a}{2}F(x),$$

da x blos positive Werthe haben kann (von 0 bis c), so erhält $x + at$ alle positiven Werthe von 0 bis ∞ und $x - at$ alle Werthe von c bis $-\infty$. Innerhalb der Grenzen von 0 bis ∞ wird nun in den obigen Ausdrücken für u und s die Function ψ in Anspruch genommen, von c bis $-\infty$ die Function χ. Beide sind bis jetzt aber nur für Argumente zwischen 0 und c bekannt. Allein die weiteren Bedingungen des Problems liefern, wenn man $at = \varrho$ setzt:

$$\psi(\varrho) + \chi(-\varrho) = 0, \qquad \psi(c + \varrho) + \chi(c - \varrho) = 0.$$

Da ψ von 0 bis c bekannt ist, so liefert die erste dieser Gleichungen χ von 0 bis $-c$ und da man χ bereits von 0 bis c ebenfalls kennt, so kennt man χ jetzt von c bis $-c$. Setzt man nun in der zweiten Gleichung für ϱ alle Werthe von 0 bis c, so ergibt sich ψ von 0 bis $2c$. Hiermit findet man dann aus der ersten Gleichung weiter χ von $-c$ bis $-2c$ u. s. w. Eine abwechselnde Benutzung beider Gleichungen führt auf diese Weise zur Kenntniss der Functionen ψ und χ für alle Argumente, für welche sie zur Bildung von u und s in Anspruch genommen werden. Setzt man $c + \varrho = \sigma$, so gibt die zweite Gleichung $\chi(-\sigma + 2c) = -\psi(\sigma)$ oder vermöge der ersten Gleichung $\chi(-\sigma + 2c) = \chi(-\sigma)$, woraus die Periodicität von χ erhellt. Ebenso für ψ.

Man kann leicht zeigen, dass das Phänomen in dem begrenzten Cylinder ebenso vor sich geht, wie in einem beiderseits unendlichen Cylinder, wenn über $f(x)$ und $F(x)$ wieder die Voraussetzungen $f(-x) = -f(x)$, $F(-x) = F(x)$ zugleich aber noch die weiteren $f(x + 2c) = f(x)$, $F(x + 2c) = F(x)$ gemacht werden.

§. 7. **Es soll die oscillatorische Bewegung im unendlichen elastisch-flüssigen Medium untersucht werden, welche eine Folge eines gegebenen Anfangszustandes ist.**

1. Die Bedingungen des Problems sind in dem Gleichungssystem ausgesprochen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a^2\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + a^2\frac{\partial s}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial s}{\partial z},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

aus welchen u, v, w, s, nämlich die drei Componenten der Geschwindigkeit und die Condensation als Functionen von x, y, z, t hervorgehen. Für $t = 0$ müssen sich dieselben aber auf 4 gegebene Functionen reduciren, so dass

$$u = u_0, \qquad v = v_0, \qquad w = w_0, \qquad s = s_0 \text{ für } t = 0.$$

Bedingungen der Bewegung des Systems sollen nicht gegeben sein, vielmehr nehmen wir an, dass das elastische Medium den unendlichen Raum erfüllt. Wir suchen zunächst s und eliminiren hierzu u, v, w indem wir die drei ersten Bewegungsgleichungen der Reihe nach in Bezug auf x, y, z, die vierte nach t differentiiren und dann die Summe der drei ersten von der letzten subtrahiren. Dies liefert die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right),$$

aus welcher s als vollständig bestimmt hervorgeht, sobald sein Werth s_0 für

$t = 0$ und sein Differentialquotient $\frac{\partial s}{\partial t}$ für $t = 0$ bekannt ist. Den letzteren erhält man, vermöge der obigen weiteren Gleichung, nämlich

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{t=0.} = -\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right).$$

Sobald aber s vollständig bekannt ist, hat man mit Hülfe der drei ersten Gleichungen auch u, v, w, nämlich

$$u - u_0 = -a^2 \int_0^t \frac{\partial s}{\partial x}\, dt, \qquad v - v_0 = -a^2 \int_0^t \frac{\partial s}{\partial y}\, dt, \qquad w - w_0 = -a^2 \int_0^t \frac{\partial s}{\partial z}\, dt.$$

Der Differentialgleichung für s genügt nun die Particularlösung

$$s = e^{\lambda x + \mu y + \nu z + \varpi t}$$

sobald zwischen λ, μ, ν, ϖ die Relation $\varpi^2 = a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$ besteht. Wegen der voraussichtlich periodischen Beschaffenheit der Bewegung wählen wir λ, μ, ν imaginär und nehmen die Particularlösung unter der Form an

$$s = e^{(\lambda x + \mu y + \nu z)i + \varpi t}, \qquad \varpi = \pm a\varrho i, \qquad \varrho = +\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}.$$

Wir zerlegen dieselbe, sodass wir setzen:

$$s = e^{(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a\varrho t)i} = \cos(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a\varrho t) + i \sin(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a\varrho t)$$

und bemerken, dass die Glieder

$$\cos(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a\varrho t) \text{ und } \sin(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a\varrho t)$$

einzeln genügen, so wie auch die Summe

$$\cos(\lambda x + \mu y + \nu z - a\varrho t) + \sin(\lambda x + \mu y + \nu z + a\varrho t),$$

so wie die Bestandttheile

$$\cos(\lambda x + \mu y + \nu z) \cos a\varrho t \quad \text{und} \quad \cos(\lambda x + \mu y + \nu z) \sin a\varrho t.$$

Von diesen letzteren Formen gehen wir aus. Sie sind besonders geeignet, wenn wir den Anfangszustand so in zwei andere zerlegen wollen, dass $s = s' + s''$ wird und zwar s' sich für $t = 0$ auf s_0 reducirt, während sein Differentialquotient $\left(\frac{\partial s'}{\partial t}\right)_0$ verschwindet, dagegen s'' für $t = 0$ verschwindet, während dessen Differentialquotient $\left(\frac{\partial s''}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0$ wird. Dabei wollen wir der Uebersichtlichkeit wegen $s_0 = f(x, y, z)$ und $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0 = F(x, y, z)$ setzen. Von den beiden zuletzt aufgestellten Particularlösungen hat nämlich die erste die Eigenschaft für $t = 0$ nicht zu verschwinden, während ihre Derivirte nach t verschwindet; bei der andern ist es umgekehrt, und verschwindet sie selbst für $t = 0$, nicht aber ihre Derivirte. Zunächst verallgemeinern wir die Particulärlösungen indem wir $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$ an die Stelle von x, y, z schreiben, wodurch sie nicht aufhören der Gleichung zu genügen. Sodann multipliciren wir sie mit einer willkürlichen Function $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ von α, β, γ und nehmen das sechsfache Integral zwischen $-\infty$ und $+\infty$ in Bezug auf λ, μ, ν, α, β, γ. Da die Differentiationen nach x, y, z, t sämmtlich unter dem Integralzeichen ausgeführt werden dürfen, so sieht man leicht ein, dass der so gewonnene verallgemeinte Ausdruck immer noch eine Particulärlösung ist. Demnach haben wir, indem wir ihn zu s' wählen

$$s' = {}^{(6)}\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\right\} \cos a\varrho t\, \varphi(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Er besitzt die Eigenschaft, dass sein Differentialquotient für $t = 0$ verschwindet und wenn wir im Stande sind φ so zu bestimmen, dass s' für $t = 0$, nämlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\right\} \varphi(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu = f(x, y, z)$$

wird, so genügt s' den Bedingungen des ersten der beiden Zustände, in welche wir den Anfangszustand des Systems zerlegt haben. Die ganz analoge Behandlung der andern Particulärlösung, der wir noch den Factor $\frac{1}{a\varrho}$ zufügen, liefert uns in

$$s'' = \overset{(6)}{\int_{-\infty}^{\infty}} \cos\left\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\right\} \frac{\sin a\varrho t}{a\varrho} \cdot \psi(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

einen Ausdruck, welcher genau den Bedingungen des zweiten Bestandtheiles vom Anfangszustande entspricht, sobald ψ der Bedingung genügt

$$\overset{(6)}{\int_{-\infty}^{\infty}} \cos\left\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\right\} \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{a\varrho}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu = F(x, y, z).$$

Sobald sodann φ und ψ gefunden sind, stellt

$$s = s' + s''$$

die vollständige Lösung des Problems dar. Auch sieht man leicht, dass nur eine einzige Lösung möglich ist, indem s durch die partielle Differentialgleichung vollständig bestimmt ist, sobald s_0 und $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0$ gegeben sind.

Zur Bestimmung der Functionen φ und ψ dient der Fourier'sche Satz über die Darstellung willkürlicher Functionen durch doppelte und mehrfache Integrale. Derselbe lautet in einer sehr gangbaren Form

$$\overset{(6)}{\int_{-\infty}^{\infty}} \cos\lambda(\alpha-x) \cos\mu(\beta-y) \cos\nu(\gamma-z) \cdot \chi(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu = (2\pi)^3 \cdot \chi(x, y, z),$$

muss aber für unsern Zweck ein wenig umgestellt werden, damit an die Stelle des Cosinusproduktes der Cosinus eines Aggregates tritt. Eine zweimalige Anwendung der Gleichung

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2} \cos(a + b) + \tfrac{1}{2} \cos(a - b)$$

gibt nun

$$\cos a \cos b \cos c = \tfrac{1}{4} \cos(a + b + c) + \tfrac{1}{4} \cos(-a + b + c) + \tfrac{1}{4} \cos(a - b + c) + \tfrac{1}{4} \cos(a + b - c).$$

Mit Hülfe derselben spaltet sich die linke Seite der Fourier'schen Gleichung in vier Integrale, welche alle vier einer einander gleich sind. Sie unterscheiden sich nämlich nur durch die Vorzeichen im Innern der Klammer in der Function $\cos\left\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\right\}$. Indem man für λ, μ, ν in ihnen $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$ als neue Variabeln einführt, je nachdem die eine oder die andere diese Grössen in der Klammer das negative Zeichen hat, überzeugt man sich sofort von der Richtigkeit dieser Behauptung. Es nimmt daher unser Satz die Form an:

$$\overset{(6)}{\int_{-\infty}^{\infty}} \cos\left\{\lambda(\alpha-x) + \mu(\beta-y) + \nu(\gamma-z)\right\} \chi(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu = (2\pi)^3 \chi(x, y, z).$$

in welcher er sich unserm Bedürfniss genau anschliesst. Die beiden obigen Gleichungen für φ und ψ ergeben hiernach augenblicklich: $(2\pi)^3 \varphi(x, y, z) = f(x, y, z)$ und $(2\pi)^3 \psi(x, y, z) = F(x, y, z)$ und indem wir hieraus die Werthe für φ und ψ entnehmen und in s' und s'' einsetzen, ergibt sich uns die vollständige Lösung des Problems unter der Form:

$$s = s' + s''$$

$$s' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \overset{(6)}{\int_{-\infty}^{\infty}} \cos\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\} \cos a\varrho t\, f(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

$$s'' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \overset{(6)}{\int_{-\infty}^{\infty}} \cos\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\} \frac{\sin a\varrho t}{a\varrho} F(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

$$\varrho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$$

Das erste dieser Integrale geht aus dem zweiten hervor, wenn man dasselbe nach t differentiirt und die Function F mit f vertauscht.

2. Die beiden sechsfachen Integrale, aus welchen s sich zusammensetzt, lassen sich noch ohne eine bestimmte Form für f und F vorauszusetzen, auf Doppelintegrale reduciren. Es genügt, das zweite derselben in dieser Hinsicht zu transformiren, da das erste aus ihm unmittelbar ableitbar ist. Wir führen für λ, μ, ν, die wir uns als irgend ein System rechtwinkeliger Coordinaten denken wollen, Polarcoordinaten ϱ, ϑ, φ ein mit Hülfe der Formeln $\lambda = \varrho \cos\vartheta$, $\mu = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi$, $\nu = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi$, wobei also $\varrho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$ dieselbe Grösse ist, wie bisher. Der Sinn des Integrales s'' ist nun der, dass das Volumenelement $d\lambda\, d\mu\, d\nu$ mit einer gewissen Function multiplicirt durch den ganzen unendlichen Raum summirt werden soll. Das Volumenelement für Polarcoordinaten ist aber $\varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi$ und die Grenzen für die Integration durch den ganzen unendlichen Raum sind 0 und ∞ für ϱ, 0 und π für ϑ, 0 und 2π für φ. Demnach wird

$$s'' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \overset{(3)}{\int_{-\infty}^{\infty}} F(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\infty} \cos \varrho\{(\alpha - x)\cos\vartheta + (\beta - y)\cos\vartheta\cos\varphi$$

$$+ (\gamma - z)\sin\vartheta\sin\varphi\} \frac{\sin a\varrho t}{\alpha} \,.\, \varrho \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi,$$

oder wenn wir den Ursprung der α, β, γ um x, y, z verlegen, d. h. $\alpha + x, \beta + y$, $\gamma + z$ statt α, β, γ schreiben, was auf die Grenzen $-\infty$ und ∞ keinen Einfluss hat:

$$s'' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \overset{(3)}{\int_{-\infty}^{\infty}} F(x + \alpha, y + \beta, z + \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \int_0^{\infty} \frac{\sin a\varrho t}{a} \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \cos \varrho\,\{\alpha\cos\vartheta$$

$$+ \beta\sin\vartheta\cos\varphi + \gamma\sin\vartheta\sin\varphi\} \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

Nach einem bekannten Satze der Integralrechnung ist nun

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \psi(\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta\cos\varphi + \gamma\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi \int_{-1}^{+1} \psi(r\sigma)\,\partial\sigma,$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Wir wollen den Beweis dieses Satzes nachliefern. Einstweilen folgern wir aus demselben

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos \varrho \left\{\alpha \cos \vartheta + \beta \sin \vartheta \cos \varphi + \gamma \sin \vartheta \sin \varphi\right\} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{+1} \cos (\varrho r \sigma) \, d\sigma = 4\pi \frac{\sin \varrho r}{\varrho r}.$$

und hiermit wird:

$$s'' = \frac{1}{2\pi^2} \overset{(4)}{\int_{-\infty}^{\infty}} F(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) \frac{\sin \varrho a t}{a r} \sin \varrho r \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma \, d\varrho, \quad r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Wir führen nun abermals Polarcoordinaten ein, indem wir setzen $\alpha = r \cos \vartheta$, $\beta = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $\gamma = r \sin \vartheta \sin \varphi$ und erhalten:

$$s'' = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta}{a} \, d\vartheta \, d\varphi \times$$

$$\times \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} r \cdot F(x + r \cos \vartheta, y + r \sin \vartheta \cos \varphi, z + r \sin \vartheta \sin \varphi) \cdot \sin \varrho a t \sin r \varrho \, dr \, d\varrho.$$

Nun ist aber nach dem Fourier'schen Satze für Functionen einer Variabeln

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha \lambda \sin \lambda x \, d\alpha \, d\lambda = f(x), \qquad 0 < x$$

und hieraus wird für $\alpha = r$, $f = rF$, $\lambda = \varrho$, $at = x$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} r F(x + r \cos \vartheta, y + r \sin \vartheta \cos \varphi, z + r \sin \vartheta \sin \varphi) \sin r \varrho \sin \varrho a t \, dr \, d\varrho =$$
$$\tfrac{1}{2}\pi a t F(x + at \cos \vartheta, y + at \sin \vartheta \cos \varphi, z + at \sin \vartheta \sin \varphi),$$

wodurch sich s'' auf

$$s'' = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t \cdot F(x + at \cos \vartheta, y + at \sin \vartheta \cos \varphi, z + at \sin \vartheta \sin \varphi) \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

reducirt. s' erhält man hieraus durch Differentiation nach t und Vertauschung von F mit f, so dass also schliesslich sich ergibt:

$$s = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t \cdot f(x + at \cos \vartheta, y + at \sin \vartheta \cos \varphi, z + at \sin \vartheta \sin \varphi) \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t \cdot F(x + at \cos \vartheta, y + at \sin \vartheta \cos \varphi, z + at \sin \vartheta \sin \varphi) \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Wir liefern jetzt den Beweis des oben benutzten Satzes

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(\alpha \cos \vartheta + \beta \sin \vartheta \cos \varphi + \gamma \sin \vartheta \sin \varphi) \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{+1} \psi(r\sigma) \, d\sigma, \qquad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Man setze $\alpha = r\cos p$, $\beta = r\sin p\cos q$, $\gamma = r\sin p\sin q$, so wird die linke Seite dieser Gleichung

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi\left\{r[\cos p\cos\vartheta + \sin p\sin\vartheta\cos(q-\varphi)]\right\}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi .$$

Auf einer um den Pol des Coordinatensystems mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel hat nun ein Punkt die sphärischen Coordinaten ϑ, φ; ein anderer die Coordinaten p, q und sieht man leicht, dass für den Verbindungsbogen ω beider die Relation $\cos\omega = \cos p\cos\vartheta + \sin p\sin\vartheta\cos(q-\varphi)$ gilt.

Demnach stellt sich das Integral unter der Form dar

$$\frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(r\cos\omega)\, r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

wo $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ das sphärische Flächenelement bedeutet. Der Bogen ω misst den Winkel, welchen der Radiusvector des Punktes (ϑ, φ), an welchem das Flächenelement anliegt, mit dem festen Radiusvector (p, q) bildet. $r\cos\omega$ ist daher der Abstand des Flächenelementes $r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, von einer zur Richtung (p, q) senkrechten Aequatorebene. Der Sinn des Integrales ist daher, abgesehen von dem Divisor r^2, der, dass es die Summe aller Flächenelemente einer Kugel mit dem Radius r, jedes multiplicirt mit seinem Abstande von einer festen Aequatorebene bedeutet, ausgedehnt über die ganze Kugelfläche. Da alle Aequatorebenen für die Kugel dieselbe Bedeutung haben, so ist es gleichgültig, welche man wählt und behält das Integral denselben Werth, wenn man $p = 0$ und $q = 0$ setzt. Hierfür fällt die Richtung (p, q) mit der Polaraxe zusammen und wird $\omega = \vartheta$, und folglich das Integral

$$\frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(r\cos\vartheta)\, r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi}\psi(r\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi\int_{+1}^{-1}\psi(r\sigma)\, d\sigma,$$

indem man $\cos\vartheta = \sigma$ setzt.

4. Wir wollen jetzt das gefundene Resultat interpretiren und bis zu einem gewissen Grade discutiren. Die Functionen f und F sind die anfängliche Condensation und deren Differentialquotient, welcher letzterer gleich der mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Summe der Derivirten von u_0, v_0, w_0 ist. Es sei der Anfangszustand derart, dass die Erschütterung nur innerhalb eines bestimmten Raumes stattfinde, so dass s_0, u_0, v_0, w_0 und die Differentialquotienten von u_0, v_0, w_0 nur innerhalb desselben Werthe haben, ausserhalb aber Null sind. Dann ist also auch F ausserhalb dieses Raumes Null. Nun sind $x + at\cos\vartheta$, $y + at\sin\vartheta\cos\varphi$, $z + at\sin\vartheta\sin\varphi$ die Coordinaten eines Punktes, welcher auf einer um den Punkt (xyz) mit dem Radius at beschriebenen Kugelfläche liegt und $(at)^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ ist das Flächenelement der Kugel an jener Stelle. Die Bedeutung des Bestandtheiles s'' von s, wofür

$$4\pi(at)^2\cdot s'' = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\cdot F(x + at\cos\vartheta, \cdots)\,(at)^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi ,$$

ist die, dass die Summe aller Flächenelemente dieser Kugel, jedes multiplicirt mit dem Werthe der Function $t\cdot F$ in ihm, ausgedehnt über die ganze Kugel gleich s'' multiplicirt mit der Oberfläche der Kugel selbst, sei. Es stellt demnach s'' den Mittelwerth der Function $t\cdot F$ auf der Kugel dar. Aehnliches gilt von dem andern Bestandtheil s', welcher zur Bildung von s nöthig ist. Man sieht

hieraus, dass das Phänomen von dem anfänglichen Zustande auf einer Kugelfläche abhängig ist und im Verlaufe desselben alle Elemente einer mit der Zeit veränderlichen Kugel zur Bildung der Condensation beitragen.

Es liege nun der Punkt xyz ausserhalb des Erschütterungsraumes; wann beginnt derselbe seine Bewegung und wann hört sie wieder auf. Die Functionen f und F haben anfangs auf der um ihn beschriebenen Kugel die Werthe Null, so lange bis der Radius at so gross ist, dass die Kugel den Erschütterungsraum berührt. Mit dem Momente, in welchem dies eintritt, beginnt die Bewegung und findet so lange Condensation oder Dilatation statt, als die Kugelfläche den Raum schneidet, innerhalb dessen f und F Werthe haben, so lange also bis sie denselben nach der äussersten Berührung verlässt. Sind also r_1, r_2 die kürzeste und die weiteste Entfernung des Punktes xyz von der Oberfläche des Erschütterungsraumes, so folgen die Zeitgrenzen t_1, t_2, innerhalb welcher der Punkt überhaupt Condensation besitzt, aus den Gleichungen $at_1 = r_1$, $at_2 = r_2$. Dazwischen kann übrigens die Bewegung öfters intermittiren.

Alle Punkte, welche gleichzeitig mit dem Punkte (xyz) ihre Bewegung beginnen, liegen in demselben Abstande r von der Aussenfläche des Erschütterungsraumes ab. Errichtet man in allen Punkten dieser Fläche nach aussen Normalen von der Länge r, so erhält man eine Paralleldäche als Ort dieser Punkte. Die Zeiten, zu welche zwei Punkte xyz und $(x'y'z')$, deren Normalabstände vom Erschütterungsraume r und r' sind, ihre Bewegung beginnen, sind $t = \frac{r}{a}$ und $t' = \frac{r'}{a}$, und die Zeit, in welcher sich das Phänomen vom ersten bis zum zweiten fortpflanzt, ist $t' - t = \frac{r' - r}{a}$. Für $t' - t = 1$ wird $r' - r = a$, d. h. a ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Es schreitet vom Erschütterungsraum aus einer Welle von der Dicke a nach dem unendlichen Raume fort. Sie ist begrenzt von Parallelflächen zur Oberfläche des Erschütterungsraumes. Mit wachsender Zeit nähert sich die Form der Wellenfläche mehr und mehr der Kugel.

Im Erregungsraume selbst ist das Phänomen etwas complicirter.

In Betreff der Geschwindigkeit bemerke man, dass der Punkt (xyz) ausserhalb des Erregungsraumes anfangs keine Geschwindigkeit besitzt, dass also für die

$$u = \int_0^t \frac{\partial s}{\partial x}\, dt, \qquad v = \int_0^t \frac{\partial s}{\partial y}\, dt, \qquad w = \int_0^t \frac{\partial s}{\partial z}\, dt.$$

So lange ein t kleiner ist als die Zeit t_r, für welche $at_r = r$ ist, wenn r den kürzesten Abstand vom Erschütterungsraume bedeutet, sind $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, $\frac{\partial s}{\partial z}$ Null und mithin auch die Componenten der Geschwindigkeit. Daher kann man setzen:

$$u = \int_{t_r}^t \frac{\partial s}{\partial x}\, dt, \qquad v = \int_{t_r}^t \frac{\partial s}{\partial y}\, dt, \qquad w = \int_{t_r}^t \frac{\partial s}{\partial z}\, dt.$$

Dasselbe ereignet sich von der Zeit $t_{r'}$ an, für welche $at_{r'} = r'$, nämlich gleich der grössten Entfernung r' wird. Von diesem Momente an werden u, v, w constant, nämlich

$$u = \int_{t_r}^{t_{r'}} \frac{\partial s}{\partial x}\, dt, \qquad v = \int_{t_r}^{t_{r'}} \frac{\partial s}{\partial y}\, dt, \qquad w = \int_{t_r}^{t_{r'}} \frac{\partial s}{\partial z}\, dt.$$

Man bemerke noch, dass während die Condensation von dem Zustande auf einer Kugelfläche abhängt, die Geschwindigkeit wegen der noch weiter hinzutretenden Integration von dem Zustande in einem Raume von drei Dimensionen bedingt ist.

5. Befindet sich das elastische Fluidum blos auf einer Seite einer festen Ebene, so sind f und F, wenn wir diese Ebene zur yz-Ebene nehmen, blos für positive x und beliebige y und z gegeben. Es tritt zu den Bedingungen des bisher behandelten Problems noch die weitere hinzu, dass $u = 0$ sei, für $x = 0$ zu allen Zeiten. Es kann auch hier gezeigt werden, dass das Phänomen der Bewegung dasselbe ist, welches erfolgt, sobald man sich den ganzen Raum mit elastischem Fluidum erfüllt denkt und symmetrisch zu der yz-Ebene eine zweite anfängliche Gleichgewichtsstörung so vornimmt, dass

$$f(-x, y, z) = f(x, y, z) \text{ aber } u_0(-x, y, z) = -u_0(x, y, z),$$

während v_0 und w_0 für negative x dieselben Werthe haben, wie für positive x. Die Geschwindigkeitscomponente u ist dann an der Ebene zu jeder Zeit Null, indem das Integral, welches sie darstellt, paarweise entgegengesetzte Elemente besitzt. (Reflexion der Wellen.)

6. Nimmt man an, dass f und F blos Functionen von x sind und kein y und z enthalten, so ist die anfängliche Störung für alle Punkte eine zur x-Richtung senkrechte Ebene dieselbe. Die Ausführung der Integrationen führt zu der Lösung des Problems in §. 6.

§. 8. **Die anfängliche Störung im elastischen Medium sei so beschaffen, dass die anfängliche Condensation und Geschwindigkeit blos Functionen des Abstandes r von einem bestimmten Punkte sind und die Richtung des letzteren durch diesen Punkt hindurchgeht. Das Medium selbst sei unbegrenzt.**

Nehmen wir diesen Punkt zum Ursprung der x, y, z, so ist

$$s_0 = f(r) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = f(x, y, z)$$

und die Geschwindigkeit $\tilde{\omega}_0 = \varphi(r)$ so, dass $u_0 = \tilde{\omega}_0 \cdot \frac{x}{r}$, $v_0 = \tilde{\omega}_0 \cdot \frac{y}{r}$, $w_0 = \tilde{\omega}_0 \cdot \frac{z}{r}$. Wir erhalten dann

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_0}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\omega}_0}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\omega}_0}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial \tilde{\omega}_0}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{\omega}_0}{\partial r} \cdot \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial \tilde{\omega}_0}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\omega}_0}{\partial r} \cdot \frac{z}{r}$$

und hiermit weiter

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\omega}_0}{\partial r} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \tilde{\omega}_0\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right), \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{\omega}_0}{\partial r} \cdot \frac{y^2}{r^2} + \tilde{\omega}_0\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right),$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\omega}_0}{\partial r} \cdot \frac{z^2}{r^2} + \tilde{\omega}_0\left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right).$$

Hiermit finden wir

$$F(x, y, z) = -\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \tilde{\omega}_0}{\partial r} - \frac{2}{r}\tilde{\omega}_0 = -\varphi'(r) - \frac{2}{r}\varphi(r).$$

Um s darzustellen, haben wir mit Hülfe von $f(x, y, z) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ zu bilden

$$f(x + at\cos\vartheta,\ y + at\sin\vartheta\cos\varphi,\ z + at\sin\vartheta\sin\varphi)$$
$$= f\left\{\sqrt{(x + at\cos\vartheta)^2 + (y + at\sin\vartheta\cos\varphi)^2 + (z + at\sin\vartheta\sin\varphi)^2}\right\} = f(X),$$

wenn wir unter X die Wurzel aus

$$(x + at\cos\vartheta)^2 + (y + at\sin\vartheta\cos\varphi)^2 + (z + at\sin\vartheta\sin\varphi)^2$$
$$= r^2 + a^2t^2 + 2at\,(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta\cos\varphi + z\sin\vartheta\sin\varphi)$$

verstehen. Ebenso ist

$$F(x + at\cos\vartheta, \cdots) = -\varphi'(X) - \frac{2}{X}\varphi(X)$$

zu bilden. Man erhält:

$$s = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\, f(X) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\left\{\varphi'(X) + \frac{2}{X}\varphi(X)\right\}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Von den beiden Integrationen kann eine noch ausgeführt werden vermöge des bereits früher benutzten Satzes:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta\cos\varphi + \gamma\sin\vartheta\sin\varphi)\cdot\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$
$$= 2\pi\int_{-1}^{+1}\psi\left(\sigma\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)\cdot d\sigma.$$

Im vorliegenden Falle ist nämlich $\alpha = 2atx$, $\beta = 2aty$, $\gamma = 2atz$ und folglich

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(X)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi\int_{-1}^{+1} f\left(\sqrt{r^2 + a^2t^2 + 2at\, r\sigma}\right)d\sigma, \cdots,$$

daher

$$s = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{-1}^{+1} f(\Xi)\, d\sigma\right) - \tfrac{1}{2}t\int_{-1}^{+1}\left\{\varphi'(\Xi) + \frac{2}{\Xi}\varphi(\Xi)\right\}d\sigma$$

$$\Xi = (r^2 + a^2t^2 + 2at\, r\sigma)^{\frac{1}{2}}.$$

Führen wir nun Ξ als neue Variabele für σ ein, so wird

$$s = \frac{1}{2ar}\frac{\partial}{\partial t}\int_{r-at}^{r+at} f(\Xi)\,\Xi\, d\Xi - \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\left\{\Xi\varphi'(\Xi) + 2\varphi(\Xi)\right\}d\Xi.$$

Behufs Ausführung der Differentiation mit Hülfe des Satzes

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b f(\xi)\, d\xi = f(b)\frac{\partial b}{\partial\alpha} - f(a)\frac{\partial a}{\partial\alpha}$$

ergibt sich

$$s = \frac{1}{2r}\left\{(r+at)f(r+at) - (r-at)f(r-at)\right\} - \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\left\{\Xi\varphi'(\Xi) + 2\varphi(\Xi)\right\}d\Xi.$$

In Betreff der Geschwindigkeit $\tilde{\varpi}$ hat man

$$u - u_0 = -a^2\int_0^t\frac{\partial s}{\partial x}dt, \qquad v - v_0 = -a^2\int_0^t\frac{\partial s}{\partial y}dt, \qquad w - w_0 = -a^2\int_0^t\frac{\partial s}{\partial z}dt$$

oder da

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}, \cdots, \qquad u_0 = \tilde{\varpi}_0\frac{x}{r}, \cdots$$

ist:

$$u = \left(\tilde{\varpi} - a^2\int_0^t\frac{\partial s}{\partial r}dt\right)\frac{x}{r}, \qquad v = \left(\tilde{\varpi}_0 - a^2\int_0^t\frac{\partial s}{\partial r}dt\right)\frac{y}{r},$$

$$w = \left(\tilde{\varpi}_0 - a^2\int_0^t\frac{\partial s}{\partial r}dt\right)\frac{z}{r}, \qquad \tilde{\varpi} = \tilde{\varpi}_0 - a^2\int_0^t\frac{\partial s}{\partial r}dt.$$

Sie ist normal zur Kugel um den Coordinatenursprung.

§. 8. Die Gleichungen für die Bewegung flüssiger Systeme wurden zuerst von Euler in zwei verschiedenen Formen aufgestellt. (Principes généraux du mouvement des fluides in der Histoire de l'Acad. de Berlin 1755; de principiis motus fluidorum. Novi commentarii Acad. Petrop. T. XIV. P. I. 1759.) Die Probleme von §. §. 3 — 6. wurden gleichfalls von Euler zuerst behandelt; das allgemeine Problem §. 7. und seine Lösung verdankt man Poisson (Mém. de l'Acad. de Paris. T. X.). Die vorliegende Darstellung lehnt sich streng an die Behandlungsweise von Dirichlet an, wie sie derselbe in seinen Vorlesungen über die Integration partieller Differentialgleichungen und ihre Anwendung auf physicalische Probleme gegeben hat und wie sie in der Hattendorff'schen Bearbeitung Riemann'scher Vorlesungen über denselben Gegenstand zu finden ist.

§. 9. Gleichgewichtsfigur einer rotirenden incompressibelen flüssigen Masse.

Eine incompressibele Flüssigkeit rotire als ein unveränderliches System um eine feste Axe mit constanter Winkelgeschwindigkeit Ω unter Einwirkung gegebener Kräfte P (X, Y, Z); es fragt sich, welche Gestalten die freie Oberfläche derselben annehmen kann?

1. Auf das Massenelement $\varrho\, dx\, dy\, dz$ wirken die Kraftcomponenten $\varrho\, X\, dx\, dy\, dz$, $\varrho\, Y\, dx\, dy\, dz$, $\varrho\, Z\, dx\, dy\, dz$ der gegebenen Kräfte und die Componenten $-\frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, dy\, dz$, $-\frac{\partial p}{\partial y}\, dx\, dy\, dz$, $-\frac{\partial p}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$ des Druckes, welche mit den Reactionskräften im Gleichgewicht sein müssen. Die letzteren reduciren sich vermöge der Rotation um die feste Axe und der Unveränderlichkeit der Geschwindigkeit auf die Centrifugalkraft $\varrho\, \Omega^2 r\, dx\, dy\, dz$, deren Componenten $\varrho\, \Omega^2 x\, dx\, dy\, dz$, $\varrho\, \Omega^2 y\, dx\, dy\, dz$, 0 sind, wenn wir zur z-Axe die Rotationsaxe wählen. Nach dem d'Alembert'schen Princip besteht also für jeden Systempunkt (xyz) die Gleichgewichtsbedingung

$$\left(\varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \varrho\, \Omega^2 x\right) \delta x + \left(\varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \varrho\, \Omega^2 y\right) \delta y + \left(\varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \varrho\, \Omega^2 z\right) \delta z = 0,$$

oder

$$\frac{\partial p}{\partial x}\, \delta x + \frac{\partial p}{\partial y}\, \delta y + \frac{\partial p}{\partial z}\, \delta z = \varrho\, (X \delta x + Y dy + Z \delta z) + \varrho\, \Omega^2\, (x \delta x + y \delta y),$$

wofür wir auch schreiben können,

$$\delta p = \varrho\, (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) + \varrho\, \Omega^2 \delta\, \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

und insbesondere, wenn eine Kräftefunction existirt

$$\delta p = \varrho\, \delta U + \varrho\, \Omega^2 \delta\, \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Hieraus erhalten wir für den Druck:

$$p = \varrho\, [U + \tfrac{1}{2}\, \Omega^2\, (x^2 + y^2)] + C.$$

Eine Fläche des Systems, deren Punkte denselben Druck erleiden, heisst eine Niveaufläche der rotirenden Flüssigkeit. Die Gleichung dieser Flächen ist daher

$$U + \tfrac{1}{2}\, \Omega^2\, (x^2 + y^2) = c$$

und unter diese Flächen gehört die freie Oberfläche selbst, wenn sie unter constantem Drucke steht.

2. Die Flüssigkeit sei schwerer und von einem Cylinder umschlossen, dessen Axe mit der Rotationsaxe zusammenfällt. Man hat dann $X = Y = 0$, $Z = -g$, $U = -gz$. Daher ist die Gleichung der Niveauflächen:

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\Omega^2}\, (z + c).$$

Für die freie Oberfläche bestimmt sich die Constante c mit Hülfe des Volumens

der flüssigen Masse. Es sei a der Radius des Cylinders, h die Höhe, bis zu welcher im ruhenden Zustand die Flüssigkeit denselben füllt, also $\pi a^2 h$ ihr Volumen. Im rotirenden Zustande ist dasselbe Volumen von der vorstehenden Rotationsfläche begrenzt und wenn ζ die Ordinate des Kreises ist, welcher von den höchstliegenden Systempunkten gebildet wird, welche der Gleichung $a^2 = \frac{2g}{\Omega^2}(\zeta + c)$ genügen muss, so besteht die Bedingung

$$\pi a^2 \zeta - \int_{-c}^{\zeta} \pi (x^2 + y^2)\, dz = \pi a^2 \zeta - \frac{\pi g}{\Omega}(\zeta + c)^2 = \pi a^2 h .$$

indem $-c$ der Werth von z ist, für welchen $x^2 + y^2$ verschwindet. Die Entfernung von ζ liefert für c den Werth $c = -\left(h - \frac{1}{4}\frac{a^2}{g}\Omega^2\right)$ und hiermit als Gleichung der Oberfläche der rotirenden Masse das Rotationsparabaloid:

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\Omega^2}\left(z + \frac{1}{4}\frac{a^2}{g}\Omega^2 - h\right) .$$

Die Constante des Druckes

$$p = \varrho\,(U + \tfrac{1}{2}\Omega^2 (x^2 + y^2)) + C = \varrho\,(-gz + \tfrac{1}{2}\Omega^2 (x^2 + y^2)) + C$$

bestimmt man mit Hülfe des constanten Druckes, welcher auf der Oberfläche lastet. Ist derselbe P, so erhält man nach Einsetzung des Werthes von $x^2 + y^2$ aus der Gleichung des Paraboloides $P = \frac{1}{4} a^2 \Omega^2 \varrho - g\varrho h + C$ und folglich $p - P = \varrho\left\{g(h - z) + \frac{1}{2}\Omega^2 (x^2 + y^2) - \frac{1}{4} a^2 \Omega^2\right\}$.

Die Constante $-c$ in der Gleichung des Paraboloids ist die Ordinate seines Scheitels, sie ist demnach $-c = h - \frac{1}{4}\frac{a^2}{g}\Omega^2$. Die Grösse $\zeta = \frac{1}{4}\frac{a^2}{g}\Omega^2 - c$. Die Differenz beider $\zeta + c$ ist $\frac{1}{4}\frac{a^2}{g}\Omega^2$. Beide Grössen differiren also um dieselbe Grösse $\frac{1}{4}\frac{a^2}{g}\Omega^2$ von h. Die Flüssigkeit ist also auf der Axe ebenso viel gesunken, als sie am Rande gestiegen ist.

§. 10. Die Punkte einer flüssigen mit constanter Winkelgeschwindigkeit rotirenden Flüssigkeit ziehen einander nach dem Newton'schen Gesetze an, man soll die Bedingungen bestimmen, unter welchen die Oberfläche derselben ein Ellipsoid sein kann, dessen eine Axe mit der Rotationsaxe zusammenfällt.

1. Nach Cap. IX., §. 12. S. 696 ist das Potential eines homogonen Ellipsoids von der specifischen Masse ϱ und den Halbaxen α, β, γ in Bezug auf einen der Masse angehörigen Punkt x, y, z, wenn dessen Coordinaten sich auf die Hauptaxen beziehen:

$$v = \pi\varrho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2 + s} - \frac{y^2}{\beta^2 + s} - \frac{z^2}{\gamma^2 + s}\right)\frac{ds}{D}, \quad D = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}$$

Dies Potential mit dem Factor ε behaftet (S. 666) ist in unserem Falle die Kräftefunction U für die Kräfte X, Y, Z, welche auf die Einheit der Masse bezogen sind. Demnach ist die Gleichung der Niveauflächen

$$\int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2 + s} - \frac{y^2}{\beta^2 + s} - \frac{z^2}{\gamma^2 + s}\right)\frac{ds}{D} + \frac{1}{2\pi\varepsilon}\frac{\Omega^2}{\varrho}(x^2 + y^2) = c.$$

Diese Gleichung muss mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

des Ellipsoides übereinstimmen, wenn dieses eine Gleichgewichtsfigur sein soll. Die Vergleichung der Coefficienten von x^2, y^2, z^2 liefert als Bedingungen hiefür:

$$\int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)\,D} - \frac{\Omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho} = \frac{1}{\alpha^2}\left(\int_0^\infty \frac{ds}{D} - c\right), \int_0^\infty \frac{ds}{(\beta^2+s)\,D} - \frac{\Omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho} = \frac{1}{\beta^2}\left(\int_0^\infty \frac{ds}{D} - c\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{ds}{(\gamma^2+s)\,D} = \frac{1}{\gamma^2}\left(\int_0^\infty \frac{ds}{D} - c\right).$$

Diese Gleichungen liefern die Constante c, die Winkelgeschwindigkeit Ω, mit welcher die Masse rotiren muss, damit sie die Gestalt des Ellipsoids annehme und eine Relation zwischen den drei Axen α, β, γ. Die Elimination der Constanten c führt zu den Gleichungen

$$(\beta^2-\alpha^2)\left\{\int_0^\infty \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)D} - \int_0^\infty \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)D}\right\} = 0,$$

$$\frac{\Omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho} = \int_0^\infty \frac{s\,ds}{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)\,D} = \frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^4\gamma^2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)D}$$

$$= \frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^4\gamma^2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)D}.$$

Da blos zwei Gleichungen zwischen α, β, γ und Ω bestehen, so sieht man, dass man im Allgemeinen zwei Axen α, β des Ellipsoids willkürlich annehmen kann, die dritte und die Winkelgeschwindigkeit bestimmen sich hiezu aus diesen beiden transcendenten Gleichungen.

2. Die erste Gleichung hat den Factor $\beta - \alpha$ und wird also für $\alpha = \beta$ erfüllt. Da hierzu aus der zweiten Gleichung eine reelle endliche Winkelgeschwindigkeit folgt, so sieht man, dass das Rotationsellipsoid eine Gleichgewichtsfigur der flüssigen Masse sein kann. Es ist aber auch denkbar, dass der andere Factor sich auf Null reduciren könne und die Gleichung auch erfüllt werde, ohne dass $\alpha = \beta$ sei. Dies ist in der That der Fall und merkwürdigerweise kann auch das dreiaxige Ellipsoid Gleichgewichtsfigur sein.

Wir wollen zunächst untersuchen, welche Rotationsellipsoide der Aufgabe genügen. Man erhält für $\beta = \alpha$ die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{\Omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho} = \frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^4\gamma^2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^2\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man sieht hieraus, dass Ω nur dann reell sein kann, wenn $\alpha > \gamma$, d. h. wenn die Rotationsaxe die kleinste Axe, das Ellipsoid also abgeplattet ist. Nur abgeplattete Rotationsellipsoide genügen der Aufgabe.

Um etwas zu vereinfachen, setzen wir $\frac{s}{\gamma^2} = u$, $\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \alpha'^2$ und $\alpha'^2 - 1 = \lambda^2$ und $\frac{\Omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho} = V$. Dadurch wird

$$V = \frac{\Omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho} = \lambda^2 \int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+\lambda^2+u)^2\,(1+u)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\lambda^3}[(3+\lambda^2)\,Arctg\,\lambda - 3\lambda] = \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\left(Arctg\,\lambda - \frac{3\lambda}{3+\lambda^2}\right).$$

Es sei $Arctg\,\lambda - \frac{3\lambda}{3+\lambda^2} = \varphi(\lambda)$, so wird $\varphi'(\lambda) = \frac{4\lambda^4}{(1+\lambda^2)\,(3+\lambda^2)^2}$.

Da diese Grösse stets positiv ist, so folgt, dass V **und mithin** Ω^2 **mit wachsendem** λ **wächst und zu jedem positiven Werthe von** λ **auch ein reeller Werth der Winkelgeschwindigkeit gehört und zwar abgesehen vom Vorzeichen nur ein einziger.** Die Grösse λ ist die Abplattung des Ellipsoids, nämlich das Verhältniss der Differenz der beiden Halbaxen desselben zur kleineren von ihnen. Es ist $\lambda^2 = \alpha'^2 - 1 = \frac{\alpha^2}{\gamma^2} - 1 = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\gamma^2}$.

Für $\lambda = 0$, d. h. $\alpha = \gamma$ oder die Kugel muss $V = 0$ sein. Ebenso für $\lambda = \infty$ oder $\gamma = 0$, d. h. für die Gestalt einer Scheibe als Gleichgewichtsfigur.

Ob auch jeder gegebenen Winkelgeschwindigkeit ein Rotationsellipsoid als Gleichgewichtsfigur entspricht, oder vielleicht mehrere, oder ob nur bis zu einer gewissen Grenze von Ω die Gleichgewichtsfigur ein Rotationsellipsoid sein kann, ergibt sich folgendermassen. Wir construiren eine Curve, deren Abscissen λ und deren Ordinaten die Werthe von V sind und fragen, ob ein gegebener Werth V Ordinate dieser Curve sein kann, ob dies für eine oder mehrere Abscissen λ eintreten kann oder nicht u. s. w. Nun erhält man mit Hülfe des obigen Ausdruckes für V:

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda^4}\left\{\frac{9\lambda + 7\lambda^3}{1+\lambda^2} - (9+\lambda^2)\,Arctg\,\lambda\right\} = \frac{F(\lambda)}{\lambda^4\,(9+\lambda^2)},$$

wenn

$$F(\lambda) = \frac{9\lambda + 7\lambda^3}{(1+\lambda^2)\,(9+\lambda^2)} - Arctg\,\lambda$$

gesetzt wird. Da offenbar $\frac{\partial V}{\partial \lambda}$ mit $F(\lambda)$ das Zeichen wechselt, so folgt, dass V wächst oder abnimmt, je nachdem $F(\lambda)$ positiv oder negativ ist. Für $\lambda = 0$ ist $F(\lambda)$ positiv und da

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{8\lambda^4(3-\lambda^2)}{[(1+\lambda^2)\,(9+\lambda^2)]^2}$$

von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \sqrt{3}$ positiv ist, so wächst $F(\lambda)$ innerhalb dieses Intervalles und ist positiv, aber von $\lambda = \sqrt{3}$ an wird $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ fortwährend negativ und nimmt mithin $F(\lambda)$ fortwährend ab. Anfangs ist $F(\lambda)$ noch positiv, da es aber für $\lambda = \infty$ in $-\frac{\pi}{2}$ übergeht, so folgt, dass es zwischen $\lambda = \sqrt{3}$ und $\lambda = \infty$ einen Werth λ geben müsse, für welchen $F(\lambda)$ und mithin auch $\frac{\partial V}{\partial \lambda}$ vom Positiven zum Negativen, also V selbst vom Wachsen zum Abnehmen übergeht, mithin V ein Maximum wird. Genauer berechnet ist dieser Werth $\lambda = 2{,}5293$; der Werth des Maximums V' von V ist $V' = 0{,}2246$ und ihm entspricht eine Winkelgeschwindig-

keit $\Omega' = 0{,}2246^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi\varepsilon\varrho}$. Die fragliche Curve ist demnach folgendermassen beschaffen. Für $\lambda = 0$ wird $V = 0$; von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 2{,}5293$ wächst V und erreicht für letzteren Werth sein Maximum $V' = 0{,}2246$, von da nimmt V fortwährend ab und nähert sich die Curve der Axe der λ asymptotisch. Es kann daher zu keinem Werthe V, welcher grösser als V' ist, Abscissen λ geben. Dagegen entsprechen einem Werthe von V zwischen Null und V' zwei Werthe λ, von denen der eine unter 2,5293, der andere über dieser Zahl liegt. Daher:

Einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit Ω kann nur dann ein Rotationsellipsoid als Gleichgewichtsfigur entsprechen, wenn

$$\Omega^2 \overline{\overline{<}}\; 0{,}2246 \cdot 2\pi\varepsilon\varrho$$

und zwar entsprechen ihr zwei solche Figuren, welche an dieser Grenze in eine zusammenfallen.

3. Wir gehen jetzt zu der Beantwortung der Frage über, in welchen Fällen ein dreiaxiges Ellipsoid Gleichgewichtsfigur sein könne. Hierzu bringen wir die beiden Gleichungen unter Nr. 1., welche die Bedingungen der Aufgabe aussprechen, nach Tilgung des Factors $\beta^2 - \alpha^2$ auf etwas andere Formen.

Setzt man nämlich $\frac{s}{\gamma^2} = u$ und benutzt die Buchstaben s und t von jetzt an zur Bezeichnung der Axenverhältnisse, sodass

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2} = t, \quad \frac{\gamma^2}{\beta^2} = s$$

wird, so erhält man mit Leichtigkeit aus der ersten der dort gegebenen Gleichungen:

$$1. \qquad F \equiv (1 - s - t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{R^3} - st\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{R^3} = 0,$$

$$R^2 = (1 + su)(1 + tu)(1 + u),$$

oder auch, indem man das erste der Integrale, mit st multiplicirt, hinzufügt und wieder subtrahirt:

$$2. \qquad F \equiv (1 - s)(1 - t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{R^3} - st\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1 + su)(1 + tu)R} = 0.$$

Ebenso gibt die zweite, wenn $\frac{\Omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho} = V$ gesetzt wird:

$$3. \qquad V = t(t - 1)\int_0^\infty \frac{u(1 + su)}{R^3}\,du = s(1 - s)\int_0^\infty \frac{u(1 + tu)}{R^3}\,du,$$

sowie mit Benutzung der eben gefundenen Gleichung 1. oder 2.:

$$4. \qquad V = st\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1 + su)(1 + tu)R} = (1 - s)(1 - t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{R^3}.$$

Da die hier vorkommenden Integrale sämmtlich positiv sind, so folgt aus 1., dass $s + t < 1$ und mithin $s < 1$, $t < 1$, d. h. $\gamma^2 < \alpha^2$, $\gamma^2 < \beta^2$, $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} < \frac{1}{\gamma^2}$.

Die kleinste Axe des dreiaxigen Ellipsoids, welches Gleichgewichtsfigur ist, fällt in die Rotationsaxe der Masse und ist die

Quadratsumme der reciproken Werthe der beiden grösseren Axen kleiner als das reciproke Quadrat des kleinsten.

Nimmt man für s einen bestimmten Werth zwischen 0 und 1 an, so folgt aus der Gleichung 2. für $t = 0$ ein positiver, für $t = 1 - s$ ein negativer Werth von F. Da nun F eine continuirliche Function von s und t ist, so folgt, dass ein Werth t zwischen 0 und $1 - s$ existire, für welchen F verschwinde. Aehnliches gilt in Bezug auf s, wenn für t ein bestimmter Werth angenommen wird. Es existirt demnach zu jedem beliebigen Werthe eines der beiden Axenverhältnisse $\frac{\gamma^2}{\alpha^2}$, $\frac{\gamma^2}{\beta^2}$ immer ein Ellipsoid, welches der ersten Gleichung des Problems genügt.

Es kann ferner gezeigt werden, dass mit wachsendem s das Verhältniss t abnehme und umgekehrt. Man erhält nämlich aus 1.:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u(1+u)(1+tu)}{R^5}\,[2 + (3 - s - t)u - stu^2]\,du$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u(1+u)(1+su)}{R^5}\,[2 + (3 - s - t)u - stu^2]\,du;$$

oder wenn man setzt:

$$2A_0 = \int_0^\infty \frac{u(1+u)}{R^5}\,[2 + (3 - s - t)u - stu^2]\,du$$

$$2A_1 = \int_0^\infty \frac{u^2(1+u)}{R^5}\,[2 + (3 - s - t)u - stu^2]\,du,$$

so werden

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -A_0 - tA_1 = -(1 - \tfrac{2}{3}t)A_0 - \tfrac{1}{3}t(2A_0 + 3A_1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -A_0 - sA_1 = -(1 - \tfrac{2}{3}s)A_0 - \tfrac{1}{3}s(2A_0 + 3A_1),$$

Nun kann man leicht zeigen, dass A_0 und $2A_0 + 3A_1$ positiv sind und da s und t kleiner als 1 sind, so folgt dann, dass beide partielle Differentialquotienten von F, nach s und t genommen, negativ sind, F mithin mit s und t abnimmt und zeigt die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{dt}{ds} = 0,$$

dass $\frac{dt}{ds}$ negativ sein, also ds und dt entgegengesetzte Zeichen haben müssen, dass also t abnimmt, wenn s wächst und umgekehrt.

Man erhält nämlich

$$d\cdot\frac{u^2}{(1+su)(1+tu)R} = \frac{4u + (3 + s + t)u^2 - 2stu^3 - 3stu^4}{2(1+su)(1+tu)R^3}\,du$$

und folglich durch Integration zwischen 0 und ∞:

$$0 = \int_0^\infty \frac{u(u+1)}{R^5}\,[4 + (3 + s + t)u - 2stu^2 - 3stu^3]\,du.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der obigen für $2A_0$, so kommt

$$2A_0 = \tfrac{3}{2}\int_0^\infty \frac{u^2(u+1)}{R^5}(1-s-t-stu^2)\,du$$

und wenn man sie mit 2 dividirt und von der Verbindung $2A_0 + 3A_1$ abzieht:

$$2A_0 + 3A_1 = \tfrac{3}{2}(3-s-t)\int_0^\infty \frac{u^2(u+1)^2}{R^5}\,du.$$

Man sieht hieraus, dass $2A_0$ und $2A_0 + 3A_1$ positiv sind.

Man kann ferner zeigen, dass V mit wachsendem s abnehme.

Es ist nämlich, da auch t als Function von s anzusehen ist:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t}\cdot\frac{dt}{ds} = \left(\frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial s}\right) : \frac{\partial F}{\partial t},$$

da

$$\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{ds} = 0 \text{ (s. oben).}$$

Nun zeigt sich, dass der Zähler dieses Ausdruckes fortwährend positiv, während der Nenner nach dem Vorstehenden negativ ist, sodass also dV und ds entgegengesetztes Zeichen haben müssen. Man erhält nämlich aus der obigen Gleichung 4.:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = t\int_0^\infty \frac{u(1+u^2)(1+tu)}{R^5}(1-\tfrac{1}{2}su)\,du$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = s\int_0^\infty \frac{u(1+u^2)(1+su)}{R^5}(1-\tfrac{1}{2}tu)\,du,$$

welche Ausdrücke mit Hülfe der Bezeichnung

$$B_0 = \int_0^\infty \frac{u(1+u)^2}{R^5}(1-\tfrac{1}{2}stu^2)\,du, \qquad B_1 = \int_0^\infty \frac{u^2(1+u)^2}{R^5}\,du$$

sich unter der Form

$$\frac{\partial V}{\partial s} = tB_0 + t(t-\tfrac{1}{2}s)B_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = sB_0 + s(s-\tfrac{1}{2}t)B_1$$

darstellen. Hiermit und mit den oben entwickelten Werthen von $\frac{\partial F}{\partial s}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$ erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial s} &= (s-t)\,[A_0B_0 + (s+t)A_0B_1 + \tfrac{3}{2}stA_1B_1] \\ &= (s-t)\,[A_0B_0 + \tfrac{1}{2}stA_0B_1 + \tfrac{1}{2}stB_1(2A_0+3A_1) \\ &\quad + (s+t-\tfrac{3}{2}st)A_0B_1].\end{aligned}$$

Dass B_1 positiv ist, ersieht man unmittelbar, dass B_0 es ist, ergibt sich, wenn man von

$$4B_0 = \int_0^\infty \frac{u(u+1)}{R^5}(4+4u-2stu^2-2stu^3)\,du$$

die oben benutzte Gleichung

$$0 = \int_0^\infty \frac{u(u+1)}{R^5}[4+(3+s+t)u-2stu^2-3stu^4]\,du$$

abzieht, wodurch man

$$4 B_0 = \int_0^\infty \frac{u^2 (1+u)}{R^5} (1 - s - t + stu^2)\, du$$

erhält, einen Ausdruck, dessen positive Beschaffenheit einleuchtet. Da nun also B_0, B_1, A_0, $2 A_0 + 3 A_1$ und $s + t - \frac{4}{3} st = s(1 - \frac{2}{3} t) + t(1 - \frac{2}{3} s)$ positiv sind, so folgt, dass für $s > t$, d. h. $s > \frac{1}{2}$ und also $t < \frac{1}{2}$ die Grösse

$$\frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial s}$$

positiv ist und mithin V mit wachsendem s abnimmt. Da ferner

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial t}\right) : \frac{\partial F}{\partial s} = - \left(\frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial s}\right) : \frac{\partial F}{\partial t}$$

ist, so ergibt sich weiter, dass V mit abnehmendem t wächst.

Das Resultat dieser Untersuchung kann auch dahin ausgesprochen werden, dass mit wachsendem V die Grösse s abnehme und t wachse, woraus folgt, dass einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit Ω nur ein einziges dreiaxiges Ellipsoid als Gleichgewichtsfigur entsprechen kann. Aus den Gleichungen $\frac{\gamma^2}{\beta^2} = s$, $\frac{\gamma^2}{\alpha^2} = t$ ergibt sich hierzu weiter, dass mit wachsender Winkelgeschwindigkeit die grössere Axe 2α des Aequators des Ellipsoids abnimmt, während die kleinere 2β wächst.

Aus der Gleichung 2. folgt, dass wenn $s = 0$ ist, $t = 1$ wird und umgekehrt dem $t = 0$ der Werth $s = 1$ entspricht. Da nun von beiden Grössen die eine abnimmt, wenn die andere wächst, so folgt, dass, während s von 0 bis 1 wächst, t von 1 bis zu 0 abnimmt. Es wird daher nur einmal innerhalb dieser Grenzen sich ereignen, dass s und t einen gemeinschaftlichen Werth $s = t = \tau$ annehmen. Wächst s über diesen hinaus, so geht t unter ihn herab und umgekehrt, sodass wenn $s = s_0$, $t = t_0$ ein Paar zusammengehörige Werthe sind, wo $s_0 < \tau$ und $t_0 > \tau$ ist, bei dem weiteren Wachsen von s und Abnehmen von t man auch zu dem Paare $s = t_0$, $t = s_0$ gelangt. Dies ergibt sich auch schon daraus, dass F eine symmetrische Function von s und t ist. Die beiden Annahmen $s = s_0$, $t = t_0$ und $s = t_0$, $t = s_0$ führen daher zu demselben Ellipsoid und braucht man deshalb blos die Untersuchung auf die Werthe $s > t$ zu erstrecken.

In Bezug auf die Geschwindigkeit Ω oder die Grösse V nahmen wir $s > t$ an und folgerten, dass V mit wachsendem s abnehme; ebenso ergibt sich, dass wenn $s < t$ ist, V mit wachsendem s abnimmt. Nimmt daher s von 1 bis τ ab, so wächst V, nimmt es weiter von τ bis 0 ab, so nimmt V wieder ab. Es erreicht mithin V sein Maximum V_0, wenn $s = t = \tau$. Da ferner V sich nicht ändert, wenn s und t vertauscht werden, so gehören zu den Werthsystemen $s = s_0$, $t = t_0$ und $s = t_0$, $t = s_0$ derselbe Werth von V. Jede dieser Annahmen liefert aber dasselbe Ellipsoid. Daher entspricht einem gegebenen Werthe $V < V_0$ nur ein einziges Ellipsoid. Da nun mit $t = 0$, $s = 1$ die Grösse V verschwindet, so folgt:

Wenn V von 0 bis zum Maximum V_0 wächst, so wächst auch t von 0 bis τ und nimmt s von 1 bis τ ab oder es nimmt die grössere Halbaxe des Aequators von ∞ bis $\frac{\gamma}{\sqrt{\tau}}$ ab und wächst die kleinere von γ bis $\frac{\gamma}{\sqrt{\tau}}$.

Zur Berechnung von τ und V_0 dienen die Gleichungen:

$$0 = \int_0^\infty \frac{du}{(1+\tau u^2)^3 (1+u)^{\frac{1}{2}}} - \int_0^\infty \frac{du}{(1+u)^{\frac{3}{2}}(1+\tau u)},$$

$$V_0 = \tau^2 \int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)^{\frac{1}{2}}(1+\tau u)^3},$$

die man aus der ersten Formel §. 10. erhält, indem man $\alpha = \beta$, $\frac{s}{\gamma^2} = u$ und $\frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \tau$ setzt, sowie aus obiger Gleichung 4. für $s = t = \tau$. Indem man weiter $\frac{1}{\tau} = 1 + \lambda^2$ und $u = \frac{1-x^2}{x^2}$ setzt, nehmen diese Gleichungen die Form an:

$$0 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+\lambda^2 x^2} - (1+\lambda^2)^2 \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(1+\lambda^2 x^2)^2},$$

$$V_0 = 2(1+\lambda^2) \int_0^1 \frac{(1-x^2)\,x^2 dx}{(1+\lambda^2 x^2)^3},$$

oder nach Ausführung der Integrationen die Formen:

$$0 = -\lambda(3+13\lambda^2) + (3+14\lambda^2+3\lambda^4)\,Arctg\,\lambda,$$

$$V_0 = \frac{1}{4\lambda^5}\left\{\lambda(3+\lambda^2) - (3-\lambda^2)(1+\lambda^2)\,Arctg\,\lambda\right\}.$$

Man erhält hieraus, da $\lambda = 0$ nicht in Frage kommen kann:

$$\lambda = 1{,}3946, \qquad V_0 = 0{,}18711,$$

$$\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{1}{\tau} = \sqrt{1+\lambda^2} = 1{,}7161, \qquad \tau = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = 0{,}3395.$$

Dividirt man die erste der beiden vorstehenden Gleichungen mit $4\lambda^5$ und addirt sie zur zweiten, so ergibt sich

$$V_0 = \frac{(3+\lambda^2)\,Arctg\,\lambda - 3\lambda}{\lambda^3},$$

welche Gleichung bereits oben auftrat bei Bestimmung des Rotationsellipsoids. Es ist daher das Ellipsoid, welches die Grenze aller dreiaxigen Gleichgewichtsellipsoide bildet, in der Reihe der oben untersuchten Rotationsellipsoide enthalten, entsprechend dem Werthe $\lambda = 1{,}3946$.

Wir erhalten, indem wir alle gewonnenen Resultate zusammenfassen, den Satz:

Damit ein Ellipsoid Gleichgewichtsfigur einer mit constanter Winkelgeschwindigkeit Ω rotirenden Flüssigkeit sei, ist erforderlich, dass $V = \frac{\Omega^2}{2\pi\varepsilon\varrho}$ zwischen den Grenzen 0 und $V' = 0{,}2246$ liege. Allen Werthen V von 0 bis $V_0 = 0{,}18711$ entsprechen je ein dreiaxiges Ellipsoid und zwei abgeplattete Rotationsellipsoide; für $V = V_0$ geht das dreiaxige Ellipsoid in das eine der beiden Rotationsellipsoide über, für $V > V_0$ existiren zwei Rotationsellipsoide, welche für $V = V'$ zuzammenfallen. Ueber V' hinaus gibt es gar keine ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren mehr.

Der ruhenden Flüssigkeitsmasse, also $V = 0$ entsprechend, liefert die Gleichung 4. die Werthe $s = 1$, $t = 0$, d. h. $\frac{\gamma^2}{\beta^2} = 1$, $\frac{\gamma^2}{\alpha^2} = 0$, also $\alpha = \infty$, $\beta = \gamma$.

Die Gleichgewichtsfigur ist in diesem Falle ein unendlich langer, unendlich dünner Rotationscylinder. Die beiden Rotationsflächen, welche Gleichgewichtsfiguren für $V = 0$ sind, waren die Kugel und die unendliche Scheibe.

Wenn die Geschwindigkeit von 0 an wächst, so gehen Kugel und Scheibe in Rotationsellipsoide über, indem erstere sich abplattet und die Excentricität der letzteren abnimmt; der Cylinder aber wird ein dreiaxiges Ellipsoid, so zwar, dass der Kreisschnitt eine Ellipse wird, um deren kleinere Axe die Masse rotirt, während die grössere Axe zur kleineren Axe des Aequators wird.

Das Problem der Gleichgewichtsfiguren einer rotirenden Flüssigkeitsmasse hat einige Berühmtheit erlangt, einerseits wegen der Anwendung auf die Untersuchungen über die Gestalt der Erde, andererseits wegen der scheinbar paradoxen Existenz der dreiaxigen Gleichgewichtsfigur. Die Gleichung der Oberfläche der Gleichgewichtsfiguren überhaupt gab zuerst Clairaut (*Théorie de la figure de la terre*, 2ième édit. p. 101), die Rotationsellipsoide fand Maclaurin (*Treatise on fluctions*, L. I, Cap. XIV, §. 641.); das dreiaxige Ellipsoid rührt von Jacobi her (Ueber die Figur des Gleichgewichts in Poggendorff's Annalen Bd. XXXIII, S. 229 (1834), woselbst sich auch verschiedene historische Notizen finden). Jacobi wurde, wie er einstmals in der Vorlesung (es war in der Vorlesung über allgemeine Theorie der Oberflächen und der Curven doppelter Krümmung, Winter 1849) erzählte, durch eine unvorsichtige Aeusserung von Pontécoulant, dass nur Rotationsflächen Gleichgewichtsformen sein könnten, zu seiner Untersuchung veranlasst (wie er sich ausdrückte: „vermöge des Geistes des Widerspruchs, dem er seine meisten Entdeckungen verdanke"). Der Jacobi'sche Satz wurde (20. Oct. 1834) der Pariser Akademie vorgelegt und Liouville gab in der folgenden Sitzung einen Beweis desselben, welcher unter dem Titel: *Note sur la figure d'une masse fluide homogène, en équilibre, et douée d'un mouvement de rotation* in Cah. XXIII. des Journ. de l'école polyt., p. 289 sich findet. Er behandelte dieselbe Frage in dem *Mémoire sur les figures ellipsoïdales à trois axes inegaux, qui peuvent convenir à l'équilibre d'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement de rotation* [Addition à la Connaissance des Temps pour 1846 oder Journal de mathém. T. XVI, p. 241 (1851)]. Diese Arbeit ist im Grunde eine Bearbeitung der Hauptabhandlung, welche über diesen Gegenstand existirt, von C. O. Meyer, *de aequilibrii formis ellipsoidicis* [Crelle's Journ. Bd. XXIV, S. 44 (1842)], worin zuerst der Zusammenhang der sämmtlichen ellipsoidischen Gleichgewichtsformen dargelegt wurde. Eine andere frühere Arbeit ist von Ivory, *On the equilibrium of a mass of homogeneous fluid at liberty* (Philosoph. Transact. f. th. y. 1834, P. II, p. 491). In neuester Zeit hat Dahlander (Zur Theorie einer rotirenden Flüssigkeit, deren Molecüle sich gegenseitig anziehen, Poggendorff's Annalen, Bd. CXXIX, S. 443 (1866)) gezeigt, dass dreiaxige Ellipsoide auch für Rotationsaxen, welche nicht mit einer Hauptaxe zusammenfallen, Gleichgewichtsfiguren sind. Für die numerische Berechnung der Axenverhältnisse der Ellipsoide ist von Bedeutung: Kostka, Ueber die Auffindung der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren einer homogenen um eine feste Axe rotirenden Flüssigkeitsmasse, wenn die Dichtigkeit und Umlaufszeit bekannt sind (Monatsber. der Berliner Acad. 1870, S. 116.)

Verbesserungen und Zusätze.

S. 39, Z. 15 v. o. lies: $D = -4\,J^2 \cot g^2\,\omega$. Z. 11 v. u. lies: $y = a \sin^3\psi + e \cos\psi$ und streiche die folgenden Worte und die Gleichung bis zum Punkte.

S. 41, Z. 10 v. u. lies:

$$4\,a^2 r\,(x^2 + y^2)\,y^4 = \left\{r^2\,[(x^2 + y^2) - a^2 x^2] + a^2\,(x^2 - a^2)\,(x^2 + y^2)\right\}^2.$$

S. 42, Z. 9 v. o. lies: $x = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,a^2 - y^2 + \sqrt{r^2 - 4\,y^2}}$.

S. 43, Z. 22 lies: $a^2\varrho\varrho'$ statt $\tfrac{1}{2}\,a^2$ und Z. 27 lies: $[\varrho_1^2 + \varrho_1'^2 - a^2]$ statt $[\varrho_1^2 + \varrho_1'^2]$, sowie 0 statt $\tfrac{1}{2}\,a^2$ auf der rechten Seite der Gleichung.

S. 49, Z. 13 lies: $(x - a) \cos\psi$ statt $(x - a)\,\psi$.

S. 56, Z. 11 v. u. lies: $\cos(\pi - \tfrac{1}{2}\Theta)$.

S. 67, Z. 18 v. u. lies: $\lambda = 0$.

S. 77, Z. 9 v. u. lies: $tg\,\tfrac{1}{2}\,\Theta$ statt $\cot g\,\tfrac{1}{2}\,\Theta$.

S. 106, Z. 15 v. o. lies: $= \tfrac{1}{2}\,t\,(v_0 + v)$.

S. 119, Z. 5 v. u. lies: $v_\varphi = r \sin\lambda\,\dfrac{d\varphi}{dt}$.

S. 128, Z. 17 v. o. lies: Parallelstralenbüschels.

S. 131, Z. 19 u. 20 sind $\Sigma\omega x$ und $\Sigma\omega y$ zu vertauschen.

S. 158, Z. 7 v. u. lies: nicht parallele Axen.

S. 168, Z. 13 v. u. setze: $T_x^{(0)}, T_y^{(0)}, T_z^{(0)}$ statt T_x, T_y, T_z.

S. 180, Z. 1 lies: $cC'' = \alpha''$ und Z. 4: $-2\,\omega'\omega'' \cos\alpha$.

S. 181, Z. 11 v. u. lies: $\cos\beta'' = \dfrac{\omega'' - \omega' \cos\alpha}{\Omega}$ und Z. 9 v. u.: $\dfrac{a\,\omega'\omega''}{\Omega'} \sin\alpha$, $\dfrac{a\,\omega''\,(\omega'' - \omega' \cos\alpha)}{\Omega'}$.

S. 199, Z. 12 und 13 v. u. lies: $\dfrac{d\xi}{d\tau}$ und $\dfrac{d^2\xi}{d\tau^2}$.

S. 214, Z. 19 v. o. lies: $\int_{s_0}^{s} \varphi_t\,ds$.

S. 226, Z. 20, 19, 18 v. u. setze zweckmässiger: $\dfrac{\beta}{g} = \lambda$, sodass $b = g \cdot \dfrac{3\,\lambda}{4\,\pi\,\delta\,r^3}$ und $\psi = g \cdot \tfrac{3}{4}\,\dfrac{\lambda}{\pi}\,\dfrac{\varrho}{\delta r}\,\Omega = g \cdot \dfrac{\Omega}{\dfrac{\delta r}{\varrho\gamma}} = g\,\dfrac{\Omega}{\varkappa^2}$; $\varkappa = \sqrt{\dfrac{\delta r}{\varrho\gamma}}$.

S. 229, Z. 18, 21, 22 lies: $M_0 m$, $M_0 N$, M_0 statt Am, AN, m.

S. 231, Z. 13 v. u. lies: $2\,f(s)$ statt $f(s)$; Z. 2 v. u. $2\int$; Z. 1 v. u. streiche: $= 0$.

S. 239, Z. 12 v. u. lies: „und sie hierauf addirt“. Z. 10 v. u. lies: „drei erste Integrale“.

S. 242, Z. 6 lies: „ein oder drei Integrale“; Z. 13 lies: $2\,\alpha\,dt$.

S. 248, Z. 6 v. u. lies: $\omega = 4\sqrt{h'h''}$.

S. 252, Z. 1 v. o. und Z. 9 v. u. lies: $x = h \sin 2\alpha$. Desgl. S. 253, Z. 2 v. o.

S. 255, in Fig. 98 ist D zwischen F und N zu streichen.

S. 256, Z. 14 v. o. lies: $M = -\frac{}{}Kg \cos\eta$; Z. 12 v. u. lies: $M = \cos^{-n}\eta \cdot e^{\frac{n}{g}\int\frac{d\eta}{\cos\eta}}$;

Z. 3 v. u. füge den Factor $-\frac{1}{g}$ zu.

S. 258, Z. 5 v. u. lies im Nenner rechter Hand: $2gh$ statt $4gh$. Desgl. Z. 1 v. r. im Zähler.

S. 259 sind in den Formeln für dx, dy, dt, x, y, t, w die Zahlencoefficienten $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ zu tilgen.

S. 266, Z. 21 u. 22 v. o. lies in den Formeln für v_x und v_y: $a \cos \varkappa t$ und $+ b \cos \varkappa t$

S. 234, Z. 13 v. o. lies: $lM = Const. - l(XR)$.

S. 304, Z. 1 u. 2 lies:

$$A = \varrho\left(\sin\mu \cos\nu i + i\cos\mu\frac{\sin\nu i}{i}\right) \text{ und } B = \varrho\left(\cos\mu\cos\nu i - i\sin\mu\frac{\sin\nu i}{i}\right),$$

oder also $A = \varrho(\sin\mu \pm i\cos\mu)\cos\nu i$ und $B = \varrho(\cos\mu \mp i\sin\mu)\cos\nu i$

S. 305, Z. 17 u. ffg. sind zu ersetzen durch: „die Geschwindigkeit des Hodographenpunktes Q ist $\frac{ds'}{dt} = \varrho'\frac{d\vartheta}{dt} = C\frac{\varrho'}{r^2} = \frac{\varrho' p}{r^2}v$, da $C = pv$ ist."

S. 307, Z. 6 v. o. lies: $g \sin\vartheta$.

S. 315, Z. 5 v. o. lies: $<$ statt $>$.

S. 323, Z. 18 v. o. lies: „gleich langer Pendel".

S. 324, Z. 2 v. u. im Nenner unter dem Integralzeichen: 2 statt $2g$.

S. 325, Z. 2 u. 3 lies: $\sin\vartheta d\vartheta$ und $d\vartheta = \frac{dx}{\sin\vartheta}$.

S. 332, Z. 3 lies: $v - g\sin\frac{1}{2}\omega$ statt $g\sin\frac{1}{2}\omega - v$ und Z. 15 v. u.: $v = 2\sqrt{x}$.

S. 333, Z. 8 lies: $S = 0$.

S. 337 lies: $\sqrt{x - h}$ statt $\sqrt{\mu - h}$.

S. 340, Z. 18 v. o. lies: $g\left(-\frac{dx}{ds}\right) = -g\frac{dx}{ds}$.

S. 341, Z. 1 v. u.: $t = \frac{2}{\varkappa}$.

S. 342, Z. 26 lies: „Die Oscillationsdauer ist etwas grösser, als im leeren Raume".

S. 344, Z. 4 v. o. lies: $v = \alpha\sqrt{ga}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot t$ und Z. 13: $\alpha_1 = -\alpha\Big(1 -$ [illegible] $\Big)$

S. 352, Z. 9: N statt v.

S. 362, Z. 11 v. u. lies:

$$N = \frac{g}{r}\left\{r + 2u_0 + 2h - 3u\right\} = g\left\{1 + \frac{2u_0 + 2h - 3u}{r}\right\}.$$

S. 370, Z. 3 v. u. ist $\sin\alpha$ im Nenner zu streichen.

S. 371, Z. 4 v. o. lies: $\psi \cos\gamma$ statt $\psi \sin\gamma$; Z. 1 v. u. lies: $\gamma = \varrho$, $\psi = \varsigma$.

S. 372, Z. 1 v. o. lies: $\frac{C^2}{g\sin\varrho}\cdot\frac{1}{\sin^3 p}$ und Z. 8: $(A + \cos 2\varrho - 2\varrho)\sin^2 p =$ [illegible]

S. 374, Z. 5 v. u. streiche das Zeichen —.

S. 376, Z. 4 lies: $N = -g\cdot\frac{\cos 2\vartheta}{\cos\vartheta}$.

S. 388, Z. 9 v. o. lies: $\Omega^3(x'^2 + y'^2) + \Omega^2 U y'$.

S. 389, von Z. 8 v. u. an lies: „Für alle Punkte innerhalb des Kreises ist [illegible] negativ und absolut genommen $> d\Theta$, also $d\tau$ negativ; mithin liegt für sie [illegible]

in der Richtung CM jenseits M; für alle Punkte ausserhalb des Kreises auf der Seite von CC', auf welcher der Kreis liegt, ist $d\mu$ negativ und absolut genommen $< d\Theta$, also $d\tau$ positiv und $< d\Theta$ und liegt folglich K in der Richtung MC jenseits C. Für alle Punkte M, welche dem Felde der positiven $d\mu$ angehören, ist $d\tau$ positiv und $> d\Theta$ und liegt folglich K zwischen C und M."

S. 390, Z. 17 lies: Die Bahnen aller Punkte ausserhalb dieses Kreises kehren dem Momentancentrum ihre concave, die innerhalb liegenden ihre convexe Seite zu.

S. 397, Z. 5 v. u.: Für den Punkt Γ ist $i = \frac{1}{2}\pi$, also $v = 0$.

S. 405, Z. 12 v. u. lies: Die andere ist senkrecht zur Ebene durch den Systempunkt und die Gerade, welche in der Tangentenebene des Kegels (C) senkrecht zur Momentanaxe geführt werden kann und proportional dem Abstande von dieser Geraden, der Winkelgeschwindigkeit u. s. w.

S. 407, Z. 4 v. u. tilge die Worte: „zur Momentanaxe senkrechten".

S. 409, Z. 8 v. u. lies: für alle Systempunkte erfüllt, welche in den Ebenen der xz und xy liegen.

S. 413, Z. 2 v. u. lies: welche durch den Systempunkt.

S. 414, Z. 4 v. u. lies: welche senkrecht zum kürzesten Abstande der beiden aufeinanderfolgenden Momentanaxen ist.

S. 415, Z. 4 v. u. lies: §. 4. mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der Lage der Axen:

$$\alpha_z y - \alpha_y z = \frac{d\Omega}{dt} y - \Omega\Psi z$$

$$\alpha_x z - \alpha_z x = -\frac{d\Omega}{dt} x$$

$$\alpha_y x - \alpha_x y = \Omega\Psi x.$$

S. 416, Z. 5 u. 11 lies: $-\Omega\Psi z$ und $-\Omega\Psi z_1$; Z. 6 u. 12: $-\frac{d\Omega}{dt} x_1$; Z. 7: $\Omega\Psi x$; Z. 13: $+\frac{d\Gamma}{dt}$; Z. 22: $B = \frac{d\Omega}{dt}$, $C = -\Omega\Psi$, $A' = -\frac{d\Omega}{dt}$.

S. 417, Z. 8 muss im Ausdrucke für x_1 und im ersten Gliede des Ausdruckes für y_1 das Zeichen — stehen. Ebenso Z. 9 im ersten Gliede für z_1 und muss im Nenner des zweiten Gliedes $\Omega\Psi$ gesetzt werden. Z. 14 lies: $-\alpha\frac{d\Omega}{dt} + \beta\Omega\Psi$; Z. 15: $-\Omega\Psi x_1$; Z. 17: $-\alpha\frac{d\Omega}{dt} + \beta\Omega\Psi$ und $\alpha\Omega^2 + \frac{d\Omega}{dt} = 0$

S. 418, Z. 1 sind das zweite und dritte Glied rechts mit dem Zeichen —, ebenso Z. 2 das erste Glied mit —, Z. 3 mit + zu nehmen. Dieselben Aenderungen sind Z. 9, 10, 11 anzubringen. Z. 17 lies: $-\frac{d\Omega}{dt}\xi = \frac{d\Omega}{dt}\left(-\frac{\xi}{p}\right)$ und $\frac{d\Omega}{dt}\eta = \frac{d\Omega}{dt}\left(\frac{\eta}{p}\right)$. Z. 22 streiche die Zeichen —.

S. 423, Z. 6 ist im dritten Gliede ein — und in der Klammer des vierten Gliedes + zu setzen.

S. 428, Z. 15 u. 34 lies: $\Omega U dt$ statt $U dt$.

S. 429, Z. 1: C' statt C''.

S. 431, Z. 2 lies: $HV_s' = du_s'$ und u' statt u; Z. 4: $V_r''H' = d\zeta$ und $H'V' = du_s'$.

S. 432, Z. 3 v. u. lies: „durch die relative Geschwindigkeit zu M parallel."

S. 434, Z. 3 lies: Centripetalbeschleunigungen.

S. 440, Z. 1 v. u. lies: „veränderlich".

S. 441, Z. 20 ist einzuschalten: Diese Beschleunigung ΩU ist allen Punkten der

Erde und dem Punkte M gemein, sodass sie auf dessen relative Bewegung keinen Einfluss hat.

S. 443, §. 6. ist die z-Axe positiv im entgegengesetzten Sinne von g zu nehmen und zu setzen

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = \Omega \cos l, \quad \Omega_z = -\Omega \sin \lambda,$$

$$X_{-\Omega} = -2\,\Omega \cos \lambda \frac{dz}{dt} - 2\,\Omega \sin \lambda \frac{dy}{dt},$$

$$Y_{-\Omega} = 2\,\Omega \sin \lambda \frac{dx}{dt}, \quad Z_{-\Omega} = 2\,\Omega \cos \lambda \frac{dx}{dt}.$$

In den folgenden Bewegungsgleichungen ändern sich daher einige Zeichen, die weiteren Z. 10 bis 12 aber bleiben ungeändert.

S. 445, Z. 12 lies: $v_0 x$ statt v_0.

S. 446, Z. 12 lies: $-\frac{b}{2\,\Omega}(1 - \cos 2\,\Omega t)$; Z. 16 v. u. lies: $\frac{1}{2}v^2 =$.

S. 447, Z. 12 v. u. lies: $(-z')^{\frac{3}{2}}$.

S. 458, Z. 3, 5, 7 v. u. streiche Ω', Ω_r'', Ω''; Z. 12 v. u. lies: $U_r''\Omega' dt$ und Z. 15 v. u.: „Winkelgeschwindigkeit".

S. 460, Z. 19 v. u. setze: Ω_r'' statt Ω'.

S. 461. Z. 12 und 14 bis 16 sind die Projectionen der dritten Beschleunigungscomponente entgegengesetzt zu nehmen.

S. 466, Z. 5 bis 3 v. u. lies: $\varphi_n^{(2)} = \frac{v}{\varrho}\frac{dv}{dt}\left(3 - \frac{\varrho_1}{\varrho}\cot g\, \delta\right)$, mithin

$$\frac{v}{\varrho}\frac{dv}{dt} \cdot \frac{1}{2}\frac{\varrho_1}{\varrho} = \left(\frac{v}{\varrho}\frac{dv}{dt} - \frac{1}{3}\varphi_n^{(2)}\right) tg\, \delta.$$

S. 468, Z. 8 lies: $-\frac{\omega_0^3}{\varrho_0^3}\varrho_1$.

S. 473, Z. 8 v. u. lies: $p_2 \Omega^3$.

S. 474, Z. 14 v. u. lies: -3. Ebenso Z. 7 v. u. Z. 4 v. u. sind die Zeichen umzukehren.

S. 545, Z. 6 u. 21 lies: H statt M.

S. 573, Z. 1 zuzufügen: „welche nicht beide zugleich schneidet".

S. 593, Z. 9 v. u. lies: §. 4.

S. 598, Z. 3 v. o. lies: Cap. V, §. 8.

S. 620, Z. 17 tilge die Worte: „oder zwei Spitzen".

S. 697, Z. 11 setze im dritten Gliede der Klammer — statt +.

S. 743, Z. 24 v. o. lies: *axis*.



